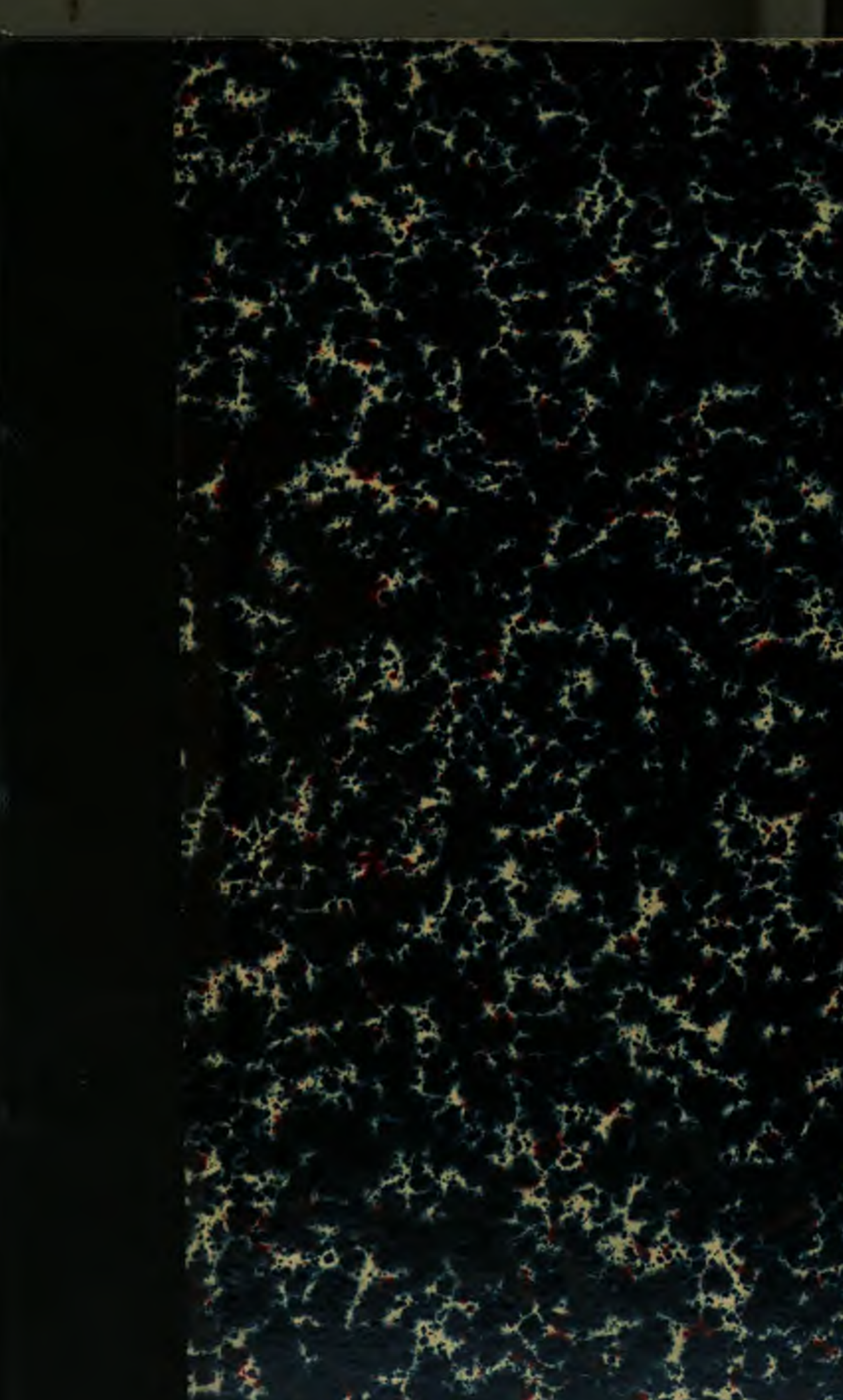

Google



HARVARD UNIVERSITY.



LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

HUNDERTSIEBENTER BAND.

WIEN, 1898.
AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CVII. BAND. ABTHEILUNG II. a.

JAHRGANG 1898. — HEFT I BIS X.

(MIT 21 TAFELN UND 128 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1898.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. I. UND II. HEFT.

JAHRGANG 1898. — JÄNNER UND FEBRUAR.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 6 TAFELN UND 14 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1898.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 1. und 2. Heftes Jänner und Februar 1898 des CVII. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 30 kr. = 4 Mk. 60 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. I. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

I. SITZUNG VOM 7. JÄNNER 1898.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie durch das am 29. December v. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes der kaiserlichen Akademie, Herrn Dr. Constantin Ritter v. Höfler in Prag, erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Ferner macht der Vorsitzende Mittheilung von dem am 13. December v. J. erfolgten Hinscheiden des auswärtigen correspondirenden Mitgliedes der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe, Herrn Prof. Francesco Brioschi, Präsidenten der R. Accademia dei Lincei in Rom.

Die Mitglieder erheben sich gleichfalls zum Zeichen des Beileides von ihren Sitzen.

Der prov. Secretär bringt eine Zuschrift der k. u. k. Marine-Section des k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministeriums zur Kenntniss, in welcher der kaiserlichen Akademie für ihren Beschluss, die von S. M. Schiff »Pola« im Jahre 1892 östlich von Rhodus aufgefundene grösste Tiefe des Mittelmeeres in Anerkennung der Verdienste des verewigten Marine-Commandanten Freiherrn v. Sterneck um die Erforschung des Mittelmeeres fortan in ihren Publicationen als »Sterneck-Tiefe« zu bezeichnen, der Dank der k. u. k. Kriegs-Marine ausgesprochen wird.

Laut telegraphischer Nachricht ist S. M. Schiff »Pola« am 28. December v. J. zu viertägigem Aufenthalte in Massaua eingelangt. An Bord Alles wohl.

Herr E. Friedrich in Elbing übersendet eine Abhandlung: »Zur Entdeckung der therapeutischen O-Strahlen.«

Das w. M. Herr Hofrath Boltzmann überreicht eine im physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von Prof. G. Jäger und Dr. St. Meyer, betitelt: »Bestimmung der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten und deren Änderung mit der Temperatur« (III. Mittheilung).

Das w. M. Herr Hofrath v. Lang legt eine Abhandlung von Prof. Dr. W. Müller-Erzbach in Bremen vor, welche den Titel führt: »Über eine genaue Messung des Dampfdruckes bei der Dissociation wasserhaltiger Salze«.

Herr Dr. Michael Senkovski überreicht eine Arbeit aus dem Universitätslaboratorium für medicinische Chemie in Krakau: »Über die Einwirkung der Reductionsmittel auf Cholsäure«.

Bestimmung der Magnetisirungszahlen von Flüssigkeiten und deren Änderung mit der Temperatur

(III. Mittheilung)

von

Prof. Dr. **Gustav Jäger** und Dr. **Stefan Meyer.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 9 Textfiguren.)

I.

In der zweiten Mittheilung[1] unter obigem Titel fanden wir das Resultat, dass die Atommagnetismen von Nickel, Cobalt, Eisen und Mangan, aus den Chloriden, Sulfaten und Nitraten bestimmt, sich wie 2 : 4 : 5 : 6 verhalten. Es lag daher die bereits geäusserte Vermuthung nahe, dass sich diese natürliche Zahlenreihe durch weitere Metalle ergänzen lasse.

Nachdem schon G. Wiedemann und andere Forscher gezeigt hatten, dass nur der Atommagnetismus des Chroms zwischen jenem des Nickels und Cobalts zu stehen kommt, so handelt es sich nur noch darum, nachzuweisen, ob sich dieses Metall genau an die Stelle 3 obiger Zahlenreihe einfüge.

Magnetisirungszahlen der Chromsalze.

Es wurden die Lösungen des Chlorides und des Sulfates untersucht. Die Gehaltsbestimmungen der ersteren Lösungen hatte Herr Ing. Julius Neudörfer die Liebenswürdigkeit zu übernehmen und danken wir ihm an dieser Stelle hiefür. Der

---

1 Diese Sitzungsber., Bd. 106, Abth. II. a, Juli 1897.

Gehalt der Sulfatlösungen wurde, nachdem das specifische Gewicht ermittelt war, den Tabellen von Landolt und Börnstein entnommen.

Die Bezeichnungen in den folgenden Tabellen sind dieselben wie in den früheren Mittheilungen.

a) Chromchlorid.

Die Lösung des violetten reinen Salzes in Wasser wurde durch Zusatz einer sehr geringen Spur von Chromchlorür erzielt. Da dieselbe dunkelgrün gefärbt erschien, war es nicht möglich, eine scharfe Einstellung des Fadenkreuzes auf den Meniscus zu erhalten, und wir brachten daher, um diesem Übelstande abzuhelfen, auf die Flüssigkeitskuppe des dem Magneten abgewandten Schenkels der U-Röhre einen Tropfen Wasser.

Lösung 1

Proc. $= 14\cdot08\%$ $CrCl_3$
$\gamma_{15} = 1\cdot118$
g. m. $= 0\cdot99$

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
1°9	2°0	157	5·12	5·00
	1·8	302·5	4·87	
18·0	18·0	157·5	4·85	4·82
	18·0	305	4·79	
55·5	55·2	155	4·22	4·26
	55·9	303	4 30	
82·5	80·4	155	4·01	3·92
	84·5	302	3·82	

Lösung 2.

Proc. $= 9\cdot26\%$ $CrCl_3$
$\gamma_{15} = 1\cdot078$
g. m. $= 0\cdot63$.

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
2°8	2°5	157	3·09	3·04
	3·0	303·2	2·99	
17·0	17·0	157·5	2·92	2·89
	17·0	304	2·86	
52·7	53·2	155·5	2·70	2·68
	52·2	302·5	2·66	
80·5	80·5	155	2·52	2·48
	80·5	303	2·43	

Die folgenden Figuren 1 und 2 zeigen die Abhängigkeit des $\varkappa$ von der Temperatur.

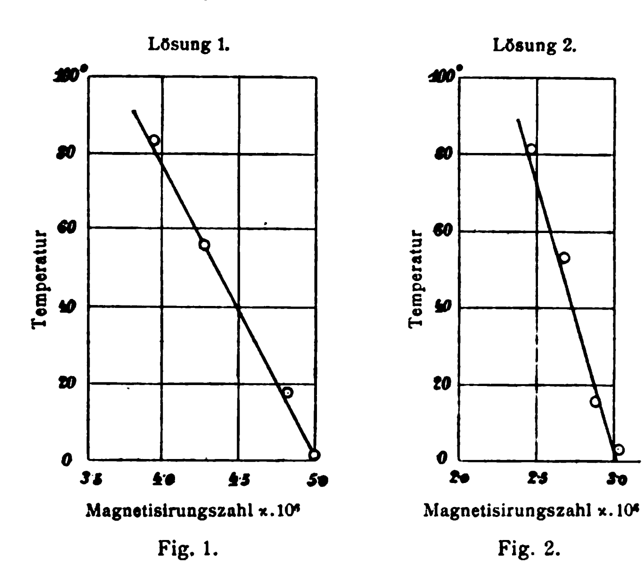


Fig. 1. Fig. 2.

Aus diesen Geraden berechnen sich die Temperaturcoëfficienten

$$\varepsilon_1 = -0{\cdot}00277$$
$$\varepsilon_2 = -0{\cdot}00227$$

b) Chromsulfat.

Zur Verwendung gelangte die grüne Modification des Salzes. Auch hier empfiehlt es sich, wegen der starken Färbung der Lösung einen Tropfen Wasser auf den Meniscus vor dem Fadenkreuz zu bringen.

Lösung 1.

Proc. = 22·01% $Cr_2(SO_4)_3$
γ_{15} = 1·238
g. m. = 0·685

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
1°9	2°1	156	8·20	8·13
	1·7	303	8·06	
15·0	15·0	157·5	7·70	7·70
	15·0	304	7·70	
54·9	55·0	156	7·20	7·09
	54·8	303	6·99	
80·1	80·1	156	6·85	6·74
	80·1	302·5	6·63	

Lösung 2.

Proc. = 6·67% $Cr_2(SO_4)_3$
γ_{15} = 1·062
g. m. = 0·178

Mittel	T	$M^2 . 10^{-6}$	$\varkappa . 10^6$	Mittel
1°7	1°5	157·5	1·71	1·67
	1·9	305	1·63	
13·6	13·6	158	1·47	1·48
	13·6	305	1·49	
50·9	50·0	155	1·30	1·30
	51·8	303	1·30	
86·9	87·0	155	1·12	1·13
	86·8	300·5	1 15	

Fig. 3 und 4 stellen wieder den Zusammenhang zwischen Magnetisirungszahl und Temperatur dar.

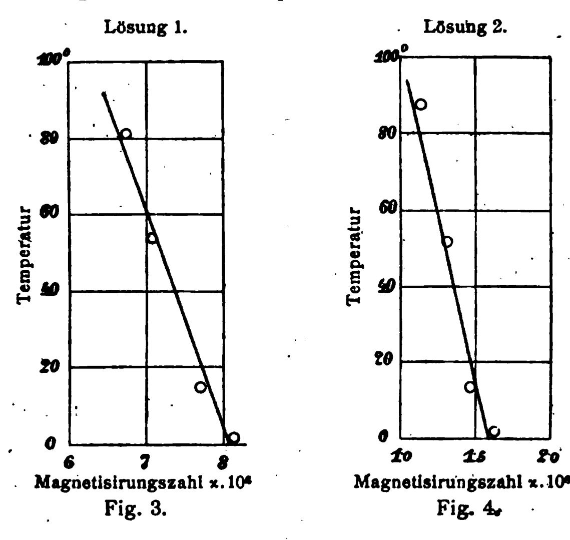


Fig. 3. Fig. 4.

Die aus den linearen Darstellungen gewonnenen Temperaturcoëfficienten sind

$$\varepsilon_1 = -0 \cdot 00219$$
$$\varepsilon_2 = -0 \cdot 00370$$

In der Fig. 5 haben wir, wie dies in den früheren Mittheilungen für die anderen Metalle geschehen war, eine

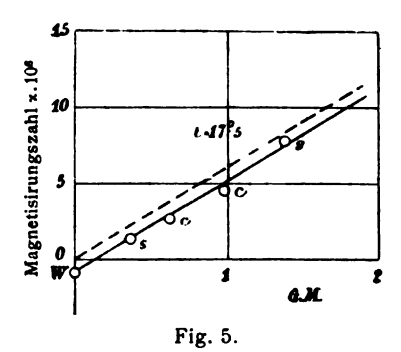


Fig. 5.

graphische Zusammenstellung der Resultate gegeben. Es zeigt sich, dass auch für die Salze des Chroms die Magnetisirungs-

zahl lediglich vom Chromgehalte bestimmt wird. Das Sulfat ist natürlich als der Formel $^1/_2 Cr_2(SO_4)_3$ entsprechend in die Zeichnung eingetragen. Die Darstellung gilt für die Temperatur 17·5° C.

Der Atommagnetismus des Chroms bestimmt sich hieraus zu $6 \cdot 25.10^{-6}$ (C. G. S.) oder $2 \cdot 5.2 \cdot 5.10^{-6}$ (C. G. S.).

Unsere Erwartung bezüglich des Atommagnetismus des Chroms hat sich sonach aus den Messungen an Chlorid und Sulfat desselben nicht bestätigt. Wir erhielten nicht die erwartete Zahl 3, sondern 2·5.

II.

Lägen nur die Messungen unserer beiden ersten Mittheilungen vor, so würde es den Anschein gewinnen, als ob ganz unabhängig von der Art der Verbindung ein jedes Metall seinen ganz bestimmten Atommagnetismus hätte. Doch ist bereits von anderen Forschern[1] nachgewiesen worden, dass in magnetischer Beziehung der Gruppe der Eisenoxydsalze diejenige der Eisenoxydulsalze gegenübersteht, indem letzterer ein niedrigerer Atommagnetismus des Eisens zukommt.

Es war deshalb für uns von Interesse, noch eines der Salze der zweiten Gruppe zu untersuchen, umsomehr, als der Magnetismus unserer Ferrosulfatlösungen ($FeSO_4$) genau mit demjenigen der Chlorid- und Nitratlösungen übereinstimmt.

Wir wählten zu diesem Zwecke das Eisenchlorür. Unsere Beobachtungen ergaben die in den folgenden Tabellen zusammengestellten Resultate.

Lösung 1.

Proc. = 27·86% $FeCl_2$

$\gamma_{17 \cdot 5} = 1 \cdot 175$

g. m. = 2·58

[1] Vergl. G. Wiedemann, Lehre von der Elektricität, 1895, III, §. 1271 S. 961.

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
2°3	1°6	157	20·12	20·11
	3·0	302	20·11	
16·0	16·0	157	19·29	19·32
	16·0	303	19·35	
50·1	49·0	153	18·51	18·20
	51·2	300	17·88	

Lösung 2.

Proc. $=$ 13·93% $FeCl_2$
$\gamma_{17\cdot5} = 1\cdot090$
g. m. $=$ 1·30

Mittel	T	$M^2.10^{-6}$	$\varkappa.10^6$	Mittel
2°1	2°2	155·0	9·81	9·76
	2·0	302·5	9·71	
23·0	23·0	154·5	9·33	9·21
	23·0	301·5	9·09	
42·1	42·0	153·0	8·64	8·64
	42·2	301	8·64	

In den Figuren 6 und 7 sind die Resultate graphisch dargestellt.

Aus diesen Geraden ergeben sich die Temperaturcoëfficienten

$$\varepsilon_1 = -0\cdot0022$$
$$\varepsilon_2 = -0\cdot00294$$

In der folgenden Fig. 8 ist die Abhängigkeit des $\varkappa$ von dem Eisengehalte dargestellt. Die gestrichelte Linie zeigt den Magnetismus nach Abzug der Wirkung des Wassers an.

Daraus ergibt sich der Atommagnetismus für Eisen aus Eisenchlorür zu $7 \cdot 5 . 10^{-6}$ (C. G. S.) oder $3.2 \cdot 5 . 10^{-6}$ (C. G. S.).

Wider unser ursprüngliches Erwarten reihte sich das Chrom nicht genau in die Mitte zwischen Nickel und Cobalt

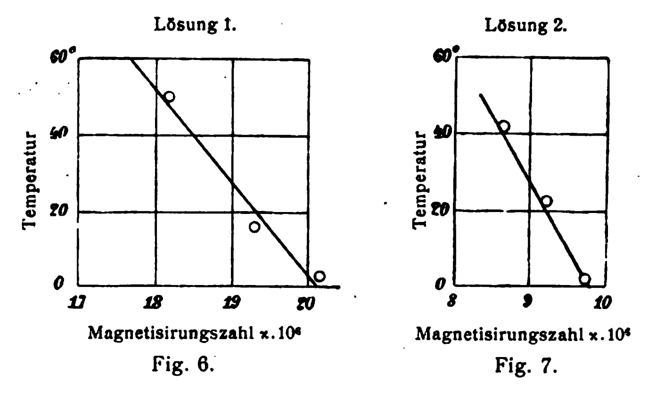


Fig. 6. Fig. 7.

ein. Nicht unauffallend mag es daher erscheinen, dass gerade das Eisen aus dem Eisenchlorür diese Stelle mit voller Schärfe einnimmt. Um dies deutlich zu zeigen, haben wir die Resultate in Fig. 9 nochmals zusammengestellt.

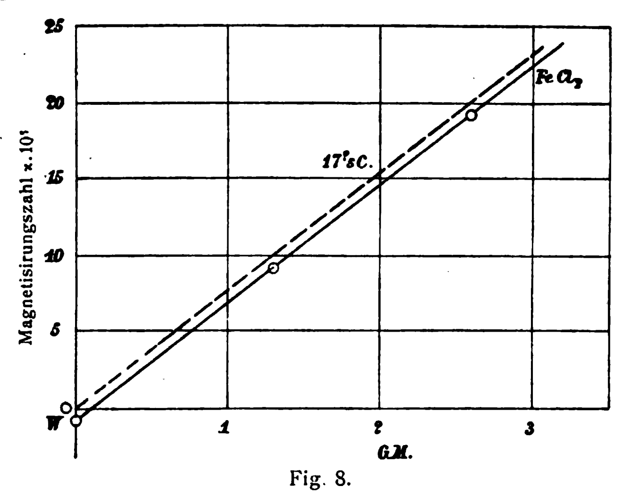


Fig. 8.

Eine einfache Beziehung zwischen dem periodischen System der Elemente und dem Atommagnetismus lässt sich aus diesen Ergebnissen nicht feststellen, wohl aber springt es in die Augen, dass alle stärker magnetischen Elemente

eine aufeinanderfolgende Reihe in diesem System bilden, die innerhalb enger Grenzen des Atomgewichtes liegt, und dass

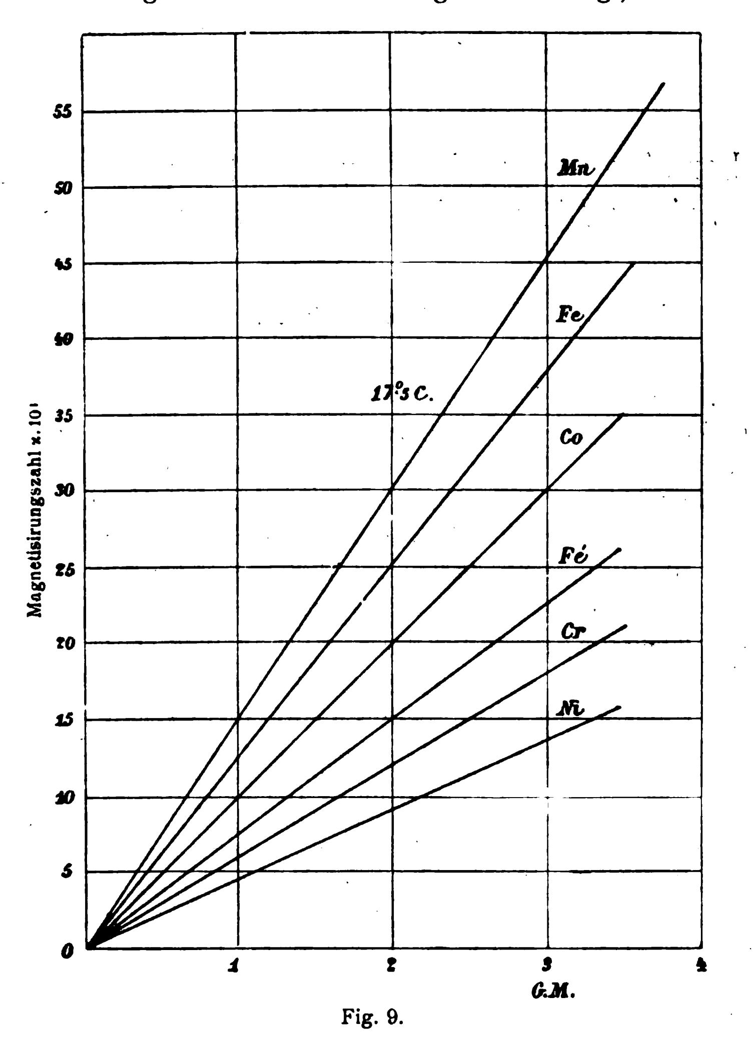


Fig. 9.

die stärksten Elemente sich in der Mitte dieser Gruppe befinden.

Über eine genaue Messung des Dampfdruckes bei der Dissociation wasserhaltiger Salze

von

W. Müller-Erzbach.

Bei der seit einiger Zeit von mir angewandten Methode,[1] den Zerlegungsdruck durch Anwendung eines Gegendruckes von bekanntem Werthe zu messen, habe ich selbst bei der Zersetzung fester Körper nicht nur constante, sondern zugleich unerwartet genaue Resultate erhalten. Das Verfahren besteht der Hauptsache nach darin, dass das zu untersuchende Salz in Proben von etwa 1 *g* Gewicht innerhalb weiter Glasgefässe dem Dampfdruck einer durch wässerige Schwefelsäure gleichmässig feucht gehaltenen Atmosphäre ausgesetzt wird. Die Concentration der Schwefelsäure wurde durch eine Mohr'sche Wage bestimmt. Die von Regnault[2] für den Feuchtigkeitsdruck der nicht zu concentrirten Schwefelsäuren angegebenen Werthe stimmen mit meinen Beobachtungen[3] nach einer abweichenden Methode hinreichend überein und wurden also dadurch bestätigt. Für concentrirtere Säuren fand ich etwas kleinere Werthe, doch kommt diese Abweichung bei den nachstehend beschriebenen Versuchen, bei welchen nur verdünnte Säuren verwendet sind, nicht in Betracht. Die relative Feuchtigkeit der über der Schwefelsäure befindlichen Luft erweist sich nach Regnault mit der Temperatur wenig veränderlich. Beispielsweise betrug sie über den verdünnteren Säuren von

---

1 Zeitschr. phys. Chem., XIX, 135 (1896).

2 Ann. chim. phys. (3), XV, 129.

3 Wiedem. Ann., 25, 359 (1885) und Zeitschr. phys. Chem., XXI, 555 (1896).

33·11% Säuregehalt 0·7086 bei 16°, 0·7088 bei 18° und 0·7008 bei 35°, für den Säuregehalt von 24·26% 0·8384 bei 5°, 0·8416 bei 9°, 0·8370 bei 16° und 0·8313 bei 35°. Also kann man sich durch solche Säuren Atmosphären von recht constanter Dampfspannung verschaffen.

Sehr viel schwieriger ist es, die Temperatur der sich zersetzenden Körper zu regeln. Der Thermostat ermöglichte es mir nicht, die Wärmeschwankungen während eines Tages regelmässig und mit Sicherheit unter 1·3° hinabzubringen, und auch diese Grenze konnte ich nur erreichen, wenn die Temperatur des Regulators andauernd einige Grade über der Lufttemperatur lag. Das günstigste Resultat mit theilweise kleineren Schwankungen als die erwähnten erhielt ich noch immer durch Anwendung grosser Wassermengen, die in einfacher oder durch eine Zwischenwand aus Glas getrennter doppelter Hülle das sich zersetzende Salz umgaben.

Um nun festzustellen, welcher Grad von Genauigkeit nach dieser Versuchsweise für ein festes Salz erreicht werden kann, verwandte ich das leicht zerlegbare Glaubersalz. Ich war nämlich durch frühere Beobachtungen nach einer anderen Messungsart auf die grosse Beweglichkeit des im Glaubersalz gebundenen Wassers aufmerksam geworden und deshalb hatte ich es für den vorliegenden Zweck ausgewählt.

Nachdem der Dampfdruck des zu prüfenden Salzes aus den Gewichtsverlusten in Atmosphären von grösserem Unterschied in der Feuchtigkeit annähernd gefunden ist, stellt man wässerige Schwefelsäuren von ganz geringer Abweichung im Dampfdruck her. Dieselben hatten für die Versuche mit Glaubersalz beispielsweise die specifischen Gewichte 1·2446, 1·2435 und 1·2425, also wegen der oben erwähnten Proportionalität des Dampfdruckes zur Sättigungsmenge für alle Versuchstemperaturen den relativen Druck 0·718, 0·720 und 0·722. War nun die Dampfspannung des Glaubersalzes bei einer niedrigeren Temperatur während der Dauer des meist mehrtägigen Versuches derjenigen der wasserreichsten Säure durchschnittlich gleich, so blieb sein Gewicht unverändert, während es in den beiden anderen Flaschen abnahm und über der wasserärmsten Säure am meisten. In anderen Fällen waren

die Gewichtsveränderungen entsprechend, und die nächstehend angegebenen Versuchsgruppen lassen die genannten Druckunterschiede mit voller Deutlichkeit erkennen.

Versuchsdauer	Durchschnittstemperatur	Schwankungen der Temperatur	Relativer Dampfdruck[1]	Gewichtsveränderung des Salzes	
1 Tag	10·6°	2·1°	0·708	1/2 *mg* Abnahme	
			0·711	1/2 *mg* Zunahme	
			0·714	1 1/2 *mg* Zunahme	
2 Tage	10·4	3·1	0·708	unverändert	
			0·711	1/2 *mg* Zunahme	
			0·714	3/4 *mg* Zunahme	
1 Tag	11·5	2·2	0·708	1 *mg* Abnahme	
			0·711	1 *mg* Abnahme	
			0·714	1/2 *mg* Zunahme	
3 Tage	12·3	3·0	0·708	3 *mg* Abnahme	
			0·711	1 1/2 *mg* Abnahme	
			0·714	1 1/2 *mg* Abnahme	
3 Tage	11·6	3·2	0·714	1 *mg* Abnahme	
			0·718	1/2 *mg* Abnahme	
			0·720	1/2 *mg* Abnahme	
1 Tag	11·2	2·4	0·714	unverändert	
			0·718	1/2 *mg* Zunahme	
			0·720	3/4 *mg* Zunahme	
4 Tage	12·8	3·6	0·714	2 1/2 *mg* Abnahme	
			0·718	2 *mg* Abnahme	
			0·720	kaum merkliche Abnahme	
3 Tage	12·7	3·4	0·714	2 1/4 *mg* Abnahme	
			0·718	1 *mg* Abnahme	
			0·720	unverändert	
3 Tage	14·7	1·6	0·718	7 1/2 *mg* Abnahme	im Wasserbehälter
			0·720	5 *mg* Abnahme	
			0·722	2 1/2 *mg* Abnahme	
2 Tage	13·6	4·8	0·720	eben merkliche Abnahme	
			0·722	1 1/4 *mg* Zunahme	
			0·730	2 1/2 *mg* Zunahme	

[1] Über der verdünnten Schwefelsäure.

Versuchsdauer	Durchschnittstemperatur	Schwankungen der Temperatur	Relativer Dampfdruck	Gewichtsveränderung des Salzes	
4 Tage	13·9°	3·1°	0·720	3 *mg* Abnahme	
			0·722	3 *mg* Abnahme	
			0·730	1 1/2 *mg* Zunahme	
6 Tage	11·2		0·708	3 1/4 *mg* Abnahme	
			0·711	1 1/2 *mg* Abnahme	
			0·714	1 *mg* Zunahme	
11 Tage	11·7		0·714	5 3/4 *mg* Abnahme	
			0·718	3 *mg* Abnahme	
			0·720	2 1/4 *mg* Abnahme	
21 Tage	?		0·718	18 1/2 *mg* Abnahme	Gefässe in demselben Schrank neben einander
			0·720	11 *mg* Abnahme	
			0·730	14 *mg* Zunahme	
5 Tage	12·7	5·4	0·718	1 1/2 *mg* Abnahme	
			0·720	unverändert	
			0·722	1 3/4 *mg* Zunahme	
			0·730	6 3/4 *mg* Zunahme	
6 Tage	11·7	4·6	0·718	1/4 *mg* Abnahme	
			0·720	1/2 *mg* Zunahme	
			0·722	2 3/4 *mg* Zunahme	
1 Tag	13·6	1·1	0·720	1/4? *mg* Abnahme	im Wasserbehälter
			0·722	unverändert	
			0·730	1 1/2 *mg* Zunahme	
14 Tage	14·1		0·718	14 1/2 *mg* Abnahme	
			0·720	8 1/2 *mg* Abnahme	
			0·722	5 1/2 *mg* Abnahme	
14 Tage	13·5	6·9	0·718	11 *mg* Abnahme	
			0·720	6 *mg* Abnahme	
			0·722	3 1/2 *mg* Abnahme	
19 Tage	14·6	8·0	0·718	28 1/2 *mg* Abnahme	
			0·720	21 1/2 *mg* Abnahme	
			0·722	14 3/4 *mg* Abnahme	
			0·730	2 *mg* Zunahme	

Wie sich erwarten liess, zeigen sich im Allgemeinen die dynamisch fortgesetzten Gewichtsveränderungen um so grösser, je länger die Versuche dauern, eine Ausnahme bilden nur die Fälle, in welchen wegen der stärkeren Veränderlichkeit vom Dampfdruck des Salzes im Vergleich zu demjenigen der Schwefelsäure bei den vorkommenden Temperaturschwankungen das Salz bald Wasser aus der umgebenden Luft aufnimmt, bald dahin abgibt. Sind die Wärmeschwankungen gering, so genügt eine Versuchsdauer von einem Tage zur genauen Bestimmung des Dampfdruckes. Falls das Salz nicht in einer der Versuchsflaschen sein Gewicht unverändert beibehalten hat, berechnet man den Dampfdruck für die vorliegenden geringen Unterschiede einfach aus dem Verhältnisse der Gewichtsänderungen. Man findet so aus der vorstehenden Reihe ohneweiters als relative Spannungen für das Glaubersalz 0·708 bei 10·4°, 0·720 bei 12·7° und 0·722 bei 13·6°, wobei das letzte Resultat wegen der geringen Temperaturschwankungen für das genaueste gelten muss.

Wie bereits bemerkt, treten selbst kleine Druckunterschiede in Folge des fortgesetzten Übertrittes von Wasser mit aller Deutlichkeit hervor. So beträgt in der drittletzten Versuchsgruppe bei der Temperatur von 14·1° der Dampfdruck in den drei Flaschen ohne Rücksicht auf die hier zu vernachlässigende Correctur nach dem Barometerstand 8·62 *mm*, 8·64 *mm* und 8·66 *mm*. Also konnte ein Unterschied im Zersetzungsdruck von $^1/_{50}$ *mm* mit voller Sicherheit nachgewiesen werden. Bei den besten Messungen des Dampfdruckes von Flüssigkeiten nach der gewöhnlichen statischen Methode reicht die Genauigkeit bis auf $^1/_{10}$ *mm*, für den Zersetzungsdruck fester Körper ist sie viel geringer, und es zeigen sich in den Resultaten der verschiedenen Beobachter allgemein Versuchsfehler über 2 *mm* hinaus, die 5% und in einzelnen Fällen sogar über 25% des ganzen Werthes ausmachen.[1]

Dem gegenüber sind die vorstehend beschriebenen Druckmessungen von unvergleichlich grösserer Zuverlässlichkeit.

---

[1] U. A. Lescoeur und Mathurin im Bull. Société chim., L, No. 1, 37 (1888).

Gegen dieselben lässt sich jedoch der Einwand erheben, dass sie den Druck nur mittelbar im Vergleich zum Zersetzungsdruck der wasserhaltigen Schwefelsäure angeben. Da aber Flüssigkeiten Druckmessungen bis auf die oben erwähnten Grenzen zulassen, so werden die Abweichungen für den Dissociationsdruck fester Salze in dieselben engen Grenzen eingeschlossen. Auch würde für den Vergleich der Salze unter einander der Unterschied ihres Verhaltens der Schwefelsäure gegenüber in den meisten Fällen an sich schon genügen.

Nach der von mir angegebenen Formel[1] $s_1 = \frac{sT^2 p_1}{T_1^2 p}$ findet man aus den Mengen des verdampften Wassers p und p_1 wie den Quadraten der absoluten Temperatur die Spannung s_1 für die Temperatur T_1, wenn sie für T durch s ausgedrückt wird. Da nun solche Gewichtsverluste durch die Verlängerung der Versuchsdauer, wie sich aus der vorstehenden Untersuchung ergibt, mit grosser Sicherheit festgestellt werden können, so muss es ebenso möglich sein, mit entsprechender und mindestens gleicher Genauigkeit den Dampfdruck von Flüssigkeiten zu messen. Es ist meine Absicht, später solche Messungen vorzunehmen, doch gehört dazu ein guter Thermostat, der zunächst herzustellen ist.

[1] Verh. phys. Ges., Berlin, Nr. 5, S. 36 (1888).

II. SITZUNG VOM 13. JÄNNER 1898.

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung in Wien übermittelt die diesjährige Kundmachung über die Verleihung von Stipendien und Pensionen aus dieser Stiftung zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender schaffender Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissenschaft.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. v. Kerner überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. J. Steiner, betitelt: »Prodromus einer Flechtenflora des griechischen Festlandes«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine von Regierungsrath Director Dr. J. M. Eder und Ed. Valenta in Wien ausgeführte Arbeit, betitelt: »Das Linienspectrum des Siliciums«.

Das w. M. Herr Obersanitätsrath Prof. A. Weichselbaum überreicht eine Arbeit aus dem pathologisch-anatomischen Institute der Wiener Universität von den Doctoren L. Austerlitz und K. Landsteiner: »Über die Bakteriendichtigkeit der Darmwand«.

Das w. M. Herr Prof. G. v. Escherich überreicht eine Abhandlung von Herrn K. Carda in Brünn: »Zur Geometrie auf Flächen constanter Krümmung«.

Das w. M. Sigmund Exner legt folgende zwei Abhandlungen vor:

1. »Die physiologische Rolle der Anastomosa zwischen N. laryngeus superior und N. laryngeus inferior«, Dr. G. Sluder aus St. Louis (U. S.)

2. »Experimentelle Untersuchungen über die centripetale Leitung des N. laryngeus inferior«, von Dr. L. Réthi in Wien.

Schliesslich überreicht der Vorsitzende, Vicepräsident Prof. E. Suess, eine Abhandlung von Prof. Dr. J. v. Siemiradzki in Lemberg unter dem Titel: »Geologische Reisebeobachtungen in Südbrasilien«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Binder W., Theorie der unicursalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung. Leipzig, 1896; 8°.

Fritsche H., Observations magnétiques sur 509 lieux faites en Asie et en Europe pendant la période de 1867—1894. St. Petersburg, 1897; 8°.

Haeckel E., Natürliche Schöpfungs-Geschichte. I. Theil. Allgemeine Entwickelungs-Lehre. (Transformismus und Darwinismus.) 8°. II. Theil. Allgemeine Stammes-Geschichte. (Phylogenie und Anthropogenie.) Berlin, 1898; 8°.

Lendenfeld R. v., Die Clavulina der Adria. Halle, 1896; 4°.

Schiaparelli G. V., Osservazioni astronomiche e fisiche sull' asse di rotazione e sulla topografia del planeta Marte. Memoria quinta. Roma, 1897; 4°.

Werchratzki J., Abriss der Somatologie. Lemberg, 1897; 8°.

III. SITZUNG VOM 20. JÄNNER 1898.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. II. a, Heft V und VI (Mai und Juni 1897).

Der Bürgermeister in Bombay, Herr P. C. H. Snow, übermittelt der kaiserlichen Akademie seinen gedruckten Bericht über den Ausbruch der Bubonenpest 1896/1897.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Hann in Graz übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Beiträge zu den Grundlagen einer Theorie der täglichen Oscillation des Barometers«.

Herr Dr. Alfred Burgerstein übersendet eine Abhandlung: »Beiträge zur Kenntniss der Holzstructur der Pomaceen«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung des c. M. Prof. J. v. Hepperger in Graz: »Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen aus den Beobachtungen während der Jahre 1826 und 1832«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit von Dr. Adolf Jolles und Dr. Friedrich Neuwirth in Wien: »Beiträge zur quantitativen Bestimmung sehr geringer Phosporsäuremengen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. G. Tschermak legt namens der Commission für die petrographische Erforschung der Centralkette der Ostalpen den Bericht über die Aufnahme im Jahre 1897 vor.

Die Undulationen ebener Curven C_6^4

(II. Mittheilung)

von

Prof. **Wilh. Binder** in Wiener-Neustadt.

(Mit 4 Tafeln.)

Curven mit zwei imaginären Doppelpunkten.

Gegenwärtige Abhandlung ist eine Ergänzung jener, welche ich in der Sitzung vom 4. Februar 1897 vorgelegt habe,[1] in der ich die Curven mit »drei reellen Doppelpunkten« behandelte. Von den drei Doppelpunkten einer unicursalen Plancurve vierter Ordnung kann bekanntlich ein Paar imaginär sein, und es wird dann auch der Fall möglicherweise hier vorkommen, dass eine solche Curve Undulationen besitzt, was im Folgenden zur Discussion gebracht werden soll. Hierbei lässt sich die Methode der I. Mittheilung in Bezug der quadratischen Transformation einer C_6^4 auf einen beliebigen Kegelschnitt nicht mehr verwenden, weil dieselbe ein reelles Doppelpunktsdreieck voraussetzt. Man kann jedoch stets mit Nutzen eine solche quadratische Beziehung zwischen einer C_6^4 und einem sie viermal berührenden Kegelschnitt herstellen, deren Grundprincipien ich in meinem Buche,[2] II. Theil, VII. und XI. Abschnitt auseinandergesetzt habe.

Einfache Undulation.

37. In gegenseitig willkürlicher Lage befinden sich in der Ebene der Fig. 20, 21, 22 ein Punkt O, eine Gerade o und ein

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CVI, Abth. II. a, April 1897.

[2] »Theorie der unicursalen Plancurven etc.«, bei B. G. Teubner in Leipzig, 1896.

Kegelschnitt k. Auf o ist eine elliptische Punkteninvolution durch zwei Elementenpaare $\xi\xi'$ gegeben; perspectivisch mit ihr ist in O eine Strahleninvolution xx' verbunden. Mit den Elementen der $\xi\xi'$-Involution setzt sich gleichzeitig eine Tangenteninvolution des Grundkegelschnittes k so zusammen, dass einem x-Elemente der O-Involution das ihm zukommende Tangentenpaar $\theta'\theta'_1$ der genannten k-Involution projectivisch zugewiesen wird. Auf diese Weise verschneiden sich die beiden $\theta'\theta'_1$-Elemente mit dem x-Strahle in einem X-Punktenpaare, dessen geometrischer Ort eine Plancurve C^4_6 ist, welche in O einen reellen Doppelpunkt und auf o die zwei imaginären Doppelelemente der $\xi\xi'$-Involution ebenfalls als Doppelpunkte enthält.

Je nachdem der O-Punkt im reellen oder im imaginären Tangentenfelde des Kegelschnittes k situirt, ist er Knoten, Fig. 20, oder Einsiedler, Fig. 21, oder er ist Rückkehrpunkt, Fig. 22, wenn er auf k selbst liegt, wobei die Curve in eine solche vom Symbole C^4_5 degenerirt.

38. Das vorstehend erzielte Curvenerzeugniss wird von dem Grundkegelschnitte k in vier Punkten $\beta_1 \ldots$ berührt; dieselben liegen [174][1] auf einem Kegelschnitte β, welcher das Erzeugniss zweier projectivischen Strahlenbündel $O\Omega$ ist, wobei Ω der Pol von o in Bezug auf k ist, indem einem x-Strahle von O, der auf o den ξ-Punkt enthält, jener Ω-Strahl entspricht, welcher in k die Polare des conjugirten ξ'-Punktes ist. Dieser β-Kegelschnitt hat auch die Verzweigungspunkte VV' des Doppelpunktes O incident.

Ein besonderes Interesse für unsere Aufgabe wird dem β-Kegelschnitt zukommen, wenn die ihn erzeugenden Büschel perspectivisch sind, wobei er bekanntlich in ein Paar Gerade zerfällt; oder wenn diese Büschel als Involutionsgebilde concentrisch werden, indem sie dann ein reelles gemeinschaftliches Paar conjugirter Elemente besitzen.

39. Den Elementen der Punkteninvolution $\xi\xi'$ ist mit Bezug auf den Grundkegelschnitt k eine im Ω-Punkte polare Strahlen-

[1] Wie in der I. Mittheilung beziehen sich [ ] auf den bezeichneten Artikel meines oben citirten Buches, während ( ) den betreffenden Artikel sowohl der I. Mittheilung, als auch der gegenwärtigen angeben.

involution zugeordnet, welche auf der Polaren ω des Doppelpunktes O perspectivisch eine nothwendigerweise ebenfalls elliptische Punkteninvolution $\eta\eta'$ hervorruft. Die imaginären Doppelelemente dieser $\eta\eta'$-Involution bilden im Vereine mit dem Ω-Pole die Grundpunkte eines Kegelschnittnetzes, dessen Individuen quadratisch den Geraden in der Trägerebene der C_6^4 entsprechen. Halten wir eine beliebige Gerade g derselben fest. Das entsprechende Netzindividuum γ durchzieht den Pol Γ von g in Bezug auf den Grundkegelschnitt k. Einen beliebigen Punkt von γ finden wir folgend: Ein x-Strahl trifft die o-Linie in ξ; der conjugirte Strahl x' der O-Involution schneidet g in einem Punkte α'. »Die Polaren der Elemente $\xi\alpha'$ bezüglich k sind einander entsprechende Strahlen der projectivischen Büschel $O\Gamma$ in dem verlangten Punkte.«

Mit dem Grundkegelschnitte hat der Kegelschnitt γ im Allgemeinen vier Punkte gemeinsam, deren k-Tangenten die g-Linie in jenen Punkten treffen, welche sie auf C_6^4 enthält. Die paarweise Realität dieser Schnittpunkte, sowie deren Coincidenzen zu zwei, drei und auch vier Elementen bedingen dann die bekannten Sekanten- und Tangentenspecialitäten der C_6^4.

Der ∞ fernen Geraden entspricht im genannten Netze ein Kegelschnitt $\varkappa$, der durch den Mittelpunkt C von k geht. Er ist deshalb bemerkenswerth, weil die in seinen vier Schnittpunkten $\overline{U}$ laufenden Grundkegelschnittstangenten unmittelbar die Richtungen der Curvenasymptoten anzeigen. Sind die Kegelschnitte $\varkappa k$ gleichzeitig Kreise, so besitzt die C_6^4 offenbar die ∞ fernen imaginären Kreispunkte der Ebene gemeinsam mit diesen Kreisen, wodurch sie circular wird, in welchem Falle sie höchstens zwei reelle Asymptoten haben kann [168].

40. Das Erzeugungsgesetz der zwei Kegelschnitte γk gibt ausser dem Ω-Punkte nur noch einen reellen Schnittpunkt $\overline{U_0}$ derselben, welcher auf der Verbindungslinie $|C\Gamma|$ liegt, wobei zu bemerken ist, dass diese letztere als Durchmessergerade im Grundkegelschnitte conjugirt ist zur Richtung der g-Geraden. In Umkehrung dessen sagen wir:

a) Die Polare von $\overline{U_0}$ im Grundkegelschnitte zeigt die Richtung der g-Geraden.

Bestimmt man den Pol Π von ω im Kegelschnitte γ, so erweist das Erzeugungsgesetz, dass die Verbindungslinie der Pole $\Gamma\Pi$ ein Strahlenelement des Büschels Ω sein muss; somit:

b) Der Pol H der Geraden $|\Gamma\Pi|$ im Grundkegelschnitte ist der Schnittpunkt (go).

41. Nach den vorausgeschickten allgemeinen Beziehungen sind wir jetzt in den Stand gesetzt, den speciellen Fall der Undulation bei einer C_6^4 mit zwei imaginären Doppelpunkten ins Auge zu fassen. Demgemäss muss der einer Undulationstangente p in einem Curvenpunkte P quadratisch entsprechende Kegelschnitt π als Individuum des Fundamentalnetzes in (39) den Grundkegelschnitt k unduliren, was in den Fig. 20, 21 und 22 folgende Einrichtung erforderlich macht.

Wie in (3) construiren wir in einem Punkte $\overline{P}$ zwei Kegelschnitte πk, die daselbst eine Berührung III. Ordnung eingehen. Wir wählen z. B: k als Grundkegelschnitt und nehmen eine sonst beliebige Gerade ω derart in der Ebene an, dass sie für den Kegelschnitt π eine uneigentliche Sekante ist. Hierdurch wird auf ω die Involution $\eta\eta'$ invitirt, deren Centrum der Pol Π in (40) ist, indem an die Stelle des dort genannten γ-Kegelschnittes jetzt der Kegelschnitt π tritt. Für den Punkt Ω, welcher bei der Construction der Kegelschnitte πk gebraucht wurde und auf π liegend angenommen ist,[1] wird in Bezug k die Polare o gesucht; anderseits bestimmen wir auch wieder für k den Pol O der Geraden ω. Diese Annahmen entsprechen den Voraussetzungen des Artikels (39), um die punktenweise Erzeugung der Curven in den betrachteten drei Figuren erfolgen zu lassen.

Anmerkung. Zur graphischen Vereinfachung der Construction geht man am besten nachstehend vor. Haben wir mittelst des Polcentrums Π zwei beliebige Punktenpaare der auf ω durch den π-Kegelschnitt bedingten $\eta\eta'$-Involution festgestellt, so ziehe man durch ω einen Hilfskreis K. Jedes Strahlenpaar, welches im Punkte Ω einem der zwei $\eta\eta'$-Paare perspectivisch ist, schneidet K in zwei Punkten, deren Verbindungslinien ein Centrum Σ im Hilfskreise für die Ω-Strahleninvolution geben, so dass conjugirte Elemente der letzteren

[1] Übrigens kann jeder beliebige Punkt des Kegelschnittes π die Aufgabe von Ω vertreten.

durch die Endpunkte einer durch Σ laufenden Kreissehne gehen. Ein solches Paar conjugirter Ω-Strahlen polarisirt aber im Grundkegelschnitte auf dem o-Träger ein ebenfalls conjugirtes Punktenpaar der $\xi\xi'$-Involution. Zieht man demnach durch O auch einen Hilfskreis K', so lässt sich in ähnlicher Weise die mit den $\xi\xi'$-Elementen perspectivische Strahleninvolution O unserer Annahmen durch ein Centrum Σ' fesseln. In Anwendung dessen ziehen wir einen x-Strahl in O, so wird er K' in einem Punkte treffen, durch den eine Σ'-Sehne läuft; der andere Endpunkt dieser Sehne verbindet sich mit O zu dem conjugirten x'-Strahle, welcher auf o den ξ'-Punkt enthält. Die beiden Grundkegelschnittstangenten $\theta'\theta'_1$ des ξ'-Punktes treffen den zuerst angenommenen x-Strahl in je einem X-Punkte der Curve in unseren Figuren.

Anderseits aber lässt sich die Construction auch folgend ausführen: Ziehen wir einen beliebigen Ω-Strahl und mit Hilfe des Σ-Centrums den ihm conjugirten, so sind deren Pole in k zwei $\xi\xi'$-Elemente; das Tangentenpaar an k aus einem dieser ξ-Punkte trifft den conjugirten, durch ξ' laufenden O-Strahl in X-Punkten der Curve.

42. Der Undulationspunkt. Gemäss der Voraussetzung im vorigen Artikel enthalten die Kegelschnitte πk in einem Punkte $\bar{P}$ eine vierpunktige Berührung. Die in diesem Punkte gemeinschaftliche Tangente $\bar{p}$ enthält auf o einen ξ-Punkt. Sucht man nach obiger Anleitung den dem Strahle $x \equiv |O\xi|$ conjugirten $x' \equiv |O\xi'|$, so trifft der letztere die Tangente $\bar{p}$ — indem sie als ein θ-Element angesehen wird — im Undulationspunkte P.

43. Die Undulationstangente. Nach den Principien der quadratischen Abbildung, die in (39) erörtert wurden, ist die im P-Punkte gehende Undulationstangente p das Bild des Kegelschnittes π. Da wir diesen Kegelschnitt als gegeben a priori voraussetzten, so wissen wir, dass der in (39) bezeichnete Pol Γ von p als Schnitt des Strahles $|\Omega\Pi|$ auf π erhalten wird. Danach ist die Polare von Γ im Grundkegelschnitte unmittelbar die Undulationstangente.

Es ist jedoch auch zu beachten, dass in der gegenwärtigen Situation der Punkt P für die beiden Kegelschnitte πk ein

gemeinsamer Pol ist. Somit ist die Gerade $|\overline{P\Gamma}|$ die Polare von P im Grundkegelschnitte, und da der Strahl $|\Omega\Pi|$ gleichfalls durch Γ läuft, so kann dieser letztere Punkt linear construirt werden.

Die Undulationstangente p ist ferner auch in ihrer Richtung bestimmt, indem diese nach (40) conjugirt zum Grundkegelschnitts-Diameter $|C\Gamma|$ ist; anderseits aber finden wir diese Tangente endlich auch als die Verbindungslinie $|PH|$, wenn H die gleiche Bedeutung annimmt, wie in (40).

44. In der Knotencurve C_6^4 Fig. 20 sind die Verzweigungselemente imaginär, weil [228] die o-Linie den Grundkegelschnitt k in imaginären Punkten trifft, und so die mit der $\xi\xi'$-Involution auf o coaxiale, durch das Centrum Ω in k invitirte Involution $\varphi\varphi'$ gleichfalls elliptisch ist. Den Gegensatz davon bildet die Curve mit isolirtem Doppelpunkt in Fig. 21, wo die Punkteninvolution $\varphi\varphi'$ mit den Doppelpunkten $\overline{V}\overline{V}'$ hyperbolisch ist, somit auf der Curve ein Paar reeller Verzweigungspunkte VV' vorkommen müssen.

Nach (37) ist in Fig. 22 eine Spitzencurve C_5^4 vorliegend. Die ω-Gerade ist jetzt offenbar die Grundkegelschnitts-Tangente im O-Punkte. Dem Tangentenschnittpunkte $S \equiv (\overline{p}\omega) \equiv M$ entspricht in der $\eta\eta'$-Involution der O-Punkt als conjugirtes Element, woraus zu schliessen ist, dass dieser Schnittpunkt ein gemeinsamer Pol und die Verbindungslinie $|OP| \equiv s \equiv m$ eine gemeinschaftliche Polare der zwei Kegelschnitte πk sein müssen, was zur weiteren Folge hat, dass die Schnittpunkte $(o\omega) \equiv Q$, $(|O\overline{P}|, o) \equiv R$ conjugirte Elemente der $\xi\xi'$-Involution sind. Diese Beziehung im Zusammenhalte mit der in [227] gegebenen Knotentangenten-Construction lässt uns die Gerade $|O\overline{P}| \equiv s \equiv d$ als Spitzentangente erkennen, und wenn wir weiters diese Spitzentangente mit der aus Q zweitmöglichen Grundkegelschnitts-Tangente verschneiden, so finden wir in diesem Schnitte den Tangentialpunkt T der Spitzentangente.

Den in (40) bezeichneten $\overline{U}_0$-Punkt der Kegelschnitte $\pi\varkappa$ kann man gewissermassen als das quadratisch verwandte Bild des ∞ fernen Punktes der Undulationstangente p ansehen, weshalb auch die Richtung dieser Tangente dem Diameter $|C\overline{U}_0|$ im Grundkegelschnitte k conjugirt ist.

45. Die Curvenerzeugnisse der Fig. 20 und 22 sind im Endlichen verlaufend, weil die in (39) genannten $\overline{U}$-Punkte imaginär sind; dagegen ist die Curve C_6^4 der Fig. 21 eine solche, welche zwei Asymptoten besitzt und deshalb aus zwei getrennten im Unendlichen sich begegnenden Ästen besteht.

Von den zwei Doppeltangenten, welche in einer C_6^4 mit imaginären Doppelpunkten vorkommen, ist in unserem Falle die eine durch die Undulationstangente substituirt; die andere enthält demnach reelle Berührpunkte, auf deren Construction wir weiter unten zu sprechen kommen werden.

Zweifache Undulation.

46. Für diese Bedingung muss ein Grundkegelschnitt k gedacht werden, welcher, wie in den Fig. 23 und 24, in den Punkten $\overline{P}_1\overline{P}_2$ mit je einem der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ eine Berührung dritter Ordnung so eingeht, dass $\pi_1\pi_2$ sich nur in einem Paare reeller Sekantenpunkte schneiden, während das andere Paar derselben imaginär bleiben soll. Es ist leicht einzusehen, dass sich dann diese beiden Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ entweder gleichzeitig ganz innerhalb oder ganz ausserhalb von k befinden, wobei eine Coincidenz des genannten Sekantenpunktenpaares und somit eine gegenseitige einfache Berührung der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ nicht ausgeschlossen ist. Dieses Sekantenpunktenpaar liegt auf einer gemeinschaftlichen Sekante r, und wir bezeichnen den einen Punkt desselben mit Ω, indem wir ihm diejenige Bedeutung vindiciren, die der gleichgenannte in den früheren Ableitungen hatte, wogegen der andere Sekantenpunkt $\overline{Z}$ heissen möge.

In Erinnerung des Kegelschnittnetzes in (39) müssen die Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$, wenn wir sie als Individuen dieses Netzes ansehen, als vierten Grundpunkt den vorhin genannten $\overline{Z}$-Punkt besitzen. Dieser Punkt ist offenbar das quadratische Bild desjenigen gemeinsamen Schnittpunktes Z, welchen die zwei Geraden p_1p_2, die den Netzindividuen $\pi_1\pi_2$ transformatorisch entsprechen, enthalten. Da die Sekante $r \equiv |\Omega\overline{Z}|$ den Ω-Punkt als Grundpunkt des Kegelschnittnetzes hat, so müssen nothwendig die beiden anderen, jedoch imaginären Grundpunkte dieses Netzes so liegen, dass sich ihr Träger, d. i. nach (39)

die Gerade ω, als die zweite gemeinschaftliche reelle Sekante der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ manifestirt.

47. Folgt man dem Erzeugungsgesetze der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$, so geht daraus hervor, dass die Verbindungslinie $|\overline{P}_1\overline{P}_2| \equiv s$ eine gemeinschaftliche Polare der Kegelschnittstriade $\pi_1 k \pi_2$ und folgerichtig der Schnittpunkt S der beiden in den Punkten $\overline{P}_1\overline{P}_2$ laufenden vierpunktigen Tangenten $\bar{p}_1\bar{p}_2$ ein gemeinschaftlicher Pol ist.

Bestimmt man im Grundkegelschnitte k mit Rücksicht auf (38) von dem angenommenen Sekantenpunkte Ω die Polare o, so ist der Schnitt $(os) \equiv R$ ebenfalls im Grundkegelschnitte Pol der Sekante r und gleichzeitig der eigentliche Contingenzpunkt der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$, was sagen will, dass man aus ihm das einzige Paar reeller gemeinsamer Tangenten an jene ziehen kann. Ähnliche Gründe lassen den Schnitt $(sr) \equiv O$ als den conjugirten aber uneigentlichen Contingenzpunkt der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ erkennen.

Vorstehende Untersuchungen enthalten für unsere Aufgabe das wichtige Ergebniss: Die Verbindungslinie $|SR| \equiv \omega$ ist die isolirte gemeinsame Sekante der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$. Dass schliesslich der Contingenzpunkt O und die genannte Sekante ω im Grundkegelschnitte k einander polar sind, ist aus den besprochenen Beziehungen ebenfalls zu entnehmen und stimmt somit mit jenen Voraussetzungen überein, die diesbezüglich in (39) gemacht wurden.

48. Die Kegelschnittsbeziehungen der beiden vorausgehenden Artikel bilden die Grundlage für die Erzeugung einer C_6^4 mit zwei imaginären Doppelpunkten, welche zwei Undulationen aufweisen soll. Jeder der Kegelschnitte $\pi_1\pi_2$ invitirt auf ω die (39) bezeichnete elliptische $\eta\eta'$-Involution identisch. Ohne Schwierigkeit ist einzusehen, dass das Punktenpaar RS a priori conjugirte Elemente dieser Involution vorstellt. Wir werden also mittelst der Pole $\Pi_1\Pi_2$ der ω-Sekante in den Kegelschnitten $\pi_1\pi_2$, welche auf der gemeinschaftlichen Polaren s liegen, noch ein beliebiges zweites Paar $\eta\eta'$-Elemente suchen und dann beide Paare perspectivisch durch Strahlen mit dem Ω-Centrum verbinden. Die Vervollständigung der damit erhaltenen Strahleninvolution, sowie die Fixirung der $\xi\xi'$-Involution auf dem

o-Träger etc. kann dann nach (41, Anmerkung) geschehen, auf welche Art die punktenweise Darstellung der bezüglichen Curven in den Fig. 23 und 24 erfolgt.

49. Die Construction der Undulationspunkte $P_1 P_2$ in der Erzeugnisscurve C_6^4 ist derjenigen in (42) analog. Ebenso finden wir in (43) die Construction der Undulationstangenten $p_1 p_2$ angegeben, wobei man nur dafür zu sorgen hat, dass vorher die jetzt vorkommenden Polpunkte $\Gamma_1 \Gamma_2$ auf den Kegelschnitten $\pi_1 \pi_2$ nach (39) und die Polpaare $\Pi_1 \Pi_2$, $H_1 H_2$ nach (40) ermittelt werden, wobei zwischen dem letzteren Paare und dem in (47) bezeichneten Punkte R im Vereine mit dem Schnitte $(ro) \equiv Q$ die Harmonität besteht:

$$(RQ, H_1 H_2) = -1.$$

Schliesslich ist noch darauf aufmerksam zu machen, dass, sowie die Gerade $s \equiv |\bar{P}_1 \bar{P}_2|$, auch die Verbindungslinie $|P_1 P_2|$ durch den Contingenzpunkt R laufen muss und dass dual der Schnittpunkt $Z \equiv (p_1 p_2)$ auf der eigentlichen Sekante r liegen wird, weil die analogen Verhältnisse im Gebiete des Grundkegelschnittes stattfinden, wo also nach (46) der Sekantenpunkt $\bar{Z}$ jenem Undulationstangentenschnitte Z bildlich entspricht.

Wechselbeziehung zwischen Undulations- und Doppeltangenten.

50. Der Doppelpunkt O ruft coaxial mit der $\eta\eta'$-Involution durch den Grundkegelschnitt k auf dem Träger ω eine zweite Involution $\delta\delta'$ hervor, deren Doppelemente $\delta_1 \delta_2$ die zwischen k und ω vorkommenden Schnittpunkte sind.

Während die $\eta\eta'$-Involution a priori nur elliptischer Natur gedacht wurde, entfällt diese Einschränkung für die $\delta\delta'$-Involution, d. h. sie wird elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch sein, je nachdem die ω-Gerade eine eigentliche oder isolirte Sekante, oder eine Tangente im Grundkegelschnitt ist, wodurch anderseits wieder nach (37) die Art des Doppelpunktes O bedingt ist.

Diese auf ω coaxialen Involutionssysteme $\eta\eta'$, $\delta\delta'$ haben bekanntlich immer ein Paar reelle gemeinschaftliche

Doppelelemente MM', deren Polaren mm' im Grundkegelschnitte Strahlenelemente des O-Centrums sind, und wir wollen nun in den bisher betrachteten Beispielen diese gemeinschaftlichen Doppelelemente directe angeben, um daraufhin und mit Hilfe der Construction in [238] die Wechselseitigkeit von Doppel- und Undulationstangenten abermals zu erweisen.

51. In den Fig. 20 und 21 ist: $M \equiv (\bar{p}\omega)$; $M' \equiv (|O\bar{P}|, \omega)$; $|O\bar{P}| \equiv m$; $|MO| \equiv m'$. Der in (49) angezeigte Schnittpunkt Z ist nach dem Satze [239][1] Treffpunkt der zwei vorkommenden Doppeltangenten Δ, deren eine jetzt zur Undulationstangente p sich umgestaltet. Bezeichnet den Schnitt $(om') \equiv Q$, so folgt der Z-Punkt aus der Harmonität:

$$(OM, QZ) = -1,$$

was gleichzeitig eine Construction der Undulationstangente p ausdrückt, soferne der Berührpunkt P bereits bekannt ist.

Durch das Centrum M ziehen wir einen Hilfskreis K'' und aus Z eine beliebige, aber die Curve C_6^4 in zwei reellen Punktenpaaren schneidende Sekante. Von diesen vier Schnittpunkten werden die die Curve erzeugenden Grundkegelschnittstangenten sammt ihren Berührpunkten aufgesucht und die letzteren derart durch Gerade verbunden, dass sie Strahlen des M-Centrums vorstellen. Diese treffen K'' in zwei Punkten, welche der Sehne eines Σ''-Centrums in K'' angehören. Wird nun im Schnitte von K'' mit der Grundkegelschnittstangente $\bar{p}$ die betreffende Kreistangente gezogen, so läuft sie ebenfalls durch das Σ''-Centrum, wodurch dieses fixirt erscheint. Einfacher und directe kann man statt der Z-Sekante die der Polaren m' zugeordneten Strahlen ω, $|\Omega M|$, welche in der M-Involution conjugirte Elemente sind, benützen, indem ihre Schnitte auf K'' abermals Endpunkte einer Σ''-Sehne σ geben.

Zieht man nunmehr von Σ'' an K'' die zweitmögliche Tangente und verbindet ihren Berührpunkt mit M durch einen Strahl, so ist er gleich der $\bar{p}$-Tangente als Doppelelement in der M-Involution anzusehen und trifft den Grundkegelschnitt k in

[1] In diesem Artikel ist der Punkt N gleichbedeutend mit dem hier bezeichneten Z-Punkt und als Centrum einer biquadratischen Involution aufzufassen.

einem Punktenpaare $\bar{B}\bar{B}'$, welches die Berührpunkte BB' der Doppeltangente Δ, die nach oben durch Z geht, mittelst der Grundconstruction abbildet. In Fig. 20 sind die BB'-Punkte durch den reellen O-Knoten getrennt, weshalb Δ nach (5) nicht von Inflectionen begleitet wird. Im Gegensatze dessen ist in Fig. 21 O isolirt, aus welchem Grunde die Doppeltangente von einem Paare reeller Inflexionselemente adjungirt erscheint.

Anmerkung. Wir sehen im Vorstehenden abermals die Stellvertretung einer Doppel- durch eine Undulationstangente bestätigt. Denn vermöge der Eigenschaft, dass die $\bar{p}$-Tangente und jener Strahl, welcher die $\bar{B}\bar{B}'$-Punkte auf k ausschneidet, Doppelelemente der M-Involution sind, könnte die erstere im Grundkegelschnitte ebensogut eine Sekante bilden, in welchem Falle aber dann das Schicksal der p-Linie auf der Curve gleichbedeutend mit demjenigen der Δ-Geraden wäre. Allerdings müsste in diesem Falle, wegen des Gesetzes der »Adjunction«, die zur Doppeltangente verwandelte p-Gerade von einem Paare reeller oder imaginärer Inflexionen begleitet sein [Fig. 39, Taf. II].

52. In der Darstellung der Spitzencurve C_5^4 der Fig. 22 finden wir: $M \equiv (\bar{p}\omega)$; $M' \equiv (|O\bar{P}|, \omega) \equiv O$; $|O\bar{P}| \equiv m$; $|MO| \equiv \omega \equiv m'$.

Der Umstand, dass O als Rückkehrpunkt dem Grundkegelschnitt k angehört, bedingt die Coincidenzen $M' \equiv O$ und $m' \equiv \omega$. Die Construction des Z-Punktes erfährt eine Vereinfachung dann, wenn die Bestimmung des Tangentialpunktes T der Spitzentangente nach (44) vorausgegangen ist, indem die aus T zweitmögliche Grundkegelschnittstangente den Z-Punkt sofort auf der Geraden ω erzeugt. Die Construction der Doppeltangente Δ und ihrer Berührungspunkte BB' sowie diejenige der Undulationselemente Pp erfolgt nun wie im vorigen Artikel.

53. In den Curvenbeispielen der beiden Fig. 23 und 24 sind die zwei Doppeltangenten, deren es nach dem Satze [239] nicht mehr geben kann, durch die Undulationstangenten $p_1\, p_2$ ersetzt, für welche in (49) die Construction angegeben wurde. Wollte man nach der Methode in (51) vorgehen, so ist zu bemerken, dass jetzt die Identitäten stattfinden:

$$M \equiv S;\ M' \equiv R;\ m \equiv s;\ m' \equiv r.$$

Symmetrische Curven.

54. Wenn in einer C_6^4 unseres Problems Symmetrie herrschen soll, so bedingt diese Eigenschaft in den Annahmen solche mit dem Grundkegelschnitt undulirende Kegelschnitte, welche mit ihm homothetisch sind.

a) Einfache Symmetrie.

Wir nehmen zwei Kegelschnitte πk an, die in einem Punkte $\overline{P}$, der für beide ein gemeinsamer Scheitel ist, sich vierpunktig berühren Fig. 25. Zu der in $\overline{P}$ laufenden gemeinschaftlichen Tangente $\bar{p}$ enthält die Gerade $s \perp \bar{p}$ je eine Axe der Kegelschnitte conjectivisch, und es ist diese Gerade Träger des Punktenpaares $O\Omega$, wobei Ω der Gegenscheitel von $\overline{P}$ im Kegelschnitte π ist. Da wir der Einfachheit halber in der Figur den Ω-Punkt in das Centrum des Grundkegelschnitts k verlegt haben, so identificirt sich die Polare o mit der ∞ fernen Geraden.

Die Lage der ω-Geraden gegen den Grundkegelschnitt bedingt (37) den Doppelpunkt O als Knoten der erzeugten Schlingencurve C_6^4 unserer Figur. Diese besitzt die Identität $P \equiv P'$ als Undulationspunkt und die Gerade $s \equiv |OP|$ als Symmetrale. In der Curve kann demnach nur mehr eine Doppeltangente Δ vorkommen.

Anmerkung. Für die Construction der Berührpunkte auf der Δ-Tangente muss das in (51) angegebene Verfahren entsprechend modificirt werden, weil jetzt der M-Pol ∞ weit liegt. Wir bemerken die Identitäten: $m \equiv s$, $m' \equiv r$ und $M' \equiv (s\omega)$. In O als Mittelpunkt, wird ein beliebiger Hilfskreis K'' gezogen, auf welchen einer der Schnittpunkte von m' als Projectionscentrum C'' gewählt ist. Die m-Gerade bildet den Schein der Strahleninvolution $M\infty$; werden die conjugirten Elemente $\Omega M'$ aus C'' auf K'' projicirt, so ist die Verbandlinie dieser Projectionen eine σ-Sehne des Centrums Σ''; durch das letztere läuft aber auch jene Kreistangente, die in dem Projectionspunkte, der mittelst des Strahles $|C''P|$ erhalten wird, zieht. Die zweite aus Σ'' an K'' gehende Tangente enthält einen Berührpunkt, welchen man aus C'' auf die Gerade m nach ν zurückprojicirt, und es trifft dann der durch den ν-Punkt nach dem Pole $M\infty$

zielende Parallelstrahl den Grundkegelschnitt k in den Bildern $\overline{B}\overline{B}'$ der Berührpunkte auf der Δ-Linie.

55. Will man eine einaxig symmetrische Curve mit doppelter Undulation nachweisen, so erfordert dies ebenfalls eine symmetrische Anordnung der Kegelschnitte $\pi_1 \pi_2$. Demgemäss ist die Grundlage in der Fig. 26 getroffen, wobei ausserdem die Geraden $|\overline{P}_1 \overline{P}_2| \equiv s$, $|\Omega \overline{Z}| \equiv r$ axial rechtwinkelige Diameter des Grundkegelschnitts k sind. Deswegen befinden sich auch die Punkte RS auf der ∞ fernen Geraden, welche sich überdies mit der isolirten gemeinschaftlichen Sekante ω identificirt. Die weitere Folge hiervon ist, dass die Mittelpunkte der Kegelschnitte $\pi_1 \pi_2$ mit den bezüglichen Polen $\Pi_1 \Pi_2$ zusammenfallen.

Da die Kegelschnitte $\pi_1 \pi_2$ congruente, zu einander ebenfalls homothetisch gelegene Ellipsen sind, so werden die Strahleninvolutionen $\Pi_1 \Pi_2$, welche auf $\omega \infty$ die $\eta\eta'$-Involution perspectivisch gemeinschaftlich haben, aus den conjugirten Diameterpaaren dieser Ellipsen gebildet.

Das Curvenerzeugniss der Fig. 26 enthält in den Bildpunkten $P_1 P_2$ Undulationen und besitzt die Gerade r als Symmetrale. Sie ist im Endlichen ovalförmig geschlossen, weil der in (39) bezeichnete $\varkappa$-Kegelschnitt keine $\overline{U}$-Punkte nachweist, und ihr Doppelpunkt O ist stets ein isolirtes Element.

b) Doppel-Symmetrie.

56. Ein bemerkenswertes Interesse bieten die Curven mit zwei Symmetrieaxen. In Fig. 27 sind die Kegelschnitte $\pi_1 \pi_2$ congruente homothetische Ellipsen, die sich im Ω-Punkte einfach berühren, was nur im Centrum des Grundkegelschnittes k geschehen kann. Man sieht sofort, dass dieses Centrum gleichzeitig den Doppelpunkt der Curve repräsentirt, demzufolge sich auch das Geradenpaar $o\omega$ mit der ∞ fernen Geraden identificirt. Die Pole $\Pi_1 \Pi_2$ fallen wieder, wie im vorigen Beispiele, in die Mittelpunkte der Ellipsen $\pi_1 \pi_2$, weshalb, wie dort, die conjugirten Strahlenelemente der Ω-Involution gleichgerichtet den ihnen perspectivischen conjugirten Diameterpaaren dieser Ellipsen sind.

Die Strahleninvolution O wird nach der Anmerkung in (41) mittelst eines Hilfskreiscentrum Σ' fixirt, womit wir die Curve C_6^4 als geometrischen Ort erzeugen. Dabei sehen wir, dass die Undulationspunkte $P_1 P_2$ mit ihren beziehlichen Bildern coincidiren, welche Eigenschaft auch zwischen den Tangenten $p_1 \bar{p}_1$ und $p_2 \bar{p}_2$ stattfindet, so dass der Grundkegelschnitt k, ausser in den $P_1 P_2$-Punkten, nur noch in zwei β-Punkten von der C_6^4 einfach berührt wird.

Dass die Undulationstangenten $p_1 p_2$ parallel zur Geraden $r \equiv |\beta_1 \beta_2|$ laufen, stimmt mit der in (51) bemerkten Harmonität überein, wenn berücksichtigt wird, dass ihr Z-Punkt jetzt mit dem Punkte $(\bar{p}_1 \bar{p}_2) \equiv S$ sowie auch mit Q wegen der Coincidenz $O \equiv \Omega$ identisch auf $o\infty \equiv \omega\infty$ zusammenfällt.

Die Axen rs des Grundkegelschnitts sind in der Curve Symmetralen und ihr Schnitt O, d. i. der isolirte Doppelpunkt, ist gleichzeitig auch ein Mittelpunkt der Curve.

57. Nimmt man die Kegelschnitte $\pi_1 \pi_2$ als Kreise, wie in Fig. 28, an, oder ist, wie in dem vorigen Beispiele der Fig. 27, der Grundkegelschnitt k ein Kreis, so entsprechen im ersteren Falle für k eine Ellipse und im letzteren Falle für $\pi_1 \pi_2$ congruente homothetische Ellipsen von festen Axenverhältnissen, und die durch diese Annahmen bedingten Curvenovale erhalten eine ganz bestimmte unveränderliche Gestalt, deren stets isolirter Doppelpunkt, wie schon oben bemerkt wurde, für sie Mittelpunkt ist.

Dass diese beiden charakteristischen Curven ovalförmig verlaufen, begründet der in (39) genannte $\varkappa$-Kegelschnitt. Nachdem aber jetzt der Ω-Punkt in den Mittelpunkt des Grundkegelschnitts hineinfällt, so werden die erzeugenden Büschel dieses Kegelschnitts concentrisch und ihr Resultat reducirt sich auf diesen Coincidenzpunkt selbst, so dass mit dem Grundkegelschnitt nur imaginäre $\bar{U}$-Punkte zustandekommen. Ebenso werden wegen der Coincidenz $O \equiv \Omega$ die den β-Kegelschnitt erzeugenden Büschel concentrisch, und da sie elliptische Strahleninvolutionen sind, so haben sie nach (38) ein reelles Paar conjugirter Geraden gemeinschaftlich. Dieses letztere Paar besteht aus den Symmetralen rs, wovon r die Undulationspunkte $P_1 P_2$, s die Punkte $\beta_1 \beta_2$, wie oben bemerkt wurde, als Berühr-

elemente des Grundkegelschnitts mit der bezüglichen Curve enthält.

An diesem Orte sei gewissermassen nachträglich für die Curven mit zwei Undulationen, gleichgiltig ob dieselben symmetrisch oder nicht symmetrisch angelegt sind, das Gesetz ausgesprochen: »Die den β-Kegelschnitt erzeugenden Strahlenbüschel sind immer perspectivisch und ihre Perspectivitätsaxe ist eine Gerade, welche durch den Punkt $M' \equiv R$ läuft« (vergl. Fig. 23 und 24).

Die bicirculare C_4^4 mit Undulation.

58. Bekanntlich ist eine Curve vierter Ordnung bicircular, sobald sie die ∞ fernen imaginären Kreispunkte ihrer Ebene als Spitzen enthält, weshalb nach Satz [183 rechts] ihr Symbol: C_4^4 anzuschreiben ist. Diese Eigenschaft bedingt für unsere Betrachtungen als Grundkegelschnitt ausschliesslich den Kreis, so dass also zwischen beiden Gebilden nur mehr eine zweimalige Berührung in reellen β-Punkten erfolgen kann.

Wenn eine Curve mit den vorangestellten Bedingungen noch diejenige einer Undulation erfüllen soll, so muss nothwendig die o-Linie, als Träger der $\xi\xi'$-Involution, die ∞ ferne Gerade sein, was wieder anderseits den Ω-Pol als Mittelpunkt des Grundkreises k erfordert. Damit ist jetzt der π-Kegelschnitt als Ellipse innerhalb des Grundkreises, welche den Ω-Punkt enthält, vollkommen und in ihrem Axenverhältnisse constant bestimmt, indem jeder beliebige Kreispunkt $\overline{P}$ Fig. 29 und dessen Tangente $\bar{p}$ die Berührelemente der undulirenden Kegelschnitte πk vorstellen können und der Radius ρ des Grundkreises k gleich der kleinen Axe $\overline{\overline{P}\Omega}$ der π-Ellipse ist.

Ich verlege den O-Punkt in das Centrum der π-Ellipse. In Folge dessen läuft die Polare ω im ρ-Abstande von der $\bar{p}$-Tangente und zu ihr parallel, wodurch der Π-Pol gleichfalls auf der Halbmesserlinie $|\overline{P}\Omega|$ im Abstande $\frac{\rho}{3}$ erscheint.

59. Vorstehende Distanzauftragungen bedingen für unser Thema nachstehende Folgerungen: Eine in O angenommene circulare Strahleninvolution ist perspectivisch auf

der $\bar{p}$-Tangente mit der (39) bemerkten Strahleninvolution $\eta\eta'$, deren Centrum im π-Kegelschnitt nach (41) der Π-Pol ist. Da nun die Ω-Strahleninvolution zu dem auf ω befindlichen Punktensysteme $\eta\eta'$ gleichfalls perspectivisch ist, so müssen für die im vorigen Artikel gemachten Grundkreisannahmen folgerichtig die zwei Strahleninvolutionen $O\Omega$ und deren polare Gebilde im Grundkreise gleichartig, somit circular sein. Dasselbe Resultat folgt übrigens auch dadurch, dass man überhaupt die eine von den zwei Involutionen $O\Omega$ rechtwinklig wählt, weil ja beide durch die $\xi\xi'$-Involution auf jetzt $o\infty$ perspectivisch bezogen sind.

Die in (37) angeführten erzeugenden Strahlengebilde sind also im vorliegenden Falle beide circular: Das O-Büschel und die Grundkreistangenten-Involution, womit sich die C_4^4 nach [244] als »Fusspunktencurve«, und zwar als die einaxig symmetrische Epicycloide darstellt, in welcher im Punkte $P \equiv \bar{P}$ die Undulation stattfindet und O wieder ein isolirter Doppelpunkt ist.

Im Undulationspunkt P ist auch ein Berührelement des in (38) gegebenen β-Kegelschnittes vereinigt. Da die erzeugenden Büschel dieses Kegelschnittes im Jetztfalle beide circular sind, so liegt der zweite Berührpunkt β_1 des erwähnten Kegelschnittes auf dem gemeinsamen Büschelstrahle $|O\Omega|$, während das andere Paar β-Punkte die imaginären Spitzenpunkte der Curve auf der Geraden $o\infty$, als Perspectivitätsaxe der erzeugenden Strahlenbüschel, sind.

Aber auch die den Kegelschnitt $\varkappa$ erzeugenden Büschel nach (39) sind hier circular und überdies concentrisch, weshalb auf der Epicycloide keine Asymptoten vorkommen und sie ein von unveränderlicher Gestalt geschlossenes Oval bildet.

60. Die eventuell gestellte Frage: »Kann eine bicirculare C_4^4 zwei Undulationen enthalten?«, muss verneinend erledigt werden. Diesbezügliche Raisonnements können nur auf den Fall in Fig. 29 hinweisen, wo die Punkte $O\Omega$ in Coincidenz mit dem Centrum des Grundkreises k kommen und demnach [134] der Doppelpunkt O ein isolirter Inflexionsknoten sein müsste, d. h. es wäre der Pol O von ω gleichzeitig der Pol von o.

Allerdings trifft die letztere Eventualität in der genannten Figur zu, doch genügt sie der Aufgabe noch nicht, weil diese erst dann erfüllt sein wird, wenn das Erzeugniss der Beziehung im Einklange mit [§. 39] eine Fusspunktencurve ist. Da eine solche Curve projectivisch circulare Strahlengebilde zu ihrer Entstehung erfordert, dies aber gleichzeitig, wie eine kurze Überlegung beweist, niemals eintreten kann, so muss der Fall der oben gestellten Frage ausgeschlossen bleiben. Der Negationsbeweis lässt sich übrigens noch in der Weise erbringen, dass man sich [239] an die Thatsache erinnert: »eine C^4 mit zwei imaginären Doppelpunkten besitzt nur zwei Doppeltangenten, die höchstens von je einem reellen Inflexionspaare begleitet werden«. Gehen nun, unserem Probleme entsprechend, diese Doppeltangenten in Undulationstangenten über, wovon jede nach dem Gesetze der Adjunction ein Inflexionspaar consumirt, so ist die vorige Annahme eines ausserdem noch vorkommenden Inflexionsknotens im O-Punkte unmöglich.

Das Vorstehende, sowie der ganze Entwicklungsgang unserer Abhandlung berechtigen schliesslich zu dem Satze: »Eine unicursale Curve vierter Ordnung mit einem reellen Doppelpunkte vermag nicht mehr als zwei Undulationen aufzuzählen«.

Gestaltliche Verhältnisse.

61. Die Curven dieser Abhandlung, soweit sie nur eine Undulation aufweisen, unterscheiden sich in ihrem Verlaufe nicht wesentlich von denjenigen, welche ich in der I. Mittheilung der Betrachtung unterzogen habe, sofern bei dieser letzteren von der eventuellen dreimaligen Knotenverschlingung abgesehen wird. Wir haben gefunden, dass auch eine Curve mit zwei imaginären Doppelpunkten und nur einer Undulation alle drei Gattungen ihres reellen Doppelpunktes zeigen kann, dass sie ausserdem eine Doppeltangente und ein Paar Inflexionen besitzt, was Alles eine gewisse Mannigfaltigkeit ihrer Form, insbesondere wenn überdies noch die Realität ihrer Asymptotenelemente mitspielt, ausmacht. Ganz anders und viel beschränkter treten die Charaktere unserer Curven mit zwei Undulationen auf. Hier kann man hauptsächlich zwei Typen unterscheiden: Die

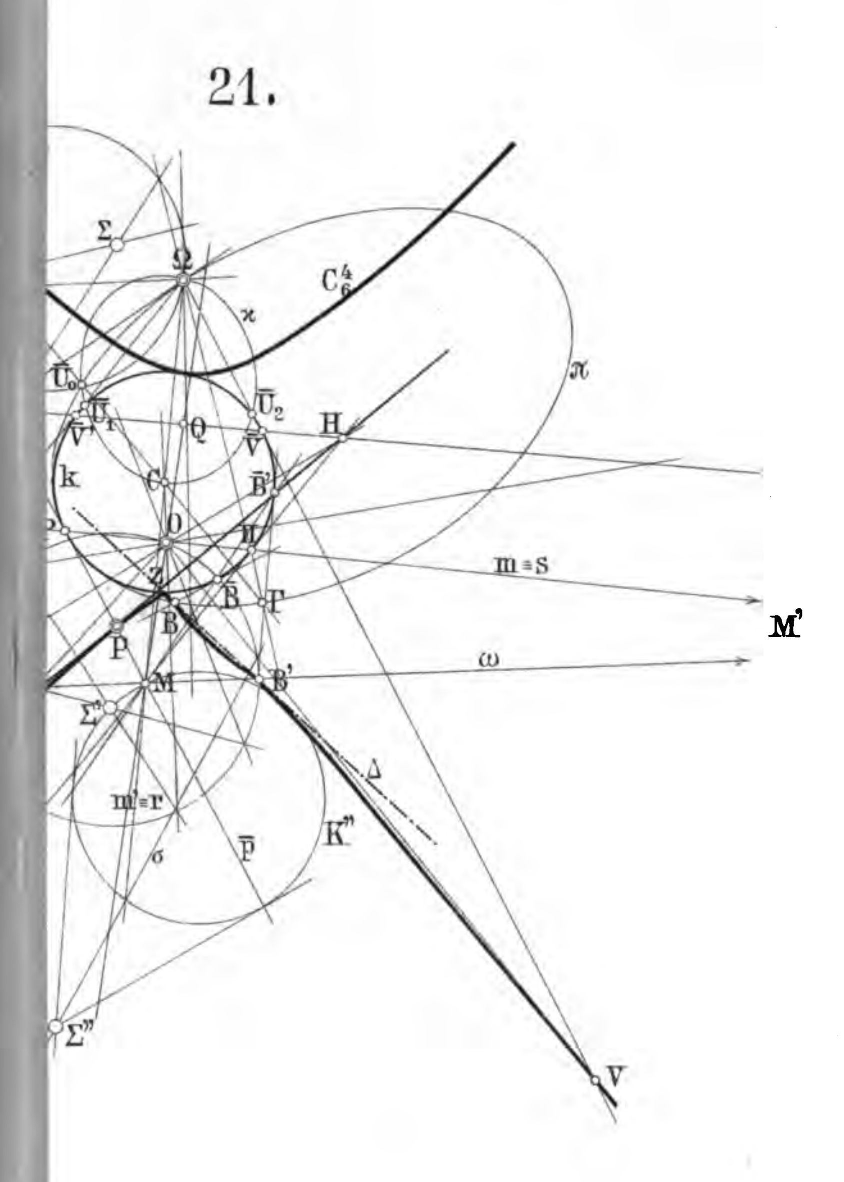
geschlossene ovalförmige und die aus zwei getrennten Ästen mit zwei Asymptoten bestehende Curve, welche Fälle als der elliptische und der hyperbolische Typus bezeichnet werden können, wobei noch hinzukommt, dass der reelle Doppelpunkt jedesmal einsam ist und niemals einen Knoten oder eine Spitze bildet.

Analoge Unterscheidungen in Bezug auf die Formation finden auch bei den einaxig symmetrischen Curven statt. Besitzt aber eine Curve zwei Symmetralen, so gehört sie grundsätzlich nur der Ovalform an und weist überdies noch die singulare Eigenschaft eines Mittelpunktes auf, welche keiner anderen Curvengattung eigen ist. Solche Curven sind stets mit zwei Undulationen versehen und ihr Grundkegelschnitt ist für sie immer ein viermal reell berührender, wobei die zwei Undulationspunkte als Berührelemente mitzählen.

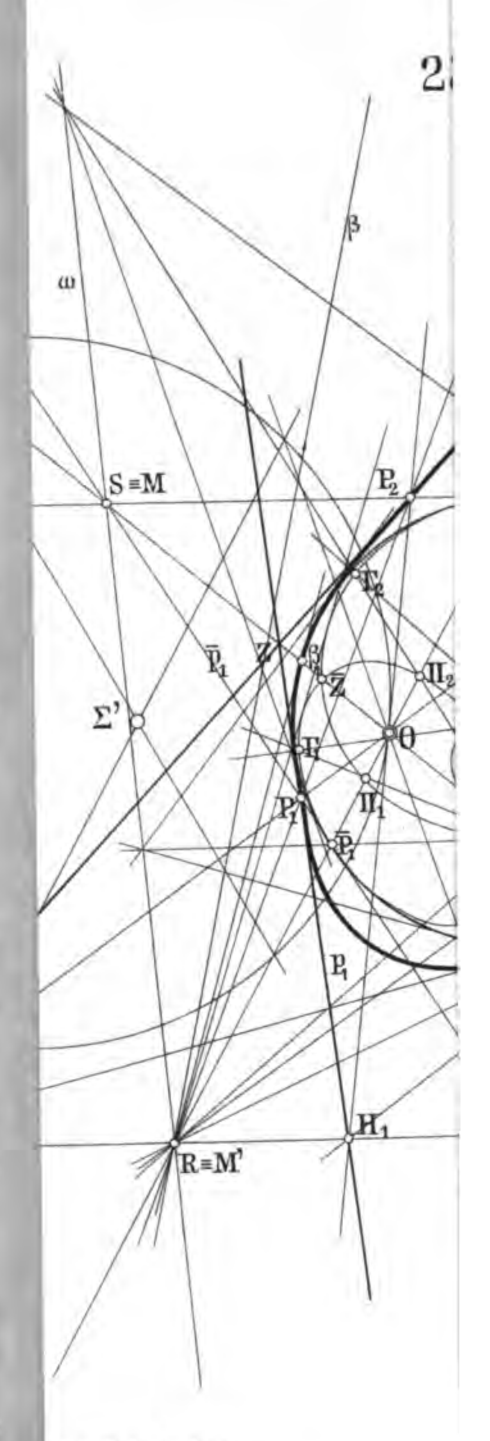
Endlich ist noch der Charakteristik zu gedenken, dass sowohl die beiden zweiaxig symmetrischen Curven der Fig. 27 und 28, sowie auch die bicirculare Epicycloide mit einer Undulation in Fig. 29 sich als gestaltlich constante Ovale manifestiren und derart eine ähnliche Rolle unter ihren Schwestercurven spielen, wie etwa der Kreis bei den Kegelschnittlinien.

Das hauptsächlichste Merkmal der Curven unseres Themas ist vorzüglich in ihrer Undulationseigenschaft begründet, weil diese ihre Form so charakteristisch beeinflusst, wie keine andere Tangentengattung, was bereits in der I. Mittheilung zum Ausdruck gelangte.

21.

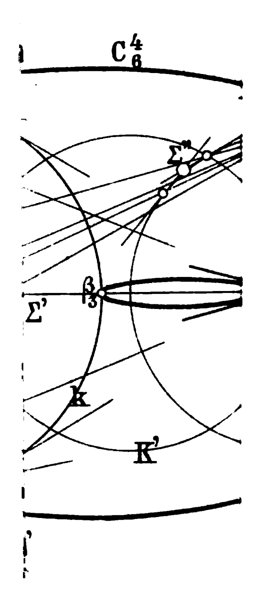


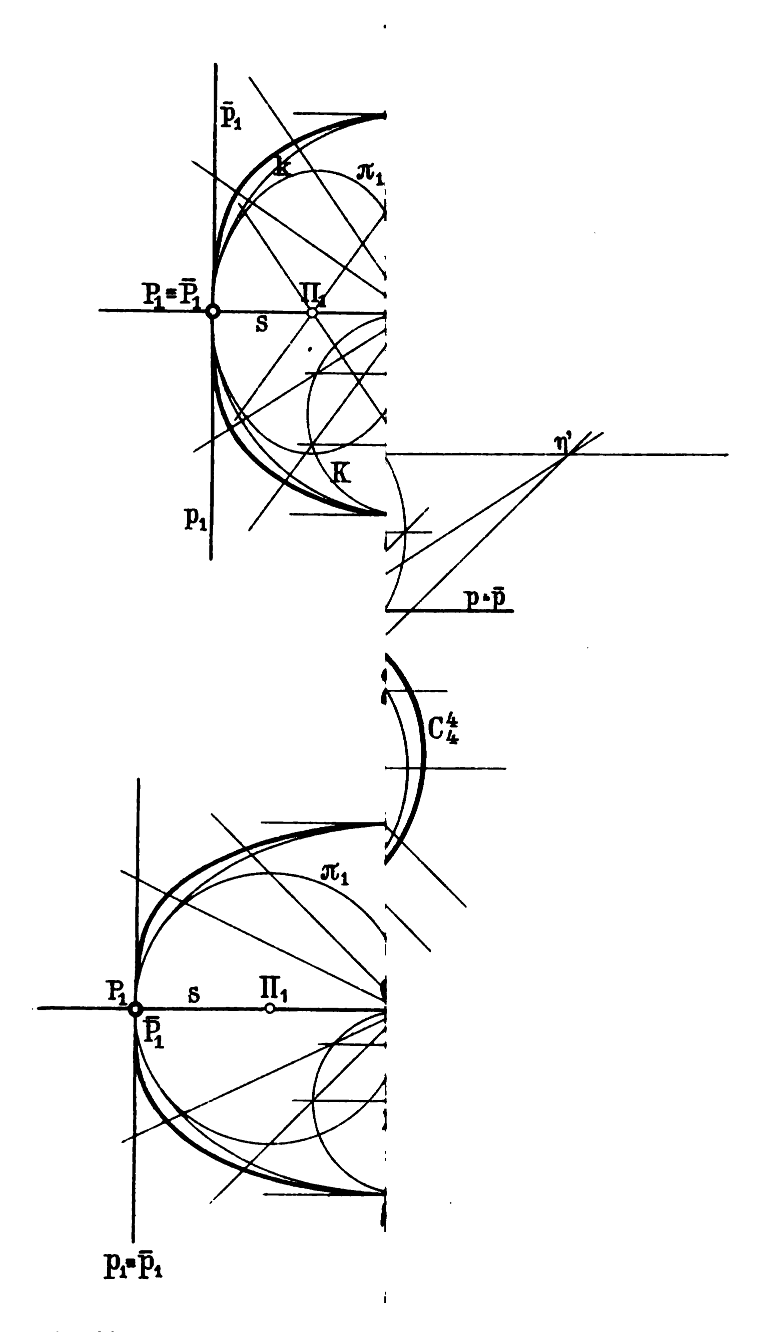
Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien



2
ω
β
S ≡ M
P₂
T₂
Z
Σ'
Π₂
Θ
Π₁
P₁
p₁
H₁
R ≡ M'

25.





Autor del.   Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien

Das Linienspectrum des Siliciums

von

J. M. Eder und **E. Valenta** in Wien.

Wir haben uns in einer früheren Abhandlung[1] mit dem Studium der Wellenlängen der Linien im Emissionsspectrum des Siliciums vom Violett bis zum äussersten Ultraviolett beschäftigt. Zur Aufnahme der betreffenden Spectren haben wir uns damals eines Quarzspectrographen mit einem Prisma bedient und daher Spectren erhalten, welche naturgemäss im weniger brechbaren Theile eine verhältnissmässig geringe Dispersion zeigten. Da wir mittlerweile einen grossen Gitterspectrographen aufgestellt hatten, gingen wir daran, die mit dem Quarzspectrographen früher erhaltenen Resultate einer Revision zu unterziehen.

Unterdessen waren von Rowland eine Anzahl vorzüglicher »Standards« veröffentlicht worden, welche wir im Vereine mit den von Kayser gemessenen Eisenlinien und den von uns bestimmten Kupferlinien bei dieser Arbeit als Leitspectrum benützten; dadurch waren wir in die Lage gesetzt, die Wellenlängen der Siliciumlinien mit grösster Genauigkeit zu bestimmen. Zunächst überzeugten wir uns von der Coincidenz der im Bogen auftretenden, von Rowland gemessenen Siliciumhauptlinien mit den im Funkenspectrum auftretenden. Die Rowland'sche Linie $\lambda = 2263 \cdot 507$ konnten wir allerdings im Funkenspectrum des Siliciums nicht finden, dagegen constatirten wir das Vorhandensein der von uns bereits geführten

[1] Über das Emissionsspectrum des Kohlenstoffs und Siliciums. Denkschriften der kais. Akad. der Wissensch., mathem.-naturw. Cl., Bd. LX, 1893.

Hauptlinie $\lambda = 2542$ (richtiger $\lambda = 2541 \cdot 89$), sowie einer Anzahl von verbreiterten violetten und schwachen ultravioletten Linien. Einige sehr schwache Linien des Siliciumspectrums konnten jedoch nur mit dem Quarzapparate erhalten werden, nicht aber mit dem Gitter, was sich aus der weitaus grösseren Lichtstärke des ersteren Apparates erklärt.

Zur Erzeugung des Siliciumspectrums diente uns eine Legirung von Silicium und Kupfer, und eine solche von Magnesium und Silicium. Mit diesen Legirungen, welche als Elektroden verwendet wurden, erhielten wir unter Benützung eines kräftigen Flaschenfunkens dieselben Linien, wie bei Verwendung von Kohle oder Zinkelektroden, auf welche während des Überspringens der Funken Siliciumchlorid tropfen gelassen wird. Auch bei Benützung von Elektroden aus elementarem Silicium wurden dieselben Resultate erhalten. Wir betonen nochmals, dass die charakteristischen Liniengruppen, welche sich durch grosse Schärfe auszeichnen, im äussersten Ultraviolett liegen, so dass eine Identificirung von Silicium auf spectroskopischem Wege mittelst des Quarzspectrographen zwar leicht durchgeführt werden kann, aber mittelst eines Glasspectrographen nur schwer möglich ist.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate unserer neueren Messungen, auf Rowland'sche Normallinien bezogen. Dieselben erstrecken sich von $\lambda = 4431$ bis ins äusserste Ultraviolett.

Eder-Valenta	Intensität[1]		Eder-Valenta	Intensität	
4131·0	4	verbreitert	3795·9	2	
4128·2	4		3791·1	1	
3905·80	3		3191·1	1	
3862·75	3	verbreitert	3086·8	1	
3856·20	3		2987·77	4	
3854·00	1	verbreitert, undeutlich	2881·70	10	Hauptlinie
			2689·8	1	
3834·4	1		2677·4	1	
3826·7	1		2673·3	1	

[1] In dieser Tabelle sind die stärksten Linien mit 10, die schwächsten mit 1 bezeichnet.

Eder-Valenta	Intensität		Eder-Valenta	Intensität	
2659·0	1		2446·0	3	
2631·39	8	Hauptlinie	2443·46	2	
2568·8	2		2438·86	2	
2541·89	8	Hauptlinie	2435·25	8	Hauptlinie
2534·7	1		2356·9	1	
2533·2	4		2303·3	1	
2528·60	8	Besonders charakteristische Liniengruppe	2219·5	1	
2524·21	8		2218·15	1	
2519·30	8		2216·76	4	charakteristische Liniengruppe
2516·21	10		2211·8	3	
2514·42	7		2210·9	3	
2506·99	8		2208·1	3	
2479·8	1		2122·8	2	Hauptlinie
2452·22	3		1929·0	1	

Zur Geometrie auf Flächen constanter Krümmung

von

Karl Carda in Brünn.

(Mit 4 Textfiguren.)

Herr H. A. Schwarz hat den interessanten Satz bewiesen:

Unter allen einem spitzwinkligen Dreiecke eingeschriebenen Dreiecken hat das Dreieck der Höhenfusspunkte den kleinsten Umfang.[1]

Der elegante synthetische Beweis des Herrn Schwarz besteht darin, dass durch passende Umklappungen des gegebenen spitzwinkligen Dreieckes der doppelte Umfang seines Höhenfusspunkten-Dreieckes durch die Entfernung zweier Punkte dargestellt wird. Zeichnet man nun ein beliebiges, dem gegebenen Dreiecke eingeschriebenes Dreieck, so wird bei demselben Processe des Umklappens der doppelte Umfang dieses Dreieckes durch einen gebrochenen Linienzug dargestellt, der zwei Punkte verbindet, welche dieselbe Entfernung von einander haben wie die beiden früher erwähnten Punkte. Hiermit ist der Beweis offenbar erledigt.

Ist das Dreieck stumpfwinklig, so stellt der Umfang des Höhenfusspunkten-Dreieckes, wie eine einfache Betrachtung lehrt, keinen extremen Werth dar.

Ich stellte mir nun die Aufgabe, die Übertragung des Schwarz'schen Satzes auf geodätische Dreiecke auf einer beliebigen Fläche constanter Krümmung zu versuchen. Eine

[1] H. A. Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen. Zweiter Band, Berlin 1890, S. 344—345 (mit Figur). Daselbst weitere Literaturangaben.

derartige Verallgemeinerung ist nun thatsächlich möglich. Wir wollen zunächst das betreffende Theorem aufstellen.

Theorem.

Ist auf einer beliebigen Fläche constanter Krümmung ein geodätisches Dreieck gegeben, dessen sämmtliche Winkel spitz sind, so hat unter allen dem gegebenen Dreiecke eingeschriebenen Dreiecken das geodätische Dreieck der Höhenfusspunkte den kleinsten Umfang.

In der Sphärik hat dies Theorem schon Steiner aufgestellt, jedoch keinen Beweis desselben mitgetheilt.

Dass das Schwarz'sche Theorem sich mit dem vorstehenden im Falle der Flächen vom Krümmungsmasse Null deckt, ist an sich klar. Wir betrachten daher im Folgenden nur Flächen, deren Krümmungsmass constant und von Null verschieden ist.

1.

Auf einer Fläche constanter Krümmung lässt sich bekanntlich eine Geometrie entwickeln. Für dieselbe sind die beiden Sätze grundlegend:

1. In der Geometrie auf einer Fläche constanter Krümmung gilt das Princip der Deckung der Figuren.

2. Durch zwei gegebene Punkte einer Fläche constanter Krümmung lässt sich im Allgemeinen eine und nur eine geodätische Linie legen.

Wir ziehen ferner den Begriff der Abwickelbarkeit zweier Flächen auf einander heran. Derselbe ist für das Folgende fundamental.

Schliesslich erinnern wir noch an den Satz von Gauss für den Fall der Flächen von constantem Krümmungsmasse:

Zwei Flächen von demselben constanten Krümmungsmass sind aufeinander abwickelbar.[1]

---

[1] Man vergleiche: Luigi Bianchi, Lezioni di Geometria Differenziale. Pisa 1894, Cap. VII. — Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Erste Lieferung. Leipzig 1896, Cap. VII.

Jede Fläche constanter Krümmung ist eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}=a. \qquad (1)$$

Diese Differentialgleichung gestattet, wie begrifflich klar ist, die Gruppe der Bewegungen des Raumes, also insbesondere auch die eingliedrige Gruppe

$$Xf=y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Hieraus folgt nach einem allgemeinen Theoreme Lie's, dass die erwähnte Differentialgleichung ∞^2 Integralflächen besitzt, welche von Bahncurven der infinitesimalen Transformation Xf erzeugt sind, also besitzt die Differentialgleichung ∞^2 Integralflächen, welche zugleich Rotationsflächen sind, deren Axe die z-Axe ist. Andererseits gestattet die Differentialgleichung (1) auch die eingliedrige continuirliche Gruppe

$$Zf\equiv\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Hieraus folgt, dass unsere Schar von ∞^2 Rotationsflächen in ∞^1 Scharen von je ∞^1 congruenten Flächen zerfällt. Indem wir aus jeder der letzteren einen Repräsentanten herausgreifen, erhalten wir eine Schar von ∞^1 incongruenten Flächen oder eine Rotationsfläche mit einem continuirlichen Parameter c.

Diese Flächen sind längst studirt.[1] Die Gleichungen ihrer Meridiane ergeben sich aus (1) durch zwei successive Quadraturen. Man findet

$$z=\int\sqrt{\frac{1-c+ax^2}{c-ax}}\,dx+c',$$

worin c und c' die Integrationsconstanten bedeuten.

Wir wollen nun kanonische Flächen constanter Krümmung einführen, indem wir $a=\pm 1$ und $c'=o$ setzen. Rechnen

[1] Minding, Crelle's J., Bd. 19, S. 376 ff. (1839).

wir die x etwa von dem Verzweigungspunkte $\sqrt{c}$, so erhalten wir schliesslich

$$a=+1;\quad z=\int_{\sqrt{c}}^{x}\sqrt{\frac{1-c+x^2}{c-x^2}}\,dx.$$

$$a=-1;\quad z=\int_{\sqrt{c}}^{x}\sqrt{\frac{1+c-x^2}{-c+x^2}}\,dx.$$

Mit Rücksicht auf das Folgende unterwerfen wir den Parameter der Bedingung

$$c\geqq 1.$$

Hieraus folgt: Unsere kanonischen Flächen gestatten eine unendliche discontinuirliche Gruppe von Translationen in sich. Es gibt auf der kanonischen Fläche positiver Krümmung eine Schar von grössten Parallelkreisen, auf der kanonischen Fläche negativer Krümmung eine Schar von kleinsten Parallelkreisen. Der Radius dieser Kreise ist gleich $\sqrt{c}$. Diese Scharen von Parallelkreisen sind Scharen von geodätischen Linien.

Die letztere Eigenschaft der Schaar von Kreisen erhellt sofort aus der mechanischen Bedeutung der geodätischen Linien.[1]

2.

Es sei nun auf einer Fläche constanter Krümmung ein spitzwinkliges geodätisches Dreieck gegeben. Verbindet man die Fusspunkte H, J, K der Höhen desselben durch geodätische Linien, so werden die Winkel dieses Dreieckes durch die Höhen des gegebenen Dreieckes halbiert. Der Beweis ist für den Fall einer Fläche constanter positiver Krümmung erbracht, sobald er für die Kugel erbracht ist. Dies ist aber längst geschehen.[2] Der entsprechende Beweis für Flächen constanter negativer

---

[1] Man vergleiche die Ausführungen und Figuren in Bianchi, Lezioni p. 186. — Bianchi-Lukat, Vorlesungen, Cap. 7, §. 99 und §. 103.

[2] Man vergleiche: Gudermann, Niedere Sphärik. Münster 1835. §. 68, S. 47. — Unferdinger, Das sphärische Dreieck, dargestellt in seinen Beziehungen zum Kreise. Grunert's Archiv, Bd. 29, S. 479—516 (1857). (Mitgetheilt von Herrn Dr. Karl Zelbr).

Krümmung kann mit Hilfe der Formeln der pseudosphaerischen Trigonometrie geführt werden.

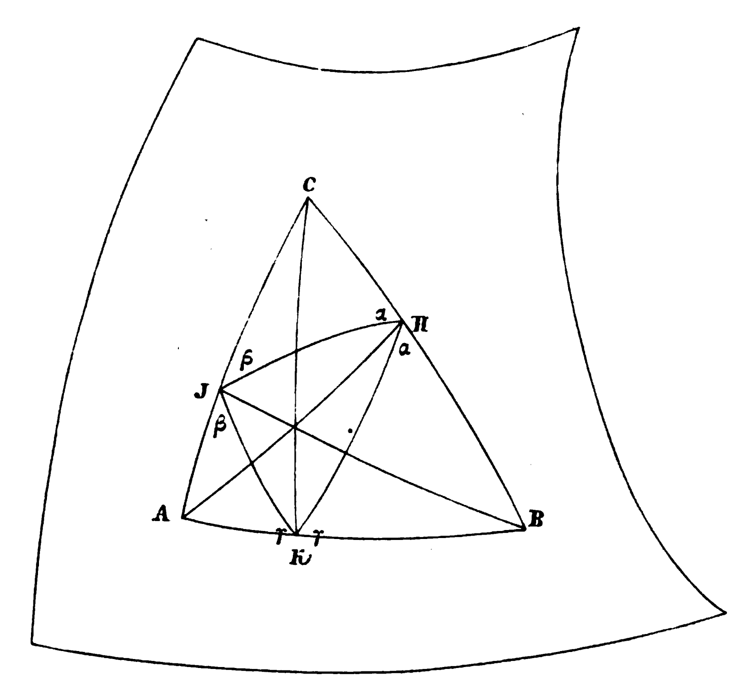


Fig. 1.

Wir wollen noch den Begriff der Umklappung eines geodätischen Dreieckes ABC um eine Seite AB definiren. Ein Dreieck ABC um die Seite AB umklappen, heisst über AB ein mit dem Dreiecke ABC symmetrisch gleiches Dreieck construiren, welches mit dem Dreieck ABC auf entgegengesetzten Seiten von AB liegt.

3.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir im Stande, den angekündigten Beweis des aufgestellten Theorems zu führen.

Es sei auf einer beliebigen Fläche, deren Krümmung a constant und von Null verschieden ist, ein spitzwinkliges geodätisches Dreieck gegeben. Wir construiren das zugehörige geodätische Dreieck der Höhenfusspunkte. Durch Ausführung

einer passenden Streckung, welche bekanntlich jede Figur in eine ähnliche überführt, können wir erreichen, dass

$$a = \pm 1$$

wird. Sodann wickeln wir das Flächenstück mit dem erhaltenen Dreiecke und seinem geodätischen Höhenfusspunkten-Dreiecke auf unsere kanonische Fläche von gleicher Krümmung ab.

Da bei dem Processe der Abwicklung zweier Flächen auf einander alle Längen und Winkel ungeändert bleiben, also auch geodätische Linien in geodätische Linien übergehen, so genügt es, den angekündigten Beweis für geodätische Dreiecke auf unseren kanonischen Flächen zu führen.

Es sei nun auf einer unserer kanonischen Flächen ein spitzwinkliges geodätisches Dreieck gegeben. Es sei u die Länge des Umfanges seines Höhenfusspunkten-Dreieckes, P die Länge eines grössten, beziehungsweise kleinsten Parallelkreises der Fläche. Ist jetzt das Verhältniss

$$\frac{P}{u}$$

rational, so operiren wir auf der gewählten Fläche. Ist dies Verhältniss dagegen für diese Fläche irrational, so wählen wir eine kanonische Fläche mit einem anderen Parameter c derart, dass eine Beziehung von der Form

$$\frac{P}{u} = \frac{2n}{m} \tag{2}$$

besteht, wo n und m ganze theilerfremde Zahlen sind. Der Parameter c bestimmt sich also aus der Gleichung

$$c = \left(\frac{nu}{m\pi}\right)^2.$$

Wir können überdies die ganzen Zahlen n, m derart wählen, dass die Gestalt einer Fläche, für welche die Gleichung (2) erfüllt ist, von jener der früheren beliebig wenig abweicht.

Wir wickeln nunmehr das Flächenstück mit dem gegebenen Dreiecke von der ersten Fläche auf die zweite ab. Ferner verschieben wir das auf der letzteren erhaltene Dreieck

unter passender Verbiegung derart, dass eine Seite seines Höhenfusspunkten-Dreieckes mit einem Bogen eines der grössten, beziehungsweise kleinsten Parallelkreises zusammenfällt.

Nun construiren wir eine Reihe von successiven Umklappungen des gegebenen Dreieckes, welche wir so wählen, dass bei jeder Umklappung eine Seite des Höhenfusspunkten-Dreieckes in den erwähnten grössten, beziehungsweise kleinsten Parallelkreis hineinfällt.

Wir erhalten auf diese Weise eine Reihe von Dreiecken:

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 \ldots$$

Diese Dreiecke haben folgende Eigenschaften:

1. Drei unmittelbar aufeinanderfolgende Dreiecke

$$\Delta_{i-1}, \Delta_i, \Delta_{i+1}$$

haben eine gemeinsame Ecke.

2. Zwei Dreiecke Δ_i und Δ_k sind congruent, wenn

$$i \equiv k \pmod 2$$

ist, und umgekehrt.

3. Von zwei Dreiecken Δ_i und Δ_{i+3} kann das eine durch Spiegelung an dem Parallelkreise und Translation längs desselben um die Strecke u mit dem anderen zur Deckung gebracht werden.

4. Zwei Dreiecke Δ_i und Δ_k lassen sich durch Translation längs des Parallelkreises mit einander zur Deckung bringen, wenn

$$i \equiv k \pmod 6$$

ist, und umgekehrt.

Aus 4) folgt vermöge der Gleichung

$$mP = 2nu:$$

Die Dreiecke Δ_{6n+1} und Δ_1 sind identisch.

Wir zeichnen nun in Δ_1 ein beliebiges geodätisches Dreieck LMN ein, wobei L beliebig auf BC, M beliebig auf CA, N beliebig auf AB gewählt sei. Wir verzeichnen auch noch in $\Delta_2, \Delta_3 \ldots$ die entsprechenden Umklappungen des Dreieckes LMN.

Wir betrachten zwei unmittelbar aufeinander folgende Umklappungen des Dreieckes LMN. Dieselben haben eine Ecke gemeinschaftlich, welche wir mit (Δ_i, Δ_{i+1}) bezeichnen wollen. Wir verbinden die Punkte

$$(\Delta_1, \Delta_2), (\Delta_2, \Delta_3), (\Delta_3, \Delta_4) \ldots (\Delta_{6n}, \Delta_1), (\Delta_1, \Delta_2)$$

durch einen auf der Fläche verlaufenden gebrochenen Linienzug, dessen einzelne Stücke Seiten von Umklappungen des geodätischen Dreieckes LMN sind.

Dieser Linienzug ist, wie aus dem Vorstehenden erhellt, geschlossen.

Greift man irgend ein Tripel von unmittelbar aufeinander folgenden Dreiecken

$$\Delta_{i-1}, \Delta_i, \Delta_{i+1}$$

heraus, so erkennt man zu Folge des oben definirten Processes des Umklappens, dass die Länge des innerhalb der Fläche des Tripels verlaufenden Stückes des gebrochenen Linienzuges dem Umfange U des Dreieckes LMN gleichkommt.

Hieraus folgt:

Die Länge des geschlossenen gebrochenen Linienzuges beträgt $2nU$.

In dem Tripel

$$\Delta_{i-1}, \Delta_i, \Delta_{i+1}$$

lässt sich das Dreieck Δ_{i-1} durch Drehung um die gemeinsame Ecke des Tripels mit dem Dreiecke Δ_{i+1} zur Deckung bringen. Hierbei fällt der der gemeinsamen Ecke gegenüberliegende Höhenfusspunkt in Δ_{i-1}, der auf dem Parallelkreise liegt, wieder in den Parallelkreis. Liegt also der Punkt $(\Delta_{i-2}, \Delta_{i-1})$ unterhalb des Parallelkreises, so liegt der Punkt $(\Delta_{i+1}, \Delta_{i+2})$ oberhalb desselben, und umgekehrt.

Jedenfalls können wir schliessen:

Der gebrochene Linienzug hat mit dem Parallelkreise wenigstens einen Punkt gemein.

Hieraus folgt aber, dass auch die Punkte des Parallelkreises, welche von dem erwähnten Punkte die Entfernung $2u, 4u, \ldots$ besitzen, auf dem gebrochenen Linienzuge liegen.

Jetzt construiren wir das Spiegelbild unserer gesammten Figuren bezüglich des Parallelkreises und verschieben es längs

desselben um die Strecke u. Der Erfolg ist, dass jetzt das Spiegelbild der Dreiecke Δ_i mit den Dreiecken Δ_i zusammenfällt. Also fällt auch das Spiegelbild des gebrochenen Linienzuges mit dem gebrochenen Linienzuge überein.

Hieraus schliesst man:

Der längs des Parallelkreises gemessene Abstand zweier unmittelbar aufeinander folgender Punkte, welche dem Parallelkreise und dem gebrochenen Linienzuge gemeinsam sind, ist höchstens gleich u.

Wir ziehen noch ein Lemma heran, dessen Beweis wir später erbringen werden:

Der Umfang des Höhenpunkten-Dreieckes eines spitzwinkligen geodätischen Dreieckes unserer kanonischen Fläche vom Krümmungsmasse $a = +1$ ist kleiner als π.

Nunmehr können wir den entscheidenden Schluss ziehen:

Die Länge des gebrochenen geschlossenen Linienzuges ist grösser als jene des m-fach gezählten Parallelkreises.

Also ist

$$2nU > mP.$$

Daher ist wegen (2)

$$2nU > 2nu.$$

Demnach folgt

$$U > u.$$

Hiermit ist der Beweis erbracht.

4.

Wir wollen nun einige Formeln, betreffend das geodätische Höhenfusspunkten-Dreieck eines spitzwinkligen geodätischen Dreieckes einer Fläche von der constanten Krümmung $a = \pm 1$ herleiten.

Zunächst drücken wir die Winkel α, β, γ durch die Winkel A, B, C des gegebenen Dreieckes aus. Die Figur ergibt durch zweimalige Anwendung des Cosinus-Satzes für $a = +1$

$$4 \cos\beta \cos\gamma \cos A + \cos 2\alpha = \cos 2\beta \cos 2\gamma - 4 \cos^2\beta \cos^2\gamma.$$

Hieraus folgt weiter

$$2\cos\beta\cos\gamma\cos A = 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma. \qquad (3)$$

Da die rechte Seite eine symmetrische Function ist, so ist es auch die linke, also

$$\frac{\cos\alpha}{\cos A}=\frac{\cos\beta}{\cos B}=\frac{\cos\gamma}{\cos C}=\lambda. \qquad (4)$$

Für λ findet man aus (3) die Gleichung

$$\lambda^2=\frac{1}{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C}.$$

Somit erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{\cos A}{\sqrt{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C}},\\ \cos\beta&=\frac{\cos B}{\sqrt{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C}},\\ \cos\gamma&=\frac{\cos C}{\sqrt{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C}}.\end{aligned}\right\}(5)$$

Ist die Fläche von der Krümmung

$$a=-1,$$

so hat man die Formeln der pseudosphärischen Trigonometrie anzuwenden. Dieselben enthalten bekanntlich die hyperbolischen Functionen der Seiten des geodätischen Dreieckes.[1] Die Gleichungen (5) gelten daher für spitzwinklige geodätische Dreiecke auf einer beliebigen Fläche von der constanten Krümmung $a=\pm 1$.

5.

Die in den Formeln (5) auftretende Quadratwurzel hat eine einfache Bedeutung. Um dies zu erkennen, ziehen wir ein Tripel von Formeln heran, welches von Unferdinger[2] her-

---

[1] Minding, Crelle's J., Bd. 20, S. 324—325. Man vergleiche die interessanten Ausführungen in Bianchi, Lezioni, Cap. XVI. Geometria pseudosferica, p. 396—415.

[2] Unferdinger, a. a. O. S. 481.

rührt. In unserer Bezeichnungsweise lauten diese Formeln, wenn 2σ den Umfang des dem Dreiecke ABC eingeschriebenen geodätischen Höhenfusspunkten-Dreieckes bezeichnet, so:

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \cos\alpha\cos\sigma, \\ \cos B &= \cos\beta\cos\sigma, \\ \cos C &= \cos\gamma\cos\sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Sie gelten für jedes spitzwinklige geodätische Dreieck auf einer beliebigen Fläche von der constanten Krümmung $a = 1$.

Durch den Vergleich der Formeln (5) und (6) erhält man die elegante Beziehung

$$\cos\sigma = \sqrt{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C}. \qquad (7)$$

Vermöge der bekannten Identität

$$\begin{aligned} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C &\equiv \\ \equiv 1 + 4\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)&, \\ 2S = A+B+C&, \end{aligned}$$

erhält man

$$\sin\sigma = 2\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}. \qquad (8)$$

Bezeichnet R den Radius des dem geodätischen Dreiecke ABC umschriebenen geodätischen Kreises,[1] so ist bekanntlich

$$\operatorname{tg} R = \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}. \qquad (9)$$

Aus den Gleichungen (8) und (9) folgt daher

$$\operatorname{tg} R \sin\sigma = -2\cos S. \qquad (10)$$

Für spitzwinklige geodätische Dreiecke auf einer Fläche von der constanten Krümmung

$$a = -1$$

---

[1] Über das Zusammenfallen der beiden Definitionen des geodätischen Kreises für den Fall einer Fläche constanter Krümmung vergleiche man Bianchi, Lezioni, p. 157, Note. — Bianchi-Lukat, p. 162, Note.

findet man durch elementare, aber ziemlich umständliche Rechnungen, die wir hier unterdrücken, die beiden Formeln

$$\sin h(\sigma) = 2\sqrt{\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos S-C)}, \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} h(R) = \sqrt{\frac{\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}. \quad (12)$$

Demnach ergibt sich die Beziehung

$$\operatorname{tg} h(R) \sin h(\sigma) = 2\cos S. \quad (13)$$

Will man aus den Formeln (10) und (13) die entsprechende Formel für den Fall der Flächen von dem constanten Krümmungsmasse $a = 0$ herleiten, so muss man zunächst den Inhalt F des geodätischen Dreieckes einführen. Man findet dann aus beiden Gleichungen die längst bekannte Beziehung

$$F = R\sigma.$$

Diese Gleichung gilt wie die Gleichungen, aus denen sie hergeleitet wurde, nur für spitzwinklige Dreiecke. Zugleich folgt hieraus, dass in den Gleichungen (10) und (13) die Vorzeichen richtig gewählt sind.

Wenn wir unsere Ergebnisse zusammenfassen, so erhalten wir das folgende Theorem.

Theorem.

Ist auf einer beliebigen Fläche von der constanten Krümmung $a = \pm 1$ ein spitzwinkliges geodätisches Dreieck gegeben, ist ferner $2S$ die Summe seiner Winkel, 2σ der Umfang seines geodätischen Höhenfusspunkten-Dreieckes, R der Radius des dem gegebenen Dreiecke umbeschriebenen geodätischen Kreises, so besteht zwischen diesen Grössen die Beziehung

$$\operatorname{tg} R \sin \sigma = -2\cos S,$$

wenn die Krümmung der Fläche

$$a = +1$$

ist, dagegen die Beziehung

$$\operatorname{tg} h(R) \sin h(\sigma) = +2\cos S$$

wenn die Krümmung der Fläche

$$a = -1$$

ist.

6.

Der Ausdruck

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C$$

kann, wie man leicht zeigt, für reelle Werthe der Variabeln $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ dann und nur dann verschwinden, wenn gleichzeitig

$$\cos A = 0$$
$$\cos B = 0$$
$$\cos C = 0$$

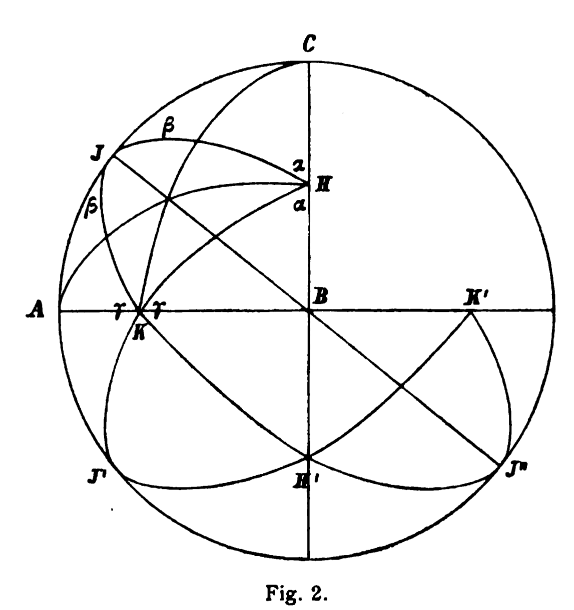


Fig. 2.

ist. Also ist für ein spitzwinkliges Dreieck $2\sigma < \pi$. Hiermit ist das in Artikel 4 erwähnte Lemma bewiesen. Zugleich ergibt sich ein von Unferdinger herrührendes Theorem.[1]

---

[1] Unferdinger, a. a. O. S. 490.

Theorem von Unferdinger.

Der Umfang der ∞^2 sphärischen Höhenfusspunkten-Dreiecke eines dreirechtwinkligen sphärischen Dreieckes ist constant und gleich π.

Die Gleichung (3) in Artikel 4 liefert in diesem Falle die interessante Beziehung

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1. \tag{14}$$

Das zuletzt erwähnte Theorem lässt einen überraschend einfachen synthetischen Beweis zu. Wir klappen das Dreieck zweimal um. Der Umfang des gewählten sphärischen Höhenfusspunkten-Dreieckes ist dann durch einen grössten Halbkreis dargestellt. Hiermit ist der Beweis erledigt.

7.

Die von Herrn H. A. Schwarz eingeführte Methode der Umklappung wollen wir benützen, um das folgende Theorem zu beweisen.

Theorem.

Es sei auf einer beliebigen Fläche constanter Krümmung ein Sector eines geodätischen Kreises mit spitzem Centriwinkel gegeben. Dem Sector lässt sich eine continuirliche Schaar von ∞^1 geodätischen Dreiecken einbeschreiben, bei denen Winkelgleichheit herrscht. Der Umfang dieser Dreiecke ist constant. Jedes andere dem Sector eingeschriebene Dreieck hat einen grösseren Umfang.

Der Beweis ist einfach.[1] Durch jedes Linienelement des Bogens BC ist eine geodätische Linie der Fläche bestimmt. Wir schliessen den Fall aus, dass der gewählte geodätische Kreis zugleich eine geodätische Linie der Fläche ist. Ferner können wir uns auf den Fall beschränken, dass das geodätische Dreieck $AB\Gamma$ spitzwinkelig ist.

[1] Der Einfachheit und Deutlichkeit halber wurde die Figur für den Fall der Ebene entworfen; der Text bezieht sich dagegen auf den Fall einer beliebigen Fläche constanter Krümmung. Dasselbe gilt von Figur und Text in Artikel 8.

Dann ist das geodätische Höhenfusspunkten-Dreieck des letzteren ein dem Sector eingeschriebenes geodätisches Dreieck, bei welchem Winkelgleichheit herrscht. Lässt man den Punkt H auf dem Kreisbogen variiren, so erhält man offenbar alle derartigen Dreiecke.

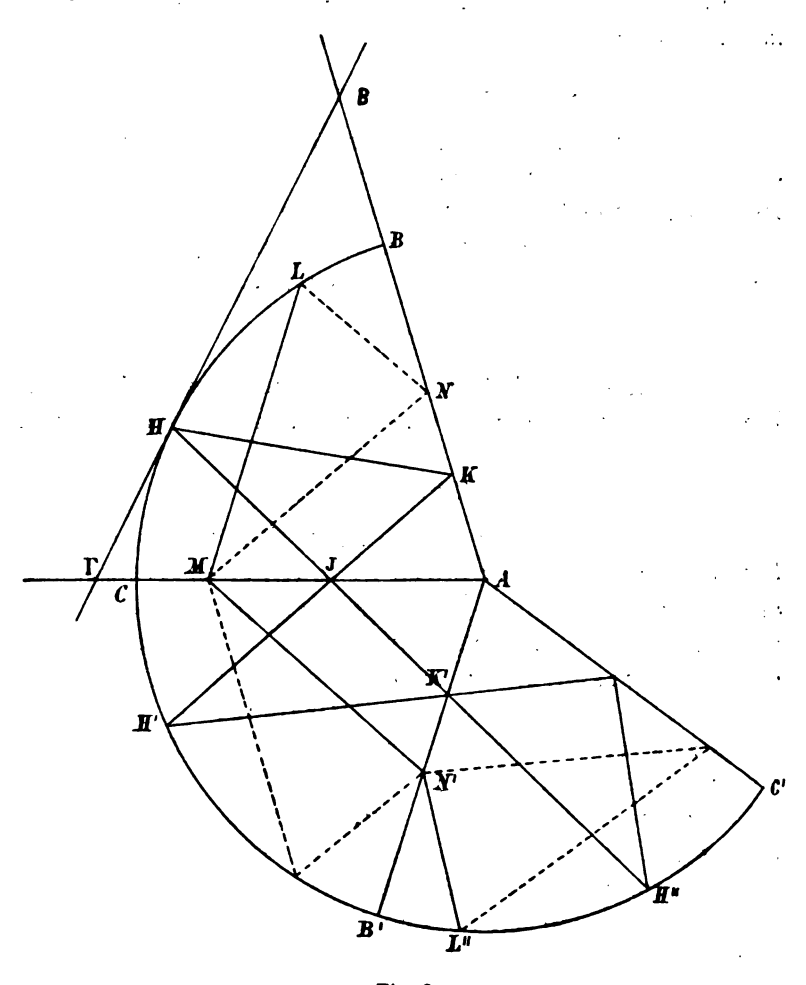


Fig. 3.

Durch zweimalige Umklappung lässt sich der Umfang eines solchen Dreieckes durch den Bogen $HIK'H''$ einer geodätischen Linie der Fläche darstellen. Man sieht sofort, dass der Bogen HH'' für alle Dreiecke der genannten Schaar constant ist.

Wählt man den Punkt C beliebig auf BC, M beliebig auf CA, N beliebig auf AB, so wird der Umfang des geodätischen Dreieckes LMN durch den gebrochenen Linienzug $LMN'L''$ dargestellt. Dreht man jetzt das Flächenstück $LCL''N'M$ unter passender Verbiegung derart um den Punkt A, dass der Punkt L mit dem Punkte H zusammenfällt, so fällt, da der Bogen $H''L''$ mit dem Bogen HL zur Deckung gebracht werden kann, auch L'' mit H'' zusammen. Hiermit ist auch der zweite Theil des aufgestellten Theorems bewiesen.

8.

Schliesslich beweisen wir noch folgendes Theorem.

Theorem.

Es sei auf einer beliebigen Fläche constanter Krümmung ein Sector eines geodätischen Kreisringes gegeben. Sind R und r die Radien der beiden geodätischen Kreise, T der Winkel des Sectors, besteht ferner die Beziehung

$$\begin{aligned} &\text{für } a = o: && R \cos T \geqq r, \\ &\text{für } a = +1: && \operatorname{tg} R \cos T \geqq \operatorname{tg} r, \\ &\text{für } a = -1: && \operatorname{tg} h(R) \cos T \geqq \operatorname{tg} h(r), \end{aligned}$$

so gibt es eine continuirliche Schaar von ∞^1 dem gegebenen Kreisring-Sector eingeschriebenen geodätischen Vierecken, bei denen Winkelgleichheit herrscht. Der Umfang dieser Vierecke ist constant und gleich der zweifachen Länge einer geodätischen Diagonale des geodätischen Kreisring-Sectors. Jedes andere dem Kreisring-Sector eingeschriebene Viereck hat einen grösseren Umfang.

Den Beweis führen wir wieder vermittelst zweimaliger Umklappung. Es sei $\alpha\beta\gamma\delta$ ein Viereck der genannten Schaar. Der Umfang desselben sei u. Derselbe wird durch die Summe der geodätischen Strecken $\gamma\alpha'$ und $\alpha'\gamma''$ dargestellt. Zeichnet man nun ein geodätisches Viereck $abcd$ in das gegebene Viereck $ABCD$ ein, wobei a beliebig auf AB, b beliebig auf BC, c beliebig auf CD, und d beliebig auf DA gewählt ist, so wird der Umfang

U des ersteren durch den Linienzug $cda'b'c''$ dargestellt. Dreht man nun das Flächenstück

$$cc'c''b'a'd$$

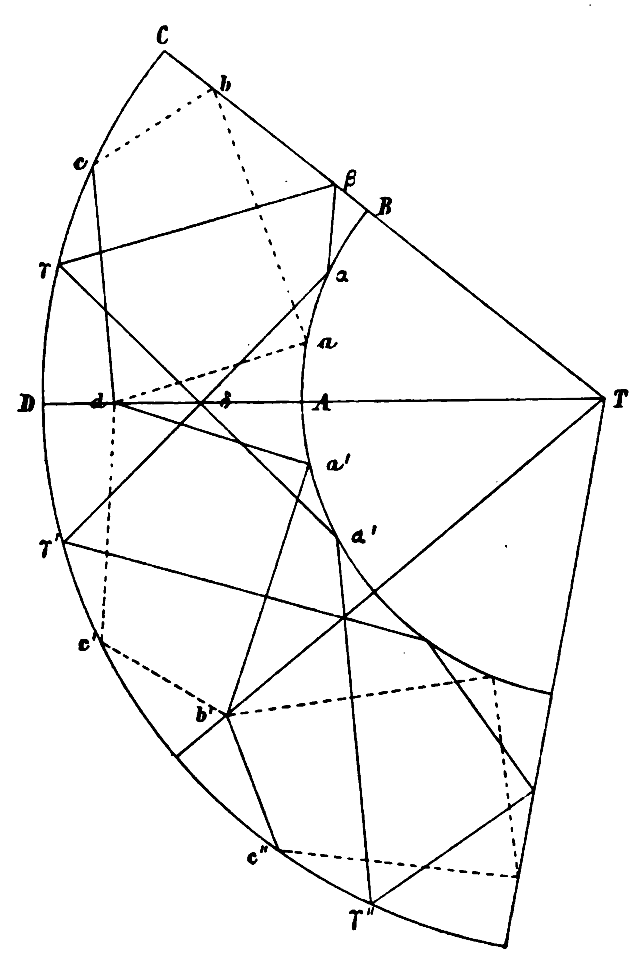


Fig. 4.

unter passender Verbiegung derart auf der Fläche um den Punkt T, dass c mit γ zusammenfällt, so fällt auch c'' mit γ'' zusammen. Zieht man die geodätischen Bogen ca' und $a'c''$, so ist

$$\begin{aligned} cd + da' &\geqq ca', \\ a'b' + b'c'' &\geqq a'c''. \end{aligned} \tag{15}$$

Vermöge der Winkelgleichheit an der Ecke α' und zu Folge der gemachten Voraussetzung ist ferner

$$ca' + a'c'' \geqq \gamma\alpha' + \alpha'\gamma''. \tag{16}$$

Da das Viereck $abcd$ nicht der Schaar der Vierecke $\alpha\beta\gamma\delta$ angehört, so enthalten die Beziehungen (15) und (16) mindestens eine Ungleichung.

Hieraus ergibt sich

$$U > u.$$

Aus der Figur lässt sich auch eine einfache Construction des geodätischen Viereckes $\alpha\beta\gamma\delta$ ablesen, wenn die Ecke α gegeben ist. Hiermit ist auch die Existenz der continuirlichen Schaar von ∞^1 Vierecken $\alpha\beta\gamma\delta$ nachgewiesen.

Im Falle der Flächen vom Krümmungsmasse $a = 0$ kann man einen einfachen Grenzübergang vollziehen. Wir lassen den Punkt T in das Unendliche rücken. Dann geht das geodätische Kreisbogenviereck in ein geodätisches Rechteck über. Ferner geht die Beziehung

$$R \cos T \geqq r$$

in eine Identität über. Die Schaar der Vierecke $\alpha\beta\gamma\delta$ geht in eine Schaar von Parallelogrammen über. Man erhält also ein entsprechendes Theorem, welches für beliebige geodätische Rechtecke der auf die Ebene abwickelbaren Flächen gilt.[1]

---

[1] R. Sturm. Bemerkungen und Zusätze zu Steiner's Aufsätzen über Maximum und Minimum. Crelle's J. Bd. 96, S. 59.

Weitere Beiträge zu den Grundlagen für eine Theorie der täglichen Oscillation des Barometers

von

J. Hann,

w. M. k. Akad.

Die Veranlassung zu den nachfolgenden Untersuchungen gaben mir einige Reihen stündlicher Aufzeichnungen des Luftdruckes an Bord österreichischer Kriegsschiffe auf hoher See, die grösstentheils auf meine Anregung hin ausgeführt worden sind. Ich verdanke diese Materialien theils den Herren Schiffsofficieren selbst, theils der hohen Marine-Section des k. und k. Reichs-Kriegs-Ministeriums, welche unter der Leitung des Admirals von Sterneck und dem Vorstande seines Präsidial-Bureaus, Contreadmiral Josef v. Lehnert, die Reisen der österreichischen Missionsschiffe nach jeder Richtung hin nach Möglichkeit der Wissenschaft nutzbar zu machen gewusst und jeder Anregung von wissenschaftlicher Seite das bereitwilligste Entgegenkommen bewiesen hat. Diese Abhandlung sei darum der dankbaren Erinnerung an diese beiden auch für die Pflege der Wissenschaft in Österreich hochverdienten Männer gewidmet.

Die Wichtigkeit stündlicher Luftdruckbeobachtungen an Bord von Schiffen auf hoher See liegt darin, dass man hoffen darf, durch dieselben die normalen Verhältnisse der ganztägigen Barometerschwankung feststellen zu können, was ausserdem nur noch von Beobachtungen auf ganz kleinen flachen Inseln in grosser Landferne zu erwarten ist.

In meinen früheren Abhandlungen habe ich nachgewiesen, dass sich die tägliche Barometerschwankung, wie sie sich

unmittelbar aus den Stundenmitteln des Luftdruckes ergibt, trotz ihrer Vielgestaltigkeit durch Zerlegung derselben in ihre harmonischen Constituenten stets in einen rein gesetzmässigen Theil, die halbtägige Oscillation, welche bis über die mittleren Breiten hinauf auch den Hauptbestandtheil derselben bildet, und in derselben aufgesetzte Druckschwankungen von anderen Perioden, von denen die ganztägige Schwankung weitaus die Hauptrolle spielt, zerlegen lässt.[1]

I. Die halbtägige Barometer-Oscillation, die doppelte tägliche Druckwelle, wie sie so schön mit fast symmetrischen

---

[1] Hann, Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers. Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. LV., 1889. Etwas später erschien die schöne, gründliche Arbeit von Alfred Angot: Étude sur la marche diurne du Baromètre. Annales du Bureau Central Mét. de France. 1887, T. I. Mémoires. — Beide Arbeiten behandeln die gesetzmässigen Erscheinungen der doppelten täglichen Oscillation und zum Theil auch der ganztägigen Oscillation an der Erdoberfläche. — Hann: Einige Resultate stündlicher meteorologischer Beobachtungen auf dem Gipfel des Fuji in Japan. Diese Sitzungsber., December 1891. Weitere Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers. Denkschriften, Bd. LIX, Wien, 1892. Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten. Diese Sitzungsber., Jänner 1894. — In diesen drei Abhandlungen habe ich namentlich die Theorie der täglichen Barometerschwankung auf Berghöhen und Berggipfeln entwickelt, welch letztere früher die Auffassung des ganzen Phänomens erschwert und verdunkelt und vielfach zu haltlosen Theorien Veranlassung gegeben hat. Ich habe daselbst auch gezeigt, wie man aus der täglichen Druckschwankung auf Bergen mittelst einer einfachen und eleganten Methode die wahre tägliche Temperaturvariation in der untenliegenden Luftschichte nach Amplitude und Phasenzeit ableiten kann, und dass das Hauptergebniss dieser Rechnung darin besteht, dass die Amplituden der wahren täglichen Wärmeschwankung in der freien Atmosphäre viel kleiner sind, als sie die directen Ablesungen der Thermometer auf Berggipfeln angeben, und dass die tägliche Wärmeschwankung zu nicht sehr grossen Höhen der freien Atmosphäre hinaufreichen dürfte, ein Resultat, welches die neueren Ballonfahrten zum Theil schon bestätigt haben. — Hann: Der tägliche Gang des Barometers an heiteren und trüben Tagen, namentlich auf Berggipfeln. Diese Sitzungsber., Juni 1895. Die Verschiedenheit im täglichen Gange des Barometers an heiteren und trüben Tagen, welche Lamont zuerst untersucht hat und welche neuerlich namentlich Herr Buchan durch Berechnung eines reicheren Beobachtungsmateriales detaillirter zur Darstellung gebracht hat, habe ich auf die Verschiedenheit der Amplituden und der Phasenzeiten der ganztägigen Luftdruckschwankung bei heiterem und trübem Wetter zurückgeführt und auch die wahrscheinlichste Ursache dieser Modification der ganztägigen Druckwelle durch die jeweilige Witterung aufgedeckt.

Wellenzügen in den Aufzeichnungen continuirlich registrirender Barometer an den äquatornahen Stationen Tag für Tag zur unmittelbaren Anschauung kommt, in mittleren und höheren Breiten aber in der unmittelbaren Erscheinung örtlich fast nicht mehr zu erkennen ist, ja ganz unterdrückt erscheinen kann, unterliegt ganz einfachen Gesetzen, wird in Amplitude und Phasenzeit von der Witterung nicht beeinflusst und erinnert durch die Constanz dieser Elemente unter gleicher Breite und ihre gesetzmässige Variation nach Jahreszeit und geographischer Breite an das Verhalten kosmischer Phänomene.[1]

Die Grösse der Amplitude der halbtägigen Barometerschwankung nimmt, wie es scheint, mit zunehmender geographischer Breite nach ähnlichen Gesetzen ab, wie theoretisch die Gravitationsfluth der Oceane. Angot und ich haben entsprechende Interpolationsformeln aus den beobachteten Amplituden unter verschiedenen Breiten abgeleitet. Herr Dr. A. Schmidt (Gotha) hat mit Rücksicht auf die Theorie der Kugelfunctionen dem Gesetz der Abnahme der Amplitude mit der geographischen Breite die folgende einfache Form gegeben:[2]

Variation der Amplitude (a_2) der doppelten täglichen Oscillation mit der geographischen Breite (φ).

$$a_2 = (0\cdot988—0\cdot573 \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi.$$

Diese Gleichung gibt die unter verschiedenen Breiten bis zu 65° beobachteten Grössen der Amplituden fast genau wieder.

---

[1] Die ganze folgende Discussion gründet sich auf die Darstellung der täglichen Barometerschwankung durch die harmonische Reihe

$$a_1 \sin(A_1+x)+a_2(\sin A_2+2x)+a_3(\sin A_3+3x);$$

die Coëfficienten a sind also die Amplituden, die Winkelconstanten A die Repräsentanten der Phasenzeiten der ganztägigen, halbtägigen und dritteltägigen Barometer-Oscillation, durch deren Interferenz die beobachtete tägliche Barometerschwankung zu Stande kommt. Die Zeit x ist von Mitternacht an gezählt.

Dies will ich vorausschicken, um mich im Folgenden stets kurz fassen zu können. Angot wählt Cosinus-Reihen, wie dies auch vielfach in England geschieht; die Winkelconstanten sind dann um 90° verschieden.

[2] Meteorologische Zeitschrift, Bd. XXV (1890). S. 185.

Meine Mittelzahlen, nach denen Herr Schmidt die Coëfficienten berechnet hat, werden aber einer Revision bedürfen, zu welcher gerade auch die vorliegende Abhandlung Anlass und einige Anhaltspunkte bieten dürfte. Sie enthält einige Hinweise, wo Störungen der Amplitude a_2 zu erwarten sind und in welcher Richtung dieselben liegen, wenn auch über die Grösse derselben wohl leider keine Auskunft wird gegeben werden können. Es wird aber von Vortheil sein, Localitäten, wo solche Störungen vorausgesetzt werden müssen, bei empirischer Ableitung der Amplituden für die verschiedenen Breitegrade nicht zu benützen. Es wird auch nöthig sein, noch für zahlreichere Orte, namentlich der südlichen Hemisphäre, die harmonischen Constituenten der täglichen Barometerschwankung zu berechnen, ja Barographen noch an zahlreichen, gut vertheilten Orten nicht bloss aufzustellen, sondern auch, was leider meist unterlassen wird, deren Aufzeichnungen zu reduciren und die Ergebnisse bekannt zu machen.[1]

Sehr bemerkenswerth ist der jährliche Gang der Grösse der Amplitude der halbtägigen Oscillation. Derselbe ist von den irdischen Jahreszeiten unabhängig, indem er in beiden Hemisphären der gleiche ist. Die Hauptmaxima treten zu den Äquinoctien ein, das Hauptminimum im Juni und Juli, ein zweites, viel kleineres Minimum fällt auf December und Jänner.

Auf beiden Hemisphären ist die Amplitude der halbtägigen Barometer-Oscillation zur Zeit des Periheliums der Erde grösser, als zur Zeit des Apheliums, zur letzteren tritt das absolute Minimum derselben ein. Das ist ein weiterer kosmischer Charakterzug der täglichen Barometerschwankung.

Für die Tropenstationen erhält man die Gleichung ($x = 0$ für Jänner):

Jährlicher Gang der Amplitude der doppelten täglichen Oscillation.

$$0 \cdot 070 \sin (96 \cdot 4 + x) + 0 \cdot 060 \sin (293 \cdot 4 + 2x).$$

[1] In meiner oben citirten Abhandlung »Weitere Beiträge etc.«, sowie in der vorliegenden Abhandlung ist neues Material zur Berechnung der Variation von a_2 mit der geographischen Breite enthalten.

In höheren Breiten bleiben die Phasenzeiten dieser Variation die gleichen, nur die Amplituden werden kleiner.[1]

Aus meinen Bestimmungen ergaben sich folgende Correctionen für die aus einzelnen Monaten berechneten Amplituden (innerhalb der Tropen) auf ein Jahresmittel, d. i. auf die wahre mittlere Amplitude, die zuweilen von Nutzen werden können.[2]

Correctionen für a_2 auf ein Jahresmittel.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
—·014	—·049	—·077	—·048	·035	·113
Juli	**August**	**September**	**October**	**November**	**December**
·125	·063	—·020	—·063	—·049	—·016

Örtliche Störungen der Grösse der Amplitude und der Phasenzeit der doppelten täglichen Oscillation. Diese

---

[1] Angot hat versucht, die Änderungen von a_2 mit Breite und Jahreszeit in einem Ausdruck zusammenzufassen. Bezeichnet r den Radius Vector oder die Distanz der Sonne, δ die Declination derselben, φ die geographische Breite, so kann man setzen:

$$a_2 = 0{\cdot}926 \frac{\cos^2 \delta}{r^2} \cos^4 \varphi \cos(154^\circ + 2x).$$

[2] Innerhalb der Wendekreise zeigt übrigens auch die gesammte tägliche Barometerschwankung, wie sie ohne Zerlegung sich direct aus den Beobachtungen ergibt, die gleiche jährliche Periode. Nimmt man als Maass der Grösse der täglichen Variation des Barometers die mittlere Ordinate der Tagescurve des Luftdruckes (Mittel aus den Abweichungen der Stundenwerthe vom Tagesmittel ohne Rücksicht auf das Zeichen), so erhält man:

Jährliche Periode der mittleren Grösse der beobachteten täglichen Variation des Barometers zwischen den Wendekreisen (*mm*)

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
0·58*	0·62	**0·64**	**0·64**	0·58	0·54	0·54*	0·57	0·60	**0·62**	0·61	0·59

Störungen sind im Allgemeinen gering und noch wenig untersucht. Die vorliegende Abhandlung enthält einen kleinen Beitrag dazu (im Abschnitte: »Tägliche Barometerschwankung auf Inseln«), einen anderen, den Einfluss der Erhebung der Station auf Hügeln und Bergen betreffend, habe ich früher geliefert und die Erscheinung auf ihre Ursache zurückgeführt.

An den Küsten, auf den Inseln und auf Bergen erscheint die Amplitude a_2 gegen den normalen, der Breite und der Seehöhe entsprechenden Werth vermindert und der Eintritt der Extreme (die Fluthzeit) verzögert, namentlich im Sommer. In den Tropen ist dieser Einfluss der Lage gering, er nimmt mit der Breite zu, wohl im Verhältniss der Abnahme von a_2 selbst.

Auf Bergen kann man die Erscheinung am klarsten auf ihre Ursache zurückführen. Mit zunehmender Seehöhe sollte die Amplitude a_2 gerade im Verhältniss des Luftdruckes (rund im Verhältniss $b:760$) abnehmen; das trifft auch nahe zu (siehe später die beobachteten und berechneten Amplituden für Montblanc und Pikes Peak), aber die beobachteten a_2 sind stets etwas kleiner, und wie schon bemerkt, zugleich die Phasenzeit verspätet (die Winkelconstante A_2 verkleinert). Ich habe gezeigt, wie das zu Stande kommt.

Die tägliche Wärmeschwankung in der unter einer Bergstation liegenden Luftschichte bewirkt eine entsprechende periodische Hebung und Senkung der Flächen gleichen Druckes in der Höhe und damit eine Druckschwankung daselbst, die ich kurzweg »thermische Druckschwankung« nennen will und die sich auf die allgemeine tägliche Barometerschwankung in der Höhe superponirt. Der Hauptsache nach ist diese thermische Druckschwankung natürlich eine ganztägige und wird daher später noch besonders in Betracht gezogen werden müssen. Die doppelte tägliche Oscillation wird von dieser natürlich nicht beeinflusst. Die tägliche Wärmewelle in der unterliegenden Luftschichte ist aber nicht symmetrisch zu beiden Seiten des Wellenthales oder Wellenberges, sie hat daher auch eine, wenn auch recht kleine harmonische Constituente von halbtägiger Periode, der in der Höhe eine kleine halbtägige thermische Druckwelle entsprechen muss. Die Grösse der Amplitude dieser halbtägigen Druckwelle beträgt ungefähr nur ein Zehntel der

Grösse der ganztägigen, also zumeist nur einige Hundertel des Millimeters. Die doppelte tägliche Barometer-Oscillation in der Höhe wird daher nicht stark beeinflusst, aber doch in ganz systematischer Weise, wie folgende Überlegung zeigt.

Die Form des halbtägigen Antheiles der täglichen Wärmeschwankung in den unteren Luftschichten ist, wie ich gezeigt habe, folgende:

$$+p_2' \cos 2x + q_2' \sin 2x \quad \text{oder} \quad a_2' \sin(A_2' + 2x);$$

p' und q' sind stets positiv, A_2' liegt desshalb im ersten Quadranten, a_2' beträgt nur Zehntel Grade. Die entsprechende Druckschwankung in der Höhe h, wo der Luftdruck b ist, wird durch Multiplication von p' und q' oder von a_2' mit dem Quotienten $bh : RT^2$ erhalten, wo R und T die aus der Wärmelehre bekannte Bedeutung haben.

Die halbtägige Oscillation des Barometers hat aber die Form (wenn p und q als unbezeichnete Zahlenwerthe genommen werden)

$$+p_2 \cos 2x - q_2 \sin 2x \quad \text{oder} \quad a_2 \sin(A_2 + 2x);$$

A_2 liegt stets im zweiten Quadranten und p ist stets kleiner als q. Die resultirende Druckschwankung in der Höhe ergibt sich durch Addition dieser beiden Gleichungen.

Man sieht nun deutlich, dass die Superposition der ersten (der thermischen) Druckwelle auf die normale doppelte tägliche Oscillation des Barometers in der Höhe darin besteht, dass p_2 vergrössert, q_2 verkleinert wird; die Werthe nähern sich dadurch einander. Der resultirende Hilfswinkel ($p_2 : q_2 = v_2$) wird also grösser (nähert sich mehr 45°) und die Winkelconstante A_2 (d. i. $180° - v_2$) wird kleiner; die Phasenzeit verspätet sich in der Höhe etwas. In welchem Verhältniss und ob überhaupt a_2 verkleinert wird, hängt von der Grösse von p_2' und q_2' ab; da p_2 vergrössert, q_2 verkleinert wird, ist die Änderung von a_2 im Allgemeinen gering. Die Amplituden der halbtägigen thermischen Druckwelle sind nur Bruchtheile (zumeist etwa nur der 10. Theil) der normalen halbtägigen Barometer-Oscillation in der betreffenden Höhe.

Würde es uns möglich sein (was leider nicht zutrifft) durch unsere Thermometerablesungen den wahren Gang der Luft-

temperatur in der einer Höhenstation unterliegenden Luftschichte festzustellen, so würden wir in der Lage sein, den Einfluss der thermischen Druckschwankung auf den täglichen Barometergang an der Höhenstation genau zu berechnen und letzteren mit Rücksicht darauf zu corrigiren. Im Allgemeinen geben aber die Beobachtungen die Amplituden der täglichen Temperaturvariation in der Luftschichte zu gross und die Phasenzeiten etwas verfrüht.

Der Einfluss der Land- und Seewinde, d. i. der periodischen Luftübertragung vom Lande nach der See und umgekehrt in der täglichen Periode, hat nun ganz den gleichen Einfluss auf die doppelte tägliche Barometer-Oscillation an Küsten und auf Inseln (wie aus dem Nachfolgenden sich ergeben wird), wie sie die periodische Hebung der Flächen gleichen Druckes auf den täglichen Barometergang auf Bergen hat. Die Amplitude a_2 wird (und zwar oft recht erheblich) verkleinert, die Phasenzeit verspätet sich (die Winkelconstante A_2 wird gegen den ersten Quadranten zurückgedreht). Die periodische Vorlagerung der Luftmassen zwischen Land und See scheint demnach (obgleich ihr Haupttheil natürlich eine ganztägige Periode hat) einen kleinen Bestandtheil von halbtägiger Periode zu haben, der eine ähnliche Form hat, wie sie oben für die thermische Druckwelle an den Höhenstationen nachgewiesen werden konnte.

Würden wir die normalen Verhältnisse der Barometerschwankung für die betreffenden Küsten- und Inselstationen genauer feststellen können, so würden wir in der Lage sein, die periodischen Verlagerungen der Luftmassen, welche den Land- und Seewinden zu Grunde liegen, ganz genau zu berechnen.

Umgekehrt scheint es, dass in den mittleren Breiten, dort, wo in Gebirgsthälern (Bozen, Klagenfurt, Death Valley in Californien etc.) die ganztägige Barometerschwankung eine auffallende Grösse erreicht, auch die Amplitude der doppelten täglichen Oscillation etwas vergrössert wird, die Phasenzeit erscheint dagegen kaum modificirt. Es wären aber noch eingehendere Untersuchungen nöthig, um dies als eine Thatsache hinstellen zu können. Wenn sie als solche sich herausstellen sollte, so müsste man annehmen, dass die periodische tägliche

Umlagerung der Luftmassen, welche den Berg- und Thalwinden zu Grunde liegt, auch einen kleinen Bestandtheil von halbtägiger Periode hat, der aber eine andere Form besitzt als jene, von der wir oben gesprochen haben.

Die mittlere Phasenzeit der doppelten täglichen Oscillation an der Erdoberfläche ist in der Gleichung a_2 sin (A_2+2x) durch die Winkelconstante $A_2 = 155°$ (Angot nimmt 154°) gegeben (Zeit von Mitternacht an gezählt). Dies entspricht einer Epoche der ersten Fluth um 9^h 50^m Vormittags. In höheren Breiten scheint sich die Fluth etwas zu verspäten, der Mittelwerth für 50° N ist etwa 147° (Verspätung circa eine Viertelstunde). Es gibt aber auch manche örtliche und systematische Abweichungen, die bisher noch nicht näher untersucht worden sind.[1]

Die jährliche Periode der Phasenzeit der doppelten täglichen Oscillation habe ich in meiner ersten Abhandlung untersucht (S. 42 Sep., S. 90 im LV. Bande der Denkschriften); in beiden Hemisphären treten die Wendestunden etwas früher ein im Winter und etwas später im Sommer.

II. Die dreimalige tägliche Oscillation des Barometers. Wenn man in der Zerlegung des complexen Phänomens der täglichen Barometerschwankung in die harmonischen Constituenten derselben weitergeht bis zum dreifachen des veränderlichen Winkels, so findet man, dass diese Constituente nur mehr eine sehr kleine Amplitude hat, deren Grösse im Jahresmittel zwischen 0·02 und 0·05 *mm* liegt, während die Phasenzeit durch die Winkelconstante 350° bis 360° bestimmt wird. Sie hat also etwa die allgemeine Form:

$$0 \cdot 04 \sin(355° + 3x);$$

Die Winkelconstante A_3 ist an allen Orten nahe constant, die Amplitude a_3 nimmt mit der Breite ein wenig ab.

Die bemerkenswertheste Erscheinung der dreimaligen täglichen Oscillation des Barometers (mit der Periodendauer von 8 Stunden) ist aber die ausgeprägte und überall ganz gleichmässige jährliche Periode der Amplitude a_3 und der Phasen-

---

1. Über die Verhältnisse in hoher Breite sind die Ausführungen von Dr. A Schmidt lehrreich. Meteorol. Zeitschrift, 1890, S. 183.

zeit A_3, was bei dem geringen Betrage dieser Constituente besonders auffallend ist. Die Erklärung liegt wohl darin, dass es fast keine meteorologische Erscheinung gibt, die eine achtstündige Periode hat, wesshalb die achtstündige Barometerschwankung trotz ihrer kleinen Amplitude fast ungestört bleibt.

Die Maxima im Betrage der Amplitude a_3 fallen in beiden Hemisphären auf Winter (Hauptmaximum) und Sommer, die Minima auf die Äquinoctien. Cole macht darauf aufmerksam, dass die Phasenzeit sich an allen Orten zur Zeit der Äquinoctien gerade umkehrt; dadurch erklären sich also wohl auch die Minima der Amplituden zu dieser Zeit.

Die dritte harmonische Constituente der täglichen Barometerschwankung ist durch ihren überaus constanten Charakter ein für die Theorie sehr beachtenswerther Bestandtheil der täglichen Barometerschwankung.[1]

III. Die ganztägige Barometerschwankung. Die vorstehenden Erörterungen über die allgemeinen Eigenschaften der beiden constanten Bestandtheile der täglichen Barometerschwankung, welche etwas von der Natur der kosmischen Erscheinungen an sich haben, schienen mir nöthig, um meine Bestrebungen, auch einen constanten Theil der ganztägigen Barometerschwankung genauer feststellen und beschreiben zu können, in das rechte Licht zu stellen.

Die ganztägige Barometerschwankung unterliegt den grössten Störungen, weil ja alle meteorologischen Erscheinungen der Hauptsache nach eine tägliche Periode haben und auf die tägliche Luftdruckschwankung Einfluss nehmen. Alle örtlichen Modificationen der meteorologischen Vorgänge, sowie alle zeitlichen Änderungen der Witterung nehmen Einfluss auf die ganztägige Constituente der täglichen Barometerschwankung. Dieselbe trägt desshalb auch die deutlichen Spuren aller örtlichen und zeitlichen Unregelmässigkeiten der meteorologischen Erscheinungen, wesshalb benachbarte Orte grosse Verschiedenheiten sowohl in der Amplitude, wie in der Phasenzeit der

---

[1] M. s. meine oben citirte Abhandlung. S. [91]; ferner Angot, Étude sur la marche diurne du baromètre, p. 325—336, und Cole, The diurnal variation of barometric pressure; U. S. Weather bureau. Bulletin N. 6, Washington, 1892, oder Meteorol. Zeitschrift 1894, S. 23.

ganztägigen Barometerschwankung aufweisen können. Die jährliche Periode ihrer Amplituden, wie ihrer Phasenzeiten, ist oft recht unregelmässig und örtlich verschieden.

Den grössten Einfluss nehmen die periodischen täglichen Umlagerungen der Luftmassen, wie sie in den Land- und Seewinden und in den Gebirgswinden zu Tage treten. Desgleichen hat auch die Höhenlage eines Ortes einen grossen Einfluss auf die Amplitude und auf die Phasenzeit der ganztägigen Barometerschwankung, aber nicht die *absolute* Seehöhe, sondern die relative Höhe, oder genauer gesagt, die Mächtigkeit der unterliegenden Luftschichten, soweit selbe durch ihre periodischen täglichen Hebungen und Senkungen auf den Luftdruck des Ortes Einfluss nehmen. Es wird dadurch ausserordentlich schwer, den constanten, mit der Breite und Jahreszeit regelmässig variirenden Theil der ganztägigen Barometerschwankung aus dem Resultat der Interferenzen desselben mit den localen ganztägigen Druckwellen herauszuschälen.

Nur über einem ganz gleichmässigen Theile der Erdoberfläche von sehr grosser Ausdehnung, wo keine Veranlassungen zu örtlichen Convectionsströmungen vorhanden sind, dürfen wir erwarten, die »normale« ganztägige Barometerschwankung beobachten zu können. Dass es eine solche gibt, kann keinem Zweifel unterliegen. Wenn die Atmosphäre auf irgend einem Wege zu Schwingungen in ihrer ganzen Masse angeregt wird, wie wir sie in den Oscillationen mit halbtägiger und dritteltägiger Periode in der That kennen gelernt haben, welche mit äusserster Regelmässigkeit verlaufen, so wird auch eine ganztägige Oscillation nicht fehlen, welche gleichfalls einer ähnlichen strengen Gesetzmässigkeit unterliegt. Gehen wir von der Ansicht von Lord *Kelvin* aus, dass die Präponderanz der halbtägigen Oscillation des Barometers darin ihren Grund haben mag, dass die Erdatmosphäre gerade auf freie Schwingungen von dieser Periode am besten anspricht, so erhellt daraus das besondere Interesse, auch die Grösse und die Eigenschaften der ganztägigen Oscillation kennen zu lernen, welche ein Bestandtheil der allgemeinen täglichen Oscillation der Atmosphäre ist. Diese ganztägige allgemeine Oscillation will ich kurz die »normale« ganztägige Oscillation nennen.

Solche gleichmässige, ausgedehnte Theile der Erdoberfläche, wo Interferenzen der normalen ganztägigen Oscillation mit localen täglichen Druckwellen am wenigsten zu besorgen sind, bieten wohl nur die weiten Flächen der Oceane dar in grosser Entfernung vom Lande. Beobachtungen oder Registrirungen des Luftdruckes an Bord von Schiffen auf hoher See oder auf ganz kleinen, niedrigen, oceanischen Inseln dürften daher die einzige Gelegenheit bieten zur Kenntniss der Eigenschaften der normalen ganztägigen Oscillation des Barometers zu gelangen.

Desshalb habe ich Anregung gegeben zu stündlichen Luftdruckaufzeichnungen an Bord der österreichischen Missionsschiffe, von denen auch ein Theil in dieser Abhandlung berechnet worden ist, sowie zu den Luftdruckregistrirungen auf der kleinen Koralleninsel Jaluit, deren Ergebnisse gleichfalls hier discutirt werden.

Die hier gleichfalls untersuchten Ergebnisse der Luftdruckregistrirungen auf der Felseninsel Pelagosa in Mitte der Adria, sowie jene auf Ponta Delgada etc., desgleichen die Ergebnisse der Registrirungen auf Pikes Peak und auf dem Montblanc lehren uns dagegen die gestörten Verhältnisse der ganztägigen Barometerschwankung kennen.

Die in dieser Abhandlung berechneten stündlichen Luftdruckaufzeichnungen an Bord von Schiffen ergeben folgende mittlere Resultate. Die Begründung für die Ableitung dieser Mittelwerthe findet man im ersten speciellen Abschnitt dieser Abhandlung, der die Berechnung der bezüglichen Beobachtungen enthält.

Die beiden ersten harmonischen Constituenten des täglichen Barometerganges nach Beobachtungen auf offener See.

Breite	Tage	A_1	A_2	a_1	a_2
4·5	147	5°2	155·0	·262	·875
11·1	58	4·2	158·8	·265	·811
15·8	61	358·0	157·7	·268	·805

Breite	Tage	A_1	A_2	a_1	a_2
23·0	125	330·6	149·4	·115	·620
33·8	118	320·5	155·4	·148	·489
35·9	234	241·5	154·6	·140[1]	·385
40·2	104	280·3	164·6	·139	·272
Mittelmeer					
37°	40	281·3	127·5	·342	·372

Die Beobachtungen, aus denen diese Rechnungsergebnisse abgeleitet wurden, sind noch ungenügend zu einigermassen sicheren Schlüssen. Soweit sie aber übereinstimmen, gestatten sie, Folgendes auszusprechen:

Auf offener See hat in der Nähe des Äquators die ganztägige Barometerschwankung eine Phasenzeit, die durch die Winkelconstante von circa 5° gegeben ist, d. h. die Fluthzeit fällt auf $5^h\ 40^m$ a., die Amplitude der ganztägigen Schwankung liegt bei 0·3 *mm.*

Dass dies die Verhältnisse der »normalen« ganztägigen Barometerschwankung sind, zeigen auch die einjährigen Luftdruckregistrirungen auf der kleinen Koralleninsel Jaluit unter 5° 55′ N Br.

Täglicher Barometergang auf Jaluit, 5°9 N Br.

$$0\cdot 336 \sin(23° + x) + 0\cdot 840 \sin(165° + 2x);$$

die Amplitude ist hier etwas grösser, die Phasenzeit verfrüht, die Fluth (das Barometermaximum) tritt schon um $4^1/_2{}^h$ a. ein. Zwanzigtägige directe Ablesungen an einem Quecksilberbarometer ergaben das mit den Schiffsbeobachtungen völlig übereinstimmende Resultat:

$$0\cdot 270 \sin(4°7 + x) + 0\cdot 823 \sin(157°3 + 2x).$$

---

[1] Aus den p und q gerechnet, wie der Winkel, bloss ·040.

Ich glaube daher, dass man nach den jetzt vorliegenden Beobachtungen sagen kann, die »normale« ganztägige Barometerschwankung hat unter dem Äquator die Amplitude 0·3 *mm* (d. i. rund ein Drittel der Amplitude der halbtägigen Barometerschwankung) und die Phasenzeit $A_1 = 5°$ (Maximum rund $5^1/_2{}^h$ a.).

Mit zunehmender Breite verspätet sich die Phasenzeit immer mehr, so dass sie zwischen 23° und 34° Breite durch den Winkel 325° etwa bestimmt wird (Fluthzeit 8^h 40^m a.). Ob in noch höheren Breiten die Verspätung wirklich so gross ist, wie sie sich aus unserer Tabelle zu ergeben scheint, möchte ich ganz dahingestellt sein lassen; es kann recht wohl auch die grössere Küstennähe der Schiffsörter mit im Spiele sein. Unter 38° würde nach den Schiffs-Beobachtungen die Fluthzeit erst um 1^h Nachmittags circa eintreten. Es wäre sehr interessant, sicher zu constatiren, ob die Phasenzeiten der normalen ganztägigen Barometerschwankung sich in der That schon in mittleren Breiten nahezu umkehren.

Die Amplituden der ganztägigen Barometerschwankung auf dem Ocean werden schon in mittleren Breiten recht klein und dürften daselbst kaum über 0·15 *mm* betragen. Das in dieser Abhandlung verarbeitete Beobachtungsmaterial genügt aber nicht, um die Abnahme der Amplitude mit der Breite genauer beurtheilen zu können.

Die durch die tägliche Umlagerung von Luftmassen vom Lande zur See und umgekehrt gestörte ganztägige Barometerschwankung in Binnenmeeren (siehe Mittelmeer) hat eine grössere Amplitude und verspätete Phasenzeiten. Auch die halbtägige Barometerschwankung ist derart gestört, wie wir vorhin schon erörtert haben.

Das interessanteste Ergebniss der ganzjährigen Luftdruckregistrirungen auf Jaluit ist aber folgendes:

Sowohl die Winkelconstante A_1 (die Phasenzeiten), sowie die Amplitude (a_1) der ganztägigen Barometerschwankung haben dieselbe jährliche Periode wie die entsprechenden Elemente der doppelten täglichen Oscillation.

Die normale ganztägige Barometerschwankung hat also die gleiche jährliche Periode, wie halbtägige Oscillation. Es wäre sehr wünschenswerth, dass dieses wichtige Resultat durch Luftdruckregistrirungen auf einer anderen kleinen, niedrigen Insel in der Nähe des Äquators controlirt würde.[1]

Die normale ganztägige Barometerschwankung dürfte unter dem Äquator die Form haben:

$$0 \cdot 3 \sin(5° + x);$$

die Phasenzeiten und Amplituden derselben haben die gleiche jährliche Periode, wie jene der doppelten täglichen Barometer-Oscillation. Die ersteren verspäten sich mit zunehmender Breite während die Amplituden langsam, wie es scheint, abnehmen.

Das ist vorläufig das ganze Ergebniss, das ich aus dem mir vorliegenden und hier berechneten Beobachtungsmateriale in Bezug auf die Eigenschaften der normalen ganztägigen Barometerschwankung habe ableiten können.

Die mehr oder weniger gestörte ganztägige Druckschwankung. Für das mittlere Verhalten der mehr oder weniger durch Interferenzen mit localen ganztägigen Druckwellen gestörten einmaligen täglichen Barometerschwankung kann man folgende Sätze aussprechen, denen aber desshalb keine besondere Tragweite zukommt, indem das Ergebniss ein mehr zufälliges ist (weil durch den Charakter der nicht sehr zahlreichen und nicht gleichmässig über die Erde vertheilten Stationen bestimmt).

Die Phasenzeiten sind durch den Winkel $A_1 = 10°$ circa bestimmt, im grossen Durchschnitt an den continentalen, wie an den maritimen Stationen (die Ausnahmen auf den Inseln und manchen Küsten werden wir gleich kennen lernen); dies entspricht einer Fluthzeit um $5^h\ 20^m$ a. Die mittlere Phasenzeit der ganztägigen Barometerschwankung scheint demnach nur geringen Störungen zu unterliegen. Sie ist auch in der That selbst in jenen Gebirgsthälern, wo die Amplitude der ganztägigen

---

[1] Auf der Insel Ascension 7°9 S. ist bloss eine Andeutung einer ähnlichen Periode vorhanden, da aber die Insel gebirgig ist, so lassen sich keine weiteren Schlüsse darauf gründen.

Barometerschwankung einen ganz enormen Betrag erreicht, nahezu normal; z. B. (Sommer):

	Breite	A_1	a_1
Bozen	46° 30′	18°6	1·39 *mm*
Klagenfurt	46 37	21·2	0·78
Death Valley ...	36 5	352·6	2·01

Die Amplituden der ganztägigen Barometerschwankung nehmen mit der Breite ab, wie folgende von Angot abgeleitete Mittelwerthe recht schön zeigen:

Mittlere Amplitude der ganztägigen Barometerschwankung an continentalen Stationen.

	Breite						
	20°	28°	41°	45°	46°	49°	54°
a_1	0·75	0·98	0·62	0·36	0·26	0·22	0·15

An den Orten von maritimer Lage sind sie viel kleiner; für 15° erhält Angot 0·26, für 39° Breite 0·15, für 44—50°: 0·14. In allen Breiten kommen aber daneben auch viel grössere und viel kleinere Amplituden vor. Irkutsk unter 52° 16′ N Br. hat noch ein Jahresmittel von 0·40 *mm* und ein Sommermittel von 0·75 *mm* (Mai—Juli), dagegen Santiago de Chile, 33° 27′ in gleicher Seehöhe, nur 0·15 *mm*.

Die allgemeinen Verhältnisse der jährlichen Periode der Amplituden und der Phasenzeiten der ganztägigen Barometerschwankung findet man in der citirten Abhandlung von Angot am besten erörtert (S. 302—305).

Charakteristische Störungen der normalen ganztägigen Barometerschwankung.

Auf landnahen Inseln. Die Ergebnisse meiner Berechnung der Luftdruckregistrirungen auf der Insel Pelagosa mitten in der Adria zeigen recht deutlich den Einfluss der täglichen periodischen Umlagerung von Luftmassen zwischen Land und Meer, welche im Winter (in diesen Breiten) gering, im Sommer am grössten ist.

Verhältnisse der ganztägigen Barometerschwankung auf Pelagosa.

	Winter	Frühling und Herbst	Sommer	Jahr
Phasenzeit A_1	24°	275°	288°	291°5
Amplitude a_1	0·044	0·107	0·202	0·100

Im Winter ist A_1 normal, a_1 sehr klein, offenbar in Folge der Interferenz mit einer kleinen Druckschwankung von gleichem Charakter wie im Sommer, welche aber die normale ganztägige Barometerschwankung wohl zu schwächen, aber nicht aufzuheben vermag. In der wärmeren Jahreszeit aber überwiegt die locale ganztägige Druckschwankung und bewirkt eine Verspätung der Fluthzeit von $6^1/_2{}^h$ a. auf 11—12^h Mittags. Dies ist der Einfluss der bei Tag vom Lande in der Höhe auf die See hinaus abgeflossenen Luftmassen (während unten Seewind).

Eine eingehendere Discussion dieser Verhältnisse findet man bei Erörterung der Beobachtungsergebnisse von Pelagosa.

Dass die Schiffsbeobachtungen auf dem Mittelmeer ganz ähnliche Verhältnisse constatiren, wurde schon oben hervorgehoben.

Die oceanische, aber grosse und gebirgige Insel S. Miguel (Ponta Delgada) hat keine so leicht definirbare Störungen der normalen ganztägigen Barometerschwankung aufzuweisen, wie die kleine Insel Pelagosa.

Verhältnisse der ganztägigen Barometerschwankung zu Ponta Delgada.

	Winter	Frühling und Herbst	Sommer
Phasenzeit A_1	80°	188°	181°
Amplitude a_1	0·079	0·068	0·049

Die Änderung der Phasenzeit vom Winter zum Sommer ist eine ganz ähnliche wie auf Pelagosa, aber die Amplitude der ganztägigen Barometerschwankung ist so klein, dass dieselbe überhaupt beinahe verschwindet.

Auch auf Jersey ist die ganztägige Barometerschwankung sehr klein (Amplitude im Jahresmittel 0·09 *mm*).

In meiner Abhandlung »Der tägliche Gang des Barometers an heiteren und trüben Tagen«[1] habe ich gezeigt, dass der bemerkenswerthe Unterschied im täglichen Gange des Barometers bei verschiedener Witterung nur in einer Modification der ganztägigen Druckwelle besteht, und dass die entsprechenden Unterschiede in dieser Druckwelle den gleichen Charakter haben, wie die Unterschiede zwischen der ganztägiger Barometerschwankung auf dem Lande und über der See und wohl auch durch dieselben Ursachen hervorgerufen werden.

Störungen auf Bergen und Berggipfeln. Die Verhältnisse der ganztägigen Barometerschwankung auf Berggipfeln habe ich in zwei Abhandlungen specieller untersucht und auf ihre Ursachen zurückgeführt.[2] In der vorliegenden Abhandlung werden die neueren Beobachtungsergebnisse auf Pikes Peak (4308 *m*) und an dem Observatorium Vallot auf dem Montblanc (4359 *m*) berechnet und eingehender discutirt.

Die ganztägige Barometerschwankung auf den Berghöhen und Berggipfeln (ausgedehnte Plateau-Erhebungen verhalten sich aber wie ebene Niederungen) entsteht durch die Interferenz der ganztägigen Druckschwankung, wie wir sie an der Erdoberfläche (respective an einem Orte auf den ausgedehnteren Niederungen am Fusse eines Gehänges oder einer Gipfelstation) beobachten, mit jener Druckwelle, welche durch die periodische tägliche Temperaturvariation in der unterliegenden Luftschichte entsteht.

Wir wissen, dass der Eintritt der täglichen Extreme der wahren mittleren Lufttemperatur in einer Schichte von grösserer Mächtigkeit sich erheblich verspätet gegen den Eintritt der Extreme, welche an den Thermometern an einer unteren und oberen Station abgelesen werden, weil diese letzteren unter dem Einflusse der erwärmten Bodenunterlage stehen, und dass ferner die tägliche Amplitude der wahren Lufttemperatur viel kleiner ist, als die beobachtete. Die Beobachtungen auf dem Eiffel-

---

[1] Diese Sitzungsber., Juni 1895.

[2] Diese Sitzungsber., December 1891: Resultate stündl. Beobachtungen auf dem Gipfel des Fuji in Japan — und Jänner 1894: Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten.

thurme zeigen dies schon recht deutlich; die neuere Methode der Temperaturbestimmung in der freien Atmosphäre mittelst Drachen wird diese Verhältnisse noch specieller zu untersuchen gestatten. Man darf nach unseren jetzigen Kenntnissen annehmen, dass der Eintritt der täglichen Extreme in einer Luftschichte von beträchtlicher Mächtigkeit (2 *km* und darüber etwa) circa um 5^h a. und p. angesetzt werden darf. Nennen wir den Unterschied der täglichen Temperaturextreme Δt, so haben wir als Ausdruck der täglichen Temperaturvariation in der Luftschichte

$$\frac{1}{2}\Delta t \sin(195°+x);$$

diese Temperaturvariation erzeugt in der Höhe h, wo der Barometerstand b ist, die thermische Druckschwankung

$$\frac{1}{2}\Delta t(bh:RT^2)\sin(195°+x).$$

Die ganztägige Barometerschwankung an der Erdoberfläche hat aber die Form

$$a_1 \sin(10°+x);$$

in der Höhe h, wo der Barometerstand b ist, muss für a gesetzt werden $a(b:B)$, wenn B der Luftdruck an der unteren Station. Diese beiden Druckschwankungen interferiren nun in der Höhe h und liefern folgende ganztägige Barometerschwankung:

Form der ganztägigen Luftdruckschwankung in der relativen Höhe h.

$$a_1(b:B)\sin(10°+x)+\frac{1}{2}\Delta t(bh:RT^2)\sin(195°+x).$$

Die Phasenzeiten dieser beiden Druckschwankungen sind fast genau die entgegengesetzten (statt $A_1 = 10°$ finden wir ja in Gebirgsthälern und am Gebirge oft $A_1 = 15°$ und selbst mehr). Wir können ohne Bedenken im ersten Gliede auch $A_1 = 15°$ und daher im zweiten Gliede $-\sin(15°+x)$ setzen und haben dann:

Ganztägige Luftdruckschwankung in der relativen Höhe h.

$$\left[a_1(b:B)-\frac{1}{2}\Delta t(bh:RT^2)\right]\sin(15°+x).$$

Die Amplitude der ganztägigen Druckschwankung wird also immer kleiner, je höher wir hinaufsteigen, ohne dass zunächst die Phasenzeit sich ändert. In einer gewissen relativen Höhe, wo

$$a_1(b:B)=\frac{1}{2}\Delta t(bh:RT^2)$$

wird, verschwindet die ganztägige Druckschwankung völlig, höher hinauf erscheint sie wieder, aber mit entgegengesetzten Phasenzeiten (A_1 = circa 195°) und die Amplituden nehmen wieder zu.

Dies beobachten wir nun in der That. Die relative Höhe, in welcher die Amplitude der ganztägigen Druckschwankung der Niederung verschwindet, liegt im Allgemeinen im Winter höher als im Sommer, wo Δt einen grösseren Werth hat.

Für den Sommer habe ich seinerzeit gefunden:

Ganztägige Barometerschwankung.

	Ort						
	München	Peissenberg	Wendelstein	Obir	Säntis	Sonnblick	Montblanc Observ.-Vallot
Relative Höhe....	0 *m*	470 *m*	1200 *m*	1600 *m*	2080 *m*	2600 *m*	3300 *m*
A_1 (Phasenzeit) ..	15°	37°	188°	194°	183°	182°	198°
Amplitude.......	0·35	0·12	0·08	0·14	0·27	0·32	0·37

Pikes Peak (relative Höhe vielleicht 2800 *m*) hat $A_1 = 210°$ und $a_1 = 0·63$ *mm* im Maximum (Frühling und Herbst), weil die tägliche Wärmeschwankung auf den heissen, trockenen

Hochebenen des Westens von Nordamerika unter niedrigerer Breite viel grösser ist als bei uns.

Man ersieht aus der kleinen Tabelle recht schön, wie zuerst die Amplituden abnehmen und dann, sobald die Phasenzeit in die entgegengesetzte umgeschlagen ist, wieder wachsen. Dieses Anwachsen der Amplitude mit der Höhe erfolgt aber nur langsam und hat seine Grenzen, wie aus der früher aufgestellten Gleichung hervorgeht, denn Δt wird immer kleiner und $bh:RT^2$ bleibt stets ein echter Bruch, der aber mit der Höhe wächst.

Die Phasenzeit der reinen thermischen Druckwelle in der Höhe bleibt, wie es scheint, recht constant und es dürfte im Mittel $A_1 = 190°$ etwa gesetzt werden können; dies entspricht einem Temperaturminimum bald nach 5^h Morgens und einem Temperaturmaximum um 5^h Nachmittags in der der Höhenstation unterliegenden Luftschichte.

Ergebnisse stündlicher und zweistündlicher Luftdruckbeobachtungen auf offener See.

1. Beobachtungen an Bord der österreichischen Fregatte »Novara«, 1857—1859.

Während der wissenschaftlichen Erdumsegelung der »Novara« wurden theils zweistündliche (mit 2^h a. beginnend und mit Einschiebung der Termine 9^h a. und 3^h p. zur genaueren Fixirung der Wendestunden des Barometers), theils (und zwar grösstentheils) stündliche Beobachtungen aller meteorologischen Elemente angestellt. Diese Beobachtungen finden sich in extenso veröffentlicht in dem Werke: B. v. Wüllerstorf-Urbair. Reise der österreichischen Fregatte »Novara« um die Erde in den Jahren 1857–1859. Nautisch-physikalischer Theil, herausgegeben von der Hydrographischen Anstalt der k. k. Marine. Wien, 1862—1865.

Diese für die Meteorologie der Oceane sehr werthvolle, in ihrer Art fast vereinzelt dastehende Publication gestattet den täglichen Gang aller meteorologischen Elemente auf offener See abzuleiten, ist aber zu diesem Zwecke noch kaum benutzt worden, obgleich sie besondere Vortheile dazu darbietet, da die

»Novara« ein Segelschiff war, daher namentlich die Beobachtungen der Windrichtung und -Stärke verlässlicher sind. Einen kleinen Theil dieser Beobachtungen habe ich schon verwerthet in meiner Abhandlung: »Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers« (Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. LV, Wien 1889, S. 93, respective S. 45).

Für den äquatorialen grossen Ocean wurde dort auch der tägliche Gang der Temperatur, des Dampfdruckes, der Bewölkung und der Windstärke berechnet, für einige andere Routen nur jener der Temperatur.

Zu den dort schon berechneten Reihen von Luftdruckbeobachtungen sind hier noch einige hinzugekommen, doch ist damit das in der genannten Publication enthaltene Materiale noch keineswegs erschöpft. Hier finden sich die folgenden Beobachtungsreihen berechnet.

I. Äquatorialer Pacific. 11. September bis 20. October (40 Tage) 1858; Route Puinipet—Sydney zwischen 10° N und 10° S Br., 155—162° E. Mittlere Breite (natürlich ohne Rücksicht auf das Zeichen) 6°1.

II. Äquatorialer Pacific im engeren Sinne. 19. September bis 8. October 1857; Puinipet bis gegen die Salomons-Inseln. Von Puinipet ging der Curs der »Novara« gerade nach Süden, aber das Segelschiff kam in dem Doldrum kaum vorwärts und das gab mir Veranlassung, gerade diese Beobachtungen, die sich auf geringe Breitenunterschiede und auf fast constante Länge beziehen, noch besonders zu bearbeiten. Von 6° N bis 8° S Br. brauchte das Schiff 20 Tage und hielt sich immer zwischen 160 und 162° E L. (die fünftägigen Positionen vom 19. September bis inclusive 8. October sind: 4°8 N, 160° E; 2°1 N, 161°4 E; 2°2 S, 160°8 E und 6°0 S, 160°7 E).

Hochstetter schreibt über diese Fahrt: »Wir kamen nur langsam vorwärts; hatten wir heute die Sonne überholt, so dass sie uns um Mittag gegen Norden stand, so hatte schon nach wenigen Tagen die Sonne uns eingeholt und wir sahen sie wieder in südlicher Richtung. Eine drückende Hitze, gegen die man vergeblich Schutz suchte, Regen in Strömen, of 12 Stunden hindurch, aus so dicken Wolkenmassen, dass das Tageslicht nur dämmernd durchdringen konnte, gehörten zu

den weiteren Annehmlichkeiten der Reise. Wir hätten mit Freuden selbst den heftigsten Sturm begrüsst, um aus diesen fast unheimlichen Zonen herauszukommen.«[1] Das Beobachtungs-Journal notirt an 17 von den 20 Tagen Regen. Der Barometergang während dieser Periode entspricht also echtem Doldrumwetter auf offener See und hat desshalb besonderes Interesse. Derselbe ist aber, wie man sehen wird, im Doldrum der gleiche, wie ausserhalb; die fünftägigen Mittel, die ich bildete, stimmen vollkommen untereinander. Mittlere Position 3°8, 160°8 E L.

III. Äquatorialer Indischer Ocean. 20. December 1857 bis 3. Jänner 1858; 15 Tage auf der Route S. Paul—P. de Galle zwischen $16^1/_2$° S Br. und $3^1/_2$° N Br. Mittel 5°0, Mitte des indischen Oceans um 85° E L. herum. An 12 Tagen von 15 Regen und Regenböen.

IV. Indischer Ocean. Gegend der Nicobaren zwischen 18. Februar und 6. April 1857, 40 Tage zwischen 7° und 10° N Br., 89 und 97° E L.; mittlere Breite 8° N. Vom 23. Februar bis 26. März zwischen den Nicobarischen Inseln, daher der Barometergang vom Lande wohl etwas beeinflusst.

V. Grosser Ocean. Gegend der Ladronen. Route: Guam bis Puinipet, 27. August bis 16. September (ohne 2. September) 20 Tage; zwischen 13° und 7° N Br., 145° und 158° E L., also sehr geringe Breiten- und Längenänderungen. Mittlere Breite 10°7 N, mittlere Länge $153^1/_2$° E v. Gr.

VI. Atlantischer Ocean. Zwischen 20° S und 20° N Br., 27—44° W L. 17. Juni bis 6. Juli 1859, 20 Tage; mittlere Breite 10°. Route mitten im Ocean, aber wegen der grossen Breitenänderung von geringerem Gewicht.

VII. Grosser Ocean. Gegend der Gesellschafts- und der Niedrigen Inseln. 13—21° S Br., Mittel 16°3 S. 8. Februar bis 21. März 1859, 40 Tage.

VIII. Westlicher Grosser Ocean. Route Sydney-Auckland, Auckland—Papiti; 8.—21. December 1858 und 10. bis 29. Jänner 1859, zwischen 36° und 30° S Br. Mittlere Breite 33°9 S; 34 Tage.

---

[1] Ferd. v. Hochstetter's gesammelte Reiseberichte 1857—1859. Wien, Hölzel. 1885. S. 290.

IX. Östlicher Grosser Ocean. Route Papiti–Valparaiso; 24. März bis 22. April 1859, 30 Tage; zwischen 25° und 33° S Br., 133° und 71° W L. Mittlere Breite 32°8 S.

X. Südlicher Atlantischer Ocean. Route Rio de Janeiro-Capstadt. 1.—30. September 1857. 30 Tage zwischen 26° und 36° S Br. und 41° W bis 18° E L. Mittlere Breite 33°3. Zweistündige Beobachtungen.

XI. Südlicher Indischer Ocean. Route: Capstadt bis S. Paul. 30. October bis 8. December 1857, 40 Tage; zwischen 37 und 41° S Br. und 18 und 79° E L. Mittlere Breite 39°2.

XII. Nördlicher Atlantischer Ocean. Route, von 40° W über Azoren nach Gibraltar. 35—39° N und 40—5° W v. Gr. 12.—31. Juli 1859, 20 Tage. Mittlere Breite 37°5 N.

XIII. Mittelmeer. Zwischen Sicilien und Gibraltar. Hin- und Rückreise; Mai 1857 und August 1859, 30 Tage. Mittlere Breite 37°4 N.

Ich lasse nun die Ergebnisse der Berechnung dieser Beobachtungen nach periodischen Ausdrücken folgen von der bekannten Form:

$$\Delta b = p_1 \cos x + q_1 \sin x + p_2 \cos 2x + q_2 \sin 2x$$

oder

$$\Delta B = a_1 \sin(A_1 + x) + a_2 \sin(A_2 + 2x).$$

Constanten des täglichen Ganges des Barometers.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
I. Äquatorialer Pacific . 6°	—	—	—	—	2°4	161°0	·287	1·010
II. » » 3·8	·063	·376	·338	—·970	9·5	160·8	·381	1·027
III. Äquatorial. Indischer Ocean .... 5·0	·113	·297	·336	—·866	20·8	158·8	·318	·929
IV. Indischer Ocean .... 8·0	—	—	—	—	344·7	153·9	·399	·995
V. u. VI. Grosser Ocean [1] und Atlant. Ocean. 10·2	·023	·212	·291	—·751	6·2	158·8	·213	·805
VII. Grosser Ocean 16½	·054	·306	·274	—·770	10·0	160·4	·311	·817
VIII. u. IX. Grosser Ocean. 33½	—·213	·057	·182	—·463	285·0	158·6	·220	·498
X. Südl. Atlant. Ocean. . 33½	—·043	·067	·268	—·338	327·3	141·6	·080	·431
XI. Südl. Indisch. Ocean. 39·0	—·137	·002	·100	—·168	270·8	149·2	·137	·195
XII. Nördl. Atlant. Ocean. 37½	—	—	—	—	189·7	150·9	·223	·405
XIII. Mittelmeer 37½	—	—	—	—	281·8	119·9	·341	·330

[1] Mit doppeltem Gewicht in das Mittel eingeführt.

Auf eine Discussion dieser Constanten ist an anderer Stelle eingegangen worden in Zusammenhalt mit den Ergebnissen anderer Schiffsbeobachtungen. Die Constanten a_2 würden einer Correction auf das Jahresmittel bedürfen, um sie genauer vergleichbar zu machen — ebenso die Winkelconstanten A_2; bei den Constanten der einmaligen täglichen Welle ist eine derartige Correction nicht möglich.

Ich will hier noch die Mittelwerthe anführen für gleiche Breitegrade, die zum Theil auch bei der Ableitung der Constanten Verwendung gefunden haben.

Mittelwerthe des täglichen Ganges des Barometers nach den Beobachtungen an Bord der »Novara«.

	Äquat.-Region 4½°	10°	33½		Äquat.-Region 4½°	10°	33½
Tage...	35 (II u. III)	40	64	Tage...	35	40	64
Mittn.	·42	·38	·07	Mittag	·23	·27	·36
1	·13	—·07	—·27	1	—·38	—·25	·13
2	—·27	—·32	—·48	2	—1·00	—·68	—·13
3	—·62	—·64	—·62	3	—1·23	—·98	—·32
4	—·74	—·68	—·64	4	—1·30	—·89	—·40
5	—·46	—·42	—·40	5	—·94	—·72	—·39
6	—·05	—·13	—·05	6	—·55	—·53	—·27
7	·51	·42	·24	7	—·18	—·08	—·04
8	·94	·70	·49	8	·27	·24	·10
9	1·08	·89	·64	9	·73	·52	·27
10	1·07	·85	·69	10	·89	·75	·28
11	·79	·68	·55	11	·72	·64	·18

Während das Morgenminimum fast ganz unverändert bleibt, schwächen sich das Vormittags- und Abendmaximum, letzteres ganz besonders, ab; desgleichen auch das Nachmittagminimum.

Wenn man, wie ich es regelmässig gethan habe, den täglichen Gang nach fünftägigen Mitteln berechnet, so tritt die grosse Regelmässigkeit der täglichen Oscillation in den äquatornahen Gegenden ganz überraschend deutlich hervor. Als Beispiel will ich die 15tägigen Beobachtungen an Bord der »Novara« in der Mitte des Indischen Oceans, vom 20. December 1857 bis 3. Jänner 1858, zwischen 16½° S Br. und 3½° N Br., anführen in der Form der Constanten der obigen Sinus Reihen.

Zeit	Breite	A_1	A_2	Differenz vom Mittel	a^1	a^2	Differenz vom Mittel
20.—24. Dec......	11°0 S	18·3	154·4	—7½'	·44	·80	—·18
25.—29. Dec......	2·5 S	54·3	161·8	+7	·11	1·14	·16
30. Dec.–3. Jänner.	0·9 N	46·5	158·6	+ ½	·36	1·00	·02

Die Phasenzeiten der doppelten täglichen Oscillation weichen in den Pentadenmitteln im Maximum nur um 7½ Minuten,

Täglicher Gang des Baro-

Ergebnisse der Beobachtungen an

	I	II	III	IV	V	VI
	Äquatorialer Pacific		Äquator. Indischer Ocean	Ind. Ocean Gegend der Nicobaren	Grosser Ocean Guam—Puinipet	Nord-Atlant. Ocean
Breite..	6°	3°8	5°	8° N	10°7	10° N
Tage...	40	20	15	40	20	20
Mittn.	·34	·35	·49	·20	·27	·60
1	— ·04	·04	·23	— ·07	— ·14	·06
2	— ·45	— ·34	— ·21	— ·44	— ·39	— ·19
3	— ·77	— ·64	— ·59	— ·88	— ·71	— ·49
4	— ·81	— ·73	— ·75	— ·77	— ·72	— ·61
5	— ·49	— ·42	— ·50	— ·52	— ·34	— ·58
6	— ·08	— ·02	— ·07	— ·15	— ·03	— ·34
7	·45	·51	·52	·39	·54	·18
8	·96	1·03	·85	·94	·88	·35
9	1·18	1·24	·92	1·38	1·09	·49
10	1·13	1·18	·96	1·45	1·01	·54
11	·84	·83	·75	1·17	·69	·65
Mittag	·35	·26	·20	·58	·30	·20
1	— ·34	— ·40	— ·37	— ·05	— ·34	— ·06
2	— ·94	—1·02	— ·97	— ·60	— ·75	— ·55
3	—1·17	—1·28	—1·18	—1·03	—1·09	— ·77
4	—1·20	—1·33	—1·27	—1·19	— ·94	— ·79
5	— ·94	—1·05	— ·84	— ·99	— ·75	— ·66
6	— ·57	— ·63	— ·48	— ·74	— ·54	— ·52
7	— ·07	— ·18	— ·19	— ·34	— ·08	— ·07
8	·35	·22	·31	·10	·21	·29
9	·65	·76	·70	·45	·48	·61
10	·87	·92	·87	·65	·70	·85
11	·72	·72	·72	·47	·56	·81
Mittel	·66	·67	·61	·65	·56	·47
Luftdr.[1]	759·4	759·3	760·6	759·7	759·1	758·9

[1] Ohne Schwere-Correction. Seehöhe 3 *m*.

die Amplituden um 2°/₀ vom Mittel ab, trotz der Breitendifferenz von 12° und dem vielfach böigen Wetter mit starkem Regen. Viel übereinstimmendere Resultate hätten die 20tägigen Beobachtungen im Doldrum des pacifischen Oceans ergeben, wenn ich gleicherweise für diese Pentadenmittel die Constanten des täglichen Ganges berechnet hätte.

meters auf offener See.

Bord der »Novara«, 1857—1859.

VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
Grosser Ocean	Grosser Ocean (Westl.)	Grosser Ocean (Östl.)	Südl. Atlant. Ocean	Südlicher Indischer Ocean	Nördl. Atlant. Ocean	Mittel meer
16½° S	34° S	33° S	33½° S	39° S	37½° N	37½° N
40	34	30	30	40	20	30
·39	·07	·06	·17	·03	·20	—·09
— ·03	—·41	—·14	—	—	·05	—·18
— ·30	—·68	—·27	— 06	—·25	—·55	—·23
— ·59	—·76	—·49	—	—	—·55	—·32
— ·56	—·71	—·57	—·37	—·29	—·69	—·41
— ·30	—·36	—·43	—	—	—·41	—·34
·06	·00	—·10	—·35	—·14	—·35	—·13
·40	·29	·20	—	—	—·14	—·02
·84	·50	·48	·33	·30	—·09	·18
·99	·62	·65	—	—	·18	·50
·91	·64	·74	·54	·25	·36	·63
·59	·50	·60	—	—	·26	·61
·21	·37	·36	·25	·16	·17	·61
— ·32	·19	·06	—	—	·25	·50
— ·74	·04	—·29	—·14	·09	·05	·36
—1·00	—·15	—·49	—	—	—·32	·02
—1·03	—·31	—·50	—·49	—·10	—·20	—·16
— ·88	—·35	—·42	—	—	—·04	—·34
— ·58	—·24	—·31	—·29	—·12	—·10	—·43
— ·17	—·01	—·07	—	—	·10	—·29
·19	·04	·17	·09	—·03	·45	—·18
·57	·27	27	—	—	·67	—·11
·74	·24	·32	·32	·09	·45	·04
·64	·19	·17	—	—	·25	·00
·54	·33	·34	·28	·16	·29	·28
760·5	760·0	763·4	767·3	764·4	765·3	759·4

2. Beobachtungen an Bord des »Challenger« 1873—1876.

Während der »Challenger«-Expedition wurden nur zweistündliche meteorologische Beobachtungen angestellt. Dieselben sind in den Challenger Reports »Narrative of the Cruise«, Vol. II, in extenso veröffentlicht, ferner nach meist 5—10tägigen Mittelwerthen in Form von Abweichungen vom Tagesmittel zusammengefasst in: »Physics and Chemistry«, Vol. II, Appendices, Table III, p. 7—9.

Ich habe fast nur diese Mittelwerthe benützt, die aber den Übelstand haben, dass die Summen der positiven und negativen Abweichungen zuweilen ziemlich weit von Null abweichen.[1] Eine Correction wegen der unperiodischen Änderungen des Luftdruckes und der Änderungen desselben in Folge des Ortswechsel des Schiffes wurde nicht angebracht, was den täglichen Gang oft stark entstellt.[2]

---

[1] Z. B. 1.—12. September 1875 (Äquatorialregion des Pacific) hier betragen die negativen Abweichungen 159, die positiven 99, Differenz 60, während dieselbe im Maximum, wenn richtig, nur 6 betragen könnte. Diese Abweichungen wurden desshalb nach »Narrative«, Vol. II, neu berechnet; in anderen Fällen habe ich die Differenz gleichmässig vertheilt, d. i. die Annahme gemacht, das Mittel sei um den entsprechenden Betrag unrichtig und damit natürlich auch die Abweichungen.

[2] Z. B.: Täglicher Gang des Barometers in der Gegend von Kerguelen-Insel. 8. Jänner bis 10. Februar 1874 (34 Tage). Abweichungen vom Tagesmittel (*mm*):

2^h a.	4^h	6^h	8^h	10^h	Mittag
—·12	—·16	—·16	—·14	—·20	—·19
2^h p.	4^h	6^h	8^h	10^h	Mitternacht
—·09	·03	·15	·29	·33	·34

Hier ist der Sprung von Mitternacht auf 2^h a. ausserordentlich auffallend. Die in meine Tabelle aufgenommenen Werthe sind mittelst der Differenz zwischen 2^h a. am 8. Jänner und 2^h a. am 11. Februar corrigirt und bringen den täglichen Gang viel correcter zum Ausdruck, so seltsam derselbe auch trotzdem noch bleibt; es ist aber doch ein täglicher Gang, was man von obiger Curve nicht sagen kann.

Täglicher Gang des Barometers nach den Beobachtungen an Bord des »Challenger« 1873—1876.

Nr....	I	II *a*	II *b*	III	IV	V	Mittel	VI	VII
Breite..	4°6	5°7	3°8	22°4	35°	37°	36°	50° S	54 1/2 S
Tage...	50	17	37	30	52	89	141	34	46
Mittn.	·37	47	·45	·30	·19	·07	·12	·15	—·50
2	— ·28	— ·25	— ·34	— ·26	— ·28	—·36	—·33	·07	—·48
4	— ·61	— ·56	— ·65	— ·56	— ·47	—·54	—·51	—·01	—·25
6	— ·10	·18	— ·10	— ·30	— ·20	—·01	—·08	—·04	·24
8	·64	·63	·60	·28	·15	·36	·28	—·06	·37
10	·92	·90	·87	·59	·38	·48	·44	—·22	·48
Mittag	·45	·34	·41	·29	·25	·29	·27	—·18	·39
2	— ·54	— ·85	— ·56	— ·33	— ·07	—·09	— ·08	—·11	·25
4	—1·02	—1·20	—1·02	— ·52	— ·32	—·30	— ·31	—·03	·12
6	— ·52	— ·59	— ·50	— ·16	— ·18	—·16	— ·16	·07	—·01
8	·13	·21	·10	·23	·16	·04	·08	·17	—·17
10	·57	·76	·69	·44	·38	·23	·29	·18	—·41
Mittel	·51	·58	·52	·36	·25	·25	·25	·11	·30

I. 17 Tage im äquatorialen Pacific, 33 Tage im äquatorialen Atlantischen Ocean; Jahreszeit August und September.

II *a*. Mittlere Breite 5·7, mittlere Länge 150·5 E. 17 Tage.

II *b*. Mittlere Breite 3·8; vorige Serie und zwei Serien im Atlantischen Ocean unter 2° Breite, 25° W L. 13 Tage und 3°4 Breite unter $14^1/_2$° W L. 7 Tage. Näheres im Text.

III. Nord-Atlantischer Ocean; Februar und März.

IV. Nord-Atlantischer Ocean; Mai, Juli. Süd-Atlantischer Ocean; October. Route: Brasilien zum Cap.

V. Nord-Pacifischer Ocean; Juni, Juli. Route: Jokohama—Honolulu und Süd-Indischer Ocean, Oct.—Dec., dann März.

VI. Gegend von Kerguelen.

VII. Südsee; Jänner, Februar und März. Diese Curve zeigt nur, dass man in diesen Breiten aus 46 Tagen noch keinen

wahren täglichen Gang erhält sondern nur eine Combination des schwachen täglichen Ganges mit den grossen unperiodischen Änderungen, die eine Tagescurve vortäuschen.

Ich habe nur wenige Auszüge aus der citirten Publication gemacht und bei der Mittelbildung für längere Zeiträume die Gewichte der Einzelmittel aus den »Physics and Chemistry«, Vol. II, mit Rücksicht auf die Zahl der Beobachtungstage in Rechnung gezogen. Die tägliche Periode kommt in den zweistündigen Beobachtungen schon nicht mehr so scharf zum Ausdrucke wie in den stündlichen, wie ein Vergleich der obigen Tabelle mit der früheren deutlich ergibt.

Im September 1875 kreuzte der »Challenger« auf der Route von Hawaii nach Tahiti, den Äquator ziemlich in der Mitte des pacifischen Oceans unter 151° W L. Das Schiff hielt sich von $9^1/_2$° N am 28. August bis 10° S am 13. September zwischen 147 und 153° W L., verfolgte also einen fast meridionalen Curs. Die Luftdruckbeobachtungen während dieser Route habe ich aus »Narrative«, Vol. II, ausgezogen und separat berechnet; sie bilden ein Seitenstück zu der Beobachtungsserie der »Novara« unter einem etwa 25° westlicheren Curs. Für den »Challenger« blieb aber die Sonne noch im Norden, während die »Novara« gerade unter der Sonne nach Süden segelte.

Am 30. August 1873 kreuzte der »Challenger« den Äquator im Atlantischen Ocean unter circa 30° W L., also ziemlich in der Mitte zwischen den vorspringenden Küsten von Afrika und Südamerika. Die Beobachtungsserie vom 20. August bis 1. September zwischen $4^1/_2$° N und 3°7 S und 14 und $32^1/_2$° W L. eignet sich gleichfalls sehr gut zur Bestimmung des täglichen Barometerganges unter dem Äquator; daran wurden noch angeschlossen die Beobachtungen vom 4.—10. April 1876 inclusive im Atlantischen Ocean zwischen 6° S und $5^1/_2$ N Br. unter fast constant $14^1/_2$° W L. Die drei Reihen umfassen zusammen 37 Tage und eignen sich vortrefflich zur Ableitung des täglichen Barometerganges unter dem Äquator auf offener See. Auffallend ist die relativ kleine Amplitude der doppelten täglichen Oscillation des Barometers unter dem Äquator, die sich aus diesen Beobachtungen ergibt.

Die Constanten des täglichen Ganges des Barometers in verschiedenen Breiten nach den Beobachtungen an Bord des »Challenger«.

	Breite	Tage	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
I....	4°6	50	—·035	·253	·370	—·680	352°1	151°5	·255	·774
IIa...	5·7	17	·107	·343	·327	—·773	17·3	157·1	·359	·840
IIb...	3·8	37	·002	·225	·378	—·697	5·1	151·5	·226	·793
III....	22·4	30	—·017	—·002	·260	—·504	263·3	152·7	·017	·566
IV und V..	36·0	141	—·117	—·001	·172	—·332	269·5	152·6	·117	·373
VI....	50·0	34	·160	—·067	—·023	—·022	112·7	226·3	·173	·032

Das Rechnungsresultat für die Breite von 50° S hat offenbar keine andere Bedeutung, als zu zeigen, dass die wahre tägliche Oscillation des Barometers in diesen Breiten aus einmonatlichen Beobachtungen nicht abgeleitet werden kann, da die Amplituden derselben zu klein sind gegenüber den grossen unregelmässigen Schwankungen.[1]

Auffallend ist, dass aus den zweistündlichen Beobachtungen an Bord des »Challenger« die Amplituden der doppelten täglichen Oscillation durchgängig so klein sich ergeben.

[1] Dass längere Beobachtungsreihen auch in höheren Breiten der südlichen Halbkugel noch einen regelmässigen täglichen Gang des Barometers liefern, zeigen die Beobachtungen auf Süd-Georgien (1 Jahr) und zu Port Ross auf den Auckland-Inseln (15. November bis Februar inclusive; dreistündig):

	A_1	A_2	a_1	a_2
Süd-Georgien, 54°31′ S Br., 36° 5′ W	27°4	161°5	0·10	0·21
Port Ross, 50 32 S Br., 166 13 E	47·0	144·1	0·14	0·20

Die Beobachtungen zu Orange Bai bei Cap Horn liefern dagegen für a_2 den auffallend kleinen Betrag von 0·09 *mm* und $A_2 = 189°$.

3. Beobachtungen an Bord S. M. Schiff »Zrinyi« auf einer Reise nach Westindien und zurück.

Vom 6. September 1885 bis 16. April 1886; ausgeführt von dem k. k. (damals) Linienschiffs-Lieutenant A. Sobieczky.

Herr Sobieczky hat auf eine Anregung von mir hin während der bezeichneten Reise eine Reihe zweistündlicher, auf der Rückreise stündlicher Luftdruckbeobachtungen ausgeführt, ausserdem vierstündliche Beobachtungen aller met. Elemente. Herr Sobieczky hat diese Beobachtungen selbst berechnet und die tägliche Periode aller Elemente abgeleitet für Perioden, während welcher gleiche oder ähnliche Verhältnisse herrschten. Auf dem Ocean wurden Mittel für gleiche Wetterlagen gebildet, also für cyclonale und anticyclonale Witterung. Auch die täglich gutgemachte Längendifferenz wurde dabei in Berücksichtigung gezogen. Da das Schiff meist mit Segeln fuhr und durchschnittlich keine grossen Distanzen zurücklegte, wurden den abgeleiteten täglichen Perioden, die sich auf wahre Ortszeit beziehen, eine Correction auf mittlere Zeit mit entsprechenden Zeichen beigegeben, welche der arithmetischen Summe der gutgemachten Längendifferenz und Zeitgleichung entsprechen.

Zu den Luftdruckbeobachtungen dienten zwei verglichene Quecksilberbarometer und ein Aneroid. Letzteres, dessen Temperatur, Stand- und Theilungscorrection sorgfältig bestimmt worden war, diente fast ausschliesslich zu den täglichen Beobachtungen, im Hafen und sonst zuweilen wurde es mit den Quecksilberbarometern verglichen. Das Aneroid befand sich 1·4 *m* über See.

Dieses von Herrn Sobieczky mit grosser Sorgfalt berechnete Beobachtungsmateriale wurde mir schon im Sommer 1893 zur Veröffentlichung übergeben, leider aber haben mehrfache Umstände bisher verhindert, dem Wunsche des Autors zu entsprechen.

Ich erlaube mir desshalb hier vorläufig wenigstens einige Ergebnisse der Luftdruckbeobachtungen einer weiteren Verwerthung und allgemeineren Bekanntmachung zuzuführen.

Die benützten Beobachtungsreihen sind:

I. Atlantischer Ocean: 15.—27. October 1885, zwischen 24°0 und 20°8 N Br., 24°2 und 35°1 W L. Correction auf mittlere Ortszeit im Tagesmittel —17·1 Minuten.[1]

II. Atlantischer Ocean: 2.—11. November 1885, zwischen 15°9 und 12°1 N Br., 45°7 und 57°6 W L. Mittlere Correction auf Ortszeit —17·0 Minuten.

III. Atlantischer Ocean: 15. October bis 11. November 1885, zwischen 24°0 und 12°1 N, 24°2—57°6 W L., also Zusammenfassung der Reihen I und II nebst Zwischenperioden; Correction auf mittlere Ortszeit wie oben —17 Minuten.

IV. Atlantischer Ocean: Zwischen 17. und 25. Februar 1886, 28°7—29°8 N Br., 75°6 und 66°2 W L. Correction auf mittlere Ortszeit +16 Minuten.

V. Mittelmeer: 29. März bis 8. April 1886; mittlere Correction auf mittlere Ortszeit +6·6 Minuten.

VI. Adriatisches Meer: 13.—16. April 1886.

VII. Atlantischer Ocean: 26. Februar bis 9. März 1886, zwischen 30°4 und 35°8 N Br., 65°3 und 37°1 W L. Mittlere Correction auf mittlere Ortszeit +16·7 Minuten.

VIII. Atlantischer Ocean: 10.—15. März, zwischen 35°6 und 36°9 N Br., 35°8 und 23°4 W L. Mittlere Zeitcorrection +15·2 Minuten.

IX. Atlantischer Ocean: 16.—21. März 1886, zwischen 37°2 und 36°4 N Br., 20°3 und 7°2 W L. Zeitcorrection +13·6 Minuten.

X. Atlantischer Ocean: 26. Februar bis 21. März 1886, zwischen 30°4 und 36°4 N Br., 65°3 und 7°2 W L., also Zusammenfassung der vorigen Mittel. Mittlere Zeitcorrection +15·2 Minuten.

Einer Zeitcorrection von rund 16 Minuten entspricht beim ersten Gliede eine Änderung der Winkelconstante um 4°, beim zweiten Gliede um 8°. An die nachstehend mitgetheilten Constanten ist aber keine bezügliche Correction angebracht worden.

---

[1] Da die Schiffszeit um Mittag wahre Ortszeit ist, ist um Mittag natürlich die Correctur am grössten und es entsteht ein Sprung von 11^h auf Mittag, der 10 Minuten und mehr betragen kann. Herr Sobieczky gibt die Correction für vierstündige Intervalle speciell an.

Die Constanten des täglichen Barometerganges nach den Beobachtungen des Herrn Sobieczky.

	Tage	Breite	Zeitcorrection	A_1	A_2	a_1	a_2
II. N.-Atl. Ocean ..	10	14°0	—17 *m*	291·9	153·6	·100	·904
I. » »	13	22·4	—17	318·6	156·3	·173	·754
IV. » »	9	29·3	+16	259·3	154·8	·202	·602
X. » »	24	34·8	+15	24·8	162·9	·072	·529
V. Mittelmeer	10	37	+ 7	279·9	150·0	·344	·500

Herr Sobieczky hat in der Passatregion des Nord-Atlantischen Oceans zwischen 24° und 15° N Br. und 24° und 49° W L. vom 15. October bis 5. November 1885 auch stündliche Beobachtungen der Windstärke (Beaufort-Scale) angestellt, die von grossem Interesse sind.

Aus denselben ergeben sich zwei Maxima um 8^h a. und 9^h p. und zwei Minima um 3^h Morgens und 3—4^h Nachmittags, also vollkommen mit dem täglichen Gange des Barometers übereinstimmend. Die Gleichung des täglichen Ganges der Windstärke ist:

Täglicher Gang der Windstärke im tropischen Nord-Atlantischen Ocean.

$$2\cdot68+0\cdot065 \sin(6^\circ 1+x)+0\cdot216 \sin(181^\circ 3+2x).$$

Die Wendestunden der doppelten täglichen Schwankung würden hiernach nicht ganz um eine Stunde früher eintreten als beim Luftdruck.

Täglicher Gang des Barometers über dem Nord-Atlantischen Ocean und dem Mittelmeere.

Nach den Beobachtungsergebnissen an Bord S. M. Schiff »Zrinyi« 1885—1886, von A. Sobieczky.

1.

	Atlantischer Ocean				Mittelmeer und Adria	
	I	II	III	IV	V	VI
Breite N..	22°4	14°0	18°0	29°3	Westliches Mittelmeer [2]	Adria
Länge W..	29·6	51·6	40·9	71·4	37° N.	—
Tage	13	10	28	9	10	5
Jahreszeit.	October 1885	Novemb. 1885	October bis Nov. 1885	Februar 1886	April 1886	April 1886
1h a. [1]	—·14	—·03	—·09	—·14	—·30	·05
3	—·58	—·85	—·65	—·75	—·65	—·33
5	—·54	—·75	—·60	—·60	—·44	—·57
7	·12	—·01	·06	·02	·05	—·32
9	·96	·98	·93	·71	·81	·05
11	·84	·95	·87	·71	·68	·27
1h p.	—·13	—·12	—·13	·05	·35	·30
3	—·66	—·79	—·71	—·33	—·29	—·27
5	—·72	—·71	—·73	—·42	—·36	—·20
7	·01	·02	—·03	·06	—·20	·17
9	·50	·69	·60	·42	·18	·52
11	·40	·54	·51	·22	·05	·26
Mittel	760·5	58·8	60·1	66·9	65·6	56·1

[1] Wahre Zeit, wie bei allen diesen Beobachtungen.

[2] Route Cadix—Messina.

2.

	Atlantischer Ocean			
	VII	VIII	IX	X
Breite N	33°1	36°2	36°9	33°8
Länge W	51·2	29·6	13·1	36·2
Tage	12	6	6	24
Jahreszeit....	Februar bis März 1886	März 1886	März 1886	Februar bis März 1886
1^h a.	·21	— ·20	— ·13	·02
2	— ·10	— ·37	— ·47	— ·26
3	— ·36	— ·65	— ·60	— ·50
4	— ·49	— ·63	— ·71	— ·58
5	— ·14	— ·41	— ·53	— ·31
6	·01	— ·25	— ·14	— ·10
7	·18	·07	·20	·15
8	·37	·50	·47	·42
9	·50	·72	·69	·60
10	·59	·85	·70	·68
11	·36	·50	·62	·46
Mittag	·08	·36	·37	·22
1	— ·59	— ·06	·05	— ·30
2	— ·88	— ·29	— ·27	— ·58
3	— ·92	— ·39	— ·33	— ·64
4	— ·73	— ·47	— ·60	— ·64
5	— ·47	— ·22	— ·40	— ·39
6	— ·17	— ·05	— ·27	— ·17
7	·16	·19	·00	·13
8	·45	·45	·28	·40
9	·59	·41	·30	·47
10	·66	·37	·33	·50
11	·51	·14	·38	·38
Mitternacht	·32	— ·11	·13	·16
Mittel	752·1	63·7	62·1	57·5

Beobachtungen an Bord S. M. Schiff »Saida« 1890—1891.

Diese Beobachtungen verdanke ich Herrn k. k. Linienschiffs-Lieutenant A. Haus. Sie waren zuerst nach den stündlichen Ablesungen an einem Aneroid (corrigirt für Indexfehler und Temperatur, Seehöhe 7 *m*) graphisch construirt worden, Herr Haus hat aber für mich aus diesen Curven wieder die absoluten Barometerstände entnommen und zugleich für jede Tagesreihe die Länge und Breite für den wahren Mittag beigefügt. Beobachtungen in Häfen und in der Nähe grösserer Landmassen sind ausgeschlossen worden.

Aus der umfangreichen Tabelle des Herrn Haus habe ich Gruppen von stündlichen Beobachtungen ausgewählt und zu Mittelwerthen vereinigt, und zwar so, dass das Breitenintervall für jede Gruppe nicht zu erheblich ausgefallen ist.

Diese Gruppen sind:

I. 18. October bis 1. November 1890 (15 Tage) zwischen 5° N und 5° S, $59^1/_2$° und 72° E L.; dann 11 Tage September 1891 zwischen 9°8 S und 9°7 N Br., 11° und 21° W L. Mittlere Breite 4°.

II. 9.—17. October 1890: 11° bis 7° N und 54—57° E L., dann 5.—13. November zwischen 8° und 19° S Br. und 72° bis 61° E L. Mittlere Breite 12°.

III. Ende August 1891: 18—11° S und $4^1/_2$—$10^1/_2$° W; dann 13.—16. und 25.—26. September 1891: 11—20° N und 21—28° W L. Mittlere Breite 15°. 11 Tage.

IV. 27. November bis 1. December 1890: 23—30° S Br., 56—57° E L., und 27. September bis 5. October 1891: 22° bis $29^1/_2$° N, $29^1/_2$—$33^1/_2$° W L. 14 Tage. Mittlere Breite 26°.

V. 2.—15. September 1890: $32^1/_2$—$39^1/_2$° S Br., 59° bis 88° E L.; 7.—12. Jänner und 8.—9. März 1891: 36° S, 121° bis 156° E L.; 27. Juli bis 10. August: 35—31° S, 51—21°W; endlich 6.—15. October: $30^1/_2$—33° N, 35—25°5 W L. 50 Tage. 35° S.

VI. 17.—26. December 1890: 40—41° S., 90—112° E. 13.—25. April 1891 zwischen 39° und 49° S Br., 180—142° W L.; 30. Mai bis 6. Juni zwischen 49° und 39° S Br. unter 55° bis 56° W L. 30 Tage.

VII. 26. April bis 14. Mai 1891 zwischen 46° und 53° S Br., 138° und 78° W L. 19 Tage.

Alle diese Stundenmittel haben nach Möglichkeit eine Correction erfahren für die unregelmässigen Änderungen des Luftdruckes und die Änderungen in Folge des Ortswechsels des Schiffes. Im Allgemeinen können diese Stundenmittel, da sie aus graphischen Aufzeichnungen wieder zurück auf Barometerstände reducirt worden sind, keine so grosse Genauigkeit beanspruchen, wie die früher mitgetheilten Beobachtungsergebnisse.

Herr Haus schätzt den Fehler, der in einzelnen Fällen bei der Reduction unterlaufen sein mag, auf 1—2 Zehntelmillimeter; in den Mittelwerthen dürften dieselben zum grössten Theile eliminirt worden sein.

Constanten des täglichen Ganges des Barometers nach den Beobachtungen an Bord S. M. Schiff »Saida«.

Nr.	Tage	Breite	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
I.	26	4°	·018	·311	·284	—·802	3°3	160°5	·311	·851
II.	18	12	·002	·368	·296	—·768	0·3	158·9	·368	·822
III.	11	15	·077	·255	·318	—·576	16·8	151·1	·266	·658
IV.	14	26	·136	·138	·295	—·504	44·6	149·7	·194	·583
V.	50	35	·083	·109	·163	—·358	37·3	155·5	·137	·394
VI.	30	42½	—·171	·158	·088	—·260	312·7	161·3	·233	·274

Die letzte Gruppe von Beobachtungen, die sich auf 49½° S Br. bezieht, lohnt die Berechnung nicht, da ganz offenbar in diesen Zahlen noch kein wahrer täglicher Gang des Luftdruckes zum Ausdrucke kommt, wie schon die mittlere Grösse der täglichen Änderungen zu erkennen gibt.

Täglicher Gang des Luftdruckes zur See nach den Beobachtungen an Bord S. M. Schiff »Saida« 1890—1891.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
Breite	4°	12°	15°	26°	35°	42½°	(49½°)
Zahl der Tage	26	18	11	14	50	30	19
Mitternacht	·30	·26	·36	·37	·23	—·07	·57
1	·04	·04	·21	·28	·12	—·16	·55
2	—·36	—·29	—·12	·04	—·08	— 21	·32
3	—·58*	—·48	—·30	—·27	—·23	—·21	·07
4	—·56	—·51*	—·41*	—·43*	—·31*	— 31*	—·15
5	—·33	— 32	—·32	—·43	—·20	—·12	—·25
6	—·04	·00	—·12	— 22	—·05	·10	—·26*
7	·44	·45	·29	·14	·15	·25	—·27
8	·82	·83	·49	·30	·26	·43	— 19
9	1·02	**1·08**	·69	·53	·37	**·52**	**—·09**
10	**1·05**	1·03	**·78**	**·61**	**·38**	·47	—·12
11	·81	·79	·61	·49	·28	·38	—·13
Mittag	·26	·37	·26	·18	·09	·35	—·22
1	—·34	—·31	—·17	—·23	—·15	·02	— 49
2	—·86	—·75	—·62	—·56	—·41	—·11	—·58
3	—1 06	—1·11	—·84	— 77	— 49	—·23	—·60*
4	—1·07*	—1·18*	—·90*	—·80*	—·53*	—·35*	—·50
5	—·86	—·91	—·79	—·60	—·42	— 33	—·25
6	—·50	—·55	—·47	—·36	— 25	—·21	—·08
7	—·11	—·22	—·24	— 12	—·05	— 07	·27
8	·17	·17	·15	·28	·15	—·05	·43
9	·54	·47	·44	·48	·34	—·03	·58
10	**·72**	**·59**	**·58**	**·52**	**·40**	**·04**	**·66**
11	·58	·49	·54	·50	·35	—·01	·61
Mittel	·56	·55	·45	·39	·26	·21	(·34)

Beobachtungen an Bord S. M. Schiff »Donau« 1894—1895.

Die stündlichen Luftdruckmittel beruhen auf den Ergebnissen der Reduction von Registrirungen eines Barographen Richard, die durch Ablesungen an einem Quecksilberbarometer um 10^h a. und 4^h p. controlirt worden sind. Die Barogramme wurden mir durch die k. u. k. Marinesection des Reichs-Kriegs-Ministeriums zur Verfügung gestellt und an der k. k. Centralanstalt reducirt, soweit selbe sich auf Strecken im offenen Ocean beziehen. Die verwendeten Routen sind:

I. Äquatorialer Atlantischer Ocean. Route von S. Thomé nach Bahia. 30. December 1894 bis 22. Jänner 1895 zwischen 1° und 12° S. Br. und 6° E und 35° W L. Mittlere Breite 5°9 S, mittlere Länge 13° W. 24 Tage.

II. Von Bahia bis in die Mitte des Süd-Atlantischen Oceans. 8—21. Februar 1895, 14 Tage, zwischen 14°7 und 31° S Br., 37¹/₂° und 24¹/₂° W L. Mittlere Breite 24°4 S, mittlere Länge 30° W.

III. Fortsetzung der Route über den Süd-Atlantischen Ocean gegen die Capstadt (zum Theil übergreifend in die vorige). 18. Februar bis 12. März, 23 Tage, zwischen 31°, 38¹/₂° und wieder 35° S Br., 27° W und 16¹/₂° E L. Mittlere Breite 35°7 S, mittlere Länge 2¹/₂° W.

IV. Süd-Atlantischer Ocean, von Capstadt zurück nach Norden in die Mitte des südatlantischen Oceans; vom 5. bis 25. April zwischen 31¹/₂° und 14° S Br., 15° E und 9° W L. Mittlere Breite 22°8 S, mittlere Länge 3° E.

V. Tropischer Atlantischer Ocean, Fortsetzung der Route gegen Westindien; vom 26. April bis 20. Mai, 25 Tage, zwischen 12¹/₂° S und 10° N Br., 12° und 51° W L. Mittlere Position 2¹/₂° S, 33° W; mittlere Breite 5°9.

VI. Westlicher Nord-Atlantischer Ocean, Route Westindien —New York; vom 21. Mai bis 22. Juni 1895, 33 Tage, zwischen 11° und 35° N Br., 55° und 74° W L. Mittlere Breite 21°7 N; mittlere Länge 65° W. Den Ergebnissen dieser Beobachtungsserie ist wegen des grossen Breitenintervalls und theilweise grösserer Nähe des Landes ein geringeres Gewicht beizulegen.

VII. Route quer durch den Nord-Atlantischen Ocean, fast constant unter nahe 40° N Br. von Newport nach Lissabon, vom 21. Juli bis 23. August, also 34 Tage, zwischen 41° und 38° N Br. und 70—12$^1/_2$° W L. Mittlere Breite 39$^1/_2$° N, mittlere Länge 40° W.

Vom 23. Jänner bis 7. Februar lag das Schiff vor Bahia. Die 16tägigen Registrirungen wurden des Vergleiches halber gleichfalls reducirt. Die Ergebnisse folgen nachstehend zugleich mit jenen aus den zweistündlichen Aufzeichnungen des »Challenger« in Bahia vom 15.—25. September 1873.

Wie die folgende kleine Tabelle zeigt, sind auch hier wieder die täglichen Variationen an Bord des »Challenger« ganz auffallend klein.

Täglicher Gang des Barometers zu Bahia.
12° 59′ S Br., 38° 30′ W L.

»Challenger« 11 Tage 15.—25. September 1873		»Donau« 23. Jänner bis 7. Februar 1895			
Mitternacht	·35	Mittern.	·24	Mittag	·76
2	— ·13	1	— ·01	1	·13
4	— ·51	2	— ·23	2	— ·49
6	— ·05	3	— ·31	3	—1·15
8	·51	4	— ·24	4	—1·42
10	·84	5	·01	5	—1·45
Mittag	·76	6	·39	6	—1·04
2	— ·41	7	·93	7	— ·98
4	— ·86	8	1·19	8	— ·68
6	— ·71	9	1·39	9	— ·23
8	— ·10	10	1·37	10	·20
10	·33	11	1·14	11	·38
Mittel	0·46	Mittel....... 0·68			

Constanten des täglichen Barometerganges nach den Registrirungen an Bord S. M. Schiff »Donau«.

Nr.	Tage	Breite	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
I und V . . .	49	5°9	—·007	·164	·463	—·746	357°6	148°1	·164	·879
II, IV, VI . . .	68	22·7	—·026	·128	·348	—·515	348·7	146·0	·130	·622
III	23	35·7	·057	—·140	·103	—·380	157·9	164·8	·151	·394
VII	34	39·5	—·104	—·097	043	—·310	227·0	172·1	·142	·313
Bahia										
»Challenger«	11	13°0	—·123	·315	·445	—·503	338·7	138·5	·338	·671
»Donau«	16	13·0	—·267	·828	·472	—·611	342·1	142·3	·880	·772

Die Amplituden der einmaligen täglichen Oscillation des Barometers kommen nach den Registrirungen des Luftdruckes an Bord S. M. Schiff »Donau« sehr klein heraus, die Amplituden der doppelten täglichen Oscillation sind in niedrigen Breiten normal, in etwas höheren Breiten ziemlich klein. Die Vergleichungen grösserer unregelmässiger Schwankungen, wie sich selbe aus den Registrirungen und den entsprechenden directen Ablesungen am Quecksilberbarometer ergeben, würden einen Reductionsfactor der Amplituden aus den Registrirungen von 0·97 ergeben, der wohl vernachlässigt werden kann.

Um so auffallender ist die Verschiedenheit der Amplituden der täglichen Barometer-Oscillation zu Bahia nach den Beobachtungen an Bord des »Challenger« und an Bord der »Donau«. Die Phasenzeiten stimmen dagegen so gut wie vollkommen überein, was sicherlich dafür spricht, dass die grosse tägliche Amplitude der einmaligen täglichen Oscillation nicht zum Theil auf einen aus den Registrirungen nicht eliminirten Temperatur-Coëfficienten der Aneroiddosen beruht; abgesehen davon, dass ein solcher zumeist die Folge hat, dass die Amplituden der ganztägigen Wellen verkleinert werden (der Druck steigt bei zunehmender Temperatur). Da die normale Amplitude der

halbtägigen Welle unter 13° bei 0·89 *mm* liegt, so ist der Werth von 0·77 *mm* (»Donau«) sicherlich nicht zu hoch, jener von 0·67 *mm* (»Challenger«) dagegen auffallend klein. Eine sehr grosse ganztägige Luftdruckschwankung ist an der Küste von Bahia zu erwarten, wenigstens zu gewissen Jahreszeiten, wo die Land- und Seewinde stark entwickelt sind. Wir möchten daher das Resultat, das sich aus den Registrirungen an Bord S. M. Schiff »Donau« ergeben hat, nicht in Zweifel ziehen.

Täglicher Gang des Barometers auf offener See.

Ergebnisse der Luftdruckregistrirungen an Bord S. M. Schiff »Donau« 1896.

	Nord- und Süd-Atlantischer Ocean								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	Mittelwerthe	
Breite	5°9 S	24°4 S	35°7 S	22°8 S	2°4 S (5·9)	21°7 N	39½° N	I u. V	II, IV, VI
Länge	13·1W	30·0W	2·3E	3·0E	32·8W	64·9W	40°3W	5°9	22°7
Tage..	24	14	23	21	25	33	34	49	68
Jahreszeit ..	Jänner	Febr.	Febr., März	April	April, Mai	Mai, Juni	Juli, Aug.	—	—
Mittn.	·39	·38	·10	·43	·75	·27	—·12	·57	·35
1	—·12	—·02	—·09	·22	·12	—·10	—·31	00	·03
2	—·51	—·38	—·24	·04	—·34	—·44	—·42	—·42	—·27
3	—·71	—·60	—·39	—·19	—·61	—·60	—·45	—·66	—·46
4	—·64	—·69	—·47	—·32	—·79	—·63	—·41	—·72	—·54
5	—·39	—·61	—·42	—·34	—·66	—·45	—·28	—·52	—·45
6	—·04	—·36	—·25	—·12	—·46	—·21	—·11	—·25	—·21
7	·40	·03	—·07	·17	—·08	·16	·07	·16	·11
8	·72	·25	·09	·46	·33	·42	·17	53	·40
9	·91	·47	·26	·76	·75	·56	·28	·83	·61
10	·92	·52	·29	·89	·92	·68	·30	·92	·72
11	·72	·38	·16	·77	·92	·62	·24	·82	·62
Mittag	·38	·27	·05	·34	·58	·39	·16	·48	·35
1	—·06	—·04	—·10	—·18	·05	·12	·05	·00	—·02
2	—·55	—·34	—·28	—·58	— 47	—·16	—·06	—·51	—·34
3	—·91	—·43	—·29	—·90	—·87	—·41	—·13	—·89	— 57
4	—·99	—·49	— 30	—·97	—·96	—·51	—·16	—·97	—·66
5	—·87	—·38	—·22	— 91	—·89	—·54	—·14	—·88	—·63
6	—·57	—·24	—·04	—·71	—·57	—·48	—·03	—·57	—·50
7	—·13	·02	·30	—·30	—·21	—·22	·12	—·17	—·19
8	·28	·31	·53	—·01	·18	·08	·32	·23	·01
9	·56	·60	·55	·32	·56	·43	·38	·56	·43
10	·65	·74	·46	·50	·81	·54	·30	·73	·57
11	·66	·61	·31	·53	·90	·50	·15	·78	·54
Mittel	·55	·38	·26	·45	·57	·40	·21	·55	·39

Ergebnisse von Registrirungen an Bord S. M. Schiff »Aurora« 1895—1896.

I. Busen von Bengalen, 6.—15. und 25.—29. Februar 1896 zwischen 15°1 und 7°1 N und $95^{1}/_{2}$° und 83°2 E. Mittlere Breite 12°7 N, Länge 86°9 E. Wind zumeist NNE und NE, See ruhig.

II. Busen von Bengalen, 28. Februar bis 4. März 1896 zwischen 5°6 und 6°6 N Br. und 81°5 und 97°1 E L. Mittlere Position 6°1 N, 89°8 E. SW-Monsun, häufige und starke Regenböen.

III. Arabisches Meer. Auf der Route Colombo—Sokotra vom 10. März bis 1. April, 23 Tage, zwischen 6°6 und 10°8 N Br. und 78°9 und 53° E L. Mittlere Position 8°6 N und 66°4 E. Ruhige See, Windstille und leichter NE-Monsun bei schönem Wetter.

IV. Arabisches Meer. Auf der Route Sokotra—Colombo vom 12.—21. Juni, 10 Tage, zwischen 13°4 und 7°2 N Br. und 52°9 und 76°5 E L. Mittlere Position 10°0 N, 65°9 E. SW-Monsun, Stärke 7—9 vom 11.—17. Juni, 18.—21. Juni W 7—9 Beaufort, Regenböen.

Die Mittel der directen Ablesungen am Quecksilberbarometer sind:

						Amplituden			
						beobachtet		registrirt	
	Tage	4^h a.	10^h a.	4^h p.	10^h p.	10^h a. bis 4^h p.	10^h p. bis 4^h a.	10^h bis 4^h	10^h bis 4^h
I...	15	756·84	59·35	56·69	58 39	2 66	1·55	2·62	1·19
II...	7	754·47	55·75	53·53	55·61	2·22	1·14	1·55	1·16
III...	23	755·71	57·98	55·32	57·18	2·66	1 47	2·68	1·20
IV...	10	751·24	52·99	50·73	(53·52)	2·26	(2·28)	1·53	1·17

Es ist sehr auffallend, dass die registrirten und die beobachteten Amplituden unter Nr. I und III, d. i. bei den Beobachtungen und Registrirungen auf der Hinfahrt nach Ost-Asien während der Periode des NE-Monsuns, man kann sagen, völlig übereinstimmen, denn die Differenzen bei der nächtlichen Amplitude sind so gering, dass sie vollkommen durch die Barometerablesung bei künstlichem Licht erklärt werden können, während die Amplituden auf der Rückfahrt im Juni während des SW-Monsuns gar nicht übereinstimmen, namentlich nicht in der Tagesamplitude. Die Berechnung des täglichen Ganges während des SW-Monsuns zeigt gleichfalls Abweichungen, welche so abnorm sind, dass ich sie auf eine allerdings unbekannte Fehlerquelle bei den Registrirungen während der Rückfahrt zurückführen möchte. Die Berechnung der Constanten ergibt:

	Tage	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
8° (SW-Mons.).	17	·097	·193	—·073	—·792	26·7	185·3	·216	·794
10° (NE-Monsun)	38	—·172	·460	·274	—·963	339 5	164·1	·491	1·001
9° Mittel......	55	—·082	·371	·158	—·906	347·5	170·1	·380	920

Die Phasenzeit der doppelten täglichen Oscillation des Barometers, wie sich selbe aus den 17tägigen Registrirungen während der Periode des SW-Monsuns, sowohl aus den Beobachtungen im Busen von Bengalen, als auch aus jenen im arabischen Meere übereinstimmend ergibt, ist abweichend von allen bisher bekannten Beobachtungsergebnissen; nur in Tokio erreicht die Winkelconstante a_2 im November den Werth 180°. Die Abweichung von dem Mittelwerth der Tropen erreicht nahe 30°, d. i. eine Stunde, die Morgenfluth tritt schon um $8^1/_2{}^h$ ein. Auf den Landstationen in Indien bemerkt man keinen derartigen Einfluss der Regenzeit, wie folgende kleine Zusammenstellung zeigt.

Unterschied im täglichen Gange des Barometers in der Regenzeit und in der Trockenzeit in Indien.

	A_1	A_2	a_1	a_2
Trockenzeit				
Goalpora 26°2 N.	349·6	151·6	0·80	1·07
Allahabad 25·4 N.	329·6	156·9	0·65	0·91
Rangoon 16·8 N.	364·3	161·4	0·65	1·04
Mittel....	347·8	156·6	0·72	1·01
Regenzeit				
Goalpora 26°2 N.	352·4	142·3	0·72	·85
Allahabad 25·4 N.	345·7	143·1	0·71	·84
Rangoon 16·8 N.	361·2	146·3	0·41	·86
Mittel....	353·1	143·9	0·61	0·85
Differenz	+ 5·3	— 12·7	—0·11	—0·16

Die Fluthzeit der doppelten täglichen Welle verspätet sich dort in der Regenzeit um nicht ganz eine Viertelstunde gegen jene in der Trockenzeit, die Amplitude ist um 16$^0/_0$ kleiner.

Zusammengehalten mit der vorhin nachgewiesenen Differenz zwischen den directen Ablesungen am Quecksilberbarometer und den Registrirungen auf der Rückfahrt der »Aurora« während der Regenzeit möchte ich desshalb die Richtigkeit der letzteren einigermassen bezweifeln und irgend eine Fehlerquelle voraussetzen.

Täglicher Gang des Barometers auf offener See.

Ergebnisse der Luftdruckregistrirungen an Bord S. M. Schiff »Aurora« 1895—1896 (Meerbusen von Bengalen und Arabisches Meer).

	I	II	III	IV	II u. IV	I u. III	I—IV
	Busen von Bengalen		Arabisches Meer				
Breite..	12°7 N	6°1 N	8°6 N	10°0 N	8° N-Breite	10½ N-Breite	10° N-Breite
Länge..	86·9 E	89·8 E	66·4 E	65·9 E	SW-Monsun	NE-Monsun	Mittel[1]
Tage...	15	7	23	10			
Monat.	Februar	Juni, Juli	März	Juni	17 Tage	38 Tage	55 Tage
	NE-Monsun	SW-Monsun	NE-Monsun	SW-Monsun			
Mittern.	·11	— ·02	·12	— ·21	— ·11	·11	·04
1	— ·10	— ·29	— ·38	— ·32	— ·31	— ·24	— ·26
2	— ·48	— ·45	— ·62	— ·55	— ·50	— ·55	— ·53
3	— ·65	— ·50	— ·80	— ·64	— ·57	— ·73	— ·68
4	— ·59	— ·36	— ·73	— ·48	— ·42	— ·66	— ·58
5	— ·27	— ·14	— ·45	— ·08	— ·11	— ·36	— ·28
6	·17	·25	— ·02	·26	·25	·08	·14
7	·72	·69	·68	·73	·71	·70	·70
8	1·24	·76	1·13	·86	·81	1·18	1·06
9	1·51	·79	1·50	·88	·83	1·51	1·28
10	1·34	·58	1·49	·64	·60	1·42	1·15
11	·94	·17	1·16	·33	·25	1.05	·78
Mittag	·25	— ·16	·65	— ·04	— ·10	·45	·27
1	— ·52	— ·64	— ·15	— ·49	— ·56	— ·34	— ·41
2	—1·02	— ·97	— ·65	— ·73	— ·85	— ·84	— ·84
3	—1·30	—1·07	—1·08	— ·85	— ·96	—1·19	—1·11
4	—1·28	— 97	—1·19	— ·90	— ·94	—1·23	—1·13
5	—1·03	— ·65	—1·03	— ·57	— ·61	—1·03	— ·89
6	— ·66	— ·18	— ·73	— ·10	— ·14	— ·70	— ·51
7	— ·14	·42	— ·30	·26	·34	— ·22	— ·03
8	·26	·65	·07	·53	·59	·16	·30
9	·59	·88	·36	·75	·81	·47	·58
10	·60	·80	·47	·69	·74	·54	·61
11	·30	·40	·43	·26	·33	·41	·38
Mittel	·67	·53	·67	·51	·52	·67	·61

[1] Diese Mittel sind mit Rücksicht auf die doppelte Anzahl der Beobachtungstage während des NE-Monsun gebildet, was auch beiläufig mit der relativen Dauer der ganzen Periode des NE-Monsuns gegenüber jenem der SW-Monsuns übereinstimmt.

Die folgende Tabelle stellt die hier berechneten stündlichen (und zweistündlichen) Barometerbeobachtungen auf Schiffen übersichtlich zusammen.

Zusammenstellung einiger Beobachtungsergebnisse über den täglichen Gang des Barometers auf dem offenen Ocean.

Schiff	Zahl der Tage	Breite	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Novara	35	4·5	·088	·336	·337	—·918	10°7	159°8	·347	·978
Challenger	37	3·8	·002	·225	·378	—·697	5·1	151·5	·226	·793
Saida	26	4·0	·018	·311	·284	—·802	3·3	160·5	·311	·851
Donau	49	5·9	—·007	·164	·464	—·746	357·6	148·1	·164	·879
Novara	40	8·0	Nördl. Indischer Ocean				344·7	153·9	·399	·995
Aurora	55	9·0					347·5	170·1	·380	·920
Novara	40	10·0	·023	·212	·291	—·751	6·2	158·8	·213	·805
Saida	18	12·0	·002	·368	·296	—·768	0·3	158·9	·368	·822
Novara	40	16·5	·054	·306	·274	—·770	10·0	160·4	·311	·817
Zrinyi	10	14·0	—	—	—	—	291·9	153·6	·100	·904
Saida	11	15·0	·077	·255	·318	—·576	16·8	151·1	·266	·658
Challenger	30	22·4	—·017	—·002	·260	—·504	263·3	152·7	·017	·566
Zrinyi	13	22·4	—	—	—	—	318·6	156·3	·173	·754
Saida	14	26·0	·136	·138	·295	—·504	44·6	149·8	·194	·583
Donau	68	22·7	—·026	·128	·348	—·515	348·7	146·0	·130	·622
Novara	64	33·5	—·213	·057	·182	—·463	285·0	158·6	·220	·498
Novara	30	33·5	—·043	·067	·268	—·338	327·3	141·6	·080	·431
Zrinyi	24	34·8	—	—	—	—	24·8	162·9	·072	·529
Novara	20	37·5	—·037	—·224	·197	—·354	189·7	150·9	·223	·405
Challenger	141	36·0	—·117	—·001	·172	—·332	269·5	152·6	·117	·373
Saida	50	35·0	·083	·109	·163	—·358	37·3	155·5	·137	·394
Donau	23	35·7	·057	—·140	·103	—·380	157·9	164·8	·151	·394
Novara	40	39·0	—·137	·002	·100	—·168	270·8	149·2	·137	·195
Saida	30	42·5	—·171	·158	·088	—·260	312·7	161·3	·233	·274
Donau	34	39·5	—·104	—·097	·043	—·310	227·0	172·1	·142	·313

Täglicher Gang des Barometers auf einigen Inseln.

I. Jaluit.

Auf meine Anregung hin wurde in dem deutschen Schutzgebiete der Marshall-Inseln, und zwar auf Jaluit, unter 5° 55′ N Breite und 169° 40′ E Länge, ein von der deutschen Seewarte geliehener Richard'scher Barograph aufgestellt und ein Jahr hindurch in Thätigkeit erhalten. Herr Regierungsarzt Dr. Steinbach, dem man eine schöne Reihe meteorologischer Aufzeichnungen auf Jaluit verdankt, hat das Verdienst, die Registrirungen sorgfältig überwacht und controlirt zu haben, sowohl in Bezug auf die richtige Zeit, als auch in Bezug auf die absoluten Stände, indem er den Barographen jeden Montag Mittags nach mittlerer Jaluiter Zeit und nach dem reducirten, am Quecksilberbarometer abgelesenen Luftdrucke einstellte und regelmässig Zeitmarken machte. Der Gang der Uhr war hiernach sehr regelmässig, nur im October zeigten sich erhebliche Unregelmässigkeiten.[1]

Herr Dr. Trabert hat die den Barogrammen entnommenen Stundenmittel der harmonischen Analyse unterzogen und die in der folgenden Tabelle enthaltenen Constanten des täglichen Barometerganges sind das Ergebniss seiner Rechnung.[2] Nur den October und das Jahresmittel habe ich selbst berechnet, sowie auch den jährlichen Gang der Constanten, da einjährige Beobachtungen denselben sonst nicht deutlich hervortreten lassen.

Das hohe Interesse, das diese Beobachtungsergebnisse beanspruchen dürfen, beruht darauf, dass Jaluit eine kleine, ganz niedrige Koralleninsel im grossen Ocean ist, weit entfernt von grösseren Landmassen und sich daher wie ein auf hoher See verankertes Schiff verhält, in Bezug auf die Unabhängig-

---

[1] Ein Theil der Nacht- und Vormittagswerthe des Luftdruckes des October ist desshalb von mir mit Hilfe der Werthe der gleichen Stunden der Nachbarmonate abgeändert, respective interpolirt worden.

[2] Der tägliche Gang des Barometers zu Jaluit, in: Danckelman's Mittheilungen von Forschungsreisenden und Gelehrten aus den deutschen Schutzgebieten. VIII. Bd. (1895), S. 176.

keit von Einflüssen des Landes auf den täglichen Gang des Barometers. Dies ist von besonderer Wichtigkeit in Bezug auf die einmalige tägliche Barometerschwankung, die auf dem Lande und auf hohen Inseln mehr oder minder erheblichen Modificationen ausgesetzt ist, die es unmöglich machen, die normale tägliche Welle, wie sie der geographischen Breite entsprechen würde, rein zur Darstellung zu bringen. Schiffsbeobachtungen auf hoher See bieten ausserdem das einzige Mittel die normale ganztägige Barometerschwankung ableiten zu können, aber diese Beobachtungen beziehen sich stets nur auf kürzere Perioden und gestatten nicht, den jährlichen Gang der Erscheinung zu constatiren. Desshalb können die Luftdruck-Registrirungen auf Jaluit ganz besonderes Interesse beanspruchen.

Herr Dr. Steinbach hatte schon früher an 20 Tagen stündliche Barometerablesungen gemacht, die ich berechnet habe. Sie zeigen die beste Übereinstimmung mit den Schiffsbeobachtungen auf hoher See unter ähnlichen Breiten. Sie ergaben für den täglichen Gang die Gleichung:

$$0 \cdot 270 \sin(4^\circ 7 + x) + 0 \cdot 823 \sin(157^\circ 3 + 2x).$$

Die Registrirungen eines vollen Jahres liefern die Gleichung

$$0 \cdot 336 \sin(23^\circ 3 + x) + 0 \cdot 840 \sin(164^\circ 8 + 2x).$$

Die Amplitude der ganztägigen Welle erscheint darin etwas grösser, als sie aus den Schiffsbeobachtungen im Mittel sich ergibt, und die Fluthzeit der doppelten täglichen Welle tritt um circa 7°, d. i. etwa um eine Viertelstunde früher ein. Das interessanteste Ergebniss ist jedoch die Übereinstimmung des jährlichen Ganges der Phasenzeiten und Amplituden der ganztägigen Welle mit jenem derselben Elemente der doppelten täglichen Welle, worauf ich schon früher aufmerksam gemacht habe.

Jaluit. Harmonische Constanten der täglichen Oscillation des Barometers.

	A_1	A_2	a_1	a_2	A_1	A_2	a_1	a_2
	Beobachtet				Berechnet			
Jänner	19·5	164·1	·285	·808	22·4	162·2	·345*	·828*
Februar	19·6	159·2	·429	·850	20·2*	160·9*	·360	·845
März	22·1	163·4	·378	·897	21·4	162·9	**·377**	·893
April	27·5	165·2	·376	·906	24·2	**165·4**	·365	**·910**
Mai	15 0	164·9	·277	·866	**25·5**	165 3	·316	·865
Juni	28 3	164 7	·306	·778	24 1	162·4	·261	·786
Juli	18·6	157·1	·258	·765	22·1*	160·0*	·243*	·744*
August	26 5	161·9	·249	·751	22 3	161·0	·276	·777
September	22·5	166·3	·311	·875	25·5	165 5	·335	·859
October	29 7	169·7	·374	·917	29·1	169·7	·375	**·918**
November	33·7	169·1	·398	·895	**29·9**	**170·1**	**·376**	·913
December	30·6	166·3	·343	·887	26·8	166·5	·355	·862
Jahr	23·3	164·8	·336	·840	24·5	164·3	·332	·850

$$A_1 = 24·46 + 2·46 \sin(175°8 + x) + 3·29 \sin(222°4 + 2x)$$
$$A_2 = 164·33 + 2·40 \sin(152·3 + x) + 3·84 \sin(237·8 + 2x)$$
$$a_1 = 0·332 + 0·051 \sin(95·6 + x) + 0·038 \sin(278·9 + 2x)$$
$$a_2 = 0·850 + 0·042 \sin(95·1 + x) + 0·065 \sin(263·1 + 2x).$$

Reduction der Amplituden auf das Jahresmittel.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
a_1	—·013	—·028	—·045	—·033	+·016	·071
a_2	·022	·005	—·043	—·060	—·015	·064

	Juli	August	Sept.	October	November	December
a_1	·089	·056	—·003	—·043	—·044	—·023
a_2	·106	·073	—·009	—·068	—·063	—·012

II. Pelagosa.

Nach einigen vergeblichen früheren Bemühungen auf der kleinen Felseninsel Pelagosa, die mitten in der Adria gelegen ist, eine meteorologische Station zu errichten, ist mir dies endlich im Jahre 1894, und zwar nur durch die höchst dankenswerthe Unterstützung der hohen Marine-Section des k. und k. Reichs-Kriegs-Ministeriums gelungen. Auch bei der k. k. Seebehörde in Triest, welcher die Leuchtthurmbeamten auf der Insel, denen die Beobachtungen anvertraut werden mussten, unterstehen, habe ich dabei eine sehr dankenswerthe Unterstützung gefunden. Die Schwierigkeit der Inbetriebsetzung und Unterhaltung der Station besteht darin, dass die Insel ausser allem Verkehr liegt; nur durch das Entgegenkommen der hohen Marine-Section, welche den in der Gegend kreuzenden Kriegsschiffen den Befehl gab, von Zeit zu Zeit bei Pelagosa anzulegen und durch die Herren Officiere die meteorologische Station einer Inspection zu unterziehen, die Beobachter zu unterrichten und auf Fehler aufmerksam zu machen, wurde es möglich, regelmässig in gewissen Intervallen von Pelagosa die meteorologischen Aufzeichnungen zu erhalten. Die hohe Marine-Section hat zudem die Station mit einem Schiffs-Chronometer aus dem Inventar des hydrographischen Amtes in Pola versehen, was für die richtige Zeit des Barographen von grösster Wichtigkeit war. —

Die Luftdruckregistrirungen auf Pelagosa beginnen mit 11. Juni 1894 und finden sich hier bis inclusive Juni 1897 verwerthet; nur die Monate Jänner bis März 1897 fehlen, sie sind vielleicht in Verlust gerathen. Den Juni 1894 habe ich nicht benützt. Die Reduction der Barogramme erfolgte ohne Beziehung auf die directen Ablesungen am Quecksilberbarometer, da ich den Einfluss der verschiedenen Einstellung des Nonius am Abende (und im Winter auch Morgens) bei Licht von nicht sehr geübten Beobachtern vermeiden wollte; eine Beziehung auf Eine Ablesung am Tage (2^h p.) hat, wo es sich um den täglichen Gang und nicht um die absoluten Werthe handelt, keinen Vortheil. Die Richtigkeit des Scalenwerthes, respective der Grösse der Amplituden, wurde geprüft durch Gegenüberstellung

grösserer Barometerschwankungen, wie sich selbe aus den Barogrammen und aus den gleichzeitigen Quecksilberständen ergeben. Diese Vergleichungen liefern einen Reductionsfactor für die Registrirungen von 0·97, den ich seiner Geringfügigkeit halber nicht berücksichtigt habe, da die Differenz noch innerhalb der Unsicherheit der Bestimmung dieses Werthes liegt.

Bei der Ableitung von Mittelwerthen aus den noch nicht ganz dreijährigen Registrirungen auf Pelagosa beschränkte ich mich auf Mittel für je zwei Monate von gleichem Charakter, da mir die Monatsmittel selbst noch zu sehr schwankend erschienen, wahrscheinlich nach dem jeweiligen Witterungscharakter derselben, der auf die ganztägige Welle, wie ich früher einmal gezeigt habe, einen grossen Einfluss hat.

Die Zusammenstellung (und zum Theil auch die speciellere Berechnung) dieser zweimonatlichen Mittel zeigte dann wieder (siehe Tabelle S. 120), dass eine Zusammenfassung derselben in drei für den Barometergang charakteristische Jahreszeiten (November—Februar, Mai—August und März, April mit September, October) vollkommen statthaft erscheint. Diese viermonatlichen Mittel sind übersichtlicher und lassen auch eine unmittelbare Vergleichung mit den in meiner Abhandlung: »Weitere Untersuchungen über den täglichen Gang des Barometers«[1] enthaltenen analogen Mittelwerthen anderer Stationen zu. Nur die Mittel November und December schienen gegen Jänner und Februar zu abweichend, um sie ohneweiters zu vereinigen. Ich berechnete sie desshalb zuerst gesondert und erhielt:

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Nov. u. Dec....	—·047	·033	·132	—·221	295·1	149·1	·057	·257
Jänner u. Febr..	·083	·047	·140	—·194	60·5	144·2	095	·239

Nur die Phasenzeit des ersten Gliedes weicht erheblich ab in den zwei Mitteln; bei der Geringfügigkeit der Amplituden dieses Gliedes ist man aber trotzdem berechtigt, dieselben zu einem Mittel zu vereinigen und sie nicht getrennt zu behandeln.

---

[1] Denkschriften, Bd. LIX, 1892.

Constanten des täglichen Barometerganges auf der Insel Pelagosa.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Winter (Nov.–Febr.).	·018	·040	·136	—·208	24·2	146·8	·044	·248
Frühling und Herbst.	—·107	·009	·225	—·214	274·6	133·6	·107	·310
Sommer (Mai–Aug.).	—·192	·063	·213	—·155	288·2	126·1	·202	·264
Jahr	—·094	·037	·191	—·192	291·5	135·1	·100	·271

Die ganztägige Welle ist im Winter fast verschwindend klein, ihrer Phasenzeit nach aber ziemlich normal, die Extreme fallen auf $4^1/_2{}^h$ Morgens (Maximum) und $4^1/_2{}^h$ Abends. Gegen den Sommer hin wird die Amplitude grösser, die Phasenzeit aber gleichzeitig eine ganz andere. Der Winkel von 275° (Frühling und Herbst) entspricht einer Fluthzeit um $11^h 40^m$, also um Mittag circa, der Winkel von 288° (Sommer) einer Fluthzeit um $10^h 50^m$ a. Diese Phasenzeiten entstehen wahrscheinlich durch die Superposition einer localen secundären ganztägigen Welle mit der allgemeinen (terrestrischen) ganztägigen Welle, die ihre Fluthzeit um 5—6^h Morgens hat, deren Amplitude aber in der Breite von Pelagosa, 42° 23′ N, wahrscheinlich schon recht klein ist (vielleicht nach den Schiffsbeobachtungen wenig über 0·1 *mm*). Die Erwärmung der beiden Ufer des adriatischen Meeres bei Tag, ihre Abkühlung und die wärmere Luft über dem Meere bei Nacht, verursacht in der warmen Jahreszeit bei Nacht ein Abfliessen der Luft in der Höhe über der Mitte der Adria (Pelagosa), daher ein Sinken des Luftdruckes in der Nacht, umgekehrt ein Steigen desselben bei Tage. Dem entspricht die Verspätung der Fluthzeit bis gegen Mittag in der warmen Jahreszeit.

Im Winter wird dieser Vorgang auch stattfinden, aber in viel schwächerem Maasse, so dass die normale »terrestrische« ganztägige Schwankung gerade noch zum Vorschein kommt, aber mit abgeschwächter Amplitude.

Die stündlichen Beobachtungen im westlichen Mittelmeer auf der »Novara« und von Herrn Sobieczky auf dem »Zrinyi« stimmen ganz damit überein (dieselben beziehen sich auf das Sommerhalbjahr).

Täglicher Barometergang auf dem Mittelmeer.
(37° circa).

»Novara«	30 Tg.	$0\cdot341 \sin(282° + x) + 0\cdot330 \sin(120° + 2x)$
»Zrinyi«	10 »	$0\cdot344 \sin(280 + x) + 0\cdot500 \sin(150 + 2x)$
Mittel	40 »	$0\cdot342 \sin(281 + x) + 0\cdot372 \sin(127^1/_2 + 2x)$.

Die Übereinstimmung der ganztägigen Welle in beiden Beobachtungsreihen ist sehr bemerkenswerth; die Phasenzeit stimmt mit jener auf Pelagosa vollkommen überein, die Amplitude ist aber grösser über dem Mittelmeere.

Was die doppelte tägliche Welle anbelangt, so ist im Winter deren Phasenzeit normal, im Sommer aber erleidet die Fluthzeit eine starke Verspätung von einer halben Stunde bis zu 40 Minuten; dasselbe ist über dem Mittelmeere der Fall. Die Amplitude ist für die Breite sehr klein. Es ist, als ob der tägliche Luftaustausch zwischen Land und Meer eine Constituente von halbtägiger Periode, wenn auch von untergeordnetem Betrage, besitzen würde, welche die normale halbtägige Oscillation schwächt und deren Phasenzeit etwas alterirt. Es dürfte schwer sein, eine andere Erklärung für das Verhalten der halbtägigen Welle über der Adria und dem Mittelmeer zu finden.

Für die Insel Lesina, welche fast unter gleichem Meridian mit Pelagosa, aber 42 Minuten nördlicher und nahe der Küste von Dalmatien liegt, ist der tägliche Gang des Barometers gleichfalls bekannt. Bildet man die Differenzen des täglichen Ganges des Luftdruckes an den beiden Stationen, so darf man erwarten, die oben erörterten, mit der Tageszeit ihre Richtung ändernden. Übertragungen von Luftmassen zwischen der Adria und deren Küsten in diesen Differenzen zum Vorschein kommen zu sehen. Das ist nun in der That der Fall, am ausgesprochensten natürlich im Sommer (Mai—August). Ich lasse desshalb diese Unterschiede des täglichen Ganges hier folgen.

Unterschiede im täglichen Barometergange zwischen Lesina und Pelagosa. Pelagosa—Lesina.

	Hundertel des Millimeters											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A. Sommer:												
Vormittag.	0	1	0	—2	—5	—8	—11	—12	—12	—13	—10	—7
Nachmittag	—1	1	3	6	12	15	18	19	9	5	2	0
B. Winter:												
Vormittag.	—2	0	0	0	0	3	1	—1	—1	—4	—6	—5
Nachmittag	5	4	5	5	8	5	2	—2	—1	—1	—1	—4

Im Winter sind die Unterschiede ganz unbedeutend, im Sommer weit erheblicher und sie sind genau von der Natur der Druckdifferenzen, welche die Land- und Seewinde in Bewegung setzen. Hätten wir eine Station mit stündlichen Barometeraufzeichnungen an der italienischen Küste (die dalmatinische Küste als Steilküste eignete sich viel weniger dazu), oder noch besser mehr im Innern des Landes, so würden wir hier zum ersten Male in der Lage sein, die Mechanik der Land- und Seewinde genau studiren zu können.

Pelagosa liegt mitten in der Adria, gibt uns also volle Auskunft über die Druckänderungen auf hoher See, welche dem Wechsel der Land- und Seewinde vorausgehen und selben begleiten. Die Differenzen gegen Lesina, das doch auch auf einer wenngleich küstennahen Insel liegt, müssen natürlich sehr klein ausfallen, wenngleich die Phasenzeiten der täglichen Druckwelle, die zwischen Land und See sich einstellt, schon ziemlich richtig zum Ausdrucke kommen dürfte. Wir finden:

Täglicher Gang der Druckdifferenzen zwischen Lesina und Pelagosa (Pelagosa—Lesina, d. i. See—Land).

Sommer...... $0\cdot12 \sin(155^\circ2+x)+0\cdot037 \sin(290^\circ4+2x)$

Winter....... $0\cdot02 \sin(199\cdot3+x)+0\cdot035 \sin(312\cdot7+2x)$.

Das erste Glied, die ganztägige Welle des Luftaustausches zwischen Land und See, ist, wie zu erwarten, genau von der Natur, wie ich selbe in meiner Abhandlung »Über den täglichen

Gang des Barometers an heiteren und trüben Tagen« nachgewiesen habe.[1] Man muss nur berücksichtigen, dass ich dort die Differenz Land—See zu Grunde gelegt habe, wesshalb der Winkel um 180° verschieden ist ($A_1 = 330$ rund). Die Amplitude ist hier klein, weil die Differenz gegen eine wenn auch küstennahe Insel und nicht gegen die Küste selbst genommen worden ist. Im Winter wird sie fast verschwindend klein. Das zweite Glied ist wohl sehr klein, hat aber, wie man sieht, gegenüber der normalen doppelten täglichen Barometer-Oscillation ziemlich genau entgegengesetzte Phasenzeiten und vermindert desshalb deren Amplitude und verschiebt wohl auch die Wendestunden derselben. Auf der See wird also, soweit die Wirkungssphäre des Landes noch reicht, die doppelte tägliche Oscillation des Barometers in ihrer Amplitude vermindert und deren Phasenzeit ewas geändert, wie auch die Beobachtungen auf dem Mittelmeer zeigen. Überall an den Ufern des Mittelmeeres sind die Amplituden der doppelten täglichen Oscillation selbst im Mittel, namentlich aber im Sommer relativ klein gegen die der geographischen Breite entsprechenden Werthe derselben.[2]

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CIV, Abth. IIa. Wien 1895.

[2] Da mir gerade die stündlichen Beobachtungen des Barometers zu Rom (Specolo vaticana) vom Jahre 1892 zur Hand waren, habe ich den täglichen Gang des Luftdruckes im Mittel der Monate Mai—August abgeleitet und mit jenem auf Pelagosa verglichen. Rom liegt wenig südlicher als Pelagosa und der Barometergang daselbst wird wohl wenig abweichen von jenem eines Ortes auf der anderen (der Ost-) Seite des Appenin in ähnlicher Entfernung vom Meere. Ich finde für den täglichen Gang des Barometers zu Rom die Gleichung:

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Rom, Mai—August....	·133	·264	·107	—·206	26·8	152·6	·296	·232

Zieht man diese Werthe der p und q von den entsprechenden Werthen, die vorhin für dieselbe Jahreszeit für Pelagosa mitgetheilt worden sind, ab, so erhält man als Ausdruck der Differenzcurve des täglichen Barometerganges der beiden Orte die Gleichung

Pelagosa—Rom...... $0 \cdot 382 \sin(238 \cdot 3 + x) + 0 \cdot 109 \sin(62°0 + 2x)$.

Hier tritt die Differenz See—Land viel stärker hervor, als in den früheren Werthen Pelagosa—Lesina, wie zu erwarten. Die Differenzen (etwas ausgeglichen) sind:

Differenzen im täglichen Barometergange Pelagosa—Rom (Sommer).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Vormittag....	–·30	–·31	–·32	–·33	–·32	–·29	–·23	–·13	·02	·19	·34	·47
Nachmittag...	·48	·43	·39	·33	·22	·10	·01	–·06	–·12	–·16	–·21	–·25

Pelagosa. Täglicher Gang des Luftdruckes. 1894—1896.

	Nov. und December	Jänner und Februar	März und April	Sept. und October	Mai und Juni	Juli und August	Winter	Frühling und Herbst	Sommer	Jahr
Mitternacht	·04	·20	·13	·07	·03	—·01	·12	·10	·01	·08
1	—·04	·17	·02	—·01	—·08	—·08	·06	·00	—·08	·00
2	—·05	·10	—·11	—·12	—·20	—·14	·03	—·12	—·17	—·09
3	—·12	—·04	—·26	—·25	—·31	—·25	—·08	—·25	—·28	—·21
4	—·23	—·17	—·34*	—·33	—·34*	—·28*	—·20	—·34*	—·31*	—·28*
5	—·28*	—·25*	—·33	—·35*	—·25	—·22	—·27*	—·34*	—·24	—·28
6	—·23	—·20	—·23	—·28	—·10	·12	—·21	—·26	—·11	—·19
7	—·07	—·05	—·04	—·05	·07	·05	—·06	—·05	06	—·02
8	·13	·10	·10	·15	·18	·18	·12	·13	·18	·14
9	·32	·21	·29	·33	·29	·30	·27	·31	·30	·29
10	**·46**	**·28**	·41	·41	·38	·40	**·37**	·41	·39	**·39**
11	·39	·25	**·42**	**·42**	**·45**	**·44**	·32	**·42**	**·44**	·39
Mittag	·15	·03	·37	·34	·41	·39	·09	·35	·40	·28
1	—·06	—·17	·22	·16	·30	·30	—·06	·19	·30	·13
2	—·21	—·30	·01	—·01	·15	·15	—·26	·00	·15	—·04
3	—·24*	—·31*	—·19	—·16	—·05	—·03	—·27*	—·17	—·04	—·16
4	—·22	—·29	—·27	—·23	—·18	—·16	—·26	—·25	—·17	—·23
5	—·16	—·20	—·30*	—·25*	—·31	—·28	—·18	—·28*	—·30	—·25*
6	—·08	—·10	—·27	—·21	—·34*	—·33*	—·09	—·24	—·33*	—·21
7	·03	·00	—·13	—·07	—·25	—·27	·02	—·10	·26	—·12
8	·07	·08	·04	·05	—·13	—·14	·07	·05	—·13	—·01
9	·13	·18	·15	**·16**	·06	·02	·15	·15	·04	·12
10	**·16**	·20	**·18**	·14	**·10**	**·06**	·18	**·16**	**·08**	**·14**
11	·12	**·25**	·18	·11	·10	·05	**·19**	·15	·07	·13
Mittel	·17	·17	·21	·19	·21	·19	·17	·20	·20	·17

III. Ponta Delgada und Jersey.

Zufällig kamen mir während der Bearbeitung der stündlichen Registrirungen auf Pelagosa auch die Ergebnisse der stündlichen Barometeraufzeichnungen zu Ponta Delgada (Azoren, Insel S. Miguel, an der Südküste, im Norden Gebirge) und auf der Canal-Insel Jersey, beide aus dem Jahre 1896, zur Hand. Ich berechnete dieselben, um zur Beurtheilung der ganztägigen Luftdruckwelle einen weiteren Beitrag zu erhalten. Die stündlichen Beobachtungen auf Ponta Delgada sind auf einem losen Blatte vom Director des Observatoriums daselbst versendet worden; jene von Jersey sind enthalten in der Publikation von Marc Dechevrens S. J.: »Observatoire St. Louis. Jersey. Iles de la Manche. Bulletin IIIème, Année 1896. S. Helier«. Position: 49° 12′ NBr., 2° 5!5 W v. Gr. 55 *m*.

Die folgende Tabelle enthält den täglichen Gang des Barometers auf den beiden um 12 Breitegrade von einander getrennten Inseln. S. Miguel ist eine oceanische Insel, aber da sie gebirgig ist, sind normale Verhältnisse der ganztägigen Oscillation nicht vorauszusetzen; Jersey liegt in der Wirkungssphäre des französischen Festlandes (Entfernung von der nächsten Küste circa 37 *km*).[1]

Man ersieht aus der Tabelle direct, dass fast nur die doppelte tägliche Oscillation des Barometers an beiden Punkten vorhanden ist; auf Jersey bleibt sich der tägliche Gang in Bezug auf die Wendepunkte das ganze Jahr fast gleich, zu Ponta Delgada verspätet sich das Nachmittagsminimum von 3^h im Winter auf 5^h im Sommer.

Zu Ponta Delgada ist das Morgenmaximum im Winter erheblich grösser als das Abendmaximum, auf Jersey ist dies das ganze Jahr sehr ausgesprochen der Fall. Die Grösse der täglichen Variation des Barometers, gemessen durch die mittlere Ordinate der Tagescurve ist auf beiden Inseln im Winter am grössten.

---

[1] Pelagosa, Entfernung von der nächsten Küste Italiens circa 53 *km*, von der Insel Curzola 60 *km*, von der dalmatinischen Küste selbst 112 *km* circa.

Die Constituenten des täglichen Barometerganges sind:

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Ponta Delgada, 37° 45′ N Br., 25° 41′ W L. 20 *m*								
Winter	·078	·014	·220	—·367	79°8	149°0	·079	·428
Frühling und Herbst	—·009	—·067	·203	—·351	187·6	150·0	·068	·405
Sommer	—·001	—·049	·182	—·253	180·6	144·3	·049	·312
Jahr	·023	—·034	·202	—·324	145·9	148·1	·041	·391
Jersey (Helier), 49° 12′ N Br., 2° 6′ W L. 55 *m*								
Winter	—·115	·032	·157	—·298	285·6	152·2	·119	·336
Frühling und Herbst	—·031	—·034	·138	—·223	222·4	148·3	·046	·262
Sommer	— 113	·068	166	—·216	301·0	142·5	·132	·272
Jahr	—·085	·018	·151	— 242	281·9	148·0	087	·285

Die ganztägige Druckschwankung ist zu Ponta Delgada ganz unbedeutend, der Winkel A_1 (die Phasenzeit) weist aber darauf hin, dass die kleine Amplitude wohl durch die Interferenz der normalen ganztägigen Schwankung (A circa 360°, a_1 bei 0·15 *mm*?) mit einer localen Druckschwankung (Land- und Seewinde, Bergwinde) zu Stande kommt; letztere hat niedrigen Druck bei Nacht, hohen Druck bei Tag, wie dies der täglichen Druckschwankung über der See in Küstennähe und auch noch der Küste selbst entspricht.

Auf Jersey sind die Verhältnisse ähnlich, doch lassen sich Phasenzeit und Amplitude der allgemeinen (terrestrischen) ganztägigen Schwankung in dieser relativ hohen Breite nicht beurtheilen. Dass im Winter die Amplitude der ganztägigen Welle relativ so gross ist, kann darin liegen, dass nur ein Jahrgang von Beobachtungen der Rechnung zu Grunde liegt; die sogenannten unregelmässigen Druckschwankungen in einem so stürmischen Klima mögen noch darauf Einfluss genommen haben.

Täglicher Gang des Barometers.

Abweichungen der Stundenmittel vom Tagesmittel.

	Ponta Delgada (1896)				Jersey (1896)			
	Winter	Frühling u. Herbst	Sommer	Jahr	Winter	Frühling u. Herbst	Sommer	Jahr [1]
Mitternacht	·21	·18	·15	·18	—·04	·13	·06	·07
1	·06	—·03	—·02	·00	—·15	·04	—·09	—·05
2	—·04	—·20	—·18	—·14	—·16	—·11	—·17	—·18
3	—·16	—·39	—·30	—·28	—·26	—·28	—·30	—·28
4	—·27	—·47*	—·36*	—·37*	—·34*	—·33*	—·31*	—·32*
5	—·36*	—·40	—·30	—·35	—·34	—·30	—·23	—·28
6	—·33	—·27	—·18	—·26	—·23	—·20	—·03	—·16
7	—·18	—·09	—·04	—·11	—·05	·00	·13	·01
8	·12	·15	·10	·12	·23	·10	·24	·19
9	·33	·30	·16	·26	·43	·26	·31	·33
10	**·52**	**·40**	·24	**·39**	**·56**	**·30**	**·38**	**·39**
11	·52	·39	**·26**	·39	·52	·26	·33	·35
Mittag	·16	·22	·19	·19	·26	·15	·24	·23
1	—·20	·00	·06	—·05	·01	·03	·16	·06
2	—·44	—·19	—·06	—·23	—·23	—·09	·03	—·10
3	—·50*	—·29	—·18	—·32	—·27	—·21	—·11	—·21
4	—·47	—·32*	—·24	—·34*	—·29*	—·24*	—·29	—·26*
5	—·36	—·27	—·26*	—·30	—·21	—·18	—·32*	—·23
6	—·16	—·17	—·21	—·18	—·13	—·06	—·30	—·15
7	·09	·04	—·04	·03	·00	·03	— 23	—·04
8	·27	·31	·17	·25	·10	·14	·03	·07
9	·43	**·48**	·38	·40	·16	**·21**	·13	·15
10	**·41**	·41	**·38**	**·40**	**·18**	·19	**·16**	**·17**
11	·37	·33	·32	·34	·14	·14	·15	·14
Mittel	29	·27	·20	·25	·22	·17	·19	·19

[1] Aus den wegen der unperiodischen Änderungen corrigirten Stundenmitteln berechnet, die Hundertel stimmen desshalb nicht ganz mit dem Mittel der drei vorausgehenden Columnen.

Täglicher Gang des Barometers auf Pikes Peak (4308 *m*) **und zu Colorado Springs** (1856 *m*).

Vom 1. November 1892 bis 30. September 1894 wurden Registrirungen der meteorologischen Elemente gleichzeitig auf dem Gipfel von Pikes Peak und nahe an dessen Fuss zu Colorado Springs durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Beobachtungen sind in Stundenwerthen in dem »Report of the Chief of the Weather bureau«, 1893 und 1894 in extenso abgedruckt, die Mittelwerthe der zwei Jahrgänge sind für Luftdruck und Temperatur in dem »Report« 1895—1896 (Washington, 1896) von Herrn Park Morill zusammengestellt und discutirt worden.

Park Morill hat aus den beobachteten Barometerständen und der trigonometrisch bestimmten Seehöhe der Station auch die stündlichen Temperaturen in der Luftschichte zwischen Colorado Springs und Pikes Peak berechnet, und zwar für jeden der 12 Monate. Für mich war diese Publication eine Aufforderung, die harmonischen Constanten der täglichen Barometervariation für Pikes Peak und Colorado Springs zu berechnen in einer Form, welche sie mit jenen von mir früher für Gipfelstationen berechneten Werthen unmittelbar zu vergleichen gestattet.[1] Da Herr P. Morill die Stundenwerthe der Barometerstände selbst und natürlich in englischen Zollen mittheilt, habe ich die Abweichungen vom Tagesmittel gebildet und dieselben in Millimeter verwandelt.

Die beiden Stationen Pikes Peak und Colorado Springs haben einen Höhenunterschied von 2452 *m* bei einer horizontalen Entfernung von bloss 19·3 *km*, und da die Beobachtungen zugleich mit grosser Sorgfalt unter den günstigsten Verhältnissen ausgeführt worden sind,[2] bieten dieselben ein ausserordentlich werthvolles Materiale für alle Untersuchungen, welche sich auf gleichzeitige Beobachtungen auf dem Gipfel und am Fuss eines Berges stützen müssen. Der einzige Mangel ist das Fehlen einer Zwischenstation zwischen der Fuss- und Gipfelstation.

[1] Siehe Hann: Weitere Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers. Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. LIX, Wien 1892, S. 304 und S. 336.

[2] Man sehe die Beschreibung der Station im »Report for the year 1893«.

Täglicher Gang des Barometers.

Abweichungen vom Tagesmittel.

	Pikes Peak 4308 *m*			Colorado Springs 1856 *m*			Jahresmittel	
	Winter	Frühling u. Herbst	Sommer	Winter	Frühling u. Herbst	Sommer	Pikes Peak	Colorado Springs
Mittern.	—·07	—·17	—·10	·17	·40	·42	—·115	**·329**
1	—·25	—·34	—·32	·13	**·48**	·36	—·303	·305
2	—·41	—·57	—·45	·15	·40	·32	—·481	·288
3	—·51	—·79	—·56	·12	·35*	·30*	—·620	·258
4	—·67*	—·87*	—·62*	·04*	·38	·35	—·720	·256*
5	—·67	—·90*	—·60	·08	·48	·50	—·722*	·355
6	—·50	—·76	—·49	·17	·68	·67	—·582	·506
7	—·23	—·53	—·34	·34	·79	**·78**	—·374	·636
8	—·01	—·22	—·07	·47	**·80**	·75	—·102	**·672**
9	·26	·07	·10	·55	·73	·66	·142	·646
10	**·45**	·26	·28	**·58**	·54	·50	·332	·541
11	·45	·42	·41	·35	·26	·22	**·426**	·278
Mittag	·23	·46	**·45**	—·17	— ·23	— ·13	·379	— ·176
1	·09	**·49**	·42	—·58	— ·58	— ·44	·331	— ·534
2	·04*	·45	·37	—·88	— ·91	— ·67	·289	— ·823
3	·11	·43	·28	—·91*	—1·28	—1·06	·278	—1·083
4	·13	40*	·18	—·83	—1·36*	—1·26*	·238	—1·151*
5	·15	·41	·10	—·52	—1·13	—1·22	·221*	— ·958
6	·23	**·44**	·06*	—·15	— ·83	—1·02	·244	— ·668
7	·31	·37	·08	·03	— ·47	— ·69	·254	— ·373
8	**·35**	·38	·17	·14	— ·12	— ·31	**·300**	— ·095
9	·24	·31	**·26**	·22	·15	·17	·275	·183
10	·19	·22	·27	**·26**	·23	·38	·228	·290
11	·10	·02	·10	·24	·35	**·48**	·073	·322
Mittel	·27	·43	·29	·34	·58	·57	·334	·489

Die vorstehende Tabelle enthält in übersichtlicher Form den täglichen Gang des Barometers auf Pikes Peak und zu Colorado Springs für drei Jahreszeiten (zu je 4 Monaten).

Colorado Springs zeigt die Eigenthümlichkeiten des Barometerganges an einer Thalstation; selbst im Winter geht das nächtliche Minimum nicht unter das Tagesmittel hinab; im Sommerhalbjahr ist das nächtliche Minimum fast unterdrückt. Das Vormittagsmaximum weicht von 10^h a. im Winter auf 7^h a. im Sommer zurück, das Nachmittagsminimum ist im Sommerhalbjahr sehr tief und tritt normal zwischen 3^h und 4^h p. ein (also nicht verspätet). Auffallend ist die grosse tägliche Variation des Barometers im April, Mai und Juni und dann wieder im September. Auf Pikes Peak ist die tägliche Variation im März und im October am grössten.

Der tägliche Gang des Barometers auf Pikes Peak zeigt die Erscheinungen, die wir schon vom Säntis und Sonnblick her genauer kennen und für den Sommer nun auch vom Montblanc. Das Vormittagsmaximum, das auf dem Sonnblick in 3100 *m* im Sommer erst gegen 3^h Nachmittags eintritt, findet man auf Pikes Peak schon um Mittag (wie auf dem Montblanc), das Nachmittagsminimum fällt im Sommer auf 6^h p. (wie auf dem Sonnblick und Montblanc); das Abendmaximum ist etwas verfrüht, ganz besonders im Frühling und Herbst; der frühe Eintritt des Maximums zu dieser Jahreszeit ist mir nicht recht verständlich.

Ich will hier den täglichen Barometergang im Sommer für die drei Stationen Sonnblick, Montblanc (Observ.-Vallot) und Pikes Peak vergleichend nebeneinanderstellen. Die relative Höhe ist für die Montblanc-Station am grössten, für Pikes Peak und Sonnblick wohl nicht sehr verschieden; es ist aber in allen Fällen schwer, die Mächtigkeit der unteren auf den Barometergang der Gipfelstation wirksamen Luftschichte einigermassen zutreffend anzugeben. Von der Mächtigkeit dieser Luftschichte und der Amplitude der täglichen Temperaturvariation in derselben wird die Grösse der thermischen Druckvariation an der oberen Station bestimmt (die Phasenzeiten derselben scheinen ziemlich constant zu sein) und damit der Charakter der ganzen täglichen Barometer-Oscillation. Es ist desshalb eine grössere

Übereinstimmung des täglichen Barometerganges in gleichen absoluten Höhen unter gleicher Breite und selbst in gleichen relativen Höhen nicht zu erwarten.

Täglicher Gang des Barometers im Sommer.

	Sonnblick	Montblanc	Pikes Peak		Sonnblick	Montblanc	Pikes Peak
Höhe ...	3106	4359	4308	Breite	47°	46°	39°
Mittern.	·18	—·05	— 10	Mittag	·16	·21	**·45**
1	·00	—·19	—·32	1	·19	**·28**	·42
2	—·15	—·31	—·45	2	·21	·24	·37
3	—·32	—·46	—·56	3	**·22**	·22	·28
4	—·45	—·53*	—·62*	4	·19	·24	·18
5	—·50*	—·49	—·60	5	·14	·17	·10
6	—·45	—·40	—·49	6	·12*	·17*	·06*
7	— 37	—·36	—·34	7	·14	·25	·08
8	—·27	—·24	—·07	8	·19	**·36**	·17
9	—·17	—·06	·10	9	·30	**·34**	**·26**
10	—·04	·05	·28	10	**·33**	·27	**·27**
11	·08	·16	·41	11	·29	·08	·10

In der Breite des Sonnblick ist die Amplitude der doppelten täglichen Oscillation etwa 0·27 *mm*, in jener des Montblanc 0·33 und in jener von Pikes Peak etwa 0·53 im Meeresniveau (0·43 zu Colorado Springs).

Die fortschreitende Annäherung des Vormittagsmaximums an die normale Eintrittszeit desselben mit abnehmender Breite oder besser mit zunehmender Amplitude der doppelten täglichen Oscillation ist begreiflich; durch die beträchtliche Grösse derselben kommt trotz der Interferenz mit der ganztägigen Schwankung, welche des Vormittagsmaximum abschwächt und über den Mittag hinaus zu verschieben sucht, die normale Eintrittszeit immer mehr zur Geltung; in den Tropen selbst bemerkt man ja auch in sehr grossen Höhen keine Verschiebung der Phasenzeiten der doppelten täglichen Oscillation. Dazu kommt aber noch an den obigen Stationen die Verfrühung des

Eintrittes des Maximums der ganztägigen Welle

Sonnblick .... $A_1 = 182$,
Montblanc .... $A_1 = 198$,
Pikes Peak .... $A_1 = 219$.

Dies wirkt im gleichen Sinne; auf Pikes Peak tritt das Maximum der ganztägigen Welle um $2^1/_2$ Stunden früher ein als auf dem Sonnblick.

Die Verhältnisszahlen der Amplitude der halbtägigen Oscillation gegen jene der ganztägigen Druckschwankung Quotient $(a_2 : a_1)$ sind:

Sonnblick ...... 0·51,
Montblanc ..... 0·42,
Pikes Peak ..... 0·65.

Das Morgenminimum und bemerkenswertherweise auch das Nachmittagsminimum treten an den drei Stationen so gut wie gleichzeitig ein; das Abendmaximum beim Montblanc dagegen sehr verfrüht.

Die Constanten der täglichen Oscillation des Barometers sind:

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Colorado Springs (1856 *m*) Thalstation auf einem ausgedehnten Hochland								
Winter	·198	·340	·026	—·421	30°2	176°5	·393	·422
Frühling und Herbst	·317	·733	·107	—·436	23·4	166·2	·795	·449
Sommer	·270	·758	·182	—·383	19·6	154·6	·805	·424
Jahr	·262	·610	·105	—·413	23·3	165·7	·664	·426
Pikes Peak (4308 *m*) Gipfelstation								
Winter	—·193	—·294	·115	—·266	213·3	156·6	·352	·290
Frühling und Herbst	—·323	—·548	·168	—·188	210·5	137·0	·635	·246
Sommer	—·251	—·314	·198	—·173	218·6	131·2	·401	·263
Jahr	—·256	—·385	·160	—·206	213·6	142·2	·462	·261

Die ganztägige Schwankung ist in dem trockenen, im Sommer heissen Thale von Colorado Springs sehr gross. Auf Pikes Peak ist die thermische Druckschwankung auch sehr gross. Die doppelte tägliche Oscillation zeigt gegen die Basisstation eine Verspätung von etwas über drei Viertelstunden. Diese Erscheinung und die Verkleinerung der Amplitude im Sommer um 20% (Winter dagegen fast normal) glaube ich in einer früheren Abhandlung auf ihre Ursache zurückgeführt zu haben.[1]

Die beobachteten Amplituden a_2 sind 0·290, 0·246 und 0·263, die auf die gleiche Höhe reducirten (451 : 610) Amplituden a_2 von Colorado Springs dagegen 0·312, 0·332, 0·314. Im Winter ist der Unterschied sehr klein, wenn aber die grosse thermische Druckschwankung im Sommerhalbjahr kommt, vermindert sie die Amplituden sehr merklich auf 79% des normalen Betrages.

Die correspondirenden Beobachtungen der beiden Stationen, die einen Höhenunterschied von 2452 *m* haben bei einer horizontalen Distanz von bloss 19·3 *km* (Winkelerhebung 7°3), laden dazu ein, die Verhältnisse der von mir schlechthin »thermische Druckschwankung« genannten Barometervariation auf dem Gipfel von Pikes Peak zu berechnen. Dies soll im Folgenden geschehen.

Die Grundlagen der Rechnung sind:

$$db = bh : RT^2;$$

T_0 setze ich, um die Luftfeuchtigkeit zu berücksichtigen, wie früher = 263° (α = 0·0038), somit R = 30·37; b ist: Winter 445·6, Frühling und Herbst 455·0, Sommer 456·5; Mitteltemperatur: Winter (oben —15·1, unten —0·6) —7·8, Frühling und Herbst (—7·9, 8·7) 0·4, Sommer (0·0, 17·0) 8·5, somit T = 255°, 263° und 272°. Dies gibt:

$$db = \begin{cases} \text{Winter} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0{\cdot}553, \\ \text{Frühling und Herbst} \ldots & 0{\cdot}531, \\ \text{Sommer} \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{\cdot}498. \end{cases}$$

[1] Weitere Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers. Denkschriften LIX, 1892, S. 317. Separatabdr. S. 31.

Reducirt man die $p_1 q_1$ und $p_2 q_2$ von Colorado Springs mit dem Factor 451 : 610 = 0·739 auf die Seehöhe des Gipfels von Pikes Peak, zieht diese Werthe von den dort beobachteten $p_1 q_1$ und $p_2 q_2$ ab, so repräsentirt der Rest die thermische Druckschwankung auf dem Gipfel, welche durch die periodische Hebung und Senkung der Flächen gleichen Druckes in Folge des täglichen Wärmeganges in der zwischenliegenden Luftschichte hervorgebracht wird. Man erhält so:

Winter.

	p_1	q_1	p_2	q_2
Colorado Springs, reducirt..	+·147	+·251	+·019	—·311
Pikes Peak, beobachtet	—·193	—·294	+·115	—·266
Pikes Peak—Colorado.....	—·340	—·545	+·096	+·045

Die negativen Vorzeichen von p_1 und q_1 und die positiven von p_2 und q_2 sind charakteristisch für den täglichen Wärmegang; die Differenz charakterisirt sich schon dadurch als ein reiner Wärmeeffect; die obigen Amplituden repräsentiren aber Druckschwankungen; die entsprechenden, ihnen zu Grunde liegenden Temperaturschwankungen erhält man durch die Division mit den obigen Factoren, also im Winter durch Division mit 0·553 oder Multiplication mit rund 1·81. Auf diese Art ist die folgende kleine Tabelle entstanden.

Thermische Druckschwankung auf dem Gipfel von Pikes Peak.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Winter	—·340	— ·545	·096	·045	211°9	64°9	0·643	0·106
Frühling und Herbst.	—·557	—1·090	·089	·143	207·1	31·9	1·225	0·168
Sommer	—·451	— ·875	·063	·110	207·3	29·8	0·984	0·125
Jahr	—·450	— ·836	·082	·100	208·3	39·4	0·948	0·129

Täglicher Gang der Temperatur in der Luftschichte zwischen Colorado Springs (1856 *m*) und Pikes Peak (4308 *m*). Höhendifferenz 2452 *m*.

Winter .... $1^\circ 16 \sin(211 \cdot 9 + x) + 0 \cdot 19 \sin(64 \cdot 9 + 2x)$
Frühling u. Herbst . $2 \cdot 30 \sin(207 \cdot 1 + x) + 0 \cdot 17 \sin(31 \cdot 9 + 2x)$
Sommer .... $1 \cdot 89 \sin(207 \cdot 3 + x) + 0 \cdot 13 \sin(29 \cdot 8 + 2x)$

Jahr .... $1 \cdot 80 \sin(208 \cdot 3 + x) + 0 \cdot 24 \sin(39 \cdot 4 + 2x)$.

Beobachteter Gang der Lufttemperatur.

Jahr .... $3^\circ 52 \sin(230^\circ 8 + x) + 0 \cdot 69 \sin(60 \cdot 8 + 2x)$.

Im Frühling und Herbst hat die »thermische Druckschwankung« auf dem Gipfel von Pikes Peak eine Amplitude von 1·2 *mm*, was einer Temperaturvariation in der unterliegenden 2452 *m* mächtigen Luftschichte von 2°3 entspricht (Tagesschwankung also 4°6).

Diese Rechnungsergebnisse gewinnen grösseres Interesse, wenn man sie mit dem beobachteten Temperaturgange unten und oben vergleicht. Die folgende Tabelle enthält diesen Temperaturgang für die drei Jahreszeiten (Winter, Frühling und Herbst, Sommer, je vier Monate). Der tägliche Gang in den einzelnen vier Monaten, die in ein Mittel zusammengesetzt wurden, ist in der That sehr übereinstimmend, nur Mai und Juni unterscheiden sich von Juli und August an der unteren Station in merklichem Grade, aber eigentlich auch nur in den Amplituden. Nimmt man das Mittel aus dem oben und unten beobachteten täglichen Wärmegange, so erhält man den aus den Thermometerablesungen sich ergebenden Wärmegang in der Luftschichte zwischen Colorado Springs und Pikes Peak. Die letzte Gleichung ist ein Ausdruck für diesen beobachteten Wärmegang und gestattet einen Vergleich mit dem aus dem Gang des Barometers berechneten Wärmegange.

Man findet wieder die bekannten Differenzen. Das Barometer ergibt eine viel geringere Temperaturvariation als die Beobachtung, die Amplitude ist nur halb so gross (1°8 gegen 3°5) und der Eintritt der Extreme erscheint verspätet um $1^1/_2$ Stunden, das ist etwas weniger, als man anderswo findet.

Täglicher Gang der Temperatur.

Abweichungen vom Tagesmittel. (Grade Celsius.)

	Colorado Springs				Pikes Peak			
	Winter	Frühling u. Herbst	Sommer	Jahr	Winter	Frühling u. Herbst	Sommer	Jahr
Mitternacht	—2°9	—3·4	—3·6	—3·3	—0·8	—1·1	—1·2	—1·0
1	—3·1	—4·1	—4·1	—3·8	—1·0	—1·1	—1·4	—1·2
2	—3·3	—4·6	—4·9	—4·3	—1·0	—1·3	—1·5	—1·3
3	—3·3	—4·9	—5·2	—4·5	—1·1	—1·4	—1·7	—1·4
4	—3·3	—5·4	—5·9	—4·9	—1·2	—1·6	—1·8	—1·5
5	—3·4	—5·8*	—6·0*	—5·1*	—1·2	—1·6	—1·8*	—1·5*
6	—3·5	—5·8	—5·1	—4·8	—1·3*	—1·7*	—1·6	—1·5
7	—3·7*	—4·4	—2·7	—3·6	—1·2	—1·3	—1·1	—1·2
8	—2·3	—1·6	—0·0	—1·3	—0·8	—1·0	—0·5	—0·8
9	0·3	0·8	1·3	0·8	—0·2	—0·4	0·0	—0·2
10	2·6	2·5	2·6	2·6	0·6	0·2	0·8	0·5
11	4·0	3·7	3·7	3·8	1·2	0·9	1·3	1·1
Mittag	4·7	4·7	4·6	4·7	1·8	1·6	1·9	1·8
1	5·2	5·4	5·0	5·2	2·1	2·0	2·1	2·1
2	**5·5**	5·9	**5·3**	**5·6**	**2·2**	**2·3**	**2·2**	**2·2**
3	5·3	**6·0**	5·2	5·5	2·1	2·3	2·1	2·2
4	4·7	5·8	4·9	5·1	1·6	2·1	1·8	1·8
5	2·8	5·0	4·3	4·0	0·8	1·6	1·4	1·3
6	1·3	3·3	3·4	2·7	0·3	0·8	0·9	0·7
7	0·0	1·7	2·1	1·3	0 0	0·3	0·3	0·2
8	—1·1	0·4	0·7	0·0	—0·3	—0·1	- 0·1	—0·2
9	—1·8	—0·8	—0·5	—1·0	0.5	—0·4	—0·4	—0·4
10	—2·3	—1·9	—1·6	—1·9	—0·6	—0·7	—0·7	—0·7
11	—2·6	—2·9	—2·6	—2·7	—0·8	—0·8	—1·1	—0·9
Mittel	—0·6	8·7	17·0	8·4	-15·1	—7 9	0·0	—7·7

Man hat allen Grund, anzunehmen, dass der berechnete Temperaturgang mit dem wahren Gange der Lufttemperatur viel mehr übereinstimmt als mit jenem, der dem Mittel der oben und unten am Thermometer abgelesenen Temperaturen entspricht.

Die folgende kleine Tabelle zeigt die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung mehr im Detail.

Täglicher Gang der Temperatur (Jahr) in der Luftschichte zwischen Colorado Springs und Pikes Peak.
2452 *m* Höhendifferenz.

Abweichungen vom Tagesmittel (Grade Celsius).

Zeit	beobachtet	berechnet	Zeit	beobachtet	berechnet
Mitternacht	—2°2	—0°7	Mittag	3°2	1°0
1	—2·5	—1·0	1	3 7	1·5
2	—2 8	—1·3	2	3·9	1·8
3	—3·0	—1·5	3	3·8	1·9
4	—3·2	—1·7	4	3·5	1·9
5	—3·3*	—1·8*	5	2·7	1·7
6	—3·1	—1·7	6	1·7	1·4
7	—2·4	—1·5	7	0·8	1·1
8	—1·0	—1·2	8	—0·1	0·7
9	0·3	—0·7	9	—0·7	0·3
10	1·6	—0·1	10	—1·3	—0·1
11	2·4	0·4	11	—1·8	—0·4

Amplitude beobachtet .... 7°2
» aus der Luftdruckvariation berechnet.... 3·7

Herr Park Morill hat, wie ich schon erwähnt habe, direct aus den Barometerständen oben und unten durch Umkehrung der hypsometrischen Formel die Temperaturen für jede Stunde in jedem Monate berechnet. Der Vergleich zwischen seinen und meinen Rechnungsergebnissen zeigt eine fast vollständige Übereinstimmung, wie dies ja zu erwarten war und sein muss. Im Jahresmittel ist sein Ergebniss:

Beobachtet:

Minimum 5^h a..... —3°2,
Maximum 2^h p..... +3·8.

Berechnet (Mittel aus dem Gange in den 12 Monaten):

Minimum 5^h a..... —2°0,
Maximum $3^1/_2{}^h$ p... +2·3.

Diese Amplitude ist ein wenig grösser als die von mir gefundene, 4°3 statt 3°7. Das kommt wohl daher, dass Herr P. Morill die Temperatur für jede Stunde in jedem Monate gerechnet hat, während meinem Resultate die mittleren Barometerstände von je 4 Monaten zu Grunde liegen, wodurch die Temperaturcurve etwas verflacht werden muss.

Die Übereinstimmung der Resultate, die nach den beiden doch sehr verschiedenen Methoden gefunden worden sind, ist von einigem Interesse. Meine Methode der Berechnung der wahren Lufttemperatur ist einfacher und eleganter und bietet zugleich vom physikalischen Standpunkte viel grösseres Interesse als die einfache Umkehrung der Barometerformel. Sie enthüllt Wirkung und Ursache in klarer Weise, indem sie zuerst die thermische Druckschwankung in der Höhe uns vor Augen führt und aus dieser unmittelbar durch Multiplication mit einem Factor den zu Grunde liegenden Gang der Temperaturvariation hinstellt.

Der tägliche Gang des Barometers auf dem Montblanc (Observatorium Vallot) und zu Chamonix (nebst Bludenz).

Der zweite Band der »Annales de l'Observatoire Météorologique du Montblanc. J. Vallot. Paris 1896« enthält die Ergebnisse von Registrirungen des Luftdruckes am Observatorium in 4358 *m* (»aux bosses«), d. i. rund 400 *m* unterhalb des höchsten Gipfels, bei den Grands Mulets und zu Chamonix. Die Tabellen enthalten diesmal die einzelnen Stundenwerthe (aber keine Monatsmittel, welche erst gerechnet werden mussten), während im ersten Bande nur Diagramme enthalten waren. Sie eignen sich daher zu einer genaueren Ableitung des täglichen Ganges des Barometers, als mir dies früher möglich war (siehe

»Beiträge zum täglichen Gange der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten«, diese Sitzungsber., Jänner 1894, S. [67] 17). Ich habe hier nur die completen Monate und einige incomplete, aber an drei oder zwei Stationen gleichzeitige, Reihen der Berechnung unterzogen.

Die Ergebnisse der Temperatur-Registrirungen sollen in einem dritten Bande veröffentlicht werden.

In Chamonix (Barometer in 1088 *m*) functionirte ein compensirter Barograph Richard (grosses Modell), der in einem Raum mit sehr geringer Temperatur-Variation aufgestellt war und zudem öfters mit einem Quecksilberbarometer Tonnelot verglichen wurde.

Bei den Grands Mulets functionirte ein gleicher Barograph, aber mit grösseren Unterbrechungen. Die Ergebnisse stimmen nicht gut mit jenen vom Sonnblick und lassen sich auch nicht gut mit jenen am Montblanc in Übereinstimmung bringen.

Montblanc, Observatorium (Barometer in 4359 *m*). Hier functionirte seit 1891 neben dem gewöhnlichen Barographen Richard (grosses Modell) noch ein registrirendes Quecksilberbarometer (Richard), dessen Angaben von der Temperatur unabhängig sind; 1 *mm* ist gleich 3 *mm* im Autogramm. Ich habe nur die Ergebnisse der Registrirungen des Quecksilberbarometers verwendet; es liegen aber ausserdem auch jene des Aneroidbarographen Richard publicirt vor.

Man ist Herrn Vallot zu grossem Danke verpflichtet, dass er sein Observatorium derart der Wissenschaft dienstbar gemacht und die Kosten nicht gescheut hat, den seltenen Schatz seiner Beobachtungsergebnisse zur Publication zu bringen und damit der allgemeinen Benutzung zugänglich zu machen.

Die erste Tabelle enthält die correspondirenden stündlichen Luftdruckmittel von Chamonix, Grands Mulets und Montblanc. Die zweite Tabelle enthält alle Ergebnisse der Registrirungen des Quecksilberbarographen am Observatorium Vallot. Ich habe sie in ein Sommer-, Herbst- und ein Gesammtmittel zusammengefasst. Die dritte Tabelle enthält sämmtliche Registrirungen zu Chamonix, soweit sie ganze Monate umfassen, im Ganzen von 7 Monaten des Sommerhalbjahres.

Zur besseren Ausnützung des Raumes wurden in die Tabelle auch die Ergebnisse der Luftdruckregistrirungen zu Bludenz aufgenommen, welche eben zur Verfügung standen.

Die Luftdruckregistrirungen zu Bludenz, soweit sie reducirt sind, umfassen zwei volle Jahre, Juli 1893 bis inclusive Juni 1895. Wir verdanken diese Registrirungen Herrn Baron Otto v. Sternbach, dem hochverdienten Beobachter der meteorologischen Station Bludenz.

Bludenz ist eine Thalstation wie Chamonix, aber in einem erheblich tieferen Niveau; der umgebende Bergkranz ist wesentlich niedriger, das Thal der Ill mündet aber frei in das grosse Rheinthal; vielleicht sind die erheblich tieferen Nachmittagsminima des Barometers diesem Umstande zuzuschreiben.

Die folgende Tabelle enthält die Constanten des täglichen Barometerganges an den oben bezeichneten Stationen. Chamonix (und Bludenz) zeigen den charakteristischen Barometergang der Thalstationen, Montblanc jenen einer hohen Gipfelstation. Die Phasenzeiten der ganztägigen Oscillation sind umgekehrt gegenüber jenen der Thalstation, die Amplitude derselben grösser als unten. Die doppelte tägliche Oscillation auf dem Montblanc zeigt in den Phasenzeiten die charakteristische Verspätung um eine halbe Stunde und mehr und die Amplitude ist fast genau im Verhältniss des niedrigeren Luftdruckes vermindert, also ganz normal (Juli, August beobachtet: ·156, berechnet nach $b:B$, ·159; October beobachtet: ·173, berechnet ·169; als Mittel (4 Monate genau in 127 Tagen) beobachtet: ·141, berechnet: ·145; nur der September macht eine Ausnahme, die also wohl als durch eine Störung veranlasst, anzusehen ist.[1]

Der Barometergang bei den Grands Mulets ist ganz abnorm durch die überaus kleine Amplitude der doppelten täglichen Oscillation und die exorbitante Amplitude der ganztägigen

---

[1] Rechnet man die beiden September einzeln, so erhält man für die halbtägige Barometerschwankung

September 1891: $0\cdot137 \sin(120°7+2x)$,
September 1892: $0\cdot126 \sin(161°0+2x)$.

Der grosse Unterschied in den Phasenzeiten macht es wahrscheinlich, dass der September 1892 einer Anomalie unterliegt.

Oscillation. Es ist desshalb vorderhand am besten, von dieser Station bei weiteren Untersuchungen und Schlüssen keinen Gebrauch zu machen.

Die harmonischen Constanten des täglichen Ganges des Barometers zu Montblanc, Grands Mulets und Chamonix (und Bludenz).

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
A. Correspondirende Werthe								
Juli, August 1892:								
Chamonix	·291	·183	·090	—·220	57?8	157?7	·344	·238
Grands Mulets.....	·118	—·582	·098	—·042	168·6	113·2	·593	·107
Montblanc	—·113	—·353	·105	—·116	197·8	137·9	·371	·156
Sept. und Oct. 1891:								
Chamonix	·201	·042	·058	—·240	78·2	166·4	·205	·247
Montblanc........	—·023	—·253	·081	—·110	185·2	143·6	·254	·136
October 1891:								
Chamonix	·225	—·027	·050	—·247	96·8	168·6	·226	·252
Grands Mulets.....	·094	—·470	·066	—·123	168·1	151·8	·479	·140
Montblanc........	—·012	—·250	·100	—·141	182·8	144·6	·250	·173
B. Nichtcorrespondirende Mittel								
Chamonix (6 Mon.[1])	·261	·123	·094	—·195	64·8	154·3	·289	·217
Montblanc (4 Mon.[2])	— 052	—·288	·090	—·108	190·5	140·2	·293	·141
Bludenz								
Winter	—·017	·143	·052	—·250	353·2	168·3	·144	·255
Frühling u. Herbst..	·267	·221	·083	—·297	50·4	164·4	·346	·308
Sommer..........	·296	·283	·092	—·280	46·3	161·8	·409	·294
Jahr............	·182	·216	·076	—·276	40·1	164·6	·282	·286

[1] Juli, August, September, also Sommer.

[2] Juli—October.

Aus den correspondirenden Luftdruckregistrirungen auf dem Montblanc und zu Chamonix, am Fusse desselben, können wir nun auch die thermische Druckschwankung beim Observatorium Vallot ableiten, sowie daraus die tägliche Variation der wahren Lufttemperatur in der Luftschichte zwischen Chamonix und Montblanc.

Die Elemente der Rechnung sind für die Periode Juli bis August 1892 (50 Tage):

Temperatur (beiläufig) $T = 267$, $b = 448\,mm$, $h = 3271\,m$. $b:B$, d. i. $448:671 = 0\cdot668$; R wie oben: $RT^2 : bh = 1\cdot48$.

	p_1	q_1	p_2	q_2
Chamonix, reducirt auf Montblanc........	·195	·123	·060	—·147
Montblanc............	—·113	—·353	·105	—·116
Montblanc—Chamonix .	—·308	—·476	+·045	+·031

Dies gibt:

Thermische Druckschwankung auf dem Montblanc.

$$0\cdot566 \sin(212^\circ9+x)+0\cdot055 \sin(55^\circ4+2x).$$

Täglicher Wärmegang in der Luftschichte zwischen Montblanc und Chamonix (Mächtigkeit derselben 3271 m).

Hochsommer.

$$0^\circ84 \sin(212\cdot9+x)+0\cdot08 \sin(55\cdot4+2x).$$

In meiner oben citirten Abhandlung[1] hatte ich aus den Registrirungen von Vallot auf dem Montblanc-Gipfel selbst mit Zuhilfenahme nicht correspondirender Luftdruckaufzeichnungen zu Genf, Turin und Mailand für eine 4400 m mächtige Luftschichte gefunden:

$$0\cdot98 \sin(203^\circ+x)+0\cdot17 \sin(15^\circ+2x),$$

also, so weit zu erwarten, vollkommen übereinstimmend.

[1] Diese Sitzungsber., Jänner 1894: »Täglicher Gang der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten«.

Das jetzt erzielte Resultat ist natürlich verlässlicher, und zwar aus mehrfachen Gründen.[1]

Im Mittel der zwei Hochsommermonate hat also die tägliche Variation der Temperatur in der Luftschichte zwischen Chamonix und Montblanc (Observatorium Vallot) von 3270 *m* Mächtigkeit eine Amplitude von nur 1°7, und das Maximum tritt um 4^h Nachmittag (d. i. etwas unerwartet früh), das Minimum um 4^h Morgens ein (soweit man das zweite Glied vernachlässigen kann).

Bei der Ableitung der Mittelwerthe des täglichen Barometerganges für Frühling und Herbst zu Colorado Springs und zu Bludenz ist mir der Unterschied zwischen Frühling (März, April) und Herbst (September, October) aufgefallen; an beiden Orten haben die beiden Frühlingsmonate besonders tiefe Nachmittagsminima. Um zu sehen, wie weit die Übereinstimmung geht und etwa eine charakteristische Erscheinung für die Thalstation ist, habe ich die Differenz Frühling—Herbst gebildet.

Das Resultat ist folgendes:

---

[1] Die Rechnung mit Beiziehung der Beobachtungsergebnisse an der Station bei den Grands Mulets ergibt:

Temperaturgang in der Luftschichte zwischen Chamonix und den Grands Mulets (Mächtigkeit derselben 1931 *m*).

$$1°81 \sin(205°6+x)+0{\cdot}31 \sin(14°8+2x).$$

Dieses Resultat sieht recht plausibel aus. Das nächste aber nicht:

Temperaturgang in der Luftschichte zwischen den Grands Mulets und dem Observatorium Vallot (Mächtigkeit der Luftschichte 1340 *m*).

$$0{\cdot}88 \sin(302°7+x)+0{\cdot}29 \sin(164°1+2x).$$

Die Phasenzeit ist unmöglich, Maximum etwa 10^h Vormittags, auch die Amplitude ist zu gross. Das Mittel aus den beiden Resultaten (mit Rücksicht auf die Mächtigkeit der beiden Luftschichten gebildet) müsste mit dem im Texte gegebenen Wärmegang übereinstimmen, was nicht der Fall ist. Die ganztägige Variation des Luftdruckes ist bei den Grands Mulets zu gross, die halbtägige zu klein.

Unterschied im täglichen Barometergange zwischen März, April und September, October.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Bludenz												
Vormittag	·08	·10	·16	·20	·23	·29	·29	·19	·12	·04	·00	–·03
Nachmitt.	–·07	–·13	–·20	–·29	–·34	–·32	–·29	–·12	–·05	–·01	·07	·09
Colorado Springs												
Vormittag	·12	·00	–·05	–·09	–·10	–·10	–·11	–·20	–·29	–·32	–·40	–·19
Nachmitt.	–·16	–·07	–·05	·00	·06	·11	·25	·36	·43	·42	·22	·21

Es ist also wenig Gemeinsames in diesen Differenzen. Zu Bludenz sind die Nachmittagsminima tiefer im Frühling, Vormittags ist der Luftdruck höher als im Herbst; zu Colorado Springs verhält es sich ziemlich umgekehrt, es ist im Frühling der Luftdruck Abends höher, Vormittags tiefer als im Herbst.

Obgleich also das Ergebniss dieser kleinen Abschweifung ein negatives ist, glaube ich dasselbe nicht unterdrücken zu sollen, da die Tabellen mit den Monatsmitteln des täglichen Ganges zu einer Vergleichung des täglichen Ganges im Frühling und Herbst herausfordern.

Wie zu erwarten, liegt der Unterschied im täglichen Gang zwischen Frühling und Herbst nur in der Verschiedenheit der ganztägigen Barometerschwankung, denn drückt man die obige Differenzreihe durch Sinuscurven aus, so erhält man:

Unterschied im täglichen Barometergang Frühling bis Herbst.

Bludenz .... $0·254 \sin(13°5+x)+0·040 \sin(145°7+2x)$
Colorado Springs. $0·295 \sin(128·5+x)+0·049 \sin(204·0+2x)$.

Correspondierende Mittel.

	Juli und Aug. 1892 50 Tage			September und Oct. 1891		October 1891		
	Cha-monix	Grands Mulets	Mont-blanc	Cha-monix	Mont-blanc	Cha-monix	Grands Mulets	Mont-blanc
Höhe	1088	3021	4359	1088	4359	1088	3021	4359
Luftdruck...	671·2	534·1	448·3	670·8	446·4	668·1	(528·8)	444·0
Mitternacht	·37	·24	—·05	·28	·14	·30	·16	·07
1	·27	·02	—·19	·19	·03	·24	·00	—·01
2	·19	—·19	—·31	·06	—·13	·06	—·16	—·17
3	·08	—·39	—·46	—·06	—·25	—·12	—·40	—·29
4	·06*	—·54	—·53*	—·09	—·36	—·17	—·46	—·38
5	·11	—·67*	—·49	—·13*	—·43*	—·20*	—·54	—·44*
6	·15	—·64	—·40	—·05	—·41	—·15	—·61*	—·41
7	**·18**	—·60	—·36	·03	—·35	—·02	—·52	—·28
8	·12	—·56	—·24	·14	—·23	·11	—·36	—·10
9	·09	—·48	—·06	**·17**	—·12	**·17**	—·24	·00
10	·06	—·36	·05	·11	—·03	·02	—·16	·09
11	—·09	—·21	·16	·00	**·06**	—·04	—·06	**·15**
Mittag	—·22	·06	·21	—·16	·04	—·20	—·03	·08
1	—·33	·10	**·28**	—·30	·04*	—·32	·00	·06
2	—·37	·20	·24	—·40	·08	—·41	·04	·03*
3	—·52	·29	·22	—·44*	·08	—·45*	·15	·05
4	—·55*	·37	·24	—·34	·06	—·31	·21	·04
5	—·54	·44	·17	—·23	·12	—·11	·29	·11
6	—·37	·45	·17*	—·09	·17	·03	·44	·19
7	—·06	·51	·25	·10	·26	·20	·57	·26
8	·20	**·56**	**·36**	·25	·32	·27	**·52**	·26
9	**·40**	·53	·34	·33	**·37**	·38	·50	**·34**
10	·39	·49	·27	**·35**	·28	**·40**	·43	·18
11	·38	.39	·08	·30	·26	·33	·29	·22
Mittel	·25	·39	·26	·19	·21	·21	·30	·18

Täglicher Gang des Barometers auf dem Montblanc (4359 *m*). Observatorium Vallot.

Tage....	Sept. 1891 24	Octob. 1891 23	Juli 1892 19	August 1892 31	Sept. 1892 30	Juli und August 50	Sept. u. October 77	Allg. Mittel 127
Mittern.	·22	·07	—·24	·08	—·08	—·05	·05	·02
1	·06	—·01	—·40	—·05	—·17	—·19	—·05	—·10
2	—·10	—·17	—·51	—·18	—·29	—·31	—·20	—·24
3	—·21	—·29	—·57	—·38	—·39	—·46	—·31	—·36
4	—·34	—·38	—·58	—·49	—·39	—·53*	—·37	—·37
5	—·42	—·44	—·49	—·49	—·36	—·49	—·40*	—·44*
6	—·42	—·41	—·35	—·43	—·23	—·40	—·34	—·37
7	—·42	—·28	—·31	—·39	—·10	—·36	—·25	—·30
8	—·37	—·10	—·19	—·27	—·04	—·24	—·16	—·19
9	—·23	·00	05	—·14	·08	—·06	—·04	—·05
10	—·16	·09	·13	—·01	·16	·05	·04	·04
11	—·04	·15	·30	·06	·15	·16	·09	·11
Mittag	—·02	·08	·36	·11	·12	·21	·07	·12
1	·03	·06	·37	·21	·14	**·28**	·08	**·16**
2	·12	·03	·31	·19	·13	·24	**·09**	·15
3	·11	·05	·24	·20	·15	·22	·11	·15
4	·09	·04	·28	·21	·14	·24	·09*	·15
5	·12	·11	·24	·12	·14	·17	·13	·14*
6	·15	·19	·19	·16	·16	·17*	·16	·17
7	·27	·26	·24	·25	·13	·25	·21	·23
8	·38	·26	·34	·37	·20	**·36**	·27	**·31**
9	·39	·34	·32	·36	·18	·34	**·29**	**·31**
10	·38	·18	·20	·31	·08	·27	·20	·23
11	·32	·22	·02	·12	·02	·08	·17	·14
Mittel	·22	·18	·30	·23	·17	·26	·17	·20
Luftdruck	448·8	444·0	447·9	448·6	447·2	448·3	446·7	447·35

	Chamonix					Bludenz 2 Jahre			
	Juli 1892	August 1890, 1891, 1892	September 1890, 1891	October 1891	Mittel Juli, August Sept. (6 Mon.)	Winter	Frühling und Herbst	Sommer	Jahr
Mitternacht	·29	·45	·24	·30	·36	·13	·33	·40	·28
1	·24	·38	·14	·24	·27	·04	·27	·28	·20
2	·16	·28	·03	·06	·18	·01	·19	·16	·13
3	·05	·12	—·01	—·12	·06	—·04	·08	·08*	·04
4	·07	·04	—·09	—·17	·00*	—·14	·01*	·09	—·01*
5	·15	·00	—·10	—·20	·00*	—·17*	·04	·16	·01
6	·16	·03	·03	—·15	·05	—·12	·10	·23	·07
7	·15	·06	·12	—·02	·10	·03	·21	·28	·17
8	·09	·08	·17	·11	·11	·18	·27	·27	·25
9	—·03	·03	·19	·17	·08	·31	·28	·22	·26
10	—·05	·00	·20	·02	·05	·33	·20	·12	·21
11	—·17	—·12	·05	—·04	—·08	·24	·05	—·03	·08
Mittag	—·21	—·23	—·09	—·20	—·18	—·06	—·18	—·21	—·15
1	—·24	—·33	—·26	—·32	—·30	—·33	—·40	—·40	—·38
2	—·26	—·40	—·39	—·41	—·37	—·41*	—·57	—·57	—·52
3	—·27	—·46	—·43	—·45	—·42	—·39	—·66*	—·65	—·56*
4	—·41	—·49	—·41	—·31	—·45*	—·30	—·65	—·63	—·53
5	—·44	—·42	—·32	—·11	—·39	—·15	—·51	—·57	—·41
6	—·33	—·33	—·17	·03	—·28	—·01	—·28	—·43	—·24
7	—·09	—·08	·03	·20	—·05	·11	—·03	—·17	—·03
8	·12	·19	·22	·27	·18	·14	·20	·10	·15
9	·34	·36	·30	·38	·34	·19	·32	·38	·30
10	·33	·41	·33	·40	·38	·20	·37	·45	·34
11	·31	·45	·28	·33	·37	·20	·36	·47	·34
Mittel	·20	·24	·18	·21	·21	·18	·27	·31	·24
	670·3	71·0	73·2	·68·1	671·6	708·5	708·7	710·9	709·4

Die halbtägige Barometerschwankung ist im Frühling und Herbst fast genau die gleiche, die ganztägige erheblich verschieden. Der Unterschied in derselben hat fast die gleiche Amplitude an beiden Orten, die Phasenzeiten desselben aber sind recht verschieden; zu Bludenz erreicht die positive Differenz ihr Maximum schon bald nach 5^h Morgens, zu Colorado Springs aber erst zwischen 9 und 10^h Abends. Auf den Witterungscharakter bezogen, gleicht die erste Differenzencurve (Bludenz) vollkommen der Differenz im Barometergang zwischen heiteren und trüben Tagen, die letztere (Colorado Springs) nähert sich der Differenz trüb—heiter. Da Colorado Springs mehr Frühlings- als Herbstregen hat, so könnte man in der That die Ursache des Unterschiedes in dem Witterungscharakter der beiden Jahreszeiten suchen; für Bludenz aber würde das nicht anzunehmen sein; auch in Bezug auf die Insolation stehen sich März, April und October, September wohl ziemlich nahe, namentlich mit Rücksicht auf die grössere Bewölkung im Frühlinge.

Täglicher Gang des Barometers zu São Paulo.

Der mir kürzlich zugekommene Jahresbericht 1896 der Commissão Geogr. e Geolog: de S. Paulo. Secc. Met. enthält den fünften Jahrgang der stündlichen Barometeraufzeichnungen zu São Paulo in Brasilien.

Da von der südlichen Erdhälfte nur wenige mehrjährige Reihen stündlicher Luftdruckaufzeichnungen bisher bekannt gemacht worden sind, so hielt ich es für nützlich, Mittelwerthe aus den fünfjährigen Registrirungen zu São Paulo abzuleiten und die harmonischen Constituenten des täglichen Barometerganges daselbst zu berechnen. Dieselben folgen hier anschliessend, während die Stundenwerthe selbst im Anhange mitgetheilt werden.

Die erste Rechnung ergab für den offenbar zu niedrigen Werth von a_2 für den April ·609, mit diesem und den übrigen 11 unmittelbar aus den Beobachtungen folgenden Werthen wurde die Rechnung wiederholt und ergab die berechneten Resultate für a_2.

Harmonische Constituenten des täglichen Ganges des Barometers zu São Paulo.

23° 33′ S Br., 46° 38′ W. 755 *m*. 5 Jahre (1892—1896).

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2	a_2 berech.
Jänner ...	·021	·344	·295	—·558	3°5	152·2	·345	·631	·620
Februar ..	·024	·268	·343	—·511	5·1	146·2	·269	·611	·634
März	·010	·253	·335	—·550	2·3	148·6	·253	**·644**	**·635**
April	·006	·218	·231	—·548	1·5	157·1	·218	·595	·615
Mai	·051	·231	·241	—·543	12·5	156·1	·273	·594	·588
Juni	·020	·187	·248	—·530	6·1	154·9	·188	·585*	·582*
Juli......	—·022	·332	·293	—·520	356·2	150·6	·333	·597	·604
August ..	·049	·342	·304	—·557	8·2	151·4	·346	·635	·640
September	·022	·253	·208	—·638	4·9	161·9	·254	**·671**	**·661**
October ..	·068	·276	·140	—·648	13·8	167·8	·284	·663	·653
November	·093	·276	·148	—·580	18·6	165·7	·291	·599	.630
December	·051	·344	·233	—·588	8·5	158·4	·348	·632	·614*
Jahr	·032	·277	·277	—·564	6·6	153·8	·279	·626	·623

$$a_2 = 0{\cdot}021 \sin(157{\cdot}4+x)+0{\cdot}025 \sin(334{\cdot}6+2x).$$

Die Amplituden der halbtägigen Oscillation zeigen wieder die beiden Maxima zur Zeit der Äquinoctien, d. i. im März und September, und das Hauptminimum im Juni, was desshalb besonders bemerkenswerth ist, weil dies auch auf der nördlichen Hemisphäre gleichzeitig der Fall ist, welche doch die entgegengesetzte Jahreszeit hat. Der jährliche Gang der Amplituden der ganztägigen Barometerschwankung bietet nichts Bemerkenswerthes dar.

In den Jahrgängen 1895 und 1896 der meteorologischen Publication der »Commissão Geographica e Geologica de São Paulo« finden sich auch für Santos an der Küste die stündlichen Barometeraufzeichnungen in Monatsmitteln mitgetheilt. Ich habe die Jahresmittel des täglichen Barometerganges daselbst berechnet und für das Jahr 1896 auch für die Zeitabschnitte November—Februar, März, April mit September und October, dann

Mai—August, also den Sommer, d. i. die Regenzeit mit niedrigem Barometerstand, die beiden Übergangsjahreszeiten, und den relativ trockenen und heiteren Winter. Nachstehend folgen die Stundenwerthe des Barometers in Abweichungen von dem Tagesmittel.

Täglicher Gang des Barometers zu Santos, 1896.

23° 56′ S Br. 17 *m*.

	December bis Februar	März, April, September, October	Mai bis August	Jahr	
				1896	1895
Mitternacht	·36	·30	·27	·31	·22
1	·03	·06	·12	·07	—·04
2	—·29	—·22	—·08	—·20	—·28
3	—·52	—·54	—·27	—·44	—·47
4	—·57	—·59	—·37	—·51	—·47
5	—·52	—·52	—·39	—·48	—·28
6	—·09	—·23	—·23	—·18	·01
7	·26	·16	·14	·19	·36
8	·47	·54	·49	·50	·66
9	·66	·79	·88	·78	·79
10	·67	·79	1·10	·85	·77
11	·47	·60	·70	·59	·50
Mittag	·24	·29	·33	·29	·13
1	—·02	—·07	—·28	—·12	—·27
2	—·30	—·38	—·53	—·40	—·55
3	—·55	—·62	—·80	—·66	—·68
4	—·76	—·64	—·77	—·72	—·68
5	—·62	—·54	—·58	—·58	—·55
6	—·47	—·37	—·41	—·42	—·37
7	—·23	—·12	—·18	—·18	—·10
8	·17	·11	·06	·11	·16
9	·42	·36	·25	·34	·37
10	·63	·48	·34	·48	·45
11	·56	·44	·34	·45	·39
Mittel	·41	·41	·41	·41	·40
	762·2	765·2	768·9	765·4	763·8

Die Amplituden der täglichen Barometervariation sind zu Santos auffallend klein, namentlich wenn man sie mit jenen von Rio Janeiro vergleicht, das nur um 1° dem Äquator näher liegt. Es sieht fast so aus, als wäre durch ein Versehen bei der Reduction der Barogramme der Scalenwerth der Ordinaten zu klein genommen werden.

Charakteristisch sind die Unterschiede der täglichen Variation nach den Jahreszeiten. In dem nassen, trüben Sommer ist das Vormittagsmaximum wenig grösser als das Abendmaximum, das ist ja, wie Herr Buchan und ich gezeigt haben, an trüben Tagen im Allgemeinen der Fall, die heiteren Tage haben dagegen ein grosses Vormittagsmaximum und ein kleines Abendmaximum, wie wir dies in der That auch zu Santos im trockenen hellen Winter bemerken.

Die Constanten des täglichen Barometerganges zu Santos.

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
Sommer (Nov.–Febr.) . .	—·006	·133	·310	—·550	357·4	150·6	·133	·631
Herbst und Frühling . .	—·055	·126	·300	—·553	336·7	151·5	·137	·629
Winter (Mai–Aug.) . . .	—·026	·250	·299	—·542	354·1	151·1	251	·619
Jahr 1896	—·029	·170	·303	—·548	350·3	151·0	·173	·626
Jahr 1897	–·015	·211	·173	—·578	355·9	163·3	·211	·604

Die kleine tägliche Variation des Barometers zu Santos resultirt also zunächst daraus, dass die ganztägige Schwankung in drei Viertheilen des Jahres sehr klein ist, wahrscheinlich durch Superposition einer localen täglichen Variation (in Folge der Land- und Seewinde oder Gebirgswinde), welche gegen die normale allgemeine ganztägige Schwankung entgegengesetzte Phasenzeiten hat, auf diese letztere. Aber auch die halbtägige Oscillation hat zu kleine Amplituden, wie folgender Vergleich zeigt.

Rio de Janeiro $a_2 = 0{\cdot}827$, São Paulo (reducirt mit B/b) 0·690, dagegen Santos nur 0·615, also offenbar zu klein. Die Amplitude der ganztägigen Variation ist zu Rio de Janeiro 0·40, zu São Paulo 0·28, zu Santos 0·19.

Zum Schlusse möchte ich noch den Versuch machen, den wahrscheinlichsten Werth der mittleren Amplitude der doppelten täglichen Barometer-Oscillation am Äquator nach den jetzt vorliegenden Beobachtungen zu ermitteln.

Die Orte, deren berechneter täglicher Barometergang dazu benützt werden kann, lassen sich aus meinen beiden grösseren, in den Denkschriften der kais. Akademie enthaltenen Abhandlungen entnehmen, zum Theil auch der vorliegenden Abhandlung. Zur Ergänzung will ich noch den von mir berechneten täglichen Gang des Barometers zu Loanda, an der äquatorialen Westküste Afrikas, hier anführen[1] und jenen von Dar es Salâm an der Ostküste neu berechnet hinzufügen.

Die Constanten des täglichen Barometerganges zu S. Paul de Loando, 8° 49′ S Br., 13° 7′ E. 59 *m.*[2]

	A_1	A_2	a_1	a_2	a_2 berechnet
Jänner	7·6	149·4	1·029	·824	·839
Februar	7·9	145·9	1·110	·845	·876
März	11·5	149·8	1·071	·939	·917
April	14·4	156·7	1·074	·942	·916
Mai	15·9	156·8	0·902	·827	·871
Juni	15·7	158·1	0·915	·816	·820
Juli	14·5	153·6	1·016	·827	·809
August	15·2	157·1	1·023	·854	·843
September	17·1	160·5	1·061	·880	·889
October	16·0	160·8	1·026	·886	·901
November	12·5	154·4	1·045	·891	·873
December	11·4	150·9	1·047	·860	·838
Jahr	13·4	154·5	1·019	·860*	·866

[1] Siehe Meteorol. Zeitschrift, XXXI. Bd. (1896), S. 191.

[2] Reducirt aufs Meeresniveau, 0·865 *mm*.

Freiherr v. Danckelman hat mir vor längerer Zeit die Stundenmittel des Luftdruckes zu Dar-es-Salâm für die 10 Monate December 1895 bis September 1896 mitgetheilt. Ich habe daraus den folgenden täglichen Gang des Barometers abgeleitet. Dar-es-Salâm liegt im deutschen Schutzgebiete, an der äquatorialen Ostküste Afrikas, gewissermassen dem vorgenannten Orte gegenüber.

Täglicher Gang des Barometers zu Dar-es-Salâm, 6° 49′ S Br.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Vorm. . .	-·07	-·38	-·53	-·49	-·24	·10	·67	1·11	1·37	1·35	1·04	·52
Nachm.	-·08	-·74	-1·20	-1·33	-1·11	-·86	-·49	-·10	·30	·50	·45	·28

Diesen Zahlenwerthen entspricht die Gleichung ($x = 0$ für Mitternacht):

$$B = 760{\cdot}44^{1} + 0{\cdot}575 \sin(345{\cdot}2 + x) + 0{\cdot}913 \sin(155°8 + 2x).$$

Auf ein Jahresmittel reducirt (es fehlen ja October und November) ergibt sich die Amplitude $a_2 = 0{\cdot}922$.

Nach der früher mitgetheilten Formel für die Abnahme der Amplitude a_2 mit der geographischen Breite, kann man bis 10° Entfernung vom Äquator unbedenklich das einfache Cosinus-Gesetz gelten lassen; bei 5° beträgt das Glied $0{\cdot}573 \sin^2\varphi \cos^2\varphi$ bloss 0·004 *mm* und auch bei 10° erst 0·017 *mm*, liegt also unter der Fehlergrenze der Bestimmung von a_2.

Ich gehe demnach so vor: Ich nehme die Werthe von a_2 für alle Orte, welche innerhalb 10° N und S vom Äquator liegen und dividire dieselben durch $\cos^2\varphi$, um sie auf den Äquator zu reduciren.

Derart finde ich, indem ich nach Osten um die Erde fortschreite:

---

[1] Mit Schwere-Correction und im Meeresniveau, Mittel eines Jahres.

			a_2 beobacht.	a_2 reducirt
Kamerun,	4° 3′ N,	9° 42′ E...	0·889	0·893
S. Paul de Loanda,	8 49 S,	13 7 E...	0·865	0·885
Dar-es-Salâm,	6 49 S,	39 16 E...	0·922	0·935
Singapore,	1 15 N,	103 51 E...	0·984	0·984
Batavia,	6 11 S,	106 50 E...	0·950	0·961
Finschhafen,	6 34 S,	147 50 E...	0·890	0·891
Jaluit,	5 55 S,	169 40 E...	0·840	0·849
San José,	9 56 N,	84 8 W...	0·918[1]	0·946
Schiffsbeobachtungen,[2] 4°—10° unter allen Längen ...				0·925
			Mittel....	0·919

Als wahrscheinlichster Werth der Amplitude a_2 am Äquator muss desshalb jetzt 0·92 angesetzt werden. Angot ist demselben sehr nahe gekommen.

---

[1] Reducirt mit $B:b$.

[2] Von den Schiffsbeobachtungen in der Nähe des Äquators nehme ich nur folgende (die beobachteten a_2 sind auf Jahresmittel reducirt worden mittelst der auf S. 67 angegebenen Correctionen für die einzelnen Monate):

			a_2 beob.	a_2 corr.	a_2 red.
»Novara«	35 Tage,	4°5 Breite	·978	·948	·954
»Donau«	49 »	5·9 »	·879	·889	·898
»Novara«	40 »	8·0 »	·995	·927	·946
»Novara«	40 »	10·0 »	·805	·875	·902

Das Mittel ist 0·925.

Täglicher Gang des Luftdruckes auf der Insel Jaluit. 5° 55′ N Br., 169° 40′ E L. v. Gr.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mitternacht	·41	·49	·45	·49	·40	·41	·37	·36	·37	·37	·47	·49	.42
1h a.	·01	·12	·01	— ·02	— ·05	·00	·03	·02	— ·15	— ·07	·09	·05	·00
2	— ·29	— ·14	— ·33	— ·32	— ·40	— ·28	— ·30	— ·25	— ·43	— 29	— ·23	— ·29	— ·30
3	— ·52	— ·37	— ·50	— ·53	— ·63	— ·48	— ·48	— ·41	— ·51	— ·48	— ·47	— ·54	— ·50
4	— ·50	— ·39	— ·47	— ·52	— ·60	— ·49	— ·51	— ·38	— ·47	— ·49	— ·50	— ·53	— ·49
5	— ·28	— ·26	— ·29	— ·26	— ·33	— ·26	— ·34	— ·27	— ·26	— ·25	— ·26	— ·29	— ·28
6	— ·05	·00	·01	·03	— ·05	·02	— ·08	— ·05	— ·02	·03	·05	·02	— ·01
7	·40	·45	·53	·48	·47	·47	·35	·37	·48	·54	·59	·46	·47
8	·77	·84	·85	·91	·82	·73	·64	·82	·84	·87	·88	·84	·82
9	·92	1·05	1·06	1·04	1·02	·84	·85	·91	1·00	1·04	1·00	·98	·97
10	·87	·97	·95	·93	.96	·78	·80	·82	·92	·93	·92	·90	·90
11	·63	·68	·64	·58	·66	·43	·55	·52	·65	·61	·55	·50	·58
Mittag	·24	·16	·10	·07	·13	·05	·18	·04	·01	— ·03	— ·09	— ·02	·07
1	— ·43	— ·45	— ·53	— ·65	— ·48	— .45	— ·26	— ·42	— ·56	— ·62	— ·70	— ·51	— ·51
2	— ·92	— ·94	— ·91	—1·01	— ·88	— ·81	— ·60	— ·74	— ·86	—1·22	—1·18	— ·98	— ·92
3	—1·10	—1 23	—1·22	—1·20	—1·06	—1·02	— ·92	— ·95	—1·10	—1·30	—1·27	—1·23	—1·14
4	—1·04	—1·19	—1·21	—1·17	—1·05	—1 04	—1·00	—1·04	—1·12	—1·17	—1·11	—1·16	—1·11
5	— ·77	— ·98	— ·94	— ·93	— ·83	— ·83	— ·82	— ·85	— ·88	— ·85	— ·84	— ·87	— .86
6	— ·43	— ·72	— ·62	— ·55	— ·45	— ·50	— ·55	— ·53	— ·45	— ·44	— ·49	— ·49	— ·47
7	·06	— ·19	— ·07	·02	·01	— ·02	— ·22	— ·11	·02	·04	·04	·04	— ·03
8	·35	·23	·32	·29	·35	·35	·24	·21	·33	·49	·44	·45	·34
9	·60	·64	·66	·65	·61	·64	·64	·58	·73	·74	·79	·77	·59
10	·63	·69	·81	·88	·69	·70	·75	·68	·84	·81	·79	·72	·74
11	·55	·64	·75	·79	·64	·65	·67	·61	·67	·66	·66	.65	·66
Mittel	·53	·58	·59	·60	·57	·51	·51	·50	·57	·60	·60	·57	·55
750+	6·28	7·60	7·85	7·58	8·13	7·70	8·19	7·98	8·08	8·14	6·98	6·69	7·60

Täglicher Gang des Luftdruckes zu Pelagosa.

	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.
	1897			1894					
1h a.	·08	·04	·01	—·05	·14	—·15	—·09	·02	—·03
2	—·09	—·11	—·11	—·15	·08	—·22	—·23	—·02	—·03
3	—·22	—·26	—·27	—·27	—·05	—·31	—·40	—·08	—·13
4	—·30	—·34	—·29	—·35	—·18	—·40	—·50	—·18	—·26
5	—·36	—·34	—·24	—·34	—·16	—·38	—·49	—·21	—·28
6	—·37	—·20	—·16	—·24	—·14	—·29	—·47	—·21	—·29
7	—·07	—·05	—·02	—·15	·04	·02	—·18	—·06	—·11
8	·00	·03	·12	·01	·15	·21	·08	·11	·17
9	·17	·15	·23	·18	·30	·46	·34	·28	·33
10	·28	·22	·33	·31	·38	·61	·47	·41	·42
11	·33	·32	·42	·36	·41	·55	·50	·39	·28
Mittag	·29	·33	·42	·34	·34	·50	·43	·21	·06
1	·22	·25	·30	·23	·24	·38	·28	—·06	—·20
2	·06	·15	·15	·12	·15	·20	·13	—·22	—·32
3	—·13	—·03	—·03	—·04	—·04	·00	·02	—·32	—·28
4	—·24	—·15	—·15	—·11	—·14	—·13	—·08	—·31	—·22
5	—·29	—·26	—·28	—·18	—·28	—·27	—·05	—·21	—·19
6	—·29	—·30	—·31	—·21	—·39	—·39	·00	—·09	—·13
7	—·14	—·17	—·25	—·18	—·34	—·28	·08	·04	·09
8	·02	—·03	—·21	—·07	—·26	—·11	·07	·05	·15
9	·25	·15	·00	·14	—·09	·02	·09	·12	·27
10	·29	·21	·08	·21	—·03	·01	·08	·16	·29
11	·32	·19	·13	·23	·00	—·01	·03	·10	·27
Mittn.	·30	·15	·09	·19	—·02	—·07	—·02	·05	·15
Mittel	·213	·185	·192	·193	·182	·332	·213	·163	·206

Täglicher Gang des Luftdruckes zu Pelagosa. 1895.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
1h a.	·21	·24	—·02	—·05	—·21	—·11	—·14	—·11	—·03	·18	—·05	—·06	—·013
2	·20	·13	—·09	—·18	—·31	—·22	—·23	—·18	—·13	·04	—·03	·02	—·082
3	·09	·00	—·25	—·36	—·40	—·30	—·28	—·27	—·25	—·13	—·11	—·11	—·199
4	—·11	—·08	—·28	—·44	—·45	—·26	—·23	—·30	—·30	—·12	—·15	—·26	—·248
5	—·31	—·06	—·30	—·43	— 30	—·18	—·13	—·24	—·28	—·16	—·16	—·34	—·257
6	—·26	—·04	— 26	—·22	—·04	—·06	·02	—·09	—·12	—·11	—·07	—·24	—·124
7	—·15	·08	—·12	—·08	·14	·11	·20	·03	·06	.05	·13	—·06	·032
8	·04	·22	·10	·08	28	·25	·28	·22	·24	·23	·33	·14	·201
9	·19	·24	·31	·30	·43	·34	·35	·34	·42	·34	·50	·39	·346
10	·23	·26	·44	·44	·53	·42	·44	·44	·50	·36	·60	·48	·428
11	·12	29	·52	·38	·57	·46	·45	·45	·47	·24	·53	·26	·395
Mittag	— 15	·10	·52	·34	·45	·41	·42	36	·38	·04	·27	—·03	·259
1	—·33	—·10	·32	·21	·36	·28	·32	·30	·19	—·21	·06	—·20	·100
2	—·38	—·29	·08	·01	·17	·10	·13	.13	—·03	—·36	—·18	—·27	—·074
3	—·30	—·37	— 06	—·20	—·06	—·10	—·08	—·03	—·21	—·51	—·30	—·21	—·203
4	—·29	—·36	—·15	—·25	—·17	—·24	—·23	— 17	—·31	—·49	—·33	—·21	—·267
5	—·12	—·31	—·27	—·21	—.31	—·36	—·38	—·28	—·39	—·36	—·31	—·14	—·287
6	—·01	—·25	—·24	—·17	—·40	—·36	—·40	—·34	—·35	—·16	—·22	—·00	—·244
7	·09	—·20	—·13	—·06	—·32	—·27	—·33	—·22	— 17	—·06	—·16	·15	—·140
8	·16	—·10	—·04	·16	—·14	—·10	—·12	—·09	—·02	·12	—·10	·13	—·012
9	·27	·02	·03	·20	·05	·07	—·03	·00	·08	·28	—·03	·14	·090
10	·27	·06	·03	·23	·06	·11	·07	— 02	·11	·30	—·02	·20	·116
11	·28	·19	·01	·19	·04	·03	·06	·03	·09	·29	—·06	·19	·111
12	·20	·23	—·03	·10	—·02	—·06	—·07	—·05	·07	·25	—·14	·07	·046
Mittel	·19	·17	·19	·22	·26	·22	·22	·20	·22	·23	·20	·18	·178

Pelagosa. Täglicher Gang des Luftdruckes. 1896.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
1ʰ a.	·05	·18	·13	—·02	—·07	—·15	—·12	—·17	·02	·01	—·03	—·12	—·024
2	·04	·04	—·02	—·15	—·16	—·28	—·24	—·24	—·12	—·08	—·09	—·11	—·118
3	—·10	—·15	—·16	—·29	—·28	—·38	—·30	—·33	—·23	—·20	—·20	—·09	—·226
4	—·27	—·24	—·26	—·38	—·33	—·34	—·26	—·33	—·32	—·36	—·34	—·19	—·302
5	—·33	—·30	— 21	—·36	—·22	—·22	—·20	—·25	—·38	—·39	—·39	—·29	—·295
6	—·29	—·20	—·12	—·18	—·08	—·04	—·09	—·14	—·28	—·38	—·35	—·24	—·199
7	—·13	·01	·07	·02	·06	·16	·14	·07	—·07	—·20	—·22	—·09	—·015
8	·01	·13	·17	·13	·13	·28	·24	·16	·06	·06	—·01	·04	·117
9	·20	·22	·33	·34	·20	·38	·30	·35	·24	·15	·15	·29	·263
10	·35	·28	·43	·48	·28	·46	·39	·43	·36	·17	·36	·49	·373
11	·32	·30	·39	·50	·36	54	·49	·46	·44	·32	·39	·50	·417
Mittag.	·11	·06	·22	·47	·33	·50	·46	·41	·38	·29	·17	·26	·305
1	—·13	—·13	·01	·36	·29	·35	·36	·34	·25	·09	·01	·02	·152
2	—·25	—·30	—·22	·10	·10	·23	·22	·17	·09	—·06	—·17	—·11	—·017
3	—·24	—·33	—·41	—·17	—·09	·02	·00	·02	—·08	—·18	—·13	—·19	—·148
4	—·18	—·32	—·44	—·29	—·21	—·19	—·17	—·10	—·16	—·24	—·07	—·15	—·210
5	—·14	—·22	—·39	—·35	—·29	—.39	—·34	—·24	—·21	—·20	—·03	—·08	—·240
6	—·03	—·12	—·28	—·35	—·28	—·40	—·37	—·29	—·24	—·06	·03	—·03	—·202
7	·08	·03	—·09	—·22	—·16	—·32	—·30	—·23	—·13	·12	·09	·00	—·094
8	·17	·10	·09	—·05	—·04	—·25	—·23	—·09	·01	·21	·17	·01	·008
9	·24	·22	·19	·07	·12	—·03	·03	·08	·20	·29	·25	·04	·142
10	·25	·22	·22	·12	·15	·01	·06	·05	·05	·26	·22	·10	·143
11	·20	·30	·20	·16	·18	·01	—·01	·01	·07	·18	·19	·07	·130
12	·10	·27	·20	·10	·08	—·05	—·04	—·08	·08	·13	·11	—·01	·074
Mittel	·18	·19	·22	·24	·19	·25	·22	·20	·19	·19	·17	·15	·176

Ponta Delgada. Täglicher Gang des Barometers. 1896.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
1h a.	·03	·02	·11	— ·07	— ·10	·09	— ·04	— ·03	— ·06	— ·09	·01	·17	·003
2	·01	— ·12	— ·05	— ·23	— ·24	— ·12	— ·18	— ·18	— ·25	— ·29	— ·09	·05	— ·141
3	— ·08	— ·25	— ·31	— ·41	— ·33	— ·26	— ·29	— ·34	— ·36	— ·48	— ·25	— ·06	— ·285
4	— ·24	— ·37	— ·44	— ·48	— ·36	— ·35	— ·32	— ·40	— ·46	— ·49	— ·28	— ·20	— ·366
5	— ·36	— ·39	— ·38	— ·43	— ·26	— ·28	— ·28	— ·36	— ·40	— ·41	— ·30	— ·39	— ·353
6	— ·33	— ·31	— ·24	— ·26	— ·11	— ·20	— ·17	— ·25	— ·28	— ·30	— ·25	— ·41	— ·259
7	— ·18	— ·24	— ·09	— ·06	— ·01	— ·06	·00	— ·10	— ·10	— ·12	— ·09	— ·22	— ·106
8	·15	·16	·16	·12	·17	·10	·10	·05	·12	·18	·22	— ·05	·123
9	·38	·37	·35	·25	·23	·10	·15	·14	·26	·34	·40	·18	·262
10	·60	·51	·46	·34	·29	·18	·23	·25	·33	·48	·55	·43	·388
11	·58	·52	·41	·33	·28	·22	·27	·27	·30	·51	·41	·58	·390
Mittag	·13	·23	·28	·19	·16	·18	·22	·20	·17	·25	·04	·25	·192
1	— ·29	— ·12	— ·02	·07	·02	·02	·09	·09	·00	— ·04	— ·25	— ·14	— ·048
2	— ·53	— ·46	— ·33	— ·02	— ·13	— ·08	— ·01	·00	— ·17	— ·23	— ·39	— ·39	— ·228
3	— ·52	— ·51	— ·40	— ·19	— ·26	— ·18	— ·11	— ·15	— ·29	— ·28	— ·51	— ·47	— ·323
4	— ·45	— ·49	— ·42	— ·22	— ·26	— ·24	— ·25	— ·22	— ·34	— ·31	— ·50	— ·43	— ·344
5	— ·34	— ·38	— ·33	— ·25	— ·26	— ·27	— ·28	— ·24	— ·28	— ·23	— ·35	— ·37	— ·298
6	— ·18	— ·15	— ·22	— ·20	— ·18	— ·19	— ·23	— ·22	— ·20	— ·07	— ·09	— ·20	— ·178
7	·08	·14	— ·01	— ·04	— ·01	— ·06	— ·04	— ·04	·06	·14	·12	·04	·032
8	·24	·33	·24	·28	·20	·08	·14	·25	·43	·28	·26	·25	·248
9	·39	·44	·39	·42	·43	·36	·30	·42	·52	·40	·37	·40	·403
10	·37	·50	·41	·41	·38	·42	·33	·40	·46	·37	·38	·39	·402
11	·33	·40	·33	·35	·28	·37	·25	·36	·40	·24	·35	·40	·338
12	·18	·20	·21	·21	·08	·23	·08	·21	·21	·08	·19	·27	·179
Mittel	·29	·32	·27	·24	·21	·19	·18	·22	·27	·28	·28	·28	·245
	764·5	63·7	69·0	68·5	66·9	65·7	68·5	67·8	65·8	62·6	61·1	67·3	765·96

Täglicher Gang des Barometers zu Colorado Springs. 38° 50′ N, 104° 49′ W. 1856 *m*.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mitternacht	·24	·18	·46	·56	·54	·42	·28	·43	·49	·10	·06	·19	·33
1	·19	·18	·48	·51	·54	·40	·23	·26	·49	·25	·04	·10	·30
2	·24	·17	·40	·41	·50	·39	·18	·19	·44	·36	·09	·09	·29
3	·30	·08	·20	·46	·50	·44	·13	·15	·39	·37	·04	·04	·26
4	·14	·03	·15	·51	·54	·56	·18	·12	·44	·41	·04	—·05	·26*
5	·20	·13	·25	·61	·64	·80	·36	·21	·59	·48	·14	—·15	·35
6	·24	·23	·41	·84	·77	·95	·56	·39	·80	·66	·26	—·04	·51
7	·40	·43	·51	·96	·90	1·00	·70	·52	·90	·79	·44	·08	·64
8	·55	·61	·51	·89	·72	1·01	·74	·52	·95	·85	·54	·18	·67
9	·60	·66	·46	·71	·64	·80	·60	·58	·95	·80	·65	·30	·65
10	·65	·64	·25	·51	·34	·60	·54	·52	·80	·61	·59	·44	·54
11	·40	·43	·03	·10	·06	·29	·28	·26	·49	·43	·39	·18	·28
Mittag	—·32	·08	—·23	—·41	—·38	—·06	—·05	—·03	—·02	—·24	—·22	—·23	— .18
1	—·76	—·38	—·66	—·66	—·63	—·44	—·41	—·26	—·37	—·64	—·62	—·58	— .53
2	—1·04	—·81	—·91	—·99	—·91	—·72	—·56	—·51	—·80	—·95	—·88	—·79	— .82
3	—1·05	—1·04	—1·22	—1·40	—1·26	—1·23	—·83	—·90	—1·30	—1·21	—·88	—·68	—1·08
4	—·96	—1·04	—1·17	—1·55	—1·49	—1·56	—·99	—1·02	—1·50	—1·23	—·77	—·53	—1·15*
5	—·66	—·71	—·86	—1·35	—1·39	—1·59	—·94	—·95	—1·41	—·91	—·50	—·23	—·96
6	—·27	—·30	—·48	—1·07	—1·12	—1·31	—·81	—·84	—1·18	—·59	—·12	·06	—·67
7	—·05	—·05	—·10	—·58	—·63	—1·00	—·60	—·51	—·88	—·30	—·02	·24	—·37
8	·10	·05	·20	—·08	—·22	—·54	—·30	—·16	—·42	—·19	·09	·03	—·10
9	·22	·08	·48	·25	·28	·09	·16	·16	—·12	·00	·24	·35	·18
10	·24	·18	·51	·36	·50	·32	·34	·35	—·05	·09	·28	·35	·29
11	·35	·20	·46	·46	·54	·40	·28	·48	·42	·05	·09	·33	·32
Mittel	·42	·36	·48	·69	·67	·71	·46	·43	·67	·50	·33	·27	·49
Luftdruck	607·9	607·8	607·1	607·8	609·5	610·4	613·5	613·7	611·0	610·6	609·6	609·3	609·85
Temperatur	—0·1	—3·7	2·8	7·3	12·3	17·9	19·9	18·1	15·6	9·3	2·8	—1·5	8·4

Täglicher Gang des Barometers auf Pikes Peak. 38° 50′ N, 105° 2′ W. 4308 *m*.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mitternacht	—·13	·03	—·34	—·10	—·20	—·19	—·10	·08	·00	—·23	—·15	—·05	—·12
1	—·30	—·17	—·50	—·28	—·48	—·40	—·22	—·18	—·14	—·43	—·30	—·24	—·30
2	—·46	—·32	—·79	—·61	—·66	—·57	—·36	—·23	—·32	—·58	—·41	—·46	—·48
3	—·48	—·54	—1·12	—·76	—·81	—·70	—·40	—·33	—·50	—·79	—·46	—·55	—·62
4	—·68	—·73	—1·20	—·86	—·94	—·75	—·41	—·38	—·57	—·86	—·61	—·65	—·72
5	—·76	—·67	—1·07	—1·07	—·89	—·70	—·37	—·43	—·65	—·81	—·58	—·66	—·72*
6	—·56	—·50	—·84	—·91	—·66	—·60	—·29	—·41	—·60	—·68	—·51	—·42	— 58
7	—·20	—·26	— 51	—·51	—·41	—·41	—·20	—·33	—·55	—·56	—·36	—·19	—·37
8	·05	—·07	—·23	—·20	—·13	—·09	·00	—·08	—·27	—·18	·03	—·05	—·10
9	·41	·16	·06	—·10	·03	·10	·15	·13	·10	·20	·30	·16	·14
10	·61	·34	·34	·13	·25	·29	·30	·28	·26	·33	·41	·44	·33
11	·58	·44	·49	·25	·46	·41	·42	·33	·42	·51	·38	·42	·43
Mittag	·30	·37	55	·25	·51	·42	·47	·38	·53	·61	·10	·15	·38
1	·10	·14	·53	·33	·46	·48	·37	·38	·52	·56	·10	·00	·33
2	·10	·06	·52	·41	·46	·42	·31	·28	·46	·43	·05	—·04	·29
3	·15	·08	·57	·41	·36	·41	·21	·13	·31	·41	·18	·05	·28
4	·15	·14	·58	·41	·30	·30	·06	·08	·21	·41	·15	·06	·24
5	·15	·09	·58	·48	30	·14	—·05	·03	·20	·38	·20	·15	·22*
6	·23	·13	·67	·51	·33	·14	—·10	—·13	·16	·43	·30	·26	·24
7	·25	·26	·57	·48	·36	·16	—·08	—·13	·06	·38	·38	·36	·25
8	·23	·34	·53	·56	·38	·26	·01	·03	·11	·33	·41	·41	·30
9	·15	·29	·45	·51	·46	·36	·11	·13	·10	·20	·28	·36	·28
10	·10	·25	.31	·43	·38	·42	·16	·13	·01	·13	·15	·26	·23
11	·05	·14	—·14	·15	·03	·07	·06	·23	·16	—·08	·00	·20	·07
Mittel	·30	·27	·56	·45	·43	·36	·22	·22	·30	·44	·28	·28	·33
Luftdruck	445·0	443·4	445 1	447·6	451·7	455 4	459·6	459·2	455·2	452·2	448·1	445·9	450.70
Temperatur	-15·6	-17·5	-13·9	-10·6	-5·2	-0·1	3·3	2·1	-1·1	-5·9	-11·9	-15·4	—7·7

Täglicher Gang des Barometers zu Bludenz. 2 Jahre (Juli 1893—Juni 1895). 47° 9′ N, 9° 49′ E v. Gr. 588 *m*

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mitternacht	·05	·24	·32	·42	·43	·34	·46	·36	·29	·28	·11	·13	·28
1	·00	·16	·31	·31	·26	·27	·35	·23	·22	·25	·00	·00	·20
2	·01	·12	·25	·24	·11	·17	·16	.20	·14	·14	—·06	—·02	·13
3	—·04	·00	·15	·16	·04	·08	·06	·15	·02	—·03	—·11	—·01	·04
4	—·15	—·10	·09	·13	·05	·11	·08	·14	—·08	—·10	—·22	—·08	—·01
5	—·21	—·12	·11	·20	·13	·17	·14	·20	—·08	—·08	—·22	—·12	·01
6	—·15	—·12	·16	·33	·20	·27	·16	·29	·00	—·09	—·16	—·06	·07
7	·05	·01	·26	·45	·25	·36	·21	·31	·07	·06	·00	·06	·17
8	·18	·15	·32	·41	·25	·35	·20	·30	·16	·19	·19	·22	·25
9	·32	·20	·31	·36	·17	·30	·15	·24	·24	·20	·30	·40	·26
10	·42	·20	·24	·20	·06	·19	·09	·13	·17	·20	·26	·44	·21
11	·36	·16	·09	·01	—·11	·07	—·03	—·06	·02	·08	·11	·32	·08
Mittag	—·03	—·03	—·15	—·23	—·29	—·13	—·20	—·22	—·16	—·17	—·18	—·00	—·15
1	—·49	—·24	—·44	—·43	—·45	—·34	—·42	—·41	—·29	—·43	—·28	—·32	—·38
2	—·43	—·45	—·64	—·63	—·59	—·51	—·60	—·58	—·44	—·57	—·33	—·43	—·52
3	—·32	—·52	—·76	—·76	—·63	—·62	—·68	—·66	—·52	—·59	—·29	—·42	—·56
4	—·19	—·47	—·77	—·81	—·58	—·65	—·65	—·65	—·50	—·50	—·23	—·32	—·53
5	—·06	—·29	—·61	—·75	—·53	—·61	—·53	—·61	—·38	—·30	—·06	—·20	—·41
6	·04	—·08	—·32	—·57	—·37	—·46	—·37	—·54	—·20	—·05	·10	—·11	—·24
7	·10	·16	·02	—·36	—·08	—·27	—·14	—·19	·08	·16	·20	—·02	—·03
8	·15	·19	·17	·11	·18	—·06	·12	·15	·25	·26	·22	·02	·15
9	·16	·24	·29	·31	·49	·24	·43	·36	·30	·40	·26	·09	·30
10	·12	·29	·32	·40	·54	·36	·48	·40	·36	·38	·23	·15	·34
11	·13	·30	·33	·45	·53	·38	·53	·43	·36	·29	·18	·20	·34
Mittel	·17	·20	·31	·38	·31	·31	·30	·33	·22	·24	·18	·17	·24
	706·0	5·1	7·6	7·8	8·8	11·6	10·6	12·4	9·2	10·3	10·5	12·4	709·4

São Paulo. Täglicher Gang des Luftdruckes.

Abweichungen vom Tagesmittel; 5 Jahre (1892—1896). 23° 33′ S Br., 46° 38′ W. 755 *m*.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
Mitternacht	·34	·36	·40	·11	·31	·28	·22	·36	·24	·23	·25	·33	·286
1	·02	·10	·11	·05	·14	·07	·15	·21	·05	—·06	—·01	·04	·072
2	—·22	—·17	—·18	—·11	—·05	—·11	·02	—·01	—·21	—·28	—·25	—·22	—·149
3	—·36	—·32	—·37	—·29	—·24	—·26	—·18	—·21	—·41	—·40	—·33	—·40	—·314
4	—·34	—·37	—·43	—·38	—·41	—·38	—·30	—·34	—·46	—·37	—·29	—·32	—·366
5	—·14	—·28	—·33	—·33	—·31	—·36	—·29	—·26	—·32	—·17	—·10	—·11	—·250
6	·14	—·05	—·11	—·12	—·11	—·19	—·12	—·07	—·03	·12	·16	·16	—·018
7	·42	·24	·22	·18	·18	·10	·19	·23	·34	·43	·44	·46	·286
8	·62	·47	·53	·52	·48	·43	·53	·54	·68	·70	·61	·70	·568
9	·73	·65	·76	·79	·80	·76	·88	·83	·84	·83	·70	·78	·779
10	·68	·69	·76	·82	·85	·85	·99	·90	·80	·72	·60	·71	·781
11	·53	·55	·60	·61	·58	·68	·74	·70	·59	·45	·38	·47	·573
Mittag	·29	·32	·37	·21	·20	·21	·31	·27	·21	·11	·06	·17	·227
1	—·06	—·03	— 09	—·21	—·35	—·30	—·23	—·26	—·24	—·33	—·27	—·20	—·214
2	—.45	—·36	—·49	—·59	—·65	—·60	—·63	—·68	—·70	—·73	—·63	—·56	—·589
3	—·71	—·71	—·77	—·78	—·80	—·73	—·83	—·93	—·91	—·98	—·82	—·82	—·816
4	—·99	—·86	— 84	—·76	—·77	—·71	—·84	—·94	—·87	—·92	—·87	—·95	—·860
5	—.96	—·87	—·76	—·60	—·60	—·52	—·71	—·79	—·68	—·70	—·71	—·85	—·729
6	—·75	—·62	— 58	—·37	— 37	—·34	—·48	—·53	—·38	—·22	—·44	—·60	—·473
7	—·26	—·32	—·24	— 09	—·09	— 05	—·20	—·18	—·07	—·11	—·09	—·23	—·161
8	·04	—·01	·05	·17	·17	·17	—·08	·07	·20	·20	·21	·06	·104
9	·36	·47	·37	·35	·33	·33	·18	·25	·43	·47	·48	·37	·366
10	·54	·50	·49	·42	·38	·40	·28	·37	·45	·54	·57	·54	·457
11	·52	·51	·49	·40	·39	·38	·30	·42	·40	·43	·45	·53	·435
Mittel	·44	·41	·43	·39	·40	·38	·40	·43	·44	·44	·40	·44	·411
Luftdruck	696·7	697·6	698·2	699·7	700·5	702·0	702·5	701·5	699·9	698·6	697·6	697·6	699·36

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. II. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

IV. SITZUNG VOM 3. FEBRUAR 1898.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. 18, Heft X (December 1897).

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, gibt Nachricht von dem am 28. Jänner d. J. erfolgten Ableben des inländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, Herrn k. u. k. Feldmarschall-Lieutenant a. D. Moriz Freiherrn von Ebner-Eschenbach in Wien.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der prov. Secretär theilt die seit der letzten Classensitzung vom Commando S. M. Schiff »Pola« eingelaufenen Telegramme ddo. Suakim, 20. Jänner, und Djeddah, 28. Jänner, mit, wonach sich an Bord Alles wohl befindet.

Ferner ist ein zweites Telegramm aus Suakim ddo. 20. Jänner eingelangt, worin das Mitglied des wissenschaftlichen Stabes der Expedition S. M. Schiff »Pola«, Herr Regierungsrath J. Luksch, berichtet, dass an diesem Tage das an der dortigen Küste als Beobachtungsstation etablirte Pola-Lager von Beduinen angegriffen, der Angriff aber ohne jeden Verlust abgeschlagen wurde.

Das Organisations-Comité des III. internationalen Congresses für angewandte Chemie ladet die kaiserliche Akademie der Wissenschaften zur Theilnahme an diesem im Monate Juli d. J. in Wien tagenden Congresse durch Entsendung einiger Delegirter ein.

Der prov. Secretär legt folgende eingesendete Arbeiten vor:

1. »Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralcurven«, von Herrn Prof. Johann Sobotka an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

2. »Die Gurke«, von Dr. J. Zawodny in Rotholz-Jenbach (Tirol).

Herr Dr. W. Pascheles, Assistent am Rudolfshospital, übersendet eine Mittheilung: »Versuche über Quellung«, welche an ältere Experimente anknüpft (vergl. Akad. Anzeiger, 1897, Nr. II—III und Archiv für die gesammte Physiologie, Bd. 97, 1897).

Der Leiter der vorjährigen ärztlichen Mission zum Studium der Bubonenpest nach Bombay, Herr Dr. Hermann Franz Müller in Wien, überreicht folgende Theile des Berichtes über die wissenschaftlichen Ergebnisse dieser Mission:

I. Historischer Theil: »Zur Geschichte der österreichischen Pestcommission«.

II. Wissenschaftlicher Theil: *A.* »Klinische Untersuchungen«.

Herr Dr. R. A. Weithofer, Ober-Ingenieur zu Parschnitz (Böhmen) überreicht eine Abhandlung: »Zur Frage der gegenseitigen Altersverhältnisse der mittel- und nordböhmischen Carbon- und Permablagerungen«.

V. SITZUNG VOM 10. FEBRUAR 1898.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. II. a., Heft VII (Juli 1897) und Abth. III, Heft VI—VII (Juni-Juli 1897).

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, gibt Nachricht von dem am 6. Februar d. J. erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, Herrn Geheimrathes Professor Dr. Rudolf Leuckart in Leipzig.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Herr Heinrich Friese in Innsbruck dankt für die ihm bewilligte Subvention zur Herausgabe des 4. Bandes seines Werkes über die »Bienen Europa's«.

Das c. M. Herr Prof. O. Stolz in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: »Zur Erklärung der absolut convergenten uneigentlichen Integrale«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt die folgenden zwei in seinem Institute ausgeführten Arbeiten vor:

1. »Messungen an Flammen- und Tropfelektroden«, von Dr. E. v. Schweidler.
2. »Über die galvanische Polarisation fester und geschmolzener Salze«, von O. Singer.

Ferner legt derselbe die XI. Mittheilung der von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Dr. E. Haschek ausgeführten Untersuchung: »Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente« vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Hann überreicht eine Abhandlung: »Über die Temperatur von Graz Stadt und Graz Land«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Dr. Anton Schobloch, welche eine definitive Bahnbestimmung des von Brorsen am 20. Juli 1847 in Altona entdeckten Kometen 1847 V enthält.

Der Vorsitzende theilt den Inhalt eines von dem Mitgliede des wissenschaftlichen Stabes der Expedition S. M. Schiff »Pola«, Herrn Regierungsrath Prof. J. Luksch, eingelangten Schreibens, ddo. Suakim, 23. Jänner 1898, mit.

Über die Temperatur von Graz Stadt und Graz Land

von

J. Hann,

w. M. k. Akad.

In meiner Abhandlung über die Temperaturverhältnisse der österreichischen Alpenländer, III. (diese Sitzungsberichte, Juni 1885, S. 141) habe ich die Temperaturmittel von Graz für die Periode 1851—1880 mitgetheilt und hervorgehoben, dass die Beobachtungsreihe des Herrn Rospini durch ihre Homogenität von besonderem Werthe ist, aber ihre Ergebnisse bezüglich der Temperatur als »Stadttemperaturen« bezeichnet werden müssen.

Mit October 1884 begann Herr Prof. Karl Prohaska seine meteorologischen Aufzeichnungen in Graz, die als Parallelbeobachtungen zur Constatirung der localen Einflüsse auf die Temperatur in verschiedenen Theilen der Stadt Graz von sehr grossem Interesse geworden sind. Die Temperaturaufzeichnungen erlitten allerdings während der Sommerferien stets eine Unterbrechung (nicht so die Regenmessungen), sind aber trotzdem zur Ableitung der constanten Temperaturdifferenzen gegen die Localität, wo Rospini seit langem beobachtet hat, vollkommen brauchbar, da diese Temperaturdifferenzen nur eine geringe jährliche Periode haben und namentlich im Sommer fast constant bleiben.

Mit Juli 1890 endlich beginnen die meteorologischen Aufzeichnungen am physikalischen Institute der k. k. Universität, die nun regelmässig fortgeführt werden.

Es bestanden derart wenigstens während einiger Jahre gleichzeitig drei Temperaturstationen in Graz, welche den Einfluss der Örtlichkeit auf die Ergebnisse der Temperaturbeobachtungen in interessanter und lehrreicher Weise zu bestimmen gestatten.

Die mir zur Benützung zugänglichen Beobachtungsergebnisse von Rospini reichen bis 1892 inclusive, die Beobachtungsreihen von Prohaska von October 1884 bis Jänner 1896, die Reihe am physikalischen Institut von Juli 1890 bis December 1897.

Ich will dieselben nun benützen, um durch Differenzen der correspondirenden Monatsmittel alle Reihen auf die Periode 1851—1880 zu reduciren und derart unmittelbar vergleichbar zu machen.

I. Temperaturmittel der Beobachtungsreihe Rospini und Prohaska. I. Reihe (red. Stadttemperaturen).

Rospini's Station befindet sich in dem Hofraum des Hauses Nr. 13 in der Bürgergasse, im östlichen Theile der inneren alten Stadt (nahe dem Dom). Die Thermometer sind an einem Messingkreuz ohne Beschirmung vor einem Fenster des ersten Stockwerkes angebracht, das nach NNW sieht. Das dreistöckige Haus hat auch einen Flügel auf der WSW-Seite, ganz nahe, so dass die Sonne die Thermometer nie treffen kann. Der Hofraum ist nicht geräumig, gegenüber dem Fenster ein niedriges Dach, das wohl auch stets beschattet bleibt, ringsum sehr hohe Häuser. Bei der sehr constanten Windstille in Graz ist die Temperatur in diesem Hofe die einer engen, wenig gelüfteten Gasse.

Von October 1884 bis April 1886 hat Herr Prof. Prohaska gleichfalls in der Stadt, Salzamtsgasse (Stiftsgasse) beobachtet, welche in die Bürgergasse einmündet. Das Thermometer war gleichfalls ohne Beschirmung, allgemeine Situation ähnlich, jedoch gegen N freier (Gärten).

Die Temperaturmittel für die Station Rospini (Bürgergasse 13) (Beobachtungstermine 7^h, 2^h, 10^h, reducirt auf wahre Mittel) sind:

Temperaturmittel für Graz Stadt (Rospini).

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	October	Nov.	Dec.	Jahr
Lustrenmittel													
1851—1855	—1·7	—0·2	3·0	8·2	13·5	17·7	19·6	18·6	14·3	10·7	3·7	—2·0	8·8
1856—1860	—2·4	—1·3	2·9	10·1	14·6	18·9	19·9	19·6	15·3	11·1	1·6	—1·5	9·1
1861—1865	—3·0	0·2	5·2	9·8	15·1	18·3	19·9	19·6	16·0	10·6	4·6	—1·2	9·6
1866—1870	—1·7	2·2	4·2	10·7	16·2	18·7	20·0	18·4	15·8	8·9	3·3	—0·4	9·7
1871—1875	—1·4	—0·8	4·5	10·3	13·4	17·7	20·5	19·0	15·3	10·2	3·3	—1·7	9·2
1876—1880	—2·5	0·4	4·2	10·2	12·8	18·2	19·0	19·2	15·0	9·8	2·8	—1·6	9·0
1881—1885	—2·4	1·0	4·9	9·0	14·2	17·2	20·1	18·2	15·1	9·5	3·4	—0·2	9·2
1886—1890	—2·2	—1·5	3·2	9·4	15·0	17·9	19·3	19·2	15·2	9·2	3·5	—1·5	8·9
1891—1895	—4·2	—0·8	3·9	9·5	14·6	17·8	20·1	18·9	15·4	10·5	3·6	—1·0	9·0
Mittel der Decennien													
1851—1860	—2·0	—0·7	3·0	9·1	14·0	18·3	19·7	19·1	14·8	10·9	2·7	—1·7	9·0
1861—1870	—2·3	1·2	4·7	10·2	15·7	18·5	19·9	19·0	15·9	9·7	4·0	—0·8	9·6
1871—1880	—2·0	—0·2	4·3	10·3	13·1	18·0	19·7	19·1	15·1	10·0	3·0	—1·6	9·1
1881—1890	—2·3	—0·2	4·1	9·2	14·6	17·5	19·7	18·7	15·1	9·3	3·4	—0·8	9·0
30- und 40jährige Mittel													
1851—1880	—2·1	0·1	4·0	9·9	14·3	18·2	19·8	19·1	15·3	10·2	3·2	—1·4	9·23
1851—1890	—2·2	0·0	4·0	9·7	14·4	18·1	19·8	19·0	15·2	10·0	3·3	—1·3	9·18

Die 30- und 40jährigen Mittel sind aus den Lustre-Mitteln gerechnet, so dass die Zehntelgrade richtig sind.

Die Beobachtungen von Prof. Prohaska in der inneren Stadt 1884—1886 stimmen fast vollkommen mit jenen von Rospini, nur im Herbst sind sie um 0°3 im Mittel niedriger. Die Übereinstimmung ist bemerkenswerth, weil die Art der Aufstellung der Thermometer von jener von Rospini doch recht verschieden war.

Temperatur Graz, Stiftgasse, reducirt auf 1851—1880.

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
−2·2	0·1	3·9	9·8	14·3	18·2	19·8	19·0	15·0	9·8	2·9	−1·6	9·09

II. Temperatur von Graz obere Stadt und Graz Land.

Zur Ableitung derselben dienen die verschiedenen späteren Beobachtungsreihen von Prohaska und diejenigen der Station I. Ordnung, welche seit Juli 1890 am physikalischen Institute der Universität besteht. Ich will mich zunächst mit der Temperatur an dieser Localität befassen.

Das physikalische Institut steht in der oberen Stadt (Bezirk Geidorf), die Seehöhe ist aber nicht wesentlich grösser als jene der Station Rospini's. Die Umgebung des Institutes, das früher frei stand, ist jetzt allseitig ziemlich verbaut, wenn auch für die Umgebung der Thermometerhütte noch ziemlich viel freier Luftraum übrig geblieben ist, der nun wohl constant erhalten bleiben dürfte. Die Thermometerhütte befindet sich auf der Nordseite eines Flügels des Gebäudes, sie ist sehr geräumig und luftig, den NW- und N-Winden frei ausgesetzt, gegen Besonnung allseitig (im Osten durch den nahe befindlichen Aufbau für die kleine Sternwarte) geschützt. Da sie aber ziemlich massiv aus Holz construirt ist, dürften wohl die Extreme doch etwas abgestumpft werden.[1] Dazu kommt die

[1] Die Temperaturmaxima dürften zu niedrig sein, sie erheben sich wenig über die von Rospini, die Minima sind weniger beeinflusst.

grosse Luftruhe in Graz, welche die Localeinflüsse sehr begünstigt. Vor der Thermometerhütte (die Thermometer und der Thermograph Richard befinden sich 3 *m* über dem natürlichen Boden) ist eine relativ grosse Wiesenfläche, die nach starkem Regen- und Thauwetter zeitweilig sehr feucht ist und theilweise unter Wasser steht.

Da ich von den Beobachtungsergebnissen Rospini's nur jene bis Ende 1892 benützen konnte, habe ich die Temperatur am physikalischen Institute auch durch Differenzen gegen Bruck und Leoben auf die Normalperiode zu reduciren gesucht. Bruck liegt 40 *km* nach NNW in einem ziemlich grossen Bergkessel, Leoben eben so weit (Luftlinie) nach NW hinter dem Höhenrücken der Kleinalpe. Herr kaiserl. Rath Dr. Schmidt beobachtet zu Bruck mit grosser Sorgfalt schon seit 22 Jahren.

Die Temperaturdifferenzen Universität—Rospini sind fast völlig constant, so dass die 2$^1/_2$ Jahre schon sehr verlässliche Mittel geben.

Temperaturdifferenzen.[1]

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
Universität—Rospini. 2$^1/_2$ Jahre												
−1°2	−1°2	−1°1	−1°1	−1°3	−1°5	−1°6	−1°7	−1°7	−1°6	−1°3	−1°2	−1°36
Universität—Bruck. 7$^1/_2$ Jahre												
0·5	−0·3	0·3	0·6	1·0	0·6	0·5	0·4	0·4	0·2	0·3	0·4	0·45
Universität—Leoben. 4$^1/_2$ Jahre												
0·5	0·4	0·4	0·7	0·9	0·8	0·7	0·7	0·6	0·5	0·8	1·0	0·67

Die Temperatur von Bruck und Leoben, reducirt auf die Periode 1851—1880 musste nun auch neu bestimmt werden.

[1] Dieselben sind hier auf Zehntelgrade abgerundet, zur Reduction wurde die zweite Decimale mitgenommen, um die Zehntelgrade rechnungsmässig correct zu bekommen.

weil ich bei Bearbeitung der Temperaturverhältnisse der Alpenländer erst eine kürzere Reihe von Temperaturbeobachtungen für Bruck und Leoben benützen konnte. Ich theile hier die neu abgeleiteten Temperaturdifferenzen gegen Graz Rospini mit.

Mittlere Temperaturdifferenzen.[1]

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
Leoben—Graz Rospini, 11 Jahre (1882—1892)												
-1·5	-1·1	-1·2	-1·7	-1·9	-2·2	-2·3	-2·2	-2·2	-2·1	-1·8	-2·0	-1·87
Bruck a. M.—Graz Rospini, 17½ Jahre (1875—1892)												
-1·7	-0·9	-1·2	-1·5	-1·6	-1·7	-1·9	-1·7	-1·7	-1·5	-1·4	-1·9	-1·56

Bemerkenswerth ist hier das Minimum, das die Differenzen im Februar erreichen, mit anderen Worten, die relativ hohe Temperatur der beiden Gebirgsorte im Februar gegen Graz, die auch noch in den Differenzen Universität—Bruck hervortritt, ebenso bei Universität—Leoben (auch gegen Leoben kehrt sich das Zeichen der Differenz zuweilen um). Man hätte eher das Umgekehrte erwartet, dass durch die grössere Seehöhe und länger dauernde Schneedecke die Differenzen im Vorfrühling zunehmen. Ich weiss vorläufig keine Erklärung für die relativ hohe Temperatur von Bruck und Leoben im Februar und März.

Die Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen zwischen Bruck und Graz ist folgende:

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
0·73	0·57	0·32	0·23	0·36	0·31	0·36	0·29	0·32	0·26	0·49	0·55	0·13

Der wahrscheinliche Fehler der Differenzen berechnet sich hieraus durch Multiplication mit dem Factor 0·20, er beträgt also selbst im Jänner nur 0·15, sonst zumeist bloss 0·06.

[1] Siehe die Note auf S. 171.

Bringt man die obigen Differenzen an das 30jährige Mittel von Graz Rospini an, so erhält man folgende 30jährige Mittel für Bruck a. M. und Leoben.

Temperaturmittel 1851—1880 (corr.).

	Jänn.	Febr.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
Bruck	-3·8	-0·8	2·8	8·4	12·7	16·5	18·0	17·4	13·6	8·7	1·8	-3·4	7·7
Leoben	-3·6	-1·0	2·8	8·2	12·3	16·1	17·5	16·9	13·0	8·1	1·4	-3·4	7·4

Mittelst dieser 30jährigen Mittel lassen sich nun die entsprechenden Temperaturmittel (1851—1880) für Graz Universität ableiten. Man erhält so schliesslich:

Mittlere Temperatur von Graz, Universität 1851—1880. *a* reducirt nach Rospini, $2^1/_2$ Jahre, *b* reducirt nach Bruck a. M., $7^1/_2$ Jahre, *c* reducirt nach Leoben, $4^1/_2$ Jahre.

	Jänn.	Febr.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
a	-3·3	-1·0	2·9	8·8	13·0	16·7	18·2	17·4	13·6	8·7	1·9	-2·6	7·9
b	-3·3	-1·2	3·1	9·0	13·6	17·1	18·4	17·8	13·8	9·0	2·3	-2·3	8·1
c	-3·0	-0·6	3·2	8·9	13·2	16·9	18·2	17·5	13·6	8·6	2·2	-2·5	8·0
Mittel, Reihe *b* mit Gewicht 2													
	-3·2	-1·0	3·1	8·9	13·3	16·9	18·3	17·6	13·7	8·8	2·2	-2·4	8·0

Die bisher für Graz angenommene Temperatur ist demnach um 1°2 zu hoch; der Unterschied ist am kleinsten im Frühjahr, am grössten im Herbst. Das ist bezeichnend. Im Frühjahre steigt die Stadttemperatur langsamer als draussen im Freien, weil die Häuser noch kalt sind, im Herbst sinkt sie langsamer, weil die Häuser noch warm sind. Da nun die Differenz Stadt—Land positiv ist, so nähern sich im Frühjahr die Temperaturen Stadt und Land am meisten, sie gehen dagegen im Herbst am weitesten auseinander. Es ist dies allerdings nicht überall so. weil die Localeinflüsse von zu

vielen Umständen abhängen. Das Verhältniss zu Graz darf aber als ein normales betrachtet werden.

Am deutlichsten tritt die Abstumpfung der Extreme in der Stadt bei den Temperaturminimis und Maximis hervor.

Ich habe die Differenzen der correspondirenden Jahresextreme gebildet und folgende Resultate erhalten:

Differenzen der mittleren Jahresextreme der Temperatur.

Rospini—Leoben, 15 Jahre, Minima 3°9, Maxima —2·7.

Die Maxima sind bei Rospini stets niedriger, die Minima höher.

Rospini—Prohaska (obere Stadt), 7 Jahre, Minima 5°2, Maxima —2·7,

also das gleiche Verhältniss.

Universität—Bruck a. M., 8 Jahre, Minima 1°9, Maxima —1·7.

Die Extreme an der Universität erscheinen somit etwas abgestumpft.

Die mittleren Jahresextreme, Mittel von 20 Jahren 1873 bis 1892, Bruck a. M. und Universität Graz 1876—1895 sind hiernach:

	Min.	Max.	Jahresschwankung
Graz (Rospini)	—14·3	29·0	43·3
Graz (Prohaska).....	—19·5	31·7	51·2
Graz (Universität) ...	—18·3	29·8	48·1
Leoben	—18·2	31·7	49·9
Bruck a. M..........	—20·2	31·5	51·7

Man sieht, wie die Stadt die Extreme abstumpft. Die relativ hohen Maxima der Gebirgsthäler (Leoben und Bruck a. M.) sind gleichfalls bemerkenswerth.

Die absoluten Extreme waren: Graz Rospini —17°8 und 30°5, Graz Prohaska —23°9 und 32°9 (unsicher, weil reducirt), Bruck a. M. —26°3 und 34°1.

Beobachtungsreihen von Prohaska am Rande der oberen Stadt. Diese Temperaturaufzeichnungen bieten besonderes Interesse, weil sie gestatten, die Frage zu beantworten.

wie weit die Ergebnisse von Temperaturbeobachtungen an verschieden gelegenen, einander nahen Punkten übereinstimmen und deshalb auch für die weitere Umgebung als giltig anerkannt werden dürfen, und nicht etwa bloss nur für den Beobachtungsort selbst gelten. Es ist hier nicht von Stadttemperaturen die Rede, deren angenäherte Constanz schon vorhin besprochen worden ist.[1]

Die Beobachtungsorte von Prof. Prohaska liegen sämmtlich am Rande der oberen Stadt und nähern sich Freilandstationen; namentlich der Beobachtungsort Heinrichstrasse 48 in einem grossen Garten gibt sicherlich die Temperatur von Graz Land.

Prof. Prohaska beobachtete um 7^h, 2^h, 9^h, das Thermometer war ohne Beschirmung, aber als aufmerksamer, erfahrener Beobachter wusste er sich vor den Einflüssen der Strahlung der Umgebung zu schützen. Er controlirte auch die am Thermometer der k. k. Centralanstalt abgelesenen Temperaturen durch Ablesungen an einem verglichenen Schleuderthermometer. So dürfen die Ergebnisse seiner Temperaturbeobachtungen mit besonderem Vertrauen aufgenommen werden und nähern sich wohl wahren Lufttemperaturen mehr als die Ablesungen in einer Thermometerhütte.

Die Beobachtungsorte waren: I. Körblergasse gegenüber der Einmündung der Kreuzgasse (N-Rand der Stadt), freistehendes Haus mit grossem Garten rückwärts, am SW-Hange des Rosenberges, auf der untersten Stufe desselben, gegen N- und NE-Winde geschützt. Repräsentirt die warmen Lagen in der nächsten Umgebung der Stadt. Am Rosenberge wächst vielfach angepflanzt die edle Kastanie und reift in guten Jahren auch ihre Früchte.

---

[1] Man sehe auch meine Abhandlung über die Temperatur von Wien und Umgebung. Temperaturverhältnisse der österreichischen Alpenländer. II. Diese Sitzungsberichte, März 1885, S. 407. Alte Sternwarte, Akademie der Wissenschaften, 32 *m* über dem Boden, Niveau der Dächer, 9°71; k. k. Centralanstalt für Meteorologie, Favoritenstrasse 30, 18 *m* über dem Boden, 9°69; Hochschule für Bodencultur, Skodagasse 17, 1·7 *m* über dem Boden, in einem von hohen Gebäuden eingeschlossenen Garten, 9°67 mittlere Jahrestemperatur (1851—1880); auch die Monatsmittel zeigen nur Differenzen von höchstens 0°2. Die gegenseitige Entfernung dieser Localitäten beträgt 2½ bis 3 *km*.

II. Heinrichstrasse 48. NE-Rand der Stadt. Das Haus steht auf einem leichten Höhenrücken einzeln in einem grossen Garten, der nach NE hin in Feldculturen übergeht; auch auf den anderen Seiten keine Häuser. Diese Station repräsentirt eine volle Freilandstation bei Graz.

III. Merangasse, südöstliches Ende der Stadt; das Haus stand nahe dem Leonhardbache, tiefer als die beiden anderen, doch mehr dem Einflusse der Stadt ausgesetzt als die Station II.

Die Beobachtungsperioden waren: I. Mai 1886 bis Ende 1890, II. 1891 bis Juni 1893 und III. November 1893 bis inclusive Jänner 1896. Diese Temperaturmittel wurden durch Differenzen gegen die Station Rospini und gegen die Station Physikalisches Institut auf die Periode 1851—1880 reducirt.

Die folgende Tabelle gestattet eine Übersicht aller Ergebnisse der Reduction der Temperaturmittel:

Mittlere Temperatur an verschiedenen Punkten in Graz, reducirt auf die Periode 1851—1880.

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
I. Innere Stadt *A.* Bürgergasse (Rospini), 356 *m*												
-2·1	0·1	4·0	9·9	14·3	18·2	19·8	19·1	15·3	10·2	3·2	-1·4	9·23
B. Stiftsgasse (Prohaska), 360 *m*												
-2·2	0·1	3·9	9·8	14·3	18·2	19·8	19·0	15·0	9·8	2·9	-1·6	9·09
II. Obere Garten- und Villenstadt Physikalisches Institut der Universität, 369 *m*												
-3·2	-1·0	3·1	8·9	13·3	16·9	18·3	17·6	13·7	8·8	2·2	-2·4	8·00
Körblergasse (Prohaska), 370 *m*, am SW-Hang des Rosenberges												
-3·2	-1·1	2·9	8·9	13·2	16·9	18·4	17·8	14·0	8·7	1·9	-2·6	7·98
Heinrichstrasse (Prohaska), NE-Rand, ganz frei, 380 *m*												
-3·8	-1·3	2·7	8·8	13·0	16·7	18·1	17·5	13·6	8·3	1·5	-3·1	7·67
Merangasse (Prohaska), E-Rand, 365 *m*												
-3·6	-1·2	2·9	8·9	13·1	16·6	18·2	17·4	13·5	8·5	1·7	-2·9	7·76

Die drei letzten Reihen kann man ohne Bedenken zusammenfassen als Freilandtemperatur von Graz in einer mittleren Lage. Man erhält dann folgenden Vergleich:

Mittlere Temperatur von Graz (1851—1880).

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
Graz Stadt												
-2·1	0·1	4·0	9·9	14·3	18·2	19·8	19·1	15·3	10·2	3·2	-1·4	9·2
Graz Land												
-3·5	-1·2	2·8	8·9	13·1	16·8	18·2	17·5	13·7	8·5	1·7	-2·7	7·8
Stadt—Land												
1·4	1·3	1·2	1·0	1·2	1·4	1·6	1·6	1·6	1·7	1·5	1·3	1·4

Die Stadttemperatur ist fast um $1^1/_2{}^\circ$ höher als die Landtemperatur von Graz, der Unterschied ist im April am kleinsten, im October am grössten; die Ursache davon haben wir schon oben erörtert. Fasst man die Monatstemperaturen nach Jahreszeiten zusammen, so erhält man folgende Übersicht (wobei Stadt, Prohaska auch mitgenommen wurde).

Temperatur von Graz (1851—1880).

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Innere Stadt (Stadttemperatur)	—1·1	9·4	19·0	9·4	9·1
Universität (obere Stadt)	—2·2	8·4	17·6	8·2	8·0
Körblergasse (Land, warme Lage).	—2·3	8·3	17·7	8·2	8·0
Heinrichstrasse (Freiland)	—2·7	8·2	17·4	7·8	7·7
Merangase (E-Rand)	—2·6	8·3	17·4	7·9	7·8

Die Temperaturen an sämmtlichen Punkten der oberen Stadt stimmen demnach vollkommen befriedigend überein.

Ich will nun noch die mittleren Monats- und Jahresextreme der Temperatur für Graz Stadt und Graz Land zusammenstellen. Erstere aus 20 Jahrgängen abgeleitet, entnehme ich

meiner Abhandlung: »Über die monatlichen und jährlichen Temperaturschwankungen in Österreich-Ungarn« (diese Sitzungsberichte, December 1881), letztere sind erst berechnet worden aus den Beobachtungen von Prohaska 1887—1895 und an der Universität 1896—1897. Die in den Monaten Juli bis September bei Prohaska fehlenden Beobachtungen habe ich für 1887—1889 den Beobachtungen Rospini's entnommen, reducirt mittelst der für die anderen Monate gefundenen Differenzen; von 1890—1897 sind die Extreme Juli—September den Aufzeichnungen am physikalischen Institute entnommen.

Mittlere Monats- und Jahresextreme für Graz (aus den Terminbeobachtungen).

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
I. Graz Stadt (Rospini), 20 Jahre												
-12°0	-9°5	-6°0	0°8	5°3	11°1	12°9	10°9	6°1	0°5	-5°6	-11°3	-14°4
7·4	11·0	15·2	22·4	26·6	29·5	30·7	29·7	26·1	20·7	13·1	8·3	31·7
Mittlere Schwankung												
19·4	20·5	21·2	21·6	21·3	18·4	17·8	18·8	20·0	20 2	18·7	19·6	46·1
II. Graz Land (Prohaska), 11 Jahre												
-17·6	-15·4	-9·0	-1·2	4·3	9·3	11 4	10·2	5·5	-3·6	-11·0	-14·7	-19·6
7·2	10·1	17·7	21·2	25·0	27·9	30·3	28·8	26·1	21·0	14·8	6·2	30·9
Mittlere Schwankung												
24·8	25·5	26·7	22·4	20·7	18·6	18·9	18·6	20·6	24·6	25·8	20·9	50·5

Die absoluten Extreme der ersten, 20jährigen Reihe (Rospini) sind —19°6 (Jänner 1864) und 35°5 (Juli 1859), die der zweiten, 11jährigen —23°9 (Jänner 1892) und (fraglich) 32°9 (August 1892).

Die mittleren Extreme für Graz Stadt und Graz Land sind nicht ganz vergleichbar, die ersteren (Stadt) beziehen sich auf

die Jahre 1856—1875, die letzteren (Land) auf 1887—1897. Die Wärmeextreme des Sommers in den Jahrgängen 1856 bis 1875 müssen viel excessiver gewesen sein, als die der letzten 20 Jahre; wir finden ja: Rospini 1856—1875 —14°4 und 31°7, dagegen 1873—1892 —14°3 und 29°0, die Maxima sind also viel niedriger, die Minima die gleichen. Hiernach dürfte das mittlere Jahresmaximum Graz Land 1856—1875 auf 33°6 zu schätzen sein; die mittlere (absolute) Jahresschwankung auf 53°2 gegen 46°1 Rospini.

So viel steht fest, dass die mittlere Monatsschwankung der Temperatur im Winterhalbjahr in der Stadt bedeutend geringer ist, als auf dem Lande. Die Mittel für October—December sind: Rospini 19°5, Prohaska 23°8; für Jänner—März: Rospini 20°4, Prohaska 25°7.

In meiner Abhandlung über die Veränderlichkeit der Temperatur in Österreich habe ich schon nachgewiesen, dass auch die wahre Veränderlichkeit der Temperatur (die mittleren Änderungen der Luftwärme von einem Tage zum nächsten) in der Stadt erheblich kleiner ist, als am Rande der Stadt. Die correspondirenden Grössen der mittleren Veränderlichkeit der Temperatur sind:

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
Graz Stadt												
1·91	1·55	1·76	1·54	1·62	1·46	1·25	1·31	1·21	1·39	1·45	1·89	1·52
Graz Land												
2·14	1·72	2·12	1·74	2·02	1·75	1·64	1·40	1·45	1·61	1·63	2·00	1·77

Die Temperaturveränderlichkeit von Graz Stadt ist gleich der von Meran oder Gries (Bozen), aber auch die wahre Veränderlichkeit 1·77 ist noch erheblich kleiner als die von Wien 1·96, im Winter, wie im Sommer; Winter: Wien 2·16, Graz 1·95; Sommer: Wien 1·92, Graz 1·60; im Frühling aber ist die Veränderlichkeit nahezu die gleiche in Graz und Wien.

Schliesslich möchte ich dieser Studie über die Temperatur von Graz noch eine Mittheilung über die durchschnittliche Niederschlagsmenge von Graz anhängen, weil diese Grösse bisher unbestimmt war, da die älteren Regenmessungen in der Stadt die mittlere Regenmenge zu klein ergeben haben. Mit October 1884 begann Herr Prohaska seine Regenmessungen, die auch während der Ferien durch verlässliche Substituten fortgesetzt worden sind. Von 1891 an benütze ich die Regenmessungen am physikalischen Institute. Es liegen demnach 13jährige Regenmessungen für Graz vor, welche folgende mittlere Resultate ergeben:

Mittlere Niederschlagsmenge für Graz (1885—1897).

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
33	23	44	75	100	121	129	127	90	88	54	36	920

Die mittlere grösste Tagesmenge des Niederschlages ist 51 *mm*, die absolut grösste war die vom 22. Juli 1895 mit 85 *mm*.

Von Bruck a. M. liegen 22jährige Regenmessungen vor. Wenn man die Grazer Jahressummen mit jenen von Bruck a. M. vergleicht, so erhält man folgende Verhältnisszahlen.

Jährliche Regensumme von Graz im Verhältniss zu jener von Bruck.

1885	1886	1887	1888	1889	1890		Mittel
1·22	1·38	1·25	1·10	1·07	1·12		1·19
1891	1892	1893	1894	1895	1896	1897	
1·02	1·25	1·20	1·13	1·08	1·26	1·19	1·16

In den Jahren 1886—1889 war in Bruck die Regenmenge kleiner als in dem benachbarten Leoben, während sie sonst in den übrigen 18 Jahren in Leoben stets kleiner war als in Bruck. Im Übrigen stimmen die Quotienten ziemlich gut, die Differenz derselben beträgt im Maximum 36°/$_0$, während die Regensummen selbst zwischen 77 und 123°/$_0$ des Mittels

schwanken, also um einen erheblich grösseren Betrag. Übrigens ist Bruck a. M. keine gute Vergleichsstation für Graz, weil das Regenregime der beiden Orte recht verschieden und die Entfernung schon zu gross ist; die intensiven Regen bei SE-Wind in Graz fehlen in Bruck. Aus diesen Gründen müssen die Verhältnisszahlen grössere Schwankungen zeigen.

Das 22jährige Mittel der jährlichen Regenmenge für Bruck a. M. ist 794 *mm* (1876—1897); reducirt man das 13jährige Mittel für Graz mit Hilfe der obigen Quotienten gleichfalls auf ein 22jähriges Mittel, so erhält man $794 \times 1 \cdot 175 = 933$ *mm* als genäherten 22jährigen Durchschnitt der jährlichen Niederschlagsmenge zu Graz (1876—1897).

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(XI. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von Rb, Cs, Va)

von

Prof. **Franz Exner**, w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek.**

(Mit 2 Tafeln.)

XXXIV. Rubidium.

Das ultraviolette Spectrum des Rubidiums ist bisher nur im Bogen von Kayser und Runge[1] untersucht worden. Wir haben dasselbe aus Rubidiumchlorid (von Merck bezogen) aufgenommen, das auf Eisenelektroden aufgeschmolzen war. Bemerkenswerth ist, dass das Funkenspectrum mehr Linien enthält als das Bogenspectrum von Kayser und Runge. Die Linien sind fast alle sehr verwaschen und zeigen gegen die Linien des Bogenspectrums starke Verschiebungen nach Roth. Wenn man aus diesen Verschiebungen nach den Messungen Humphrey's den Druck in der Funkenbahn berechnet, so kommt man in Übereinstimmung mit den Angaben unserer letzten Mittheilung auf Drucke zwischen 20 und 30 Atmosphären. So grosse Drucke in der Funkenbahn erscheinen nach den schönen Versuchen Arthur Schuster's[2] über die Geschwindigkeit der leuchtenden Partikel in derselben keineswegs unwahrscheinlich. Wie stark im Rubidium die Verschiebung nach Roth ist, zeigt am deutlichsten die Linie 4201·99. Sie ist scharf umgekehrt, aber die Umkehrung steht

---

[1] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1890).

[2] Arthur Schuster, Nature, Vol. LVII (1897).

stark excentrisch nach Violett. Da diese Umkehrung durch den ausserhalb der Funkenbahn befindlichen kälteren Dampf hervorgebracht wird, der sich unter gewöhnlichem Druck befindet, so entspricht die Umkehrung der wirklichen Wellenlänge bei normalem Druck. Liest man die Stellung der Linie aber ohne Rücksicht auf die Umkehrung nach ihrer Mitte ab, so kommt man auf die Zahl 4202·25, welche somit der Wellenlänge unter dem Funkendruck entspricht. Die Verschiebung beträgt in diesem Falle also 0·26 AE.

Noch eine auffallende Erscheinung wollen wir hier erwähnen: Wenn das Spectrum einer auf Eisen aufgeschmolzenen Substanz erzeugt wird, so treten natürlich auch die Eisenlinien stark auf; aber während die überwiegende Mehrzahl derselben die gewohnte Schärfe zeigt, erscheinen einzelne davon vollkommen verwaschen. So treten im vorliegenden Falle z. B. die Linien 4154·07 und 4154·98 ganz verwaschen auf, während die zwischen ihnen liegende Linie 4154·67 dieselbe Schärfe zeigt, wie sie den drei Linien im gewöhnlichen Eisenspectrum zukommt. Diese Erscheinung, für die wir keinen Grund anzugeben vermögen, tritt namentlich gegen den sichtbaren Theil des Spectrums zu häufiger auf.

Verunreinigungen konnten wir im Rubidium nicht nachweisen; die Zahl der gemessenen Linien betrug 18.

λ	i	λ	i	λ	i
3587·7	1+ br.	3941·61	3+	4244·53	6
90·9	1+ br.	4044·2	2+ br.	73·15	2+
3600·8	1+ br.	4104·30	3+	88·2	1+ br.
63·5	1+ br.	93·15	1+	94·2	1+ br.
64·8	1+ br.	4201·99	20 u.	4343·9	1+ br.
3861·5	1+ br.	15·91	10	4571·9	3+ br.

XXXV. Cäsium.

Das ultraviolette Funkenspectrum des Cäsiums wurde bisher nicht gemessen, das Bogenspectrum von Kayser und

Runge.[1] Auch das Cäsium haben wir aus auf Eisen aufgeschmolzenem Cäsiumchlorid (bezogen von Merck) aufgenommen. Auch hier konnte wieder bei den wenigen Linien, welche dem Bogen- und Funkenspectrum gemeinsam sind, eine Verschiebung nach Roth constatirt werden, aus deren quantitativer Bestimmung man zu derselben Grösse des Funkendruckes kommt, wie in den früheren Fällen. Auch die Linien des Cäsiums sind durchwegs unscharf, meist stark verwaschen. An Verunreinigungen waren nur Spuren von Ba nachzuweisen. Die Zahl der gemessenen Linien betrug 21.

λ	i	λ	i	λ	i
2267·62	3+	3612·4	1+ br.	4501·9	1+ br.
73·9	2+ br.	16·7	1+ br.	26·95	1+
85·4	1+ br.	61·5	1+	54·22	1+ Ba
86·2	1+ br.	81·0	1+ br.	55·80	10 r.
2317·02	1+	3876·7	1+ br.	93·50	6 r.
32·5	3+ br.	3959·8	1+ br.	4604·00	7
92·9	2+ br.	4265·0	1+ br.		
3597·5	2+ br.	77·30	5+		

XXXVI. Vanadium.

Das ultraviolette Spectrum des Vanadiums ist bisher nur zwischen λ 3900 und 4000 gemessen, und zwar im Bogen und Funken von Lockyer,[2] doch mit unzulänglicher Genauigkeit.[3] Wir verwendeten Vanadiumelektroden aus festem Metall, die wir der Güte des Herrn Moissan in Paris verdanken. Das Spectrum ist reich an meist scharfen Linien, deren Vorkommen im Sonnenspectrum in zahlreichen Fällen von Rowland constatirt wurde. Auch hier sind die Linien des Funkens gegen die der Sonne in vielen Fällen verschoben, und zwar wieder in

[1] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1890).

[2] Lockyer, Phil. Trans. 173 (1881).

[3] Der äusserste sichtbare Theil von $\lambda = 4023$ bis $\lambda = 4619$ wurde in jüngster Zeit auch von Lohse (Berliner Akad., Bd. 12, 1897) im Funkenspectrum gemessen.

der überwiegenden Mehrzahl nach Roth. Diese Verschiebungen machen sich beim Messen in sehr unangenehmer Weise geltend: Da der Druck in der Funkenbahn offenbar ein sehr variabler ist, so tritt eine Linie nicht als einheitliches Ganzes auf, sondern als ein Linienbündel, deren extreme Componenten den zumeist vorkommenden Drucken entsprechen. Die Hauptlinie scheint dabei ihre normale Stellung in der Regel wenig zu ändern, woraus zu schliessen wäre, dass ein beträchtlicher Theil der ausgesendeten Strahlen von Dampf unter nahezu normalem Druck herrührt; dagegen zeigt sich an der rothen Seite der Linie ein mehr oder minder scharfer Hof, der den unter höherem Druck ausgesendeten Strahlen entspricht und in den weitaus meisten Fällen an Intensität hinter der Hauptlinie zurückbleibt. Zuweilen tritt die verschobene Linie sogar deutlich neben der unverschobenen auf. Da die verschiedenen Partien des Spaltes durch verschiedene Theile der Funkenbahn beleuchtet werden (wir verwenden zwischen Funken und Spalt eine Beleuchtungslinse aus Quarz), so stammt das Licht, welches die beiden Enden einer Linie bildet, von Partien der Funkenbahn, die nahe an den Elektroden liegen, während die Mitte der Linie der Mitte der Funkenbahn entspricht. Da nun an den Elektroden der Druck jedenfalls ein grösserer ist, als in der Mitte, so muss auch die Verschiebung der Linienenden eine grössere sein, als die der Linienmitte. Die Folge davon ist, dass wenn man die Stellung der Linie durch ein die Enden der Linien verbindendes Fadenmikrometer bestimmt, man eine etwas stärkere Verschiebung erhält, als bei directer Einstellung auf die Linienmitte. Dieser Unterschied, der selbstverständlich nur bei verschobenen Linien auftritt, ist insoferne störend, als man je nach der Art der Ablesung verschiedene Werthe erhält. Wir haben bei allen etwas stärkeren Linien die Methode mit dem Fadenmikrometer verwendet und nur solche schwache Linien direct nach ihrer Mitte abgelesen, die nach ihrem gleichmässigen Aussehen eine noch merkbare Verschiebung nicht erwarten liessen.

Was die Grösse der Verschiebungen gegen die Sonnenlinien anlangt, die wir im Vanadium beobachten konnten, so sei bemerkt, dass dieselben in den allermeisten Fällen in der

Richtung nach Roth, nur in wenigen gegen Violett, auftraten. Da die letzteren Fälle fast ganz auf umgekehrte Linien beschränkt waren, so liegt die Vermuthung nahe, dass diese Linien im Sonnenspectrum nach Roth verschoben sind, eine Erscheinung, die ja auch schon von Jewell in gewissen Fällen für die Calciumlinien constatirt wurde. Die verschobenen Linien des Vanadiums scheinen einer Reihe verschiedener Serien anzugehören: So entsprechen z. B. den Verschiebungen nach Violett die Werthe 0·03, respective 0·07 und 0·14 AE. und den Verschiebungen nach Roth die Werthe 0·03, respective 0·06 und 0·12 AE. und die Werthe 0·04, respective 0·08 und 0·16 AE., so dass im Vanadium drei Hauptserien mit je zwei Nebenserien nach Kayser und Runge vorhanden wären.

So wie das Chrom zahlreiche schwache Linien mit dem Eisen gemeinsam hat, so zeigt sich das gleiche Verhalten, vielleicht noch in erhöhtem Masse, auch beim Vanadium; es ist jedoch zu bemerken, dass die Linien, welche dem Chrom, respective dem Vanadium mit dem Eisen gemeinsam sind, keineswegs dieselben sind und dass sie nicht etwa auf eine Verunreinigung dieser Elemente mit Eisen zurückgeführt werden können, da es ausnahmslos schwache Linien sind und sie im Eisen und Chrom, respective Eisen und Vanadium mit der gleichen Intensität auftreten. Verunreinigt war das Vanadium stark mit Eisen, wenig mit Calcium und Strontium; es enthält vielleicht Spuren von Kohle, Magnesium und Cadmium. Die Zahl der Vanadiumlinien beträgt 2328.

λ	i	λ	i	λ	i
2131·8	1	2143·1	1	2163·7	1+
33·0	1	46·0	1	66·2	1+
34·1	2	47·5	1	71·9	1
37·3	2	48·4	1	73·2	1
38·1	1	50·9	1	75·9	1
39·8	1	51·1	1	77·0	1+
40·1	1	51·9	1	77·3	1+
42·0	1	61·6	1+	81·95	1

λ	i	λ	i	λ	i
2182·30	1+	2249·13	3 .	2288·69	2
84·25	1	50·50	1+	89·27	2
85·45	1	50·8	1+	90·62	3
86·02	1	51·20	1	91·5	1+
87·00	1	51·60	1	92·64	3
90·30	1	53·00	1	92·91	4
90·60	1	57·04	1	95·03	3
91·20	1	58·83	2	95·55	2
93·03	1	60·90	1	95·65	2
94·98	1	61·14	1	95·91	1
95·82	1+ d.	61·9	1	96·39	1
98·13	1	62·44	1	96·93	2 C ?
98·66	1	63·7	1+	97·91	4
99·57	1	64·43	1	2302·30	1
99·72	1	67·7	1+	03·29	1
2201·77	2	68·35	2	04·82	1
02·62	2	69·2	1+	06·45	1+
04·60	1	71·22	1	08·35	1+ br.
07·83	1	71·92	1	08·87	1
09·02	2	73·09	2	09·14	1
09·31	2	73·69	1	09·91	4
10·10	1	75·28	2	11·40	4
10·40	1	75·62	1	12·5	1+ br.
14·11	3	75·97	1	14·25	4
15·92	1+	78·16	1	15·07	1
16·11	3	78·99	2	15·8	1+ br.
17·48	3	79·40	1	16·8	1+ br.
18·07	2	79·78	2	17·61	3
18·51	3	80·38	2	18·10	5
20·29	1	81·27	2	19·07	4
21·58	1	81·66	2	19·91	2
22·79	2	82·92	1	23·92	6
28·33	2	83·42	2	25·22	5
29·81	2	83·85	2	26·13	2
30·05	2	84·6	1+	28·2	1+ br.
32·97	5	84·80	1	29·03	4
37·25	1	84·98	1	30·3	3+
40·66	2	85·50	3	30·53	6
41·57	4	87·99	2	31·38	3
43·50	1	88·12	2	31·86	5

λ	i	λ	i	λ	i
2333·70	3	2373·15	5	2412·80	2
34·30	5	74·2	1+	13·15	1
35·44	1	74·75	1	14·00	7
35·59	3	75·9	1+	15·23	2
36·20	3	77·0	1+ br.	15·40	1
37·28	4	79·24	5	16·84	2
37·46	3	80·3	1+	17·60	5 v.
39·02	1	81·00	5	18·80	1
39·9	1+	82·59	8	20·20	2
40·6	1+ br.	83·55	1+	21·15	2
41·49	1	84·09	4	22·06	2
42·26	5	85·05	1+ br.	23·11	1
43·20	5	85·70	2	23·27	1 (Fe)
43·91	3	85·92	3	23·47	1
46·41	5	86·51	1	24·23	1
46·92	3	87·04	1	24·83	1+
47·20	4	88·0	1+ br.	26·18	1
47·57	1	88·35	1	27·37	3
48·30	4	89·01	1	27·80	2
49·37	1+	89·79	4	28·35	2
49·87	4	90·56	2	30·10	5
51·33	2	91·33	1	31·65	1
51·64	3	92·8	1+	32·06	1
52·25	5	93·70	9	33·05	3
54·74	2	95·1	1+	35·56	2
55·3	1+	96·62	1	36·62	1
56·3	1+ br.	97·1	1+	38·09	2
57·60	1	97·2	1+	39·17	1
57·89	3	97·74	1	39·35	3 (Fe)
58·82	7	98·22	1+	39·81	1
60·42	3	99·77	6	41·40	1
62·71	2	2400·99	2	41·71	1
65·73	1	02·01	2	41·95	1
66·40	8	03·35	2	42·65	1+
66·53	2	05·30	8	45·00	5 r.
66·96	1	05·96	1	45·38	1
67·71	3	07·25	6	45·61	1
71·19	9	07·70	1	46·75	4
72·25	3	08·01	1	47·70	5
72·67	1	08·53	2	48·50	1 +

λ	i	λ	i	λ	i
2450·29	2	2489·86	1	2516·19	7
50·69	1	90·74	1	17·20	2
50·80	1	91·24	1	17·54	1
51·6	1+ br.	92·4	1+ br.	18·07	1+
52·1	1+ br.	93·66	2	18·7	1+ br.
52·83	1	94·20	1+	19·2	1+ br.
53·41	5	95·85	1	19·77	3+
53·90	1	97·08	1	20·40	1+
56·56	1	98·3	1+ br.	20·85	1+
57·50	4	99·12	1	21·30	5
57·85	1	99·30	1	21·62	6
58·35	4	2500·10	1+	22·50	2
59·31	1	01·20	1	22·60	3
59·40	2	01·67	2	22·95	1 Fe ?
60·65	1+	02·44	1	23·50	1
61·57	4	03·08	5	23·76	2
62·99	4	03·33	1+	24·07	5
64·14	3	03·98	1	25·44	1
65·34	5	04·34	2	25·65	1
68·69	1	05·02	1	26·80	3+
69·46	1	05·32	1	28·00	9
69·85	1+	05·63	1	28·59	7
71·18	3	06·27	5	28·97	7
72·94	1	06·97	2	30·22	2
74·8	1+ br.	07·70	3	31·33	1
75·49	3	07·87	2	31·71	1
75·92	3	08·93	1	32·07	2+ br. r.
76·33	2	09·91	1	33·93	2
78·64	4 C ?	10·37	1	34·04	2
79·09	6	10·90	1	34·34	1
99·60	6	11·3	1+ br.	34·60	4
80·68	1+	11·74	2	35·20	1
82·39	5	12·05	2	37·67	3
83·11	5	12·5	1+ br.	39·3	4+ br.
83·40	1	12·95	1+	41·1	1+ br.
84·27	1	13·43	1+	41·90	1 Fe ?
85·55	1	13·7	1+ br.	42·6	5+ br.
87·6	1+ br.	14·70	6	43·05	3
88·20	2	15·20	1	43·75	1
88·66	2	15·76	1	44·40	2+

λ	i	λ	i	λ	i
2545·54	2	2574·14	2	2611·35	3+
45·79	1	74·61	5	11·6	2+
46·00	1	76·20	1	12·4	2+ br.
46·40	1	76·56	3	13·9	2+ br.
48·28	7	77·39	1	14·49	3
48·80	6	77·78	5	15·50	4+
49·36	7	78·53	2	16·31	4
49·76	2	81·95	1	16·75	3+
50·7	1+	83·12	3	17·28	3+
51·83	3	83·7	1+ br.	18·5	1+ br.
52·35	1+	85·02	5	19·55	1+
52·75	1+	87·5	2+ br.	20·2	1+ br.
53·11	6	88·22	1	20·4	1+ br.
53·76	4	88·55	1	21·9	4+ br.
54·30	7	88·89	1	22·85	4+
54·93	1	90·3	1+ br.	23·86	4+
55·6	1+ br.	90·7	1+ br.	25·00	4+
56·00	5	91·3	1+ br.	25·73	1
56·87	1+	91·68	1 Fe?	28·2	1+
58·99	1	92·32	1	28·35	1+
59·20	1	93·18	8	28·88	4+
60·25	1+	93·8	1+	29·88	5+
61·3	1+ br.	94·0	1+	30·72	6
62·3	2+ br.	95·20	8	32·50	1+
62·87	3	96·55	1+	33·31	1+
63·45	3+ br.	97·33	2	34·02	1+
64·25	3+	98·9	1+	34·64	1+
64·90	2	2600·15	1	35·52	2+
65·32	1	00·65	1+	35·73	3
65·65	2	01·20	4+	36·13	1+
65·8	1+	02·40	2+	37·30	1+
66·13	2	03·05	3+	37·81	1
66·70	3+	03·52	3+	38·02	1
67·6	2+ br.	05·8	2+ br.	38·65	2+ br.
68·18	1	06·60	1+	40·40	1
68·47	2+	07·5	1+	41·05	8
71·14	5	08·11	3+	42·32	7
72·0	3+ br.	09·68	1	42·82	2
72·85	2+	09·91	1	43·23	2
73·3	2+ br.	10·8	4+ br.	43·8	2+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
2644·50	8+	2682·60	1	2713·0	2+
45·38	1+	82·98	5	13·20	3
45·90	7	83·21	5	14·31	3
46·3	1+	83·5	1+ br.	15·20	1+
47·37	1+	84·91	3	15·80	8
47·82	2	85·22	3	17·56	1
48·04	6	85·77	3	18·1	1+
49·50	8	86·60	1	18·55	1+
50·55	1+	87·7	3+ br.	20·35	1+
51·1	1+	87·90	4	21·30	1
51·70	1+	88·12	5	21·9	1+
52·03	1+	88·82	5	22·40	1
52·90	5	89·99	5	22·73	1
53·94	1	90·41	5	23·34	3
54·50	1+	90·91	6	23·59	3
55·82	8	93·1	1+	24·52	1
57·40	3	94·6	1+	24·80	1
58·62	2	94·85	3+	26·67	3
59·10	4	96·65	2+	28·06	1
59·74	4	97·16	1+	29·81	5
61·67	5	97·31	2	31·30	1
62·45	1	97·86	1	31·50	1
63·42	9	98·83	1	32·35	2+
65·5	1+ d.	99·27	1	33·15	2+
66·10	1	99·82	1+	33·8	1+
66·9	2+ br.	2701·01	3	34·05	2
67·65	1	01·16	5	34·43	2+
68·18	2+	01·66	1	35·55	1+
68·70	1	02·31	7	36·28	1+
69·08	1	03·26	1	36·78	1
70·38	5	05·34	3	37·42	1
72·11	7	06·24	4	39·30	2+
73·40	4+	06·34	4	39·80	4
74·27	1+ u.	06·87	5	41·1	2+ br.
76·3	2+ br.	08·00	5	41·69	1
77·25	1	08·68	1	42·53	3
77·91	6	09·2	1+ br.	42·80	3
78·66	6	10·30	2	43·85	2
79·39	7	11·88	5	44·63	1
80·54	2	12·4	4+	46·00	1

λ	i	λ	i	λ	i
2747·55	5	2784·1	1+ br.	2814·40	1
48·6	1+	84·40	4+ br.	15·03	2
50·2	2+ br.	86·0	2+ br.	15·10	1
51·93	2+	87·18	2	15·70	1
52·27	2+	87·2	2+ br.	16·30	1+
53·54	8 r.	88·11	3+	17·61	4
55·20	2+	88·8	1+ br.	18·70	1+
56·5	2+	90·2	1+ br.	19·56	3
56·7	2+	91·7	2+ br. r.	21·26	3
58·67	2+	92·6	1+ br. r.	22·6	4+ br. r.
58·95	2	94·02	1	24·59	1
59·25	3+	94·50	1+	25·20	1+
60·26	4	95·02	2+ br.	26·02	4+
60·62	5 r.	95·61	2	27·1	1+
61·53	1+	97·12	4	28·75	1
62·7	2+ d.	97·60	1+	30·52	3
63·8	1+	97·93	4	30·9	1+ br.
64·45	1+	98·40	1	31·15	1+
65·81	7 r.	98·88	4	31·8	2+ br. r.
66·59	5	99·59	5	32·55	1
67·25	3+	2800·23	1	34·75	3+
68·24	3	01·15	3+	35·55	2+
68·69	5	02·93	4	35·7	1+
69·84	3	03·60	5	36·62	4
71·12	1	04·58	1	38·16	2
71·60	4+	05·69	3	38·64	1
72·2	5+ r.	06·2	1+ br.	39·52	1
73·82	1	06·67	1	40·24	2
74·40	4	06·95	1	40·72	2
74·81	3	07·05	1+	41·20	4
75·11	2	08·2	1+	42·2	1+
75·89	4	08·39	3	42·50	1+
76·4	1+	08·85	1	42·83	1
77·86	5	09·66	3	43·35	1
78·23	1	10·39	6	43·97	2+
78·75	4+ r.	11·74	1	44·4	1+ br.
80·25	1+ br.	12·12	1	44·95	1
81·69	6+	12·32	1	45·37	4
82·70	1	12·9	1+	46·40	1
83·12	1	13·41	1	46·70	1

λ	i	λ	i	λ	i
2847·65	5	2889·71	5 u.	2923·47	3
49·19	4	90·28	2	24·14	5 u.
50·33	5	90·69	2	24·79	5 u.
51·36	2	91·78	5 u.	25·40	3
52·63	3	92·51	3	26·50	5
53·01	1+	92·82	5 u.	29·12	1
53·85	1	93·47	5 u.	30·25	3
54·41	6	94·78	1	30·96	4 u.
55·39	3	94·96	1	31·73	2
58·1	1+	95·74	1	32·00	2
60·11	1	96·31	4	32·42	4
61·53	1	96·98	1	33·95	2
62·41	2	98·02	2	34·48	4
63·1	1+ br.	99·5	1+ br.	35·99	1
64·0	1+ br.	2900·06	1	37·13	2
64·60	4	03·20	4 u.	37·82	1
66·57	1+	03·70	1 d.	38·35	2
66·75	1+	04·23	1	41·51	5 u.
68·24	1	05·13	3	42·48	2
69·22	6	05·75	3	43·25	1
70·08	2	06·60	4 u.	43·70	1
70·27	2	07·60	4	44·68	5 u.
70 66	1	08·56	3	45·9	1+ br.
71·61	1	08·96	4 u.	46·60	1
73·30	3	10·15	4 u.	48·15	4
74·34	1	10·50	4 u.	49·24	4
75·78	3	11·17	4 u.	49·70	1
77·05	2	11·78	2	50·40	4
77·80	4	12·7	1+ br.	51·65	2
78·13	1	13·17	1+	52·12	5 u.
78·40	1	13·85	1	53·85	1
79·26	3	14·40	3	54·02	1
80·14	5	14·97	2	54·45	1
80·92	3	15·46	3	55·65	3
82·60	5	16·00	3	56·70	1
84·20	2	17·41	4	57·54	5
84·91	6 u.	18·32	3	58·68	3
87·08	2	20·11	4	60·87	1
87·30	2	20·50	5	62·10	1
88·36	5	22·75	1+	62·87	1

λ	i	λ	i	λ	i
2963·34	1	3006·57	2	3054·00	4
64·1	1+ br.	07·37	2	56·03	1
67·65	1	08·61	4	56·46	1
68·15	2+	09·60	1	57·55	1
68·40	6 u.	12·09	3	59·3	1+ br.
69·93	1	13·12	3	60·60	1+
70·53	1	14·87	4	62·31	1
71·65	1	16·03	2	62·80	2
72·31	5	16·20	2	63·30	5
74·06	3	16·81	3	65·71	2
75·70	4	19·1	1+ br.	66·5	1+ br.
76·20	4	20·4	1+ br.	67·20	5
76·55	5 u.	22·29	1	69·82	1
77·60	1	22·70	3	70·31	1
78·25	2	23·99	3	72·96	1
79·16	1	25·08	3	74·77	1
79·6	1+ br.	27·70	2	75·3	1+ br.
81·27	4	28·15	3	75·7	1+ br.
82·00	2	29·65	1	76·12	1
82·82	2	31·15	1+	78·75	1+
83·10	1	32·30	1	79·0	1+
83·62	4	33·55	4 u.	80·4	1+
85·25	3	33·99	4 u.	81·13	2
88·07	4	34·55	1	81·39	1
89·35	2	35·28	1	82·20	1
89·67	3	38·63	2	82·65	3
89·72	1+	39·9	1+	83·31	3
94·59	4	41·52	3	86·33	1
96·05	4	42·39	4	86·61	2
96·7	1+ br.	43·27	1	88·1	1+ [1]
98·00	1	43·62	2	89·78	1
99·30	1	45·10	1	93·23	8 u.
99·57	1	48·76	5 u.	94·33	6
3001·28	5 u.	49·00	3	3101·09	5
01·82	2 d.	50·85	3	02·39	6 u.
02·72	1	51·44	1+	05·03	2
03·50	4	52·3	1+ br.	05·67	1+
05·87	2	53·48	5	06·08	1+

[1] Violette Kante eines 2 AE. breiten Bandes.

λ	i	λ	i	λ	i
3106·9	1+	3155·51	3	3198·09	1
07·85	1+	56·35	1	99·95	1
08·81	2	58·01	2	3201·8	2+ br.
09·51	2	59·45	2	02·50	1
10·82	6 u.	60·87	2	02·80	1
13·19	4	61·42	3	04·30	1
16·18	1	62·46	1	05·45	1
16·90	3	62·81	3	05·70	1
18·51	6 u.	63·13	3	06·4	1+ br.
19·44	1	63·85	1	07·52	1
20·36	4	64·91	2	08·46	4 r.
21·27	4	65·96	2	10·21	1
23·01	5	66·48	1	11·70	1
23·49	1	67·55	5	12·55	2
25·20	4+	68·21	3	14·10	1
25·52	4	68·62	1	14·86	4
26·31	4	70·35	1	17·23	6
28·40	2	71·82	1	18·98	1
28·81	2	72·34	1	21·52	1
30·40	6	74·17	3	22·97	1
32·72	1	74·61	4	24·40	1
32·90	1	76·2	1+ br.	26·22	1
33·48	5	77·75	1	27·05	3 r.
35·08	6	79·50	1	27·54	1
36·64	6	82·71	4	28·3	1+ br.
38·17	2	83·48	2 u.	28·7	1+ br.
39·88	5	84·04	2 u.	29·30	1+
41·23	1	85·46	2 u.	29·75	1
41·63	2	86·93	2	30·80	1
42·33	2	87·78	5 u.	31·09	1
42·67	4 r.	88·18	2	32·10	3
43·61	2	88·60	5 u.	33·36	1
44·85	2	89·87	1	33·67	3
45·48	2	90·80	8 u.	33·98	4
46·10	2	92·78	2	34·64	2
46·40	3	93·29	2	36·72	1
46·95	2	94·06	1	38·08	6
48·86	2	95·7	1+ br.	39·17	1
51·42	4	96·66	2	40·00	1
54·9	1+	97·65	1	40·90	1

λ	i	λ	i	λ	i
3241·30	1	3285·80	1	3338·00	6
42·14	1	87·3	1+ br.	40·53	1
47·5	1+	87·78	1	41·4	1+
47·69	1	88·47	3	42·04	2
48·00	1	89·11	2	46·08	3
48·74	1	89·52	4 r.	48·57	1
49·71	4	90·40	3	49·19	2
50·90	5	91·18	1	49·56	3
52·01	5	91·80	1	53·92	3
53·00	1	93·30	3	54·85	1
54·90	5	96·19	1	55·51	1
55·72	1	97·66	2	56·51	1
58·02	4	98·26	1	61·37	3
59·63	1	98·89	4	61·67	3
59·80	1	3301·05	1	63·70	1
61·20	1	01·82	1	65·68	1
61·73	1	04·62	3	66·98	1
61·90	1	08·62	2	67·80	1
62·45	1	09·32	1	70·60	1
63·45	4	15·00	3	71·25	1
64·5	1+ br.	15·35	3	71·60	1
66·06	5	15·65	1	72·91	3
67·84	10 u.	17·02	2	74·13	1
69·07	1	18·04	2	76·16	1
70·25	2	19·05	2	77·49	1
71·27	10 u.	20·33	1	77·74	2
73·17	1	20·95	1	79·5	1+
74·35	1	21·72	5	80·42	1
74·65	2	23·12	1	82·67	2
76·25	10 u.	23·88	1	83·87	2
77·21	2	24·57	1	84·73	1
77·55	3	28·13	1	85·9	1+ br.
77·88	3	28·60	1+	87·52	1
80·02	8	29·10	1+	87·95	1
81 26	3	29·63	1	89 0	1+ br.
81·92	2	30·02	2	90·90	1
82·69	5	32·30	1	92·81	3
83·46	1	33·88	1	94·73	1
84·50	1	35·37	1	95·7	1+
85·29	3	35·65	1	96·68	1

λ	i	λ	i	λ	i
3397·69	1	3455·02	1	3514·60	3
97·97	1	57·30	7	16·16	1
98·40	1	61·71	1	17·46	10 u.
3400·54	2	63·22	1	19·33	1
01·50	1	63·50	1	20·19	7
02·15	1+	64·00	1	20·72	3 r.
02·73	1	64·34	1	22·02	6
03·32	1	65·39	1	22·75	1
03·50	1	66·75	2	23·35	1+
04·60	4	69·69	3	23·8	1+ br.
05·12	1	70·44	2	24·89	8
05·31	1	76·38	2	25·96	1
06·19	1	77·5	2+ br.	27·4	1+ br.
06·36	1	77·67	3	28·00	3
07·00	1	79·10	1	28·4	1+ br.
08·15	1	80·01	4	29·89	3
09·10	2 r.	84·48	1	30·6	1+
14·35	2	84·82	1	30·96	10
15·00	1+	86·09	6	31·63	2
17·22	1	87·13	1	32·45	3
20·35	1+	89·59	1	33·86	4
20·86	1	90·11	2	34·83	1
22·40	1	93·27	6	35·54	1
24·00	1	97·23	7	38·88	4
25·22	2	98·34	1	40·66	1
25·35	1+	3500·00	2	41·50	5
30·30	1+	00·50	1	42·63	1+
32·1	1+ br.	01·03	1	43·63	2
33·96	1+	01·65	1	45·36	10 u.
34·15	1+	03·35	1	46·96	1
35·52	1+	04·58	8	47·22	1
36·52	1+	05·84	2	48·82	1+
37·90	1+ br.	06·70	2	49·10	1+
42·17	1	07·00	1	51·69	1
42·48	1	07·69	3	53·44	2
44·46	1+	09·18	3	55·30	1
45·95	1	11·02	1	55·90	1
47·7	1+ br.	11·57	1	56·40	2+
51·20	1	12·33	1	56·93	10
53·23	4	14·02	3	59·43	1

λ	i	λ	i	λ	i
3560·78	4	3608·07	1	3661·53	6
61·54	1	09·40	1	63·68	3+
62·31	1	11·71	2	65·22	2+
63·53	1+	12·4	1+ br.	65·9	1+
63·90	1+ br.	15·4	1+ br.	67·84	3+
66·32	6	16·83	2	69·53	8
68·45	1	18·6	1+	71·33	3
69·09	2	19·09	6	72·51	2+
69·46	1	20·62	3	73·50	3+
71·18	1	21·35	4	74·83	3
71·38	1	22·43	1	75·58	1
71·81	2	22·82	1+	75·83	3
72·50	1	24·98	1	76·80	3+
72·82	1+	25·71	4	77·17	1+
73·21	4	27·83	4	77·47	1+
74·51	4	29·45	1+	80·15	4+
74·94	1	33·02	1	81·5	1+ br.
75·25	1	34·06	1	83·25	3
77·35	2	35·57	1	84·47	1
77·80	1+	36·03	1+	85·31	3
78·00	2	37·89	2	86·40	3
78·78	2	39·14	2	86·83	1
79·49	1	40·20	1+	87·60	3+
80·94	1	41·25	1+ br.	88·21	4
82·97	1	42·82	1	90·43	4
83·85	1	43·27	1	92·38	5
84·56	1	43·99	2	94·74	1+
88·25	3	44·83	2	95·50	3+
89·90	9	45·7	1+ br.	96·02	4
92·19	9	46·02	3	99·63	1
92·70	1	46·98	2	3700·35	3+
93·53	8	47·45	1+	00·50	6
95·77	1	49·10	2	01·13	3
97·1	1+ d.	52·51	1+	03·80	6+ r.
3600·16	1	53·61	1	04·90	3+ v.
03·10	1	54·8	1+ br.	05·22	3
04·25	1+	56·80	2+	06·20	3
05·0	1+	57·60	1	08·86	3
05·46	1	57·92	1	11·28	4
05·73	2	58·38	2	11·90	2

λ	i	λ	i	λ	i
3712·69	2	3753·38	2+	3782·70	1
13·72	1	54·65	1+	83·08	1+
14·12	2	55·23	1+	83·6	1+ br.
15·70	10	55·77	2+	84·82	1
18·35	5	56·15	1	84·98	1
19·07	3	57·51	1	87·39	8
21·1	1+	57·82	1	88·92	1
21·55	1+	58·90	1	90·48	3
22·18	2+	59·41	3	90·64	3
22·39	3+	60·40	5	91·47	1
23·49	1	60·95	2	93·53	1
23·75	1	61·43	2	93·76	2
24·6	1+	61·55	2	94·49	4
25·1	1+	63·26	2	95·08	5
25·83	1	64·94	2	96·37	1
27·53	8+ v.	66·53	1	96·66	2
28·51	5	67·84	4	98·41	1
29·21	3	69·18	3	98·82	2
29·99	1	69·97	1+	99·43	1
30·36	1	70·10	1+	3800·07	4
31·20	1+	70·67	1	01·4	1+
32·15	4	71·13	10	03·06	1
32·98	7	72·30	1+	03·64	3
33·75	2+	73·14	5	03·97	2
34·62	2+	73·92	1	04·07	2
36·16	5	74·29	2+	04·6	1+
37·60	1	74·82	3	04·80	1
38·15	2	75·32	2	05·12	1
38·92	2+	75·80	2	06·37	1
40·39	2	76·29	2	06·65	1
41·20	1	77·00	1	07·00	2
41·63	3+	77·30	1	07·69	3
43·77	4 r.	77·63	2	08·70	3
46·00	7	78·50	6	09·80	3
47·28	1	78·82	5	13·63	4
48·10	1	79·86	3	15·55	5
50·10	6+	80·85	1	17·99	2
50·43	4+	81·55	2	18·10	2
51·94	1	81·90	1	18·39	2
53·00	1	82·27	1+	18·48	2

λ	i	λ	i	λ	i
3818·94	1	3850·30	1+	3883·53	1
20·14	2	50·57	1	84·05	1
21·66	2	51·30	2	84·60	1
22·21	3 r.	52·21	2	85·03	3
22·86	1	53·60	1	85·83	1
23·05	2	55·49	3	85·95	1
23·37	2	56·00	3+ d.?	86·73	2
23·5	2+ br.	57·31	1+	88·20	1
23·90	1	58·0	1+	89·37	1
24·14	2	58·81	2	90·35	3
25·17	1	59·49	2	91·4	2+ br.
25·47	1	60·88	1+	92·63	1+
26·95	1+	62·35	2	93·03	3
27·13	3	64·00	4	94·18	2+
28·72	3+	65·02	4	96·32	3
28·9	2+	65·9	2+ br.	96·80	1
29·77	2+	66·52	1	97·22	2
30·42	1+	66·90	3	98·2	3+ br.
31·19	1	67·49	1	99·32	4
31·98	1	67·75	3	3900·32	2
32·50	1	68·20	1+	00·72	1
33·00	1	70·14	1	01·30	2+
33·38	1	70·73	2	01·86	1
34·97	1	71·21	3	02·41	3+
35·69	2	72·90	1	02·70	2+
36·19	2	73·38	1	03·50	4+
36·58	1+	73·79	2	04·27	1
37·90	1+	74·50	1	04·65	2
39·13	3	75·21	3	06·93	2
39·53	3	75·52	1	07·35	1+
40·26	2	75·78	1	08·5	1+ br. r.
40·56	3	76·03	2	09·85	2
40·92	4	76·25	2	10·05	3
42·04	2	76·90	1+	10·95	2
42·88	2	78·85	8	12·37	3
43·65	2	79·79	1	13·07	2
44·60	4	80·47	1	13·67	1+
45·03	1	81·20	1	14·51	7
47·50	5	81·78	1	15·28	1
49·44	3	83·37	1	15·55	1

λ	i	λ	i	λ	i
3916·59	7	3970·27	1	4015·51	1
20·16	1	72·08	1+	15·81	1
20·68	2	73·80	8	16·98	3
22·08	3	75·47	1	17·44	3
22·61	4	77·88	5	19·20	3
24·86	4	79·23	3	19·6	1+ br.
25·40	3	79·56	3	20·70	1
26·45	2	80·69	3 r.	21·61	1
26·68	2+	81·92	1	22·05	1
28·73	1	84·08	1	23·53	10
29·89	3	84·45	3	24·60	1
30·21	2	84·73	3	25·50	1
31·49	4	85·40	4	26·65	1
33·81	3 Ca	87·82	1	27·52	1+
34·20	3	88·22	1	28·27	1
35·30	3	88·96	3	29·2	1+
36·43	2	89·93	3	30·07	1
36·61	1+	90·72	6	30·32	1
37·69	2	91·30	1+	31 43	2
38·34	2	91·65	1	32·05	3
39·00	1	92·14	1	32·67	1
39·48	2	92·96	6	33·04	1
40·74	1	97·28	5	34·91	1
41·43	2	98·90	4	35·82	8
42·16	2	99·40	3	36·95	4
43·79	3	4000·25	1	38·72	1
44·20	1	01·29	1	39·76	2
44·68	1	01·83	1	40·50	1
46·04	1	03·12	5	42·81	2
47·93	1	03·66	1	46·50	3
48·74	2	05·90	8	47·08	1
50·37	2	08·36	3	47·60	1
52·11	9	09·95	1+	48·78	2
58·33	1	11·47	1	49·20	2
60·49	1+	11·74	1+	51·13	5
61·65	2	12·70	1+	51·52	5
63·77	3	13·55	1+	52·60	1
64·65	1+	13·68	1+	53·40	1
68·19	4	14·46	1	53·76	4
68·60	1 Ca	15·23	1	56·41	2

λ	i	λ	i	λ	i
4057·22	4	4109·98	7	4150·83	2
58·95	1	10·93	1	51·50	1
61·00	1	11·8	4+	52·3	1+
61·75	1	12·10	4+	52·80	2
62·86	1	12·50	3	53·49	1
64·12	3	13·66	4	56·00	1 d.
65·21	6	14·68	2	59·87	3
67·13	1	15·38	8	60·57	1
67·87	2	16·70	7	62·2	1+
68·13	2	18·38	5	62·52	1
70·92	1	19·25	1	63·82	1+
71·65	2	19·60	3	64·60	2
72·32	1	20·69	3	66·32	1
77·86	1 Sr	21·15	1	67·1	1+ br.
80·6	1+ br.	23·30	2 } [1]	69·06	1
83·07	3	23·70	4 }	69·41	2
84·90	1	24·26	2	71·46	2
85·81	2	26·07	1	74·19	2
90·79	8	28·25	8	75·15	1
92·10	2	28·99	3	75·30	1
92·53	2	30·3	1+ br.	76·00	1+
92·86	4+	31·32	1	77·22	2
93·66	2	32·15	8	77·75	1
94·41	2	33·91	2	78·55	3
95·66	6	34·62	7	79·22	1
97·08	1	35·40	1	79·60	3
98·55	2	36·21	2	81·03	1+
99·03	1	36·53	2	82·26	2
4100·00	8	37·14	1+ v.	82·77	2
01·15	2	38·27	2+	83·67	8
02·31	5	39·40	3	86·93	1
03·57	1	40·22	1+	90·03	3
04·59	3	41·51	1+	90·59	2
04·92	3	42·00	1	91·11	2
05·38	4 r.	42·77	1	91·80	3 r.
07·64	1	43·07	1	94·21	1
08·38	3	47·85	1 r.	95·8	1+
09·19	1	49·00	2	97·47	1

[1] Rowland gibt im Bogen eine Linie bei 4123·54.

λ	i	λ	i	λ	i
4197·79	2	4240·51	1	4287·98	2 r.
98·80	2	41·45	2	88·96	1
4200·00	1+	43·02	2	89·51	1
00·38	1	43·98	1	89·87	1
01·08	1	46·83	1	90·45	1+
02·52	4	47·5	1+ br.	91·13	1+
04·39	2	48·96	1	91·46	2
05·30	8	49·49	1	92·01	5 r.
10·02	6	51·45	1	96·31	5
11·02	1+	53·00	1	97·26	1
13·17	1+	54·51	2 r.	97·87	4
13·8	1+	55·63	1	98·23	4
14·12	1+	57·17	1	98·80	1
15·77	1	57·54	2	99·13	1
16·53	1	59·46	2	4300·25	1+
18·20	1	60·31	1+	00·73	1
18·65	1	60·47	1+	01·33	2+ r.
18·87	2	60·90	1	02·31	1
19·70	1	61·4	1+	02·69	2 Ca
20·21	2	62·32	3 r.	04·3	1+
21·20	1+	64·00	1	04·98	1
22·50	1	64·65	1+	05·61	2
22·77	1	65·31	2	06·07	1
24·32	2	67·55	2+	06·39	2
24·70	1	68·00	1	07·37	3
25·40	4+	68·83	7	08·60	1
26·85	5 Ca	69·91	2	09·68	1
27·90	2	70·5	2+ r.	10·00	4
29·82	3	71·68	2	11·62	1
31·30	1	72·90	1+	11·85	1+
32·20	3	73·54	1	12·56	1
32·66	3	74·96	1	13·06	1
33·12	2	76·47	1	13·50	1+
34·17	2	77·14	6	14·07	2
34·3	1+	79·10	5	15·00	1
34·71	2	83·10	3	15·98	1
35·47	2	84·25	6	16·4	1+
36·78	1	85·60	1	18·81	1
36·99	1	86·24	1+	20·13	1
40·23	1	86·57	2	20·45	1

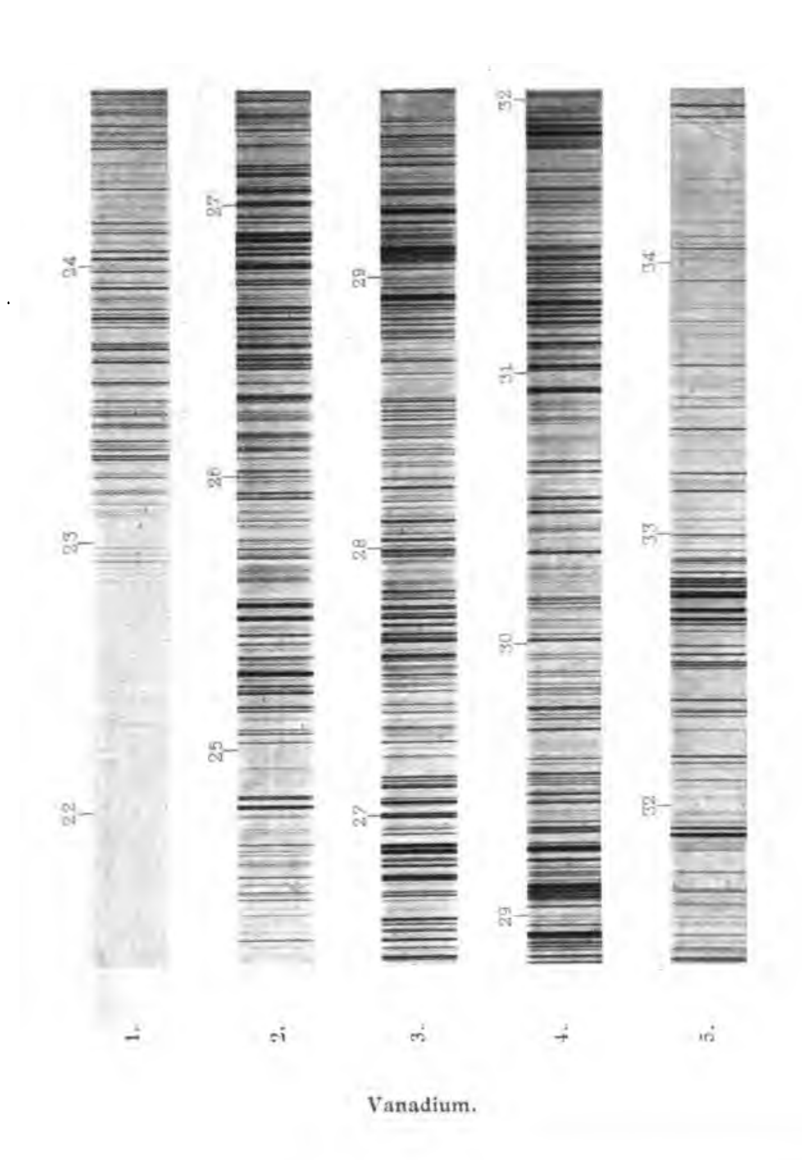
λ	i	λ	i	λ	i
4322·20	1	4361·55	2	4397·00	1+
22·52	1	63·49	1	97·55	1
23·68	1	63·69	2	98·05	1
24·80	1	64·36	2 r.	98·70	1+
25·40	1	65·89	1	99·60	1
27·26	1	67·07	2+	4400·80	9
30·28	6 r.	67·74	1	01·95	1
31·73	1	68·19	3	03·83	2
32·46	1	68·73	2	04·45	1
33·05	6	69·22	1	05·19	2
34·26	2	70·45	1+	06·35	3
35·03	1	73·42	3 r.	06·90	6
35·64	1	73·99	2	07·89	6
36·29	2	75·21	1	08·40	5
38·12	1	75·47	2	08·68	7 u. r.
39·30	1+	76·19	1	11·83	1
41·21	7 r.	76·9	1+ br.	12·38	2 r.
42·37	1	78·02	1	13·87	1
43·01	2	79·40	20 u.[1]	14·74	1
46·60	1+	80·72	2	16·63	2
47·07	1+	81·20	1+	16·9	2+
50·15	1	81·94	1	20·19	2 r.
50·85	1	82·96	1	21·82	4
50·99	1	84·35	1	22·43	1
52·60	1	84·88	20 u.[1]	23·40	3
53·10	6	87·37	2	24·11	2
53·52	1	89·27	1	24·75	2
55·18	2 r.	90·23	15	25·60	1
56·16	2 r.	90·81	1	25·88	2
56·97	1	91·86	1	26·23	4
57·61	1	92·27	2	27·50	4
57·75	1+	93·30	2	28·71	4
60·30	1	94·03	2	29·99	4 r.
60·76	2	94·99	2	30·72	2
61·17	1	95·49	10	33·07	1

[1] Rothe Componente stärker; ohne Rücksicht auf die Umkehrung wurde die Mitte der beiden Linien bei 4379·48 und 4384·97 abgelesen, während die obigen Zahlen sich auf die Umkehrung beziehen; man sieht daraus den Einfluss des Druckes im Inneren des Funkens auf die Verschiebung der Linien.

λ	i	λ	i	λ	i
4434·74	2	4468·94	2	4511·60	1
35·0	1+ br.	69·92	6 r.	12·92	3+
35·53	1	70·60	1+	13·78	1
35·84	1	71·00	1	14·37	2
36·34	5	71·50	1	15·71	1
37·00	1	71·94	1	16·21	1+
37·50	1	72·53	1	16·85	1+
38·08	6 r.	73·43	1	17·70	2
39·16	1	74·28	5	20·32	1 d.
40·65	1+	74·93	5	20·63	1
41·90	7	75·85	1	20·70	1
42·53	1	76·06	1	22·32	1
43·50	4	77·46	1	23·97	1+
44·42	5	80·26	2 r.	24·41	3
45·99	1	83·73	1+	25·31	2
49·76	2	85·9	1+	28·12	2
51·11	3 r.	86·43	1	28·69	4
52·23	7	88·46	1	29·45	1
52·90	2	89·11	8 r.	29·73	2
53·37	1+	90·3	1+	30·95	1
53·53	2	90·99	2	32·35	2
54·32	1	91·35	1	33·42	1
54·96	2	91·66	1	34·11	2
55·52	1	92·47	1	34·94	1
56·07	1	95·18	1+	35·4	1+
56·72	2+	96·30	3 r.	35·73	1
57·65	3	97·03	2	36·1	1+ br.
57·98	3 r.	97·57	2	37·80	2
58·57	1	97·88	1	40·18	2
59·98	7	98·28	1	41·5	1+ br.
60·52	6 r.	99·97	1	45·60	7
61·20	2 r.	4501·00	1	47·97	1
62·60	7	01·44	1	49·85	6
63·30	1	02·19	3 r.	51·99	1
64·49	3 r.	06·27	1	52·67	1
64·95	2	06·40	1	53·22	4 r.
65·67	2	06·75	1	55·53	1
67·05	1	08·05	1	56·95	1+ d.?
67·78	1	08·44	1+	58·60	1+
68·20	3 r.	09·46	1	60·90	6

λ	i	λ	i	λ	i
4563·55	1	4591·41	4	4634·4	1+
63·95	1	94·31	6	35·34	2
64·80	6+	4600·40	5 r.	36·35	1
67·40	1	05·53	1	40·23	2
69·4	1+	06·84	3	40·91	2
70·57	2	07·47	1	44·25	1
72·00	5 r.	09·82	2	44·67	1
77·36	5	11·13	1	46·58	3
78·90	3	11·94	1	49·05	1
79·32	2	16·20	1	53·15	1+
80·60	5 r.	17·02	1	55·43	1
81·36	1	17·48	1	56·65	1+
83·41	2	18·03	1	57·15	1+
86·10	1	18·7	1+	63·07	1
86·55	6	19·0	1+	66·32	1
88·88	1	19·93	5	70·65	4
89·05	1	24·60	2		
90·63	1	26·67	2		

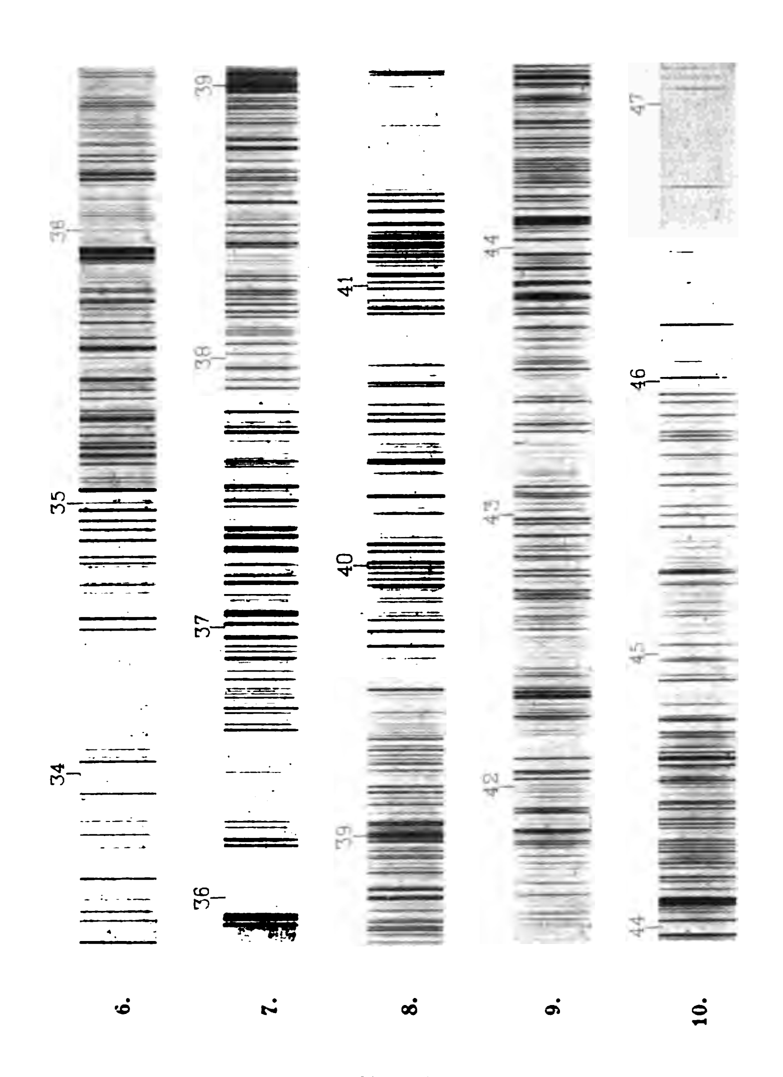
F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente. XI.



Vanadium.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente. XI.



Vanadium.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Zur Erklärung der absolut convergenten uneigentlichen Integrale

von

O. Stolz,

c. M. k. Akad.

Herr de la Vallée-Poussin hat in der Abhandlung: »Rech. sur la convergence des intégrales définies«[1] die absolute Convergenz der uneigentlichen Integrale über ein endliches Gebiet, sowohl der einfachen, als der mehrfachen, auf eine neue Weise erklärt. Es lässt sich indess auch die sonst übliche Erklärung dieser Integrale so weit ausdehnen, dass sie den allgemeinen, von de la Vallée-Poussin betrachteten Fall umfasst. Dies scheint mir von Wichtigkeit, weil dadurch die Darstellung, welche bisher für die einfacheren Arten der in Rede stehenden Integrale benützt worden ist, als völlig ausreichend erwiesen wird. Es dürfte genügen, die Untersuchung für die einfachen Integrale durchzuführen.

1. Für das einfache Integral hat die Erklärung, auf welche wir soeben anspielten, bereits A. Harnack gegeben.[2] Sie lautet, genauer formulirt, folgendermassen:

Erklärung. »Die Function $f(x)$ sei mindestens in allen Punkten des endlichen Intervalles (a, b), wobei $a < b$ sein soll, mit Ausnahme einer discreten,[3] endlichen oder unendlichen Menge $\mathfrak{M}$ eindeutig definirt und in diesem Intervalle nicht endlich. Dagegen soll $f(x)$ in jedem Theile des Inter-

---

[1] Journal de Mathém. ann. 1892, p. 421 f.

[2] Vergl. Math. Ann., Bd. 21, S. 325; Bd. 24, S. 220.

[3] Vergl. z. B. diese Berichte, Jahrg. 1897, S. 562.

valles (a, b), welcher keinen Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ enthält, endlich und integrirbar sein. Über die Punkte dieser Menge wird eine Schaar von positiven Strecken $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$ in der Weise ausgebreitet, dass nach Entfernung derselben aus dem Intervalle (a, b) nur Strecken übrig bleiben, welche keinen Punkt von $\mathfrak{M}$, weder im Inneren, noch an den Grenzen, enthalten. Die letzteren Strecken seien der Reihe nach mit $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{k_n}$ und die Abscissen ihrer dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte mit $b_1 b_2 \ldots b_{k_n}$ bezeichnet. Zufolge des Umstandes, dass die Menge $\mathfrak{M}$ den Inhalt Null hat, können wir jeder positiven Zahl ε eine kleinere, δ, so zuordnen, dass wenn nur jedes δ_r kleiner als δ gewählt wird, stets

$$0 < \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n < \varepsilon \tag{1}$$

ist. Gibt es dann eine Zahl J von der Beschaffenheit, dass wenn nur jede Strecke δ_r kleiner als δ ist, neben der Beziehung (1) auch die folgende:

$$\left| J - \sum_{1}^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r + \varepsilon_r} f(x)\, dx \right| < \varepsilon \tag{2}$$

besteht, so heisst J nach Harnack das Integral der Function $f(x)$ im Intervalle (a, b).«[1] Um die soeben erwähnte Eigenschaft der Zahl J kurz anzudeuten, setzen wir

$$J = \lim_{\delta_r = 0} \sum_{1}^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r + \varepsilon_r} f(x)\, dx. \tag{3}$$

Die auf der rechten Seite von (3) befindliche Summe wollen wir kurz mit $S(\delta_1 \ldots \delta_n)$ oder S bezeichnen.

Die zur Existenz eines Grenzwerthes J von der obigen Beschaffenheit nothwendige und hinreichende Bedingung lässt sich folgendermassen aussprechen: »Jeder Zahl $\varepsilon > 0$ entspricht eine kleinere $\delta > 0$ in der Art, dass wenn $\delta_1 \ldots \delta_n$ einer und $\delta'_1 \ldots \delta'_{n'}$ irgend zwei Schaaren von Strecken, welche

[1] Gleichbedeutend mit der Festsetzung i. T. ist die Aussage, dass wenn nur die Summe $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$ kleiner als δ ist, alsdann die Beziehung (2) besteht. Es scheint mir jedoch die i. T. gewählte Formulirung für das Folgende etwas bequemer zu sein.

die Punktmenge $\mathfrak{M}$ vollständig bedecken, bedeuten, wofür unter der Voraussetzung, dass jedes δ_r, sowie jedes δ'_r kleiner als δ ist,

$$\delta_1+\ldots+\delta_n<\varepsilon \tag{4}$$

$$\delta'_1+\ldots+\delta'_{n'}<\varepsilon \tag{5}$$

sein soll, dann stets

$$|S'-S|<\varepsilon \tag{6}$$

ist.« Hier habe S' die nämliche Bedeutung bezüglich der Schaar $\delta'_1\ldots\delta'_{n'}$, wie S gegenüber der Schaar $\delta_1\ldots\delta_n$.

Angenommen nämlich, es sei der Grenzwerth J vorhanden und es genügen die Strecken der zweiten Schaar der Bedingung, dass $\delta'_r<\delta$ $(r=1\ldots n')$ ist, so besteht neben der Ungleichung (5) auch die Beziehung

$$|J-S'|<\varepsilon.$$

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf (2), dass

$$|S'-S|<2\varepsilon \tag{7}$$

sein muss. 2ε ist aber ebenso willkürlich als ε; wir können daher anstatt (7) auch die Beziehung (6) ansetzen. — Dass aber die genannte Bedingung zum Vorhandensein eines Grenzwerthes J ausreicht, schliessen wir in bekannter Weise[1] mit Hilfe der beiden Unbestimmtheitsgrenzen der Summe

$$S(\delta_1\ldots\delta_n)=\sum_1^{k_n}{}_r\int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r}f(x)\,dx \tag{8}$$

bei $\lim\delta_r=0$ $(r=1\ldots n)$. Aus der Ungleichung (5) erkennen wir sofort, dass diese beiden Unbestimmtheitsgrenzen endlich und weiter, dass sie einander gleich sind, dass somit die Summe (8) bei $\lim\delta_r=0$ $(r=1\ldots n)$ einen endlichen Grenzwerth hat.[2]

2. Schrumpft die Menge $\mathfrak{M}$ auf einen der Endpunkte des Intervalles (a, b), z. B. $x=a$ zusammen, so brauchen wir nur

[1] Vergl. des Verfassers Vorlesungen über allgem. Arithmetik, I. T., S. 166.

[2] Wir brauchen im Folgenden den Satz über die zum Vorhandensein eines Grenzwerthes J nothwendige und hinreichende Bedingung nicht zu benützen.

ein Intervall $\delta_1 = \xi$, und es geht der oben erklärte Grenzwerth J in

$$\lim_{\xi=+0} \int_{a+\xi}^{b} f(x)\,dx$$

über. Auch wenn die Menge $\mathfrak{M}$ bloss aus dem einzigen Punkte $x = c$ zwischen $x = a$ und $x = b$ besteht, reichen wir mit einer Strecke δ_1 aus, die aber den Punkt $x = c$ umgeben muss, also durch ihn in zwei Theile $\xi\eta$ zerfällt. Alsdann findet man unseren Grenzwerth

$$J = \lim_{\xi=+0\ \eta=+0} \left\{ \int_a^{c-\xi} f(x)\,dx + \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx \right\},$$

wofür man indess

$$J = \lim_{\xi=+0} \int_a^{c-\xi} f(x)\,dx + \lim_{\eta=+0} \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx$$

schreiben darf. Hat nämlich eine Function von der Form $\varphi(\xi)+\psi(\eta)$ bei $\lim \xi = +0$, $\lim \eta = +0$ einen endlichen Grenzwerth J, so muss sowohl $\varphi(\xi)$ bei $\lim \xi = +0$, als auch $\psi(\eta)$ bei $\lim \eta = +0$ einen endlichen Grenzwerth haben. Denn es ist J nicht allein gleich der Summe der oberen Unbestimmtheitsgrenze von $\varphi(\xi)$ bei $\lim \xi = +0$ und der oberen von $\psi(\eta)$ bei $\lim \eta = +0$, sondern auch der Summe der unteren Unbestimmtheitsgrenze von $\varphi(\xi)$ bei $\lim \xi = +0$ und der unteren von $\psi(\eta)$ bei $\lim \eta = +0$, so dass sowohl die beiden Unbestimmtheitsgrenzen von $\varphi(\xi)$, als auch die von $\psi(\eta)$ einander gleich sein müssen.[1]

In den bisher betrachteten Fällen stimmt die Harnack'sche Erklärung des uneigentlichen Integrals mit der Cauchy'schen, allgemein üblichen vollständig überein. Dies gilt stets, wenn die Menge $\mathfrak{M}$ aus einer endlichen Anzahl von Punkten besteht.

Wenn aber die Menge $\mathfrak{M}$ eine unendliche von erster Gattung ist, so lässt sich der Harnack'sche Grenzwerth nicht ohne Weiteres mit dem üblichen uneigentlichen Integral[2] identificiren.

[1] Den besonderen Fall dieses Satzes, dass $\varphi(\xi)-\varphi(\eta)$ bei $\lim \xi = 0$, $\lim \eta = 0$ den Grenzwerth Null hat, behandelt Osgood in der Schrift: »Introduction to infinite series (1897)«, p. 64.

[2] Vergl. Dini-Lüroth, Grundlagen, §. 217 und u. Nr. 6.

Ebensowenig vermögen wir aus den Angaben und Festsetzungen von Nr. 1 allein nachzuweisen, dass wir über den Grenzwerth J alles das aussagen können, was von einem bestimmten Integral verlangt wird. Es lässt sich daraus nicht einmal der Satz ableiten, dass die in Nr. 1 betrachtete Function $f(x)$ auch in jedem Intervalle (a, c), wo $a < c < b$ ist, ein uneigentliches Integral besitzt. Harnack hat a. a. O. die Frage, ob der in Rede stehende Grenzwerth J wirklich den Namen des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ verdient, nicht erschöpfend erörtert.

Auf die Grenzwerthe J lassen sich jedoch, wie wir sehen werden, alle jene Sätze über die eigentlichen bestimmten Integrale, welche nicht den Sinn verlieren, ausdehnen im Falle, dass die Function $f(x)$ innerhalb des Intervalles (a, b) ihr Zeichen nicht ändert, und ferner auch dann, wenn zwar die Function $f(x)$ ihr Zeichen im Intervalle (a, b) ändert, jedoch für ihren absoluten Betrag $|f(x)|$ ebenfalls ein Grenzwerth von der oben angegebenen Beschaffenheit existirt.

3. Wir nehmen nunmehr an, dass die in Rede stehende Function $f(x)$ innerhalb des Intervalles (a, b) ihr Zeichen nicht ändert, dass also z. B. für jedes x: $a \leqq x \leqq b$ $f(x) \geqq 0$ ist. Dann besteht der Satz:

»Die nicht-negativen Summen

$$\sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx (= S) \tag{8}$$

haben, während den $\delta_1 \ldots \delta_n$ alle nach Nr. 1 möglichen Werthe beigelegt werden, zur oberen Grenze entweder $+\infty$ oder eine endliche Zahl $J \geqq 0$. Im letzteren Falle ist J der Grenzwerth der Summe (8) bei $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ in dem in Nr. 1 angegebenen Sinne, und wird als solcher zum Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ erklärt, was wir in Nr. 5 rechtfertigen werden.«

Beweis. Wir nehmen an, dass jede Summe (8) unter derselben positiven Zahl C liegt.

a) Zunächst betrachten wir nur eine unbegrenzte Reihe solcher Bedeckungen $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_m \ldots$ der Punktmenge $\mathfrak{M}$, dass jede zu $\mathfrak{T}_m$ gehörige Strecke kleiner als eine beliebig gegebene Zahl Δ ausfällt, wenn nur m gross genug gewählt wird, und zwar Bedeckungen von der Art, dass jede zu $\mathfrak{T}_{m+1}$ gehörige Strecke völlig in einer zu $\mathfrak{T}_m$ gehörigen liegt. Die $\mathfrak{T}_m$ ausmachenden Strecken seien

$$\delta_{m1}, \delta_{m2} \ldots \delta_{m, n_m}. \tag{9}$$

Nach Wegnahme der Segmente (9) mögen vom Intervalle (a, b) die Strecken

$$\varepsilon_{m1}, \varepsilon_{m2} \ldots \varepsilon_{m, p_m} \qquad (p_m \leqq n_m + 1)$$

übrig bleiben, welche gar keinen Punkt von $\mathfrak{M}$ enthalten. Ihre dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte haben beziehungsweise die Abscissen $x = b_{m1} \ldots b_{m, p_m}$.

Wir bilden die Summe

$$\Sigma_m = \sum_1^{p_m}{}_r \int_{b_{m,r}}^{b_{m,r}+\varepsilon_{m,r}} f(x)\,dx \tag{10}$$

und bemerken sofort, dass Σ_m bei wachsendem m nicht abnehmen kann. Zu den Strecken $\varepsilon_{m,r}$ treten nämlich beim Übergange von der Bedeckung $\mathfrak{T}_m$ zu $\mathfrak{T}_{m+1}$ diejenigen Unterabtheilungen der $\delta_{m1} \ldots \delta_{m, n_m}$ hinzu, welche gar keinen Punkt vom $\mathfrak{M}$ enthalten. Somit erscheinen in Σ_{m+1} alle Glieder von Σ_m wieder und ausserdem vielleicht neue. Da keines von allen negativ ist, so hat man also

$$\Sigma_{m+1} \geqq \Sigma_m. \tag{11}$$

Es ist jedoch bei jedem m $\Sigma_m < C$, somit hat Σ_m bei $\lim m = +\infty$ einen endlichen Grenzwerth J. Dabei ist

$$\lim_{m=+\infty} \Sigma_m = J \text{ und } J \geqq \Sigma_m. \tag{12}$$

Somit lässt sich jedem $\varepsilon > 0$ ein $\mu > 0$ so zuordnen, dass wenn nur $m > \mu$ ist, alsdann

$$0 \leqq J - \Sigma_m < \varepsilon \quad \text{oder} \quad J < \Sigma_m + \varepsilon \tag{13}$$

ist.

b) Wie die Strecken $\delta_1 \dots \delta_n$ auch gewählt werden mögen, die Summe (8), die wir kurz mit S bezeichnen, kann nicht grösser als die soeben gewonnene Zahl J sein. Dies besagt dann in Verbindung mit der Beziehung (13), dass J die obere Grenze für alle möglichen Summen (8) ist.

Die Ungleichung $J \geqq S$ ergibt sich leicht durch die Bemerkung, dass nach (12)

$$S - J \leqq S - \Sigma_m \tag{14}$$

ist und dass sich jedem $\varepsilon > 0$ ganze Zahlen m so zuordnen lassen, dass

$$S - \Sigma_m < \varepsilon \tag{14*}$$

ausfällt. Dann hat man nach (14) $S - J < \varepsilon$; also ist in der That $S \leqq J$.

Die Formel (14*) wird folgendermassen bewiesen. Wir denken uns auf der Strecke (a, b) neben den Strecken $\delta_1 \dots \delta_n$ das Streckensystem (9) zunächst bei willkürlichem m aufgetragen. Die beiden dadurch entstehenden Streckensysteme $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{k_n}$ und $\varepsilon_{m,1} \dots \varepsilon_{m,p_m}$ haben eine Reihe von Theilen der Strecke (a, b) gemein. Die ausserdem noch vorhandenen Theile der Strecken ε_r gehören den Strecken (9), die der Strecken $\varepsilon_{m,r}$ den Strecken δ_r an. Zerlegen wir nun die Integrale, aus denen S besteht, in die Integrale von $f(x)$ über die auf diese Art erhaltenen Theile der Intervalle ε_r und die, aus denen Σ_m besteht, in die Integrale von $f(x)$ über die ebenso erhaltenen Theile der Intervalle $\varepsilon_{m,r}$, so fallen aus der Differenz $S - \Sigma_m$ die Integrale von $f(x)$ über die den beiden Systemen von Strecken gemeinsamen Theile aus. Die noch übrigen Glieder der so umgestalteten Summe Σ_m lassen wir weg. Die Summe der noch übrigen Glieder der in der soeben erwähnten Weise aufgelösten Summe S ist, da die Function $f(x)$ in den Strecken $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{k_n}$ endlich ist, also unter einer Constanten $H > 0$ liegt, kleiner als $H \sum_r \delta_{m,r}$. Wir finden daher

$$S - \Sigma_m < H \sum_1^{p_m} {}_r \, \delta_{m,r}. \tag{15}$$

Nun können wir m so gross annehmen, dass $\sum r\,\delta_{m,r}$ kleiner als $\varepsilon : H$ ist. Hiedurch folgt aus (15) die Formel (14*).

c) Jetzt ist noch zu zeigen, dass thatsächlich im Sinne der in Nr. 1 aufgestellten Erklärung

$$\lim_{\delta_r = 0} S = J \tag{16}$$

ist. Verstehen wir unter m eine bestimmte ganze Zahl, nur so gewählt, dass die Ungleichung (13) gilt, so haben wir

$$0 \leqq J - S < (\Sigma_m - S) + \varepsilon. \tag{17}$$

Wenn wir H_m eine solche Constante sein lassen dass $0 \leqq f(x) < H_m$ ist für jedes x in einem der Intervalle

$$(b_{m,r},\ b_{m,r} + \varepsilon_{m,r}) \qquad (r = 1, 2 \ldots p_m),$$

so können wir aus (15) durch Vertauschung der Streckensysteme $\delta_1 \ldots \delta_n$ und (9) die Ungleichung

$$\Sigma_m - S < H_m \sum_1^n r\,\delta_r \tag{18}$$

ableiten. Zufolge des Charakters der Menge $\mathfrak{M}$ (S. 1) lässt sich der Zahl $\varepsilon : H_m$ eine andere $\delta > 0$ so zuordnen, dass wenn nur jede Strecke $\delta_r (r = 1 \ldots n)$ kleiner als δ ist,

$$\sum_1^n r\,\delta_r < \varepsilon : H_m \tag{18*}$$

ist. Unter der nämlichen Voraussetzung über die δ_r ergibt sich aus (17) und (18) die Beziehung

$$0 \leqq J - S < 2\varepsilon.$$

Dies kommt auf die Formel (16) hinaus. In der That darf man in (18*) $\varepsilon : H_m$ durch 2ε ersetzen. Hiezu ist bloss erforderlich, dass $\varepsilon : H_m < 2\varepsilon$, d. i. $H_m > 1 : 2$ sei, was man von vorneherein annehmen darf.

4. Absolut convergente Integrale im Allgemeinen.

Satz. »Wenn die Function $f(x)$ neben den in der Erklärung von Nr. 1 aufgeführten Eigenschaften noch die besitzt, dass

sie im Intervalle (a, b) ihr Zeichen wechselt und ihr absoluter Betrag $|f(x)|$ ein uneigentliches Integral in diesem Intervalle zulässt, so existirt der in der genannten Erklärung aufgestellte Grenzwerth ebenfalls. Auch er soll als das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet werden, und zwar als das absolut convergente.«

Beweis. Wir führen zwei neue Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ ein durch die folgende Erklärung. In allen Punkten x des Intervalles (a, b), wo $f(x) > 0$ ist, sei $f_1(x) = f(x)$, in den übrigen sei $f_1(x) = 0$; dagegen sei $f_2(x) = -f(x)$ für alle Punkte x von (a, b), wo $f(x) < 0$ ist, $f_2(x) = 0$ für die übrigen. Dann hat man in jedem Punkte x von (a, b)

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \qquad |f(x)| = f_1(x) + f_2(x). \tag{19}$$

$f_1(x)$ und $f_2(x)$ sind endlich und integrirbar[1] in jedem Theile des Intervalles (a, b), zu dem kein Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ gehört. $f_1(x)$ und $f_2(x)$ lassen aber auch je ein Integral über das ganze Intervall (a, b) zu. Dies folgt unmittelbar aus dem Satze der vorigen Nummer, da die nicht negativen Summen

$$\sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\delta_r} f_1(x)\,dx \qquad \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\delta_r} f_2(x)\,dx$$

beide vermöge der zweiten der Gleichungen (19) kleiner als die Summe

$$\sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\delta_r} |f(x)|\,dx$$

sind, folglich beide, wie diese letzte Summe, eine endliche obere Grenze besitzen, wenn den $\delta_1 \ldots \delta_n$ alle nach Nr. 1 möglichen Werthe beigelegt werden.

---

[1] Dies beruht auf dem Umstande, dass in jedem Intervalle von x, wo $f(x)$ endlich ist und sein Zeichen wechselt, die Schwankung von $f_1(x)$, sowie die von $f_2(x)$ kleiner ist als die von $f(x)$.

Zufolge der ersten der Gleichungen (19) hat man

$$\sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx = \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f_1(x)\,dx - \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f_2(x)\,dx.$$

Der Minuend und Subtrahend rechts haben nach dem gerade Bemerkten bei $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1 \ldots n)$ je einen endlichen Grenzwerth, folglich hat einen solchen auch die linke Seite von (20). Und zwar besteht die Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

5. Nachweis, dass der in Nr. 4 aufgestellte Grenzwerth, wovon der in Nr. 3 ein besonderer Fall ist, die Eigenschaften eines bestimmten Integrals besitzt. Dieselben lassen sich auf die nachstehenden Sätze zurückführen. Die darin vorkommende Function $f(x)$ hat ausser den in der Erklärung der Nr. 1 angegebenen Eigenschaften noch die, dass ihr absoluter Betrag, $|f(x)|$, ein Integral über das Intervall (a, b) zulässt.

I. Satz. »Liegt c zwischen a und b, so lässt die Function $f(x)$ sowohl über das Intervall (a, c), als auch über (c, b) ein absolut convergentes Integral zu, und zwar hat man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.\text{«} \tag{a}$$

Beweis. Der Punkt $x = c$ gehört entweder zu einer Strecke δ_r oder er liegt im Innern einer Strecke ε_r. Im letzteren Falle zerlegt er sie in zwei Theile. Nehmen wir jeden von ihnen für sich unter die Strecken $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k_n}$, in welchen kein Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ sich befindet (siehe S. 2), auf, so zerfallen dieselben in dem einen, wie in dem anderen Falle in zwei Gruppen: $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{q_s}$ im Intervalle (a, c) und $\varepsilon_{q_s+1} \ldots \varepsilon_{k_n}$ im Intervalle (c, b) gelegen. Man hat nun

$$\sum_1^{q_s}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f(x)|\,dx \leqq \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f(x)|\,dx,$$

$$\sum_{q_s+1}^{k_r} r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f(x)|\,dx \leqq \sum_1^{k_n} r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f(x)|\,dx.$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichungen zufolge der Voraussetzung stets unter einer endlichen Zahl liegt, so gilt das Nämliche von der linken. Daher sind die Integrale

$$\int_a^c |f(x)|\,dx, \qquad \int_c^b |f(x)|\,dx$$

vorhanden, somit auch die Integrale $\int_a^c f(x)\,dx$ und $\int_c^b f(x)\,dx$.

Aus der Beziehung

$$\sum_1^{k_n} r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx = \sum_1^{q_s} r\, f(x)\,dx + \sum_{q_s+1}^{k_n} r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx$$

erschliesst man durch den Grenzübergang $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1, \ldots n)$ die Formel *(a)*.

II. Satz.[1] »Es seien durch eine besondere Vorschrift gewisse Strecken $\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_m$ aus dem Intervalle (a, b) herausgehoben, deren dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte die Abscissen $x = e_1, e_2 \ldots e_m$ besitzen. Wenn alsdann die Summe

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m \tag{b}$$

bei $\lim \eta_r = 0$ $(r = 1, 2 \ldots m)$ zum Grenzwerthe Null convergirt, so gilt das Nämliche auch von der Summe der Integrale

$$\sum_1^m r \int_{e_r}^{e_r+\eta_r} f(x)\,dx, \tag{c}$$

d. h. jedem beliebig gegebenen $\varepsilon > 0$ entspricht ein $\delta > 0$ so, dass wenn nur jedes η_r $(r = 1 \ldots m)$ kleiner als δ ist,[2]

---

[1] Vergl. de la Vallée-Poussin, a. a. O. Nr. 15.

[2] Anstatt des gesperrt Gedruckten kann man auch sagen: »wenn nur die Summe $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m$ kleiner als δ ist, die Ungleichung *(d)* besteht«.

dann nicht allein die Summe *(b)* kleiner als ε, sondern auch

$$\left| \sum_1^m {}_r \int_{c_r}^{c_r+\eta_r} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \qquad (d)$$

ist.«

Beweis. 1. Fall. Fallen die η_r, wenn $m = n$ ist, der Reihe nach mit den in Nr. 1 eingeführten Strecken $\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n$ zusammen, so ergibt sich die Beziehung *(d)* einfach aus der Erklärung (2) auf S. 2. Bedeuten nämlich $c_1 c_2 \ldots c_n$ der Reihe nach die Abscissen der dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte der Intervalle $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$, so ist nach dem I. Satze

$$J = \sum_1^{k_n} {}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx + \sum_1^n {}_r \int_{c_r}^{c_r+\delta_r} f(x)\,dx.$$

Setzt man diesen Ausdruck für J in die Ungleichung (2) so findet man, dass wenn nur jedes $\delta_r < \delta$ $(r = 1 \ldots n)$ ist, alsdann

$$\left| \sum_1^n {}_r \int_{c_r}^{c_r+\delta_r} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \qquad (e)$$

ist, w. z. b. w. — Neben der Beziehung *(e)* besteht zufolge der Voraussetzung, dass $\int_a^b |f(x)|\,dx$ ebenfalls existirt, auch die folgende. Es ist

$$Z \equiv \sum_1^n {}_r \int_{c_r}^{c_r+\delta_r} |f(x)|\,dx < \varepsilon, \qquad (f)$$

wenn nur jedes δ_r kleiner ist als eine gewisse Zahl, die wir zum Unterschiede vom obigen δ mit Δ bezeichnen wollen.

2. Fall. Deckt sich das System der Strecken η_r nicht völlig mit dem der δ_r, so müssen bei gehöriger Kleinheit der η_r dieselben in folgende drei Classen zerfallen. Einige von ihnen liegen innerhalb je eines ε_r oder fallen gar mit je einem solchen zusammen, während andere theilweise je in einem ε_r und einem anstossenden δ_r liegen. Endlich können unter den η_r auch

solche vorhanden sein, welche vollständig je in einem δ_r liegen oder gar mit einem solchen zusammenfallen. Die η_r der ersten Classe mögen in Verbindung mit den aus den η_r der zweiten Classe hervorgehenden Theilen je eines ε_r als das System von Segmenten $\vartheta_1\vartheta_2\ldots\vartheta_{p_m}$ bezeichnet werden.

Lassen wir nun $\delta_1\delta_2\ldots\delta_n$ ein beliebiges System von Strecken, welche die Punktmenge $\mathfrak{M}$ vollständig bedecken, sein, so können wir den absoluten Betrag der Summe *(c)* in nachstehender Weise abschätzen. In den Strecken ε_r ist die Function $f(x)$ durchaus endlich, d. h. es gibt eine positive Zahl H derart, dass wenn x einen Punkt irgend eines der ε_r bezeichnet,

$$|f(x)| < H$$

ist. Demnach hat man sicher

$$\left|\sum_1^m {}_r \int_{e_r}^{e_r+\eta_r} f(x)\,dx\right| < H \sum_1^{p_m} {}_r \vartheta_r + Z. \tag{g}$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung lässt sich der Satz II auch in dem vorliegenden Falle erweisen. Denke ich mir zunächst die δ_r sämmtlich kleiner als Δ, so ist nach *(f)* $Z < \varepsilon$. Nun wähle ich ein solches System von δ_r aus und bestimme für die Strecken ε_r, die von $b-a$ nach Wegnahme dieser δ_r übrig bleiben, die Zahl H. Es gibt aber zufolge Voraussetzung eine positive Zahl δ, welche man auch kleiner als Δ annehmen kann, von der Art, dass wenn nur jedes η_r $(r = 1\ldots m)$ kleiner als δ ist, alsdann die Summe *(b)* kleiner ist als $\varepsilon : H$. Da die Summe

$$\sum_1^{p_m} {}_r \vartheta_r \leqq \sum_1^m {}_r \eta_r$$

ist, so lässt sich nun aus *(g)* schliessen, dass wenn nur ein jedes η_r $(r = 1\ldots m)$ kleiner als δ ist, dann stets

$$\left|\sum_1^m {}_r \int_{e_r}^{e_r+\eta_r} f(x)\,dx\right| < 2\varepsilon$$

ist. Damit ist der Beweis vollständig erbracht.

III. Satz. »Fügen wir zur discreten Punktmenge $\mathfrak{M}$ eine zweite $\mathfrak{N}$ im Intervalle (a, b), welche ebenfalls den Inhalt Null hat, so entsteht darin eine dritte discrete Menge $\mathfrak{P}$ von Punkten, zu deren vollständiger Bedeckung die Strecken $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m$ erforderlich seien. Bezeichnen dann $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_{qm}$ die Strecken, welche vom Intervalle (a, b) nach Wegnahme der ζ_r übrig bleiben, also keinen Punkt von $\mathfrak{P}$ enthalten, und $i_1 i_2 \ldots i_{qm}$ die Abscissen der dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte derselben, so lässt sich das Integral J mit Hilfe dieser Zahlen in gleicher Weise erklären, wie oben mittelst der Zahlen ε_r und b_r, d. i. man hat

$$J = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\zeta_r = 0} \sum_1^{qm}{}_r \int_{i_r}^{i_r + \varkappa_r} f(x)\,dx.\text{«} \qquad (h)$$

Beweis. $\delta_1 \ldots \delta_n$ seien wie bisher Strecken, welche die Punkte der Menge $\mathfrak{M}$ vollständig bedecken. Fallen bei beliebigem $n = m$ in sie der Reihe nach die Strecken ζ_r hinein, so ist der dritte Ausdruck in *(h)* mit (3) in Nr. 2 identisch. Wenn aber bei gehöriger Kleinheit aller δ_r zu diesen noch andere Strecken λ_r treten müssen, um die Punkte der Menge $\mathfrak{P}$ völlig zu bedecken, d. i. um ein System von Strecken ζ_r zu liefern, so liegen die λ_r innerhalb der in Nr. 1 eingeführten Strecken $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{k_n}$. Somit fällt entweder irgend ein $\varkappa_r$ mit einem ε_r zusammen oder ist Theil eines solchen. Zerlegen wir nun jedes Glied der Summe

$$\sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r + \varepsilon_r} f(x)\,dx \qquad (i)$$

in die den Theilen des betreffenden ε_r entsprechenden Integrale, so müssen wir, um auf die in *(h)* stehende Summe zu kommen, aus der umgestalteten Summe die zu den Strecken λ_r gehörigen Integrale weglassen. Da aber die Summe der λ_r bei $\lim \zeta_r = 0$ den Grenzwerth Null hat, weil die Menge $\mathfrak{N}$ discret ist, so hat die Summe jener Glieder von *(i)* zufolge des vorhergehenden Satzes bei $\lim \zeta_r = 0$ den Grenzwerth Null. Daher ist der Grenzwerth von *(i)* bei $\lim \delta_r = 0$ gleich dem der Summe

$$\sum_{1}^{q_n} r \int_{i_r}^{i_r+\varkappa_r} f(x)\,dx$$

bei $\lim \zeta_r = 0$ $(r = 1 \dots m)$.

IV. Satz. »Hat die Function $g(x)$ ähnliche Eigenschaften im Intervalle (a, b) wie die $f(x)$, d. i. ist sie endlich und integrirbar in allen Theilen desselben, welche keinen Punkt einer discreten Menge $\mathfrak{N}$ enthalten, und ist $\int_a^b g(x)dx$ absolut convergent, so ist $f(x)+g(x)$ endlich und integrirbar in allen Theilen des Intervalles (a, b), welche keinen Punkt der durch Vereinigung der Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ entstehenden Menge $\mathfrak{P}$ enthalten, und es convergirt das Integral $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx$ absolut. Dabei ist

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.« \qquad (k)$$

Sind die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ identisch, so ist der Satz IV unmittelbar einleuchtend. Er ergibt sich nämlich aus der Formel

$$\sum_{1}^{k_n} r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} \{f(x)+g(x)\}\,dx =$$

$$= \sum_{1}^{k_r} r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx + \sum_{1}^{k_n} r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} g(x)\,dx$$

durch den Grenzübergang $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1 \dots n)$. Der andere Fall, dass die Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ nicht identisch sind, lässt sich mit Hilfe des Satzes III sofort auf den soeben behandelten zurückführen.

6. Nunmehr lässt sich auch zeigen, dass die Erklärung des absolut convergenten Integrals nach Harnack im Falle, dass die unendliche Punktmenge $\mathfrak{M}$ von erster Gattung ist, mit der sonst üblichen zusammenfällt. Dabei müssen wir an die Nr. 2 gemachte Bemerkung anknüpfen, dass wenn $\mathfrak{M}$

bloss aus einer endlichen Anzahl von Punkten besteht, die beiden Erklärungen übereinstimmen.

a) Der Harnack'sche Grenzwerth J geht in den gebräuchlichen über. Kraft des Satzes I können wir das Integral $\int_a^b f(x)dx$ in eine Summe von solchen Integralen zerlegen, dass in dem Intervalle eines jeden nur ein Grenzpunkt der höchsten Ordnung, und zwar an einer der beiden Grenzen des Integrals vorkommt. Es wird daher genügen, anzunehmen, dass im Intervalle (a, b) etwa der Punkt $x = a$ der einzige Grenzpunkt der höchsten für die Menge $\mathfrak{M}$ überhaupt möglichen Ordnung sei. Zunächst möge $x = a$ Grenzpunkt erster Ordnung sein, so dass, wenn x' irgend Werth zwischen a und b bedeutet, nur im Theilintervalle (a, x') die Punkte von $\mathfrak{M}$ in unendlicher Anzahl sich befinden. Wir setzen nach dem Satze I

$$J = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{x'} f(x)dx + \int_{x'}^b f(x)dx. \qquad (l)$$

Nach Nr. 2 ist das zweite Glied dieser Summe zugleich das uneigentliche Integral der Function $f(x)$ im Intervalle (x', b') im gewöhnlichen Sinne. Da nun nach dem Satze II

$$\lim_{x'=a+0} \int_a^{x'} f(x)dx = 0 \qquad (m)$$

ist, so finden wir aus *(l)* beim Grenzübergange $\lim x' = a + 0$

$$J = \lim_{x'=a+0} \int_{x'}^b f(x)dx. \qquad (n)$$

Also ist J auch das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ nach der älteren Erklärung. — Wenn $\mathfrak{M}$ eine unendliche Menge von Punkten mit dem einzigen Grenzpunkte $x = a$ von der zweiten Ordnung bedeutet, so stellen wir wieder die Gleichung *(l)* auf. In derselben wird dem soeben Gesagten zufolge der zweite Theil rechts mit dem uneigentlichen Integrale $\int_{x'}^b f(x)dx$ der älteren Erklärung übereinstimmen. Es besteht ferner auch jetzt

die Formel *(m)* und daher auch *(n)*, d. h. es ist J auch in diesem Falle das, was man unter dem Integrale $\int_a^b f(x)dx$ bisher zu verstehen gewöhnt war. U. s. f.

b) Das uneigentliche Integral der älteren Erklärung lässt sich unter der Voraussetzung, dass es absolut convergirt, als ein Grenzwerth von der Form J auffassen. Um das einzusehen, brauchen wir uns nur davon zu überzeugen, dass $f(x)$ unter den soeben angegebenen Umständen von $x = a$ bis $x = b$ ein absolut convergentes Integral im Harnack'schen Sinne zulässt. — Ist zunächst $x = a$ der einzige Grenzpunkt 1. Ordnung der Menge $\mathfrak{M}$, so soll zufolge Voraussetzung die Formel

$$K = \int_a^b |f(x)|dx = \lim_{x'=a+0} \int_{x'}^b |f(x)|dx \qquad (o)$$

bestehen, d. h. es soll jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so entsprechen, dass wenn nur $0 < x' - a < \delta$ ist, alsdann

$$K - \varepsilon < \int_{x'}^b |f(x)|dx < K + \varepsilon \qquad (p)$$

ist. Verstehen wir dann wie bisher unter $\delta_1 \ldots \delta_n$ ein System von Strecken, welche die Punkte der Menge $\mathfrak{M}$ vollständig bedecken, und setzen $a + \delta_1 = x'$, so lässt $|f(x)|$ im Intervalle (x', b) ein Integral im Sinne von Harnack zu. Und zwar haben wir nach dem Satze I auf S. 10

$$\sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f(x)|dx \leqq \int_{x'}^b |f(x)| dx. \qquad (q)$$

Wenn wir uns nun nur $\delta_1 = x' - a$ kleiner als δ denken, so ist also nach *(p)* stets

$$(\Sigma =) \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} |f(x)|dx < K + \varepsilon, \qquad (r)$$

d. h. es liegt die Summe Σ, wenn nur $\delta_1 < \delta$ ist, bei sonst beliebigen $\delta_2 \ldots \delta_n$ unter einer endlichen Zahl. Somit hat

dieselbe nach Nr. 3 bei $\lim \delta_r = 0$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ einen endlichen Grenzwerth: $\int_a^b |f(x)|dx$. — Ist $x = a$ der einzige Grenzpunkt 2. Ordnung für die Menge $\mathfrak{M}$, so gelten sofort wieder die Beziehungen *(o)*, *(p)*, *(q)* in dem Sinne, dass $\int_{x'}^b |f(x)|dx$ ein Integral der neuen Erklärung bedeutet. Hieraus folgt dann auch die Ungleichung *(r)* und damit wieder die Existenz von $\int_a^b |f(x)|dx$ im neuen Sinne. U. s. f.

7. Unter den uneigentlichen einfachen Integralen gibt es sowohl absolut, als auch nicht absolut (oder nach de la Vallée-Poussin relativ) convergente. Derselbe hat den Begriff der letzteren erheblich erweitert (a. a. O. Nr. 56).

Bei den uneigentlichen Doppel- und mehrfachen Integralen fällt die Convergenz überhaupt bekanntlich mit der absoluten zusammen. Auf dieselben lässt sich dann die im Vorstehenden für die einfachen Integrale gegebene Erklärung nebst der daran geknüpften Untersuchung ohne Weiteres ausdehnen. Dass mit Hilfe der hier dargelegten Theorie auch die wichtigen Sätze, welche de la Vallée-Poussin in der oft erwähnten Abhandlung über die Verwandlung eines Doppelintegrals in ein zweifaches aufgestellt hat, abgeleitet werden können, gedenken wir in einer späteren Mittheilung zu zeigen. Dazu bedarf es gerade des allgemeinen Begriffes vom absolut convergenten einfachen Integral, welcher im Vorstehenden entwickelt ist.

Messungen an Flammen- und Tropfelektroden

von

Dr. E. R. v. Schweidler.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

Die Methode, mittelst frei brennender Flammen, glimmender Körper (Lunten, imprägnirter Papierstreifen etc.) oder sich in Tropfen auflösender Flüssigkeitsstrahlen das Potential in einem bestimmten Punkte eines elektrischen Feldes zu messen, ist ziemlich alt. Flammen und Lunten werden bei Untersuchungen über atmosphärische Elektricität seit einem Vorschlage Volta's (1788) angewendet, daneben auch die Tropfelektroden seit Kelvin, der zugleich die im Princip gleiche Wirkungsweise der genannten Collectortypen theoretisch klarlegte.[1]

Für die Praxis ist es von Interesse zu wissen: erstens, inwieweit die Wirksamkeit des Collectors paralysirt wird durch den Elektricitätsverlust des mit ihm leitend verbundenen Systems (Elektroskop oder Elektrometer) in Folge mangelhafter Isolation; zweitens, nach welcher Zeit der vom Collector bewirkte Potentialausgleich, der vom theoretischen Standpunkte ein unendlich lang dauernder asymptotischer Process ist, praktisch als vollendet zu betrachten ist.

Derartige Versuche beschreibt H. Pellat[2] und gelangt zu dem Resultate, dass imprägnirte Papierstreifen sehr langsam wirken, besser die Wassercollectoren, weitaus am schnellsten

[1] W. Thomson, Pap. on Elektrostat. and Magn. §§. 278, 279 (1859).

[2] H. Pellat, Compt. Rend. T. 100, S. 735 (1885).

aber die Flammen, welche fast momentan das Elektrometer auf das volle anzuzeigende Potential laden.

F. Exner[1] fand in einem speciellen Falle, dass sich die respective mit Lunte, Wassercollector und Flamme erreichten Ladungen verhielten wie 0·1 : 0·5 : 1.

Kelvin[2] scheint seinen Wassercollector selbst den Flammen vorzuziehen, ohne direct vergleichende Messungen anzugeben.

Eine auch nur ungefähre Angabe in absolutem Maasse über die Grösse des Convectionsstromes, den ein derartiger Collector bei bestimmter Potentialdifferenz unterhalten kann, habe ich in der Literatur nicht gefunden; daher theile ich im Folgenden die Resultate eigener Messungen mit.

Zur Untersuchung bieten sich zwei naheliegende Methoden dar, die beide zum Studium der Entladungserscheinungen bei Belichtung mehrfach verwendet wurden:

1. Man verbindet eine Capacität von bekannter Grösse C mit einem geaichten Elektrometer und dem Collector (Flamme, oder Tropfelektrode) und ertheilt dem ganzen, gut isolirten System eine Ladung, deren Potential V am Elektrometer abgelesen wird; wenn der Collector in einem Raume vom Potential V_0 sich befindet, so lässt sich die zeitliche Veränderung von V beobachten und man erhält die Intensität des Entladungsstromes durch die Formel:

$$i = -C\frac{dV}{dt},$$

wobei $\frac{dV}{dt}$ eine Function von $(V-V_0)$ sein wird.

2. Der Collector, der wieder an einem Orte vom Potential V_0 brennen, respective tropfen soll, wird mit einem Punkte constanten Potentiales V_1 leitend verbunden unter Einschaltung eines Galvanometers; die zur Potentialdifferenz (V_1-V_0) gehörige Stromstärke wird so direct gemessen.

A. Messungen an Flammenelektroden.

Zunächst stellte ich Vorversuche nach der ersten der oben erwähnten Methoden an.

---

[1] F. Exner, diese Sitzungsber., Bd. 93, S. 256 (1886).

[2] L. c. §. 264.

Als Capacität hätten grössere Leydnerflaschen die passende Grössenordnung gehabt, doch erwies sich die starke Rückstandsbildung als störend. Ich bildete daher aus zwei Messingplatten und einem dazwischengelegten Blatt Paraffinpapier einen Condensator, der für meine Zwecke hinreichend rückstandsfrei war und eine Capacität von 2000—3000 *cm* hatte, wie sich aus den Dimensionen ergab. Die eine Platte war zur Erde (Gasleitung) abgeleitet, die andere mit dem Knopfe eines Braun'schen Elektrometers (1 Scalentheil = 100 Volt, Messungsbereich bis 1500 Volt) und einem sonst isolirten Bunsenbrenner verbunden. Mittelst eines geriebenen Ebonitstabes auf circa 1200 Volt geladen, verlor dieses System seine Ladung in kaum merklichem Grade, wenn die Flamme nicht brannte, hingegen durch die Wirkung der Flamme anfänglich sehr rasch, dann langsamer. Die Messung geschah so, dass an einem Chronographen die Zeiten abgelesen wurden, zu denen der Zeiger des Elektrometers die Hunderterstriche passirte. Die Entladungsgeschwindigkeit zeigte sich nicht der Spannung proportional, sondern verringerte sich bei sinkendem Potential in stärkerem Maasse; der Grund hievon war, dass die Zimmerluft durch die Flammengase geladen wurde und daher die Flamme nicht mehr an einem Orte vom Potential 0 sich befand. So war z. B. in einem Falle nach zweimaliger Entladung des Condensators durch die Flamme das Potential in der Mitte des Zimmers grösser als 200 Volt.

Der Bunsenbrenner wurde daher, mit einem Blechcylinder als Windschutz versehen, am Ende eines Brettes gut isolirt befestigt und in eine Distanz von circa 2 *m* zum offenen Fenster hinausgeschoben. Es wurde jedesmal geprüft, ob dem Orte der Flamme in Folge des Erdfeldes ein von 0 verschiedenes Potential zukomme, doch liess sich eine solche Differenz mit wenigen Ausnahmen nicht constatiren, d. h. sie war kleiner als 20 Volt.

Die Wirkung der im Freien brennenden Flamme war äusserst unregelmässig, sei es durch das Flackern der Flamme im Winde, sei es durch störende Einflüsse von Rauch und Staub.

Folgende Tabelle gibt unter V das Potential in Volt, unter t die zugehörige Zeit in Secunden, unter Δ die Differenzen

(Entladungsdauer für ein Intervall von 100 Volt); dabei sind die Zahlen jeder Columne Mittelwerthe aus je 10 unmittelbar hintereinander ausgeführten Messungen.

V	t			Δ		
	I.	II.	III.	I.	II.	III.
1000	0	0	0			
				19·4	10·7	13·6
900	19·4	10·7	13·6			
				20·6	11·1	13·6
800	40·0	21·8	27·2			
				22·7	10·8	16·5
700	62·7	32·6	43·7			
				23·6	14·1	17·0
600	86·3	46·7	60·7			
				25·2	16·3	24·9
500	111·5	63·0	85·6			
				37·7	23·4	30·3
400	149·2	86·4	115·9			
				63·0	32·3	54·4
300	212·2	118·7	170·4			

Trotz der Unregelmässigkeiten selbst der Mittelwerthe ergibt sich ein ungefähres Maass für den Entladungsstrom.

Bei $V = 1000$ Volt, ist

$$-\frac{dV}{dt} = 7\,\frac{V}{\text{sec}},$$

daher

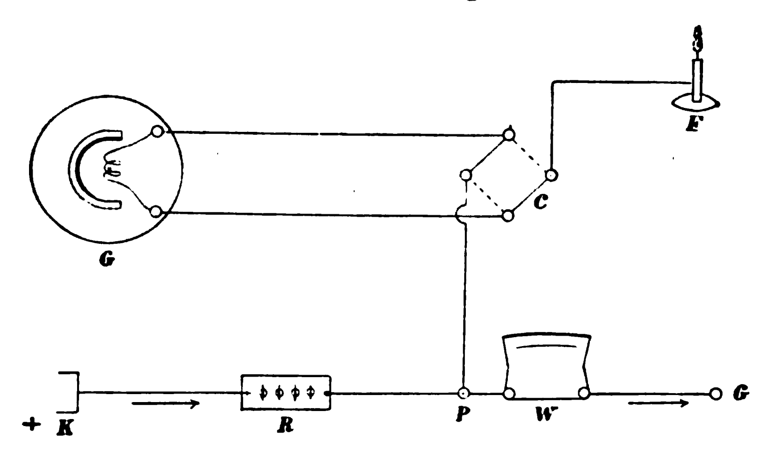
$$i = -C \cdot \frac{dV}{dt} = 2\,.\,10^{-9}\ \text{Far.} \times 7\,\frac{V}{\text{sec}} = 14\,.\,10^{-9}\ \text{Amp.}$$

oder wenn man i prop. V setzt, rund 10^{-11} Amp. pro Volt.

Nahezu derselbe Werth ergab sich aus Versuchen bei einer Spannung von circa 150 Volt, wobei an Stelle des Braun'schen ein Exner'sches Elektroskop verwendet wurde.

Es zeigte sich also, dass der von der Flamme unterhaltene Convectionsstrom annähernd der Potentialdifferenz proportional ist und auch bei mässiger Spannung in den Grenzen galvanometrischer Messbarkeit liegt. Weitere Messungen wurden mit dem Galvanometer ausgeführt.

Folgende Figur stellt die Schaltungsweise schematisch dar.



Das verwendete Galvanometer war ein nach dem Deprez-d'Arsonval'schen Typus gebautes Instrument von Siemens und Halske; sein innerer Widerstand betrug 10.000 Ω, den fix verbundenen Vorschaltwiderstand miteingerechnet. Die Ablesung war eine objective (Bild eines Glühlampenfadens auf einer circa 2 *m* entfernten Scale) und auf etwa $^1/_2$ *mm* genau; einem einseitigen Ausschlage von 1 *mm* entsprach eine Stromstärke von $3 \cdot 4 . 10^{-10}$ A. Das Galvanometer war von seiner Unterlage durch Paraffinpapier isolirt und durch zwei in der Luft gespannte Drähte mit dem Commutator *C* verbunden (Ebonitplatte mit Quecksilbernäpfchen, auf einem Paraffinklotz stehend). Vom Commutator führten Leitungen einerseits zum Bunsenbrenner *F*, anderseits zu einem Punkte *P*, der auf constantem Potential gehalten wurde.

Die positive Klemme der an das Netz der städtischen Centrale angeschlossenen Gleichstromleitung war durch einen Regulirwiderstand *R* und ein Westonvoltmeter *W* mit der Gasleitung verbunden; der Punkt *P* war die eine Klemme des Westoninstrumentes und sein Potential gegen die Erde konnte an diesem direct auf 0·1 Volt genau abgelesen, ausserdem mittelst des Regulirwiderstandes *R* zwischen 0 und +270 Volt variirt werden. Für mehr qualitative Versuche wurde statt des Gleichstromes eine Zambonische Säule von circa 500 Volt Spannung verwendet.

Auch das Galvanometer zeigte unaufhörliche Schwankungen der Stromstärke, wenn der Bunsenbrenner in der früher beschriebenen Weise ins Freie gebracht wurde. Innerhalb des Zimmers brennend — bei der kurzen Dauer des Versuches und der relativ kleinen Spannung wurde die Zimmerluft nicht merklich geladen — gab er constantere, aber kleinere Werthe als im Mittel im Freien; dasselbe Resultat gaben auch zwei Messungen im Freien bei besonders ruhiger Luft. Es wäre überflüssig, über das theilweise unregelmässige Zahlenmaterial ausführlich zu berichten; ich beschränke mich auf folgende Angaben:

Ein Einfluss des Vorzeichens der Ladung auf die Stromstärke ist nicht zu constatiren; die leuchtende und die nichtleuchtende Bunsenflamme haben den gleichen Effect, ebenso ist das Einbringen einer Chlornatriumperle in die Flamme ohne Einfluss; die Grösse der Berührungsfläche zwischen den Flammengasen und der metallischen Ableitung scheint ebenfalls keinen wesentlichen Einfluss zu haben, da ein kurzer Platindraht, eine Platinspirale in der Flamme und ein mit dem Brenner leitend verbundener, die Flamme umgebender Blechcylinder als Ende der metallischen Leitung verwendet, die Stromstärke nicht merklich änderten.

In den Grenzen von 20—500 Volt ist eine Abweichung von der Proportionalität zwischen Spannung und Stromstärke nicht nachzuweisen. Für 1 Volt Spannung beträgt die Intensität des Convectionsstromes $1-3 \, . \, 10^{-11}$ A., was mit dem Werthe, der mit der elektrometrischen Methode gefunden wurde, ziemlich übereinstimmt.

Kerzenflammen geben beiläufig den halben Effect wie Bunsenbrenner.

Ich bemerke noch ausdrücklich, dass in allen Fällen die Flamme so aufgestellt war, dass die aufsteigenden geladenen Flammengase keinen Leiter trafen, an den sie ihre Ladung hätten abgeben können. Thatsächlich erhält man eine bedeutende Zunahme des Stromes, wenn man eine abgeleitete Metallplatte oder nur die Hand etwa $^1/_2$ *m* hoch über die Flamme hält.

B. Messungen an Tropfelektroden.

Im Anschluss an die eben angeführten Messungen untersuchte ich nach derselben Methode einige Wassercollectoren. Diese bestanden einfach aus einer Flasche mit abgesprengtem Boden, in deren nach unten gekehrtem Hals ein durchbohrter Kork und ein Glasrohr mit ausgezogener Spitze eingesetzt waren. Das Ganze wurde in ein isolirtes Stativ eingeklemmt; der ausfliessende Strahl war von einem Messingcylinder von 20 *cm* Höhe und 10 *cm* Durchmesser umgeben, derart, dass der Zerreissungspunkt des Strahles in der Mitte des Cylinders lag. Die abfallenden Tropfen wurden in einem zur Erde abgeleiteten Blechgefäss aufgefangen.

Die Schaltungsweise war analog der bei den Flammenelektroden beschriebenen. Die Tropfelektrode war durch einen in sie von oben eintauchenden Draht mit dem Commutator und Galvanometer verbunden. Es konnte nun entweder so wie früher dieses ganze System mit einem Punkte bekannten Potentiales verbunden werden, während der Messingcylinder zur Erde abgeleitet war; oder es konnte umgekehrt der Cylinder auf ein bestimmtes Potential gebracht werden, während die Tropfelektrode durch das Galvanometer zur Erde abgeleitet wurde.

Beide Anordnungen kommen auf dasselbe hinaus, nur dass sich die Richtung des Stromes umkehrt; bei der ersten kann man ausserdem prüfen, ob die gesammte Leitung hinreichend isolirt, indem kein Strom auftreten darf, wenn die Tropfelektrode nicht in Gang ist; die zweite Anordnung hat den Vortheil, dass man den isolirten Cylinder auf höheres Potential laden kann, als das ganze System: Collector—Leitung—Galvanometer und somit bei grösserer Spannungsdifferenz messen kann.

Bei der ersten Anordnung sank die Stromstärke auf zwei Drittel ihres früheren Werthes, wenn der abgeleitete Cylinder ganz entfernt wurde. Der Grund hievon ist leicht ersichtlich: der umgebende Cylinder vergrössert die Capacität der abfallenden Tropfen und damit proportional die Stromstärke; auffällig war mir aber der grosse Betrag dieser Änderung (50%) mit Rücksicht auf die Dimensionen des Cylinders.

Als Beispiel führe ich folgende Messungsreihe an:

Spannung in Volt	Stromstärke in 10^{-10} Amp.	
	beobachtet	berechnet
120	24	24·6
270	54	55·3
2000	410	410
2400	493	492

Der hiezu verwendete Wassercollector ist charakterisirt durch die Grössen:

Ausflussmenge $m = 0\cdot65\ \frac{cm^3}{\text{sec}}$.

mittlere Druckhöhe $h = 18\ cm$,

Durchmesser des Strahles $d = 0\cdot075\ cm$,

Stromstärke pro Volt Spannungsdifferenz $i = 2\cdot05 \,.\, 10^{-11}$ $\frac{\text{Amp.}}{\text{Volt}}$ oder »scheinbarer Widerstand« $\omega = \frac{1}{i} = 4\cdot88 \,.\, 10^{10}\ \Omega$.

Ein anderer Wassercollector ähnlicher Beschaffenheit hatte einen scheinbaren Widerstand von $3\cdot57 \,.\, 10^{10}\ \Omega$. Für die praktische Anwendung ergibt sich hieraus, dass die Wassercollectoren in ihrer Wirksamkeit den Flammen durchaus nicht nachstehen. Ihr scheinbarer Widerstand ist ein derartiger, dass einerseits die Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit keinen Einfluss mehr hat, anderseits der Isolationswiderstand selbst einer nicht sehr sorgfältig isolirten Zuleitung gross gegen denselben sein wird.

Es dürfte auch nicht schwer sein, die Wirksamkeit von Wassercollectoren noch beträchtlich zu steigern durch Anwendung feinerer Öffnungen und grösserer Druckhöhen bei gegebener Grenze für die Ausflussmenge.

Obwohl der Mechanismus des Entladungsstromes bei Wassercollectoren theoretisch vollkommen klar und übersichtlich ist, lassen sich doch numerische Werthe von vornherein kaum ableiten.

Die Stärke des Convectionsstromes ist gegeben durch die einfache Formel:

$$J = N.C.V,$$

wo J die Stromstärke in Amp., V die Spannung in Volt, C die Capacität eines Tropfens im Momente des Lostrennens in Farad gemessen, und N die Zahl der pro Secunde abfallenden Tropfen bedeutet. Ist ρ der Durchmesser der Tropfen in Centimetern, so kann man $C = \gamma.\rho$ setzen, wobei γ neben dem Umrechnungsfactor $1 \cdot 1.10^{-12}$ (zur Umrechnung von Centimetern in Farad) noch einen zweiten Factor enthält, der < 1 und abhängig ist von der Länge und Dicke des Strahles, von der Zahl und Distanz der schon vorher losgerissenen, aber noch benachbarten Tropfen etc., kurz von den geometrischen Verhältnissen der tropfenden Spitze. N und ρ sind verknüpft durch die Relation: $N \frac{4\pi\rho^3}{3} = m$, wo m die Ausflussmenge in $\frac{cm^3}{\text{sec}}$ ist; eine zweite Messung, die N und ρ separat berechnen liesse, lässt sich kaum anstellen. Es fehlen somit mehrere der für die Berechnung von J nothwendigen Bestimmungsstücke. Nur soviel kann man der Formel entnehmen, dass bei gegebener Ausflussmenge m, $J = V \cdot \frac{3\gamma}{4\pi} \cdot \frac{m}{\rho^2}$, also J umso grösser wird, je kleiner die Tropfen sind.

Genauere Angaben über den Einfluss von Druckhöhe und Grösse der Ausflussöffnung sind wohl auf empirischem Wege zu erhalten.

VI. SITZUNG VOM 17. FEBRUAR 1898.

Der prov. Secretär theilt ein vom Commando S. M. Schiff »Pola« eingelaufenes Telegramm ddo. Suez, 12. Februar, mit, wonach sich an Bord Alles wohl befindet.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. v. Kerner legt eine Abhandlung von Dr. Hans Hallier in München vor, welche den Titel führt: »Convolvulaceae a Dr. Alfr. Pospischil anno 1896 in Africa orientali collectae et in herbario universitatis Vindobonensis conservatae«.

Das w. M. Prof. H. Weidel überreicht eine Abhandlung von J. Herzig und H. Meyer, betitelt: »Zur Kenntniss des Pilocarpidins«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Dr. Max Brauchbar und Dr. Leopold Kohn: »Über Condensationsproducte der Aldehyde. (III. Mittheilung.) Octoglycolisobutyrat aus Isobutyraldehyd«.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. III. HEFT.

JAHRGANG 1898. — MÄRZ.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 5 TAFELN UND 15 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1898.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 3. Heftes März 1898 des CVII. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 85 kr. = 5 Mk. 70 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. III. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

VII. SITZUNG VOM 3. MÄRZ 1898.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. II. a, Heft VIII und IX (October und November 1897).

Der prov. Secretär theilt ein vom Commando S. M. Schiff »Pola« eingelaufenes Telegramm ddo. Suez, 20. Februar, mit, wonach sich an Bord Alles wohl befindet.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Hann in Graz übersendet eine Abhandlung von Ed. Mazelle, Adjunct am astr.-met. Observatorium in Triest, unter dem Titel: »Verdunstung des Meerwassers und des Süsswassers«.

Das w. M. Herr Prof. F. Lippich übersendet eine Arbeit von Priv. Doc. Dr. Josef R. v. Geitler aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag, betitelt: »Über elektrische und magnetische Zerlegung der Kathodenstrahlung«.

Der prov. Secretär legt zwei Abhandlungen von Josef Altmann, Ingenieur in Wien, vor:

1. »Luftwiderstand. Abhängigkeit der Schallfortpflanzungsgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit der Erregung.
   Bewegungsart und Form von Flächen zur Erzielung eines möglichst grossen Luftwiderstandes pro Arbeitseinheit«.
2. »Compressions-Erscheinungen in geschlossenen Gefässen«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann übersendet eine im III. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von Dr. Paul Cohn: »Über Morphin-Chinolinäther«.

Herr Emil Reinhold in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität unter der Aufschrift: »Selbständige Kuppelung«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung von Dr. J. M. Eder und E. Valenta: »Die Spectren des Schwefels«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. A. Lieben legt eine Arbeit aus dem II. chemischen Universitäts-Laboratorium in Wien von Moriz Lilienfeld und Siegfried Tauss vor, welche den Titel führt: »Über das Glycol und Aldol aus Isobutyr- und Isovalcraldehyd«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Arbeit von I. Klemenčič aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck unter dem Titel: »Weitere Untersuchungen über den Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Condensatorentladungen«.

Herr Dr. M. Smoluchowski Ritter v. Smolan in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über den Temperatursprung bei Wärmeleitung in Gasen«.

Herr Dr. Karl A. Redlich in Leoben überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Eine Wirbelthierfauna aus dem Tertiär von Leoben«.

Über galvanische Polarisation fester und geschmolzener Salze

von

Oskar Singer.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 6 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Februar 1898.)

L. Poincaré[1] hat gefunden, dass die Polarisation in geschmolzenen Salzen bei der Zersetzungstemperatur verschwindet. Das ist eine neue Bestätigung der chemischen Theorie des Galvanismus, nach welcher die elektromotorische Kraft der Polarisation auf der Wärmetönung bei der Wiedervereinigung der durch die Elektrolyse getrennten Ionen beruht[2] und daher null werden muss, wenn in Folge gesteigerter Temperatur diese Vereinigung nicht mehr stattfindet. Es ist nun umgekehrt die Möglichkeit geboten, sich ein Bild von der Abhängigkeit der Wärmetönung bei Bildung von Elektrolyten von der Temperatur zu verschaffen, indem man in ihnen die Änderung der Polarisation innerhalb weiter Temperaturgrenzen misst. Diese Untersuchung, soweit sie sich auf leicht schmelzbare und zersetzliche Salze beschränkt, ist Zweck der vorliegenden Arbeit.

Die Polarisation wurde nach Ausschaltung der polarisirenden Stromquelle durch Compensation gemessen. Fig. 1 gibt eine schematische Darstellung des Messapparates. Eine Wippe verband die Zersetzungszelle *Z* bei gewöhnlicher Stellung über

[1] C. R. 110 (1890).

[2] F. Exner, diese Sitzungsberichte, 78 (1878).

3, 1 und 4, 2 mit den Zuleitungsdrähten des polarisirenden Stromes, aber durch Druck auf einen Taster umgelegt, mit den Klemmschrauben 5 und 6. Hörte der Druck auf, so kehrte der Taster durch sein eigenes Gewicht sofort in die alte Lage zurück. Von 5 führte eine Leitung zu dem Schleifcontact *S* eines mit Massstab versehenen Messdrahtes *M*, von 6 eine andere durch ein Ostwald'sches horizontales Capillarelektrometer *C* zu einem Ende des Messdrahtes. Von den Elektroden des Capillarelektrometers führten Drähte zu den Quecksilbernäpfen 7 und 8, welche an der Wippe angebracht und durch einen Kupferbügel miteinander verbunden waren, der an dem Taster der Wippe befestigt war und beim Herunterdrücken desselben jedesmal aus dem Quecksilber herausgehoben wurde. Daher war das Capillarelektrometer bis unmittelbar vor der Messung kurz geschlossen und vollständig depolarisirt. Durch den Messdraht floss der Compensationsstrom, die Spannung zwischen den Enden zeigte ein Siemens'sches Torsionsgalvanometer *T* an. Soll der durch den Schleifcontact abgenommene Theil dieser Spannung der elektromotorischen Kraft der Polarisation gleich sein, so muss die Quecksilberkuppe des Capillarelektrometers während des Umwippens in Ruhe bleiben.

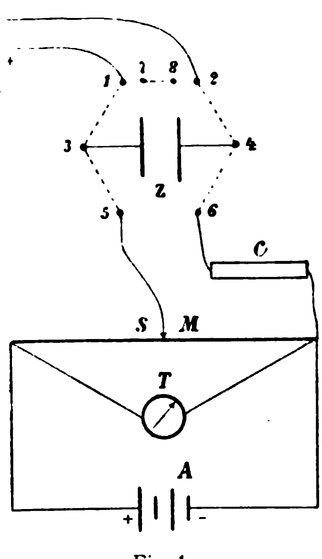


Fig. 1.

Als polarisirender Strom diente Gleichstrom von 100 Volt, in dem vier Glühlampen hintereinander eingeschaltet waren, so dass weder diese, noch die dünnen Platindrahtelektroden der Zersetzungszelle ins Glühen geriethen; die Stromstärke betrug dann einige Hundertstel Ampère. Den Compensationsstrom lieferte die Batterie *A* von zwölf Accumulatoren mit zusammen 24 Volt Klemmenspannung. Durch passende Schaltung der Accumulatoren und einen eingeschalteten Rheostaten wurde die Spannung des Messdrahtes, welche das Torsions-

galvanometer auf 0·01 V. genau mass, möglichst nahe dem Doppelten der jeweilig zu messenden Polarisation gebracht; dann konnte der Schleifcontact auf dem 2 *m* langen Messdraht bei einer Spannung von z. B. 4 V. gewöhnlich auf $^1/_8$ *cm* genau eingestellt werden, was 0·01 V. entspricht. Nahe den Temperaturen, bei denen das Leitungsvermögen der Salze aufhörte, war die Empfindlichkeit geringer, bei sehr constanter Einstellung von Temperatur und Polarisation häufig grösser. Es musste immer sehr schnell gewippt werden, weil sonst die Polarisation beträchtlich absank.

Die Zelle bildete ein Porzellantiegel, der mit dem zu untersuchenden Salze gefüllt und mit Asbestpappendeckel fast ganz bedeckt, im chemischen Herde über dem Bunsenbrenner erhitzt wurde. Die Temperatur wurde durch ein Thermoelement aus Eisen- und Nickeldraht gemessen, welche an einem Ende mit Silber verlöthet waren. Dieses Ende steckte in einem dünnen, unten zugeschmolzenen Glasröhrchen, das neben den Elektroden in das Salz tauchte, und war bis unmittelbar zur Löthstelle durch Asbestwolle vor starker Wärmeabgabe an die Luft geschützt. Die beiden anderen Enden des Eisen- und des Nickeldrahtes waren an gleiche Kupferdrähte angelöthet, welche zu einem Spiegelgalvanometer führten, und tauchten in ein Wassergefäss, dessen Temperatur fortlaufend abgelesen wurde. Das Thermoelement wurde bei mehreren Temperaturen bis zu 505° C. mit einem von der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Berlin geprüften Thermometer verglichen, indem beide nebeneinander in erhitztes Chlornatrium tauchten. Ausserdem wählte ich zur Aichung den Schmelzpunkt des Jodkaliums, den ich den »Physikalisch-chemischen Tabellen« von Landolt und Börnstein zu rund 640° entnahm. Die aus diesen Beobachtungen bestimmte Curve, welche den Ausschlag des Galvanometers als Function der Temperaturdifferenz der Löthstellen gibt, verläuft bis 300° geradlinig, dann immer steiler, so dass das schliessliche Steigungsverhältniss dreimal so gross als das ursprüngliche ist. Die nach der Curve aus dem Ausschlage des Galvanometers bestimmten Temperaturen sind namentlich bei höheren Werthen mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet. Das Glasröhrchen, in welchem das

Thermoelement steckte, wurde häufig von den verwendeten Salzen angegriffen und musste daher oft durch ein neues ersetzt werden, wodurch sich immer der Temperaturabfall zwischen Salz und Löthstelle etwas ändert. Hiezu tritt bei höheren Temperaturen die unsichere Aichung beim Schmelzpunkte des Jodkaliums. Bis 500° dürfte aber der Fehler in der Temperaturbestimmung selten 2 % übersteigen.

Die Versuche wurden gewöhnlich in der Weise angestellt, dass das Salz etwas über seinen Schmelzpunkt erhitzt und dann die Polarisation bei sinkender Temperatur bis zum Aufhören der Leitfähigkeit und hierauf wieder vom Schmelzpunkt an steigend bis zur Zersetzung oder ungefähr 600° gemessen wurde, aber womöglich immer, nachdem die Temperatur constant geworden war. Um die Leitfähigkeit der Salze zu kennen, führte ich eine Nebenleitung von den Klemmschrauben 3 und 4 der Wippe durch ein Tauchelement zum Spiegelgalvanometer. Der bei Schliessung dieser Leitung entstehende Ausschlag gibt ein ungefähres Bild von der Änderung des Leitungsvermögens mit der Temperatur.

Im Folgenden gebe ich die bei den einzelnen Substanzen erhaltenen Resultate wieder. Die Tabellen am Schlusse jedes Abschnittes enthalten, nach Versuchsreihen getrennt, die directen Beobachtungen. Aus der graphischen Darstellung derselben, wobei die Temperaturen als Abscissen, die Polarisationen als Ordinaten aufgetragen worden waren, wurden nach dem blossen Augenmasse die in den Figuren 2—6 verzeichneten Mittelwerthscurven gewonnen. Ein Vergleich derselben mit den Tabellen zeigt die Abweichungen der directen Beobachtungen von diesen Mittelwerthen. Ich bemerke noch, dass die verwendeten Salze durchwegs die käuflichen und daher nicht frei von Verunreinigungen waren.

Natriumnitrat.

Die verschiedenen Versuchsreihen stimmten ausser bei tieferen Temperaturen gut überein. Die Polarisation hat bei beginnender Leitfähigkeit (230°) den Werth 3·56 V. (Fig. 2, Curve I) und nimmt bei langsamem Erhitzen continuirlich durch den Schmelzpunkt (298°) hindurch bis 2·98 V. bei 368°

ab. Hier tritt ein plötzlicher Abfall der Polarisation auf 1·60 V. ein, während gleichzeitig die Temperatur plötzlich um mehr als 20° steigt. Umgekehrt tritt hier, wenn man sich von höherer Temperatur her nähert, ganz entsprechend plötzliches Anschnellen der Polarisation verbunden mit Wärmeabsorption ein. Der Grund dieser Erscheinung liegt in einer Zersetzung des Nitrates zu Nitrit. Diese Umwandlung, respective die entsprechende Rückbildung treten nicht immer bei derselben

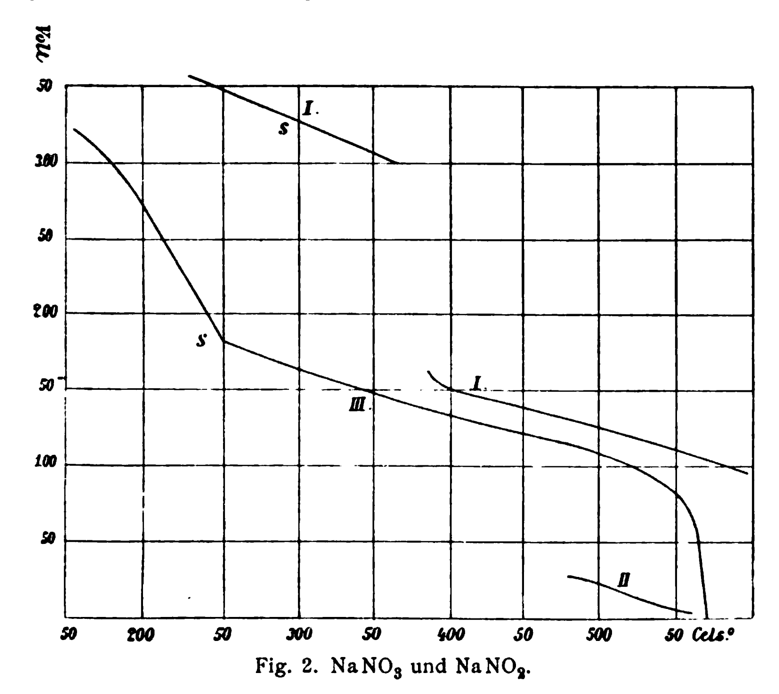


Fig. 2. $NaNO_3$ und $NaNO_2$.

Temperatur ein, sondern bald früher, bald später; die eingezeichneten Temperaturen 368° und 389° sind nur die äussersten Grenzen, bis zu welchen ich beobachten konnte. Es wäre nicht ausgeschlossen, dass die Polarisation auch zwischen denselben stetig, wenn auch steil abfallend verläuft. Die Umwandlung ist von keiner Gasentwicklung begleitet und scheint nicht sofort das ganze Salz zu ergreifen, sondern ihren Einfluss hauptsächlich dadurch zu äussern, dass die durch die Elektrolyse getrennten Ionen sich nur mehr zum Nitrit vereinigen. Eine Änderung des Leitungswiderstandes ist

mit ihr, nach den Beobachtungen von Fousserau[1] und von Bouty und Poincaré[2] zu schliessen, nicht verbunden. Von 389° an nimmt die Polarisation wieder stetig ab und beträgt bei 600° noch 0·92 V.

Anders ist der Verlauf der Polarisation bei schnellem Erhitzen. Anfangs sind dabei keine Beobachtungen möglich, da die Polarisation in dem ungleichmässig temperirten Salze sehr schwankt; meine Messungen beginnen erst bei ungefähr 480° mit 0·27 V. (Curve II), bei 560° beträgt die Polarisation nur mehr 0·02 V. Bei äusserst raschem Erhitzen einer ganz geringen Salzmenge, in welche ich das Thermoelement nicht eintauchen konnte, sank die Polarisation unter lebhafter Blasenentwicklung vollständig auf Null herab. Der Unterschied beider Arten von Versuchsreihen dürfte auf das bei der ersteren reichlicher sich bildende Natriumoxyd zurückzuführen sein, welches entweder direct durch seine Elektrolyse die Polarisation beeinflusst oder bloss den weiteren Zerfall des Nitrites aufhält. Das wieder erkaltete Salz war im zweiten Falle krystallinisch, im ersten derb und befeuchtet sich seifig anfühlend. Poincaré[3] gibt als Dissociationstemperatur einen niedrigeren Werth, nämlich 470° an, doch arbeitete er mit Silberelektroden.

$NaNO_3$.

Cels.°	Volt	Cels.°	Volt	Cels.°	Volt
1. Versuchsreihe					
241	3·47	367	3·02	562	1·05
232	»	425	1·43	578	0·98
270	3·39	489	1·22	593	0·89
294	3·35	502	1·20	602	0·95
325	3·19	518	1·17		
389	1·60	541	1·10		

[1] C. R. 98 (1884).
[2] C. R. 107 (1888).
[3] L. c.

Cels.°	Volt	Cels.°	Volt	Cels.°	Volt
		2. Versuchsreihe			
261	3·46	418	1·42	473	1·33
272	3·31—3·55	432	1·39	493	1·29
289	3·31	442	1·38	530	1·17
297	3·27	427	1·46	553	1·12 [1]
363	3·11	449	1·38		
		3. Versuchsreihe			
327	3·48	253	3·48	399	1·47
285	3·53	259	»	474	1·29
273	»	301	3·29	523	1·20
227	3·77	344	3·10	565	1·09
251	3·56	368	2·96	582	1·03—05
		4. Versuchsreihe			
451	1·51	548	1·21	561	1·03
488	1·39	556	1·13		
501	1·33	560	1·07		
		5. Versuchsreihe			
557	1·08	573	0·96	581	0·90
»	1·03	576	0·92	586	0·89
		6. Versuchsreihe			
503	0·27	561	0·03	447	0·41
559	0·06	477	0·31		

[1] Bei weiterem Erhitzen schwankend bis unter 0·1 V.

Cels.°	Volt	Cels.°	Volt	Cels.°	Volt
7. Versuchsreihe					
464	0 22	520	0·09	553	0·04
483	»	533	0·04	560	0·02
503	0·18	547	0·02		
515	1·28 [1]	533	0·04		

Natriumnitrit.

Die Polarisation fällt von 3·20 V. bei 160°, dem Beginne der Leitfähigkeit, anfangs steil, nach dem Schmelzen sanfter ab (Fig. 2, Curve III). Der Schmelzpunkt (250°) dürfte ein Knickungspunkt sein. Darauf deuten drei in derselben Versuchsreihe bei ihm selbst, bei 245° und 257° gemachte Beobachtungen hin. Im Mittel der Messungen würde sich die Knickungsstelle abschleifen. Von 400° an verläuft die Polarisation bis 520° ganz parallel derjenigen des Nitrates. Der Unterschied beider von 0·18 V. dürfte daher rühren, dass früher, wie schon oben erwähnt, nicht bloss Nitrit vorhanden war. Von 520° sinkt die Polarisation schneller, kurz nach 560° beginnt sie zwischen 0 und 0·7 V. zu schwanken, bald den einen, bald den anderen Werth annehmend, bis sie bei 570° dauernd auf Null bleibt. Solche Schwankungen zeigen sich gewöhnlich schon früher, die häufiger und stabiler auftretenden Werthe liegen auf der gezeichneten Curve. Thatsächlich beginnt auch die Zersetzung viel früher; denn schon bei 400° zeigen sich Blasen im geschmolzenen Salze, und bei 500° schäumt die ganze Masse. Dass sich die Curven für Nitrat und Nitrit bei tieferer Temperatur wieder stark nähern, dürfte damit zusammenhängen, dass das Nitrit bei Luftzutritt leicht ins Nitrat übergeht.

[1] Maximalwerth der schwankenden Polarisation; die anderen Werthe dieser Versuchsreihe sind die stabileren Minimalwerthe.

$NaNO_2$.

Cels.°	Volt	Cels.°	Volt	Cels.°	Volt
1. Versuchsreihe					
246	1·86	228	2·48	535	0·94
240	1·89	312	1·31 [2]	556	0·78
231	1·93	365	1·46 [2]	567	0·73
199	2·75	442	1·09	»	0
178	2·82	455	1·14	»	0·73
161	2·93 [1]	506	1·04	571	0·00
2. Versuchsreihe					
289	1·65 [2]	222	2·44	490	über 0·92
258	1·91	313	1·50	512	0
212	2·53 [1]	344	1·46	535	0—0·58
179	3·38 [1]	362	0·04 [3]	539	0—0·84
3. Versuchsreihe					
290	1·79	245	1·90	420	1·22
310	1·60	206	2·49	417	»
283	1·73	179	3·16	498	1·12
»	1·69	—	3·35 [1]	507	1·09
277	1·79	211	2·60	561	0·13
257	1·82′	388	0·24—1·39	564	0·10
250	1·84	423	1·30		

Kaliumnitrat und -nitrit.

Die Polarisation schwankte bei beiden Salzen fortwährend, so dass keine genauen Messungen möglich waren. Der Grund lag wahrscheinlich in Verunreinigungen, welche Inhomogenität

[1] Sehr ungenau wegen geringer Leitfähigkeit.
[2] Schwankend.
[3] Von da an fortwährend schwankend.

hervorriefen. Das Nitrat enthielt wahrscheinlich ein Natriumsalz, sein Schmelzpunkt lag bei 270°, also viel tiefer als die gewöhnlichen Bestimmungen. Die Polarisation beträgt beiläufig für

KNO_3 bei	200°	4·4 V.
	300	2·2
	400	0·8
	500	0·2
	580	0·0

KNO_2 bei	170°	3·2 V.
	200	2·2
	300	1·7
	400	1·4
	500	1·2

Weiter konnte das Nitrat nicht untersucht werden, weil es die Platinelektroden angriff. Die beiden zugehörigen Curven durchschneiden sich bei etwa 340°. Links vom Durchschnittspunkte nimmt das Nitrit ausser den früher genannten Werthen häufig die höheren des Nitrates an, rechts umgekehrt das Nitrat die hier höheren Werthe des Nitrites, es dürften also beide Salze nebeneinander bestehen. Namentlich beim Nitrat aber zeigten sich auch noch andere Schwankungen, als extremster Fall einmal 3·04 V. bei 370°. Auch der Nullpunkt der Polarisation wurde vom Nitrat manchmal schon früher erreicht. Ob ein Sprung ähnlich wie beim Natriumnitrat eintritt, liess sich nicht feststellen.

Silbernitrat.

Die einzelnen Versuchsreihen stimmten bis 250° wenig überein. Fig. 3 zeigt die extremen Fälle. Der Unterschied hängt vielleicht mit der Bildung von Silbersuperoxyd zusammen. Der Anfang der Curve verläuft nicht immer horizontal. Schmelz- und Erstarrungspunkt liegen zwischen 180° und 190°. Von 250° an herrscht Übereinstimmung. Die Curve fällt schwach gekrümmt, zuletzt fast geradlinig gegen die Temperaturenaxe ab, die sie bei 425° erreicht, während gleichzeitig Blasenentwicklung beginnt. Aber schon bei ungefähr 300° nimmt die

bis dahin klare Flüssigkeit die für Untersalpetersäure charakteristische Röthung an. In einem Falle, der zweiten Versuchs-

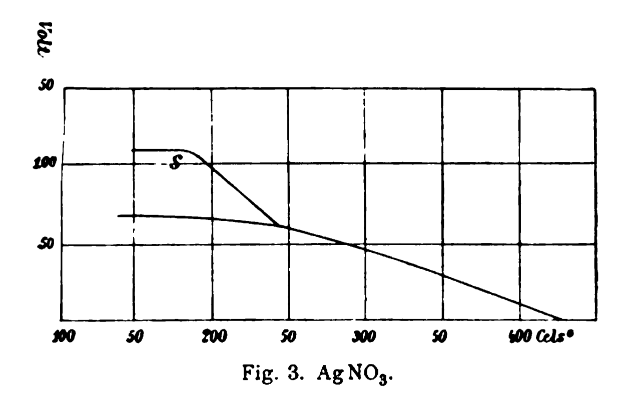


Fig. 3. $AgNO_3$.

reihe, zeigte die Polarisation von 300° an grosse Schwankungen und erreichte vorübergehend schon früher den Werth Null. Dabei waren vereinzelte Blasen aufgestiegen.

$AgNO_3$.

Cels.°	Volt	Cels.°	Volt	Cels.°	Volt
		1. Versuchsreihe			
178	0·68	—	0 76	305	0·37
216	0·54	263	0·55	399	0·10
166	0·68	271	0·48	412 ?	0·02
141	0·68	290	0·44	420	0·00
		2. Versuchsreihe			
158	0·86	303	0·28—0·58	403	0·27
191	0·83	333	0·07—0·45	»	0·015—0·22
232	0·76	341	0— ?	425	0·00
249	0·72	363	0—0·42		
285	0·65	380	0·045 [1]		

[1] Ziemlich stabil.

Cels.°	Volt	Cels.°	Volt	Cels.°	Volt
3. Versuchsreihe					
204	1·02	240	0·64	363	0·16
188	1·07	252	0·60	388	0·15
162	»	267	0·57	410	0·12
193	1·02	»	0·55	428	0·006—0·015
184	1·08	327	0·41	438	0·00
171	»	360	0·25		
149	»	358	0·17		
4. Versuchsreihe					
259	0·55	185	0 96	312	0·42
215	0·63	175	»	348	0·30
207	0·66	165	»	365	0·20
212	0·65	161	1·00	398	0·09
201	0·77	170	0·91	425	0·00
176	0·96	268	0·54		

Ammoniumnitrat.

Die Leitfähigkeit reicht bis zu einer tieferen Temperatur, als die Mittelwerthscurve der Fig. 4 verzeichnet (122°). Es hatten sich gewöhnlich durch die Elektrolyse um die Anode Gasblasen aufgeworfen, welche die leitende Verbindung unterbrachen. In einer Versuchsreihe beobachtete ich thatsächlich weiter, fand aber merkwürdigerweise abnehmende Werthe der Polarisation bis zu 1·84 V. bei 104°. Von 122° an fällt die Polarisation mit 2·06 V. beginnend zunächst geradlinig ab. Schmelz- und Erstarrungspunkt liegen um 160°. Von 170° an steigen anfangs schwache, bei wachsender Temperatur immer dichter werdende, weisse Nebel auf. Bald nach 200° zeigen sich die ersten Gasblasen. Über 300° ist der Verlauf der Curve unsicher. Bei langsamem Erhitzen war nämlich kurz über 300° immer die ganze Salzmenge verdampft. Um die niedrigeren

Werthe der Polarisation zu erhalten, musste ich sehr rasch erhitzen; ich konnte die Polarisation nicht bei constanter,

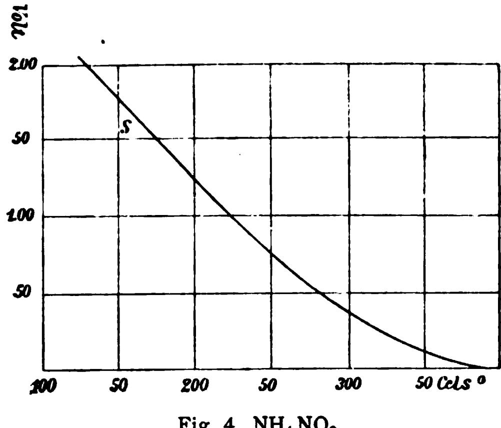


Fig. 4. NH_4NO_3.

sondern nur bei schnell ansteigender Temperatur messen. Die letztere wurde daher wahrscheinlich zu hoch bestimmt.

NH_4NO_3.

Cels.°	Volt	Cels.°	Volt	Cels.°	Volt
1. Versuchsreihe					
164	1·57	112	1·92	233	1·03
158	1·71	108	1·84	250	0·76
155	1·76	104	1·84	263	0·69
142	1·84	108	1·91	272	0·54
130	1·98	112	1·95	302	0·38—0·51
122	2·08	172	1·67	392	0·00 [1]
118	1·99	187	1·44		

[1] Wahrscheinlich in Folge vollständiger Verdampfung keine leitende Verbindung.

Cels.°	Volt	Cels.°	Volt	Cels.°	Volt
		2. Versuchsreihe			
191	1·35	143	1·85	210	1·15
165	1·62	129	1·98	248	0·83
159	1·67	»	1·90	294	0·56
156	1·76	121	1·95	309	0·00 [1]
148	1·85	175	1·53		
131	2.06	187	1·42		
		3. Versuchsreihe			
186	1·30	—	2·00	223	1·00
170	1·50	127	1·85	276	0·37
158	1·67	192	1·15	346	0·13
152	1·74	191	1·24	396	0·00
127	1·92	230	0 95		
		4. Versuchsreihe			
171	1·24	273	0·60	318	0·33
		5. Versuchsreihe			
184	1·18	239	0·74	281	0·27
206	1·11	257	0·55	292	0·19
222	0·89	270	0·32	352	0·11

Ammoniumsulfat.

In den ersten Versuchen wurde das Salz bis etwas über 300° erhitzt. Es war dabei noch nicht vollständig geschmolzen, sondern es schwammen in der Flüssigkeit breiige Körperchen herum. Die Polarisation zeigte sich bei abnehmender Temperatur bis zu 230° fast constant (Fig. 5, Curve I). Offenbar

[1] Wahrscheinlich in Folge vollständiger Verdampfung keine leitende Verbindung.

rühren diese Werthe nicht von der Flüssigkeit, sondern den breiigen Körperchen her, welche von der Temperaturänderung nicht berührt zu sein scheinen. Bei den späteren Versuchen erhitzte ich für kurze Zeit auf 350° und erhielt eine homogene klare Flüssigkeit. Die Polarisation hat die durch Curve II dargestellten Werthe. Unter 230° fallen beide Curven zusammen. Gegen 200° tritt allmälige Erstarrung ein. Gegen 180° unterbrachen wie beim Ammoniumnitrat Gasblasen, welche sich um

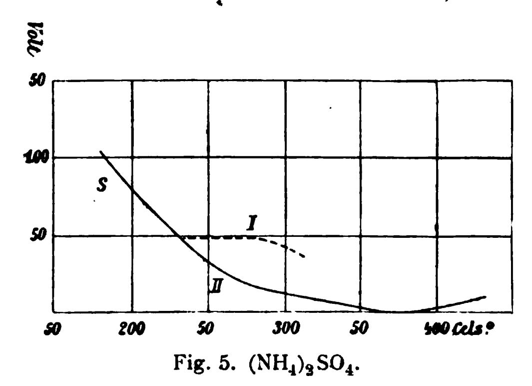


Fig. 5. $(NH_4)_2SO_4$.

die Anode aufgeworfen hatten, die leitende Verbindung; die Leitfähigkeit scheint aber bis zu einer tieferen Temperatur bei stark wachsender Polarisation zu reichen. Beim Wiedererhitzen verschwindet die Polarisation gegen 360°, nimmt aber bei weiter steigender Temperatur wieder grössere Werthe an. Bei diesen höheren Temperaturen tritt statt vollständiger Dissociation Sublimation von schwefligsaurem Ammonium ein. Bei sehr raschem Erhitzen war es mir aber möglich, die Polarisation bis über 460° dauernd auf Null zu erhalten.

$(NH_4)_2 SO_4$.

Cels.°	Volt	Cels.°	Volt	Cels.°	Volt
1. Versuchsreihe					
293	0·45	257	0·48	218	0·60
287	0·40	241	»	»	0·67
282	0·45	225	»	210	0·83

Cels.°	Volt	Cels.°	Volt	Cels.°	Volt
186	0·92	238	0·45	309	0·09
185	1·03	199	0·85—0·90	331	0·05
»	1·10	190	0·95	346	0·03
213	0·81	179	1·01	384	0 02
192	1·03	171	1·03	412	0·05
171	1·39 ?	286	0·14	445	0·09
238	0·40	293	0·12		
		2. Versuchsreihe			
311	0·37	231	0·47	325	0·09
305	0·40	216	0 56	288	0·15
297	0·43	204	0·66	285	0·28
288	0·47	194	0·72	318	1·12
270	0·48	191	0·76	348	0·11
258	0·46	188	0·90		
		3. Versuchsreihe			
312	0·10	198	0·85 [1]	362	0·00
274	0·16	200	0·95 [2]	395	0·02
249	0·34—0·40	181	0·95	401	0·03
247	0·49 [1]	251	0·36	403	0·05
225	0·58 [2]	301	0·09 [1]	423	0·09
242	0·36 [3]	307	0·10		
213	0·67	311	0·08		
		4. Versuchsreihe			
314	0·06	366	0·03	394	0·015
326	0·03	»	0·015	434	0·00
356	0·00	386	0·00	462	»

[1] Schwankend.
[2] Schwankend, Maximum.
[3] Schwankend, Minimum.

Einfachsaures Ammoniumorthophosphat.

Das Salz wurde bis 180° erwärmt und dann abgekühlt. Die Polarisation bleibt zunächst bis 155° ungeändert (Fig. 6) oder nimmt sogar ab. Bei 155° knickt die Curve um und steigt geradlinig bis ungefähr 90°, hier wird .sie nochmals steiler. Von ungefähr 140° an tritt Erstarrung zu einer zunächst weichen, erst bei tieferer Temperatur erhärtenden Masse ein,

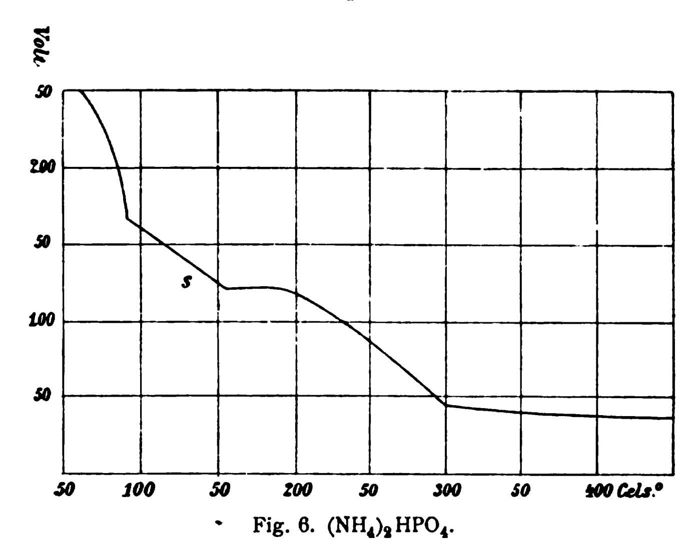


Fig. 6. $(NH_4)_2HPO_4$.

namentlich um die Elektroden herum erhält sich lange Flüssigkeit. Beim Wiedererwärmen wurde von 200° an beobachtet. Bei dieser Temperatur beginnt Blasenentwicklung, später schäumt die ganze Flüssigkeit wie Seifenwasser und geräth endlich in heftiges Sieden, die Polarisation fällt bis auf 0·44 V. bei 300°. Hier zeigt die Curve einen Knick und verläuft fast horizontal weiter. Gleichzeitig hat die Blasenentwicklung aufgehört, es ist alles Ammoniak und Wasser entwichen und nur Metaphosphorsäure zurückgeblieben, welche beim Erkalten glasartig erstarrt. An diesen Erscheinungen ändert sich auch durch schnelles Erhitzen nichts.

$(NH_4)_2HPO_4$.

Cels.°	Volt	Cels.°	Volt	Cels.°	Volt
1. Versuchsreihe					
178	1·23	121	1·46	270	0·12
181	1·20	118	1·57	285	0·09
172	1·19	105	1·64	332	0·37
159	1·14	206	0·90	377	0·43
155	1 08	229	0·81		
136	1·35	252	0·63		
2. Versuchsreihe					
155	1·22	95	1·67	257	0·84
156	1·23	90	2·00	273	0·70
147	1·27	85	2·18	305	0·45
138	1·30	82	2·26	295	0·49
131	1·36	163	1·22	301	0·45
»	1 40	200	1·18	336	0·43
133	1·38	210	1·12	358	0·42
125	1·42	216	1·07	417	0·54
113	1·49	238	0·95	461	0·41
105	1·60	245	0·89		
3. Versuchsreihe					
181	1·31	145	1·36	81	1·88
178	1·27	118	1·35	67	2·30
159	1·25	110	1·44	60	2·40
154	1·31	89	1·59	52	2·43
4. Versuchsreihe					
150	1·28	140	1·30	65	2·52
»	1·31	88	2·12		

Cels.°	Volt	Cels.°	Volt	Cels.°	Volt
5. Versuchsreihe					
168	1·22	308	0·42	428	0·37
208	1·13	356	0·37		
251	0·81	415	0·59		

Natrium- und Kaliumchlorat.

Die einzelnen Messungen zeigten sehr wenig Übereinstimmung. Ausser Platinelektroden wurden auch solche aus Graphitstiften verwendet. Die höchsten beobachteten Werthe näherten sich 4 V. Früher oder später trat Explosion, verbunden mit rapider Temperatursteigerung, ein. Während der Explosion sank die Polarisation plötzlich herab, um sofort ebenso plötzlich wieder zu sehr grossen Werthen zu steigen, welche dem gebildeten Chlorid oder Perchlorat entsprechen.

Die vorangehenden Untersuchungen ergeben folgendes Resultat: Die Polarisation nimmt mit wachsender Temperatur im Allgemeinen stetig ab. Die Stetigkeit wird auch durch den Schmelzpunkt nicht unterbrochen. Es ist aber möglich, dass derselbe bei manchen Substanzen auf die Änderungsgeschwindigkeit der Polarisation einen Einfluss hat. Ähnliche Verhältnisse bestehen nach Graetz[1] für das elektrische Leitungsvermögen der festen und geschmolzenen Salze. — Die Änderung der Polarisation mit der Temperatur ist für dieselben beiläufig von derselben Grösse wie die von F. Exner[2] an wässerigen Lösungen beobachtete, aber etwa zehnmal grösser als die thermoelektrischen Kräfte, welche nach den Beobachtungen von Bouty[3] und von L. Poincaré[4] für concen-

[1] Wied. Ann., 40 (1890).

[2] Diese Sitzungsber., 103 (1894).

[3] C. R. 90 (1880).

[4] C. R. 110 (1890).

trirte wässerige Lösung und geschmolzenes Salz selbst wieder untereinander gleich sind. Der letztere fand die thermoelektrische Kraft zwischen Silber und Silbernitrat zwischen 310° und 400° zu 0·00027 V. für je 1° C.; im selben Intervall beträgt nach Fig. 3 die Änderung der Polarisation des Silbernitrates für 1° C. 0·0037 V. — Während der Dissociation eines Salzes in seine Bestandtheile sinkt die Polarisation auf Null herab, aber nicht bei beginnender Zersetzung, sondern erst, wenn dieselbe eine gewisse Heftigkeit erreicht hat. Bei partieller Zersetzung, wie der des Natriumnitrates zu Nitrit, erleidet die Polarisation einen Stetigkeitssprung oder wenigstens eine sehr rasche Änderung, indem sie die der neuen Verbindung entsprechende Grösse annimmt. Es lassen sich daher chemische Processe durch Messung der Polarisation verfolgen. — Die Werthe, welche die Polarisation bei beginnender Leitfähigkeit zeigt, sind bedeutend grösser als in den entsprechenden Salzlösungen, da ja die Schwächung durch secundäre Einwirkung der Ionen auf das Lösungswasser wegfällt. Sie sind überhaupt die grössten bisher beobachteten. Über die Versuche, galvanische Elemente mit geschmolzenen Elektrolyten herzustellen, vergleiche man eine historische Notiz von H. Bequerel;[1] in jüngster Zeit wurden derartige Versuche von Korda[2] mit den höheren Oxyden von Barium und Kupfer fortgesetzt.

Diese Anfangswerthe der Polarisation sind aber entsprechend den Temperaturen, bei welchen sie gemessen sind, mit Ausnahme des Ammoniumphosphates noch immer kleiner als jene, welche sich aus den gewöhnlich bei Zimmertemperatur beobachteten Wärmetönungen der ins Spiel tretenden chemischen Processe ergeben. Ich theile im Folgenden das Ergebniss der Rechnung mit. Dieselbe stützt sich hauptsächlich auf die Angaben von J. Thomsen in seinen »Thermochemischen Untersuchungen«; zur Ergänzung sind einzelne Daten von Berthelot und Andrews aus Ostwald's »Lehrbuch der allgemeinen Chemie« und dem »Handbuch der anorganischen Chemie« von Dammer herangezogen. Es ist vorausgesetzt,

---

[1] C. R. 110 (1890).

[2] C. R. 120 (1895).

dass das Anion bei den Nitraten in NO_2 und O, beim Sulfat in SO_3 und O, beim Phosphat in P_2O_5 und O zerfällt. An Stelle der unbekannten Neutralisationswärme (Na^2OAq, N^2O^3Aq) ist bei der Berechnung die von Berthelot zu 10.600^c bestimmte, entsprechende Neutralisationswärme des Ätzkali eingesetzt, was berechtigt erscheint, da sich die Neutralisationswärmen der beiden Hydroxyde mit Salpetersäure nur um 1% unterscheiden. Die Lösungswärmen der beiden Nitrite sind durch die der Nitrate ersetzt, welche, nach den analogen Ammoniumverbindungen zu schliessen, wahrscheinlich grösser sind. Für die Lösungswärme des einfachsauren Ammoniumorthophosphates ist die des entsprechenden Natriumsalzes substituirt. Die betreffenden Berechnungen sind also ungenau. Ferner ist die elektromotorische Kraft von 1 Daniell gleich 1·088 V. und entsprechend einer Wärmetönung von 50.130^c für zwei Grammäquivalente angenommen.

	Volt	Volt	Cels.°	Cels.°
2(Na, O, NO^2)	4·92	3·56	230	570
2(Na, NO^2)	3·76 ?	3·20	160	570
2(K, O, NO^2)	5·28	4·4	200	580
2(K, NO^2)	4·11 ?	3·2	170	—
2(Ag, O, NO^2)	1·34	1·08	149	425
2(NH^3, H, O, NO^2)	3·39	2·06	122	390
($[NH^3]^2$, H^2, O, SO^3)	3·36	1·06	180	360
1/3($[NH^3]^4$, H^6, O^3, P^2O^5)	2·36 ?	2·48	60	300

Die erste Spalte dieser Tabelle enthält für je zwei Äquivalente die vermuthlichen chemischen Reactionen, deren Wärmetönung die elektromotorische Kraft der Polarisation liefert. Die zweite Spalte gibt die berechneten Werthe der letzteren, die dritte die höchsten beobachteten Werthe, also für den Beginn der Leitfähigkeit, die vierte die Temperaturen, bei welchen diese eintrat. Die letzte Spalte endlich enthält die Zersetzungstemperaturen, bei welchen die Polarisation des einfachsauren

Ammoniumorthophosphates 0·44 V., die der anderen Salze Null betrug. Die in den Figuren 2—6 gezeichneten Curven, welche bei entsprechend anderer Bedeutung der Ordinaten zugleich die Abhängigkeit der Wärmetönung von der Temperatur darstellen, scheinen sich, nach links verlängert, thatsächlich den berechneten Werthen zu nähern.

Über elektrische und magnetische Zerlegung der Kathodenstrahlung

von

Dr. **Josef** Ritter v. **Geitler.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 5 Textfiguren.)

Gelegentlich einer Untersuchung über Kathodenstrahlen stiess ich auf die im Folgenden beschriebenen Thatsachen, welche mir genügend selbständiges Interesse zu haben scheinen, um jetzt schon über dieselben zu berichten.

I. Zerlegung auf elektrischem Wege.

A. Mit Hilfe eines Condensators.

Befindet sich im Wege eines Kathodenstrahlenbündels ein für die Strahlen undurchlässiger Körper, z. B. ein in das Entladungsrohr eingeschmolzener Draht, so wirft derselbe bekanntlich einen scharfen Schatten. Ertheilt man dem schattenwerfenden Drahte eine stationäre $\frac{\text{negative}}{\text{positive}}$ elektrische Ladung, so $\frac{\text{verbreitert}}{\text{verengert}}$ sich der Schatten. Diese zum Theile schon bekannte Erscheinung ist erst neuerlich von Q. Majorana[1] genauer studirt und durch die von G. Jaumann[2] entdeckte elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen erklärt worden.

---

[1] Q. Majorana, Nuovo Cimento, 1897, Ser. IV, p. 305.

[2] G. Jaumann, diese Sitzungsberichte, Bd. 105, 1896 und Wied. Ann. 59, S. 252, 1896.

Um dem schattenwerfenden Körper eine Ladung zu ertheilen, bediene man sich nun der Versuchsanordnung, welche aus der nachstehenden Fig. 1 ersichtlich ist.

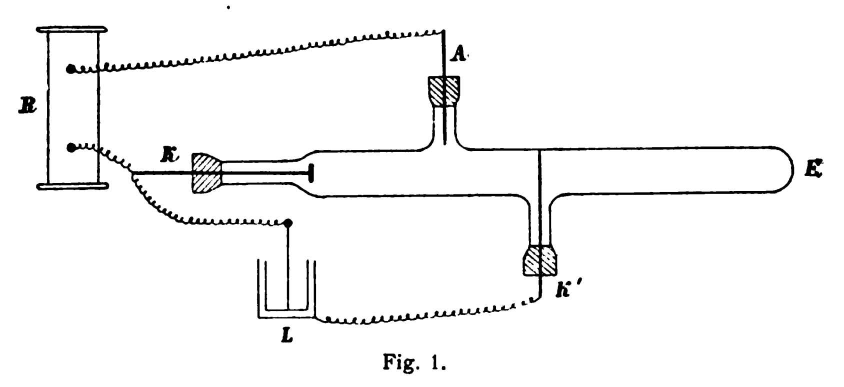


Fig. 1.

In einem cylindrischen Glasrohre von 30 *cm* Länge und 4 *cm* Durchmesser sind die drei Elektroden *A*, *K*, *K'* mit Siegellack eingekittet. *A*, als Anode dienend, ist ein kurzer Aluminiumdraht von 2 *mm* Durchmesser, *K*, die Kathode, eine an einem Aluminiumdrahte befindliche kreisrunde Aluminiumplanscheibe von etwa 1 *cm* Durchmesser, deren Normale mit der Rohraxe möglichst zusammenfällt; *K'*, ein die Rohraxe senkrecht schneidender Aluminiumdraht, dient als Schattenwerfer. Das Entladungsrohr ist an eine automatische Sprengelpumpe angeschmolzen.

Ist das Vacuum ein genügend hohes und *A* mit dem positiven, *K* mit dem negativen Pole eines grossen Ruhmkorff'schen Inductoriums *R* verbunden, so sieht man am Ende *E* der Röhre den scharfen Schatten von *K'* — etwa 0·5 *cm* breit — umgeben von dem hellen, durch die von *K* ausgehenden Kathodenstrahlen hervorgerufenen Fluorescenzlichte. Verbindet man nun *K* mit *K'* durch einen Draht, so werden die von *K* gegen *K'* gehenden Strahlen so stark abgelenkt, dass die Schattengrenze von *E* beiderseits bis auf etwa 2 *cm* gegen *K'* zurückweicht; das den Schatten scharf begrenzende grüne Fluorescenzlicht bildet, den geometrischen Verhältnissen entsprechend, auf beiden Seiten des Rohres je einen parabolischen, rippenartigen, gegen *E* convexen Streifen auf der Glaswand.

Wird nun aber, statt *K* mit *K'* direct zu verbinden, zwischen *K* und *K'* in der aus der Figur zu entnehmenden Weise eine Leydenerflasche (Capacität etwa 40 *m*) geschaltet, so beobachtet man folgende Erscheinung: Statt des einen, eben beschriebenen Streifens, welcher verschwindet, treten je eine Reihe von zwei bis sieben und nach Umständen auch mehr parabolischen, gegen *E* convexen, ziemlich äquidistanten grünen Streifen an beiden Seiten des Rohres in dem zwischen *K'* und *E* gelegenen Theile desselben auf.[1] Die Lage des Streifensystems und der Raum, welchen dasselbe an der Rohrwand einnimmt, ändern sich mit den Versuchsbedingungen, wie aus dem Weiteren hervorgeht. Denkt man sich die Rohraxe horizontal, *K'* vertical, so ist der Abstand der Streifen von einander dort am grössten (z. B. 0·5 *cm*), wo sie eine durch die Rohraxe gelegte Horizontalebene schneiden, am kleinsten (z. B. 0·5 *mm*) dort, wo der Schnitt mit einer durch die Rohraxe gelegten Verticalebene erfolgt.

Bevor ich es versuche, eine Erklärung für das Auftreten dieser Streifen zu geben, sollen noch einige charakteristische Veränderungen der Erscheinung bei veränderten Versuchsbedingungen beschrieben werden.

Ersetzt man die Leydenerflasche *L* durch einen Condensator von grösserer Capacität, indem man z. B. der Flasche *L* noch eine oder mehrere gleich grosse Flaschen parallel schaltet, so rücken die Streifen immer näher an einander heran und werden in ihrer Gesammtheit umsomehr von der Richtung der Rohraxe abgestossen, je grösser die Capacität des Condensators wird. Verkleinert man hingegen die Capacität von *L* z. B. dadurch, dass man an Stelle der einen Leydenerflasche zwei oder mehrere gleich grosse Flaschen hinter einander schaltet, so werden die Streifendistanzen grösser. In einem speciellen Falle waren die Streifendistanzen, gemessen zwischen den convexesten Stellen bei Einschaltung von:

3 Leydenerflaschen, parallel . . . . im Mittel 0·28 *cm*
2 » » . . . . » » 0·38 »

[1] Von dem gleichzeitig bei *K'* an der Glaswand auftretenden blauvioletten, sehr beweglichen Lichtballen soll hier nicht weiter die Rede sein.

1 Leydenerflasche	im Mittel	0·75	*cm*
2 Leydenerflaschen, hintereinander	» »	1·3	»
3 » »	» »	2·2	»
4 » »	» »	2·5	»

Ausser von der Capacität der Leydenerflaschen hängt die Grösse der Streifenabstände deutlich von dem verwendeten Inductorium ab.

Ganz dieselbe Streifenbildung, nur hinsichtlich der Gestalt der Streifen den geänderten geometrischen Verhältnissen entsprechend modificirt, ist in Entladungsröhren beliebiger Gestalt zu erhalten, wenn die Kathodenstrahlen auf ihrem Wege einen schattenwerfenden Metallkörper finden, welcher in der beschriebenen Weise mit der Kathode verbunden ist. Dabei ist es gleichgiltig, ob der Schattenwerfer ein Draht, eine breitere oder schmälere Metallplatte oder ein Metallkonus u. dgl. ist. Die Erscheinung, dass der mehr oder weniger verbreiterte Schatten von einem System grüner Streifen umsäumt ist, welche durch dunkle Stellen der Glaswand von einander getrennt werden, bleibt im Wesentlichen dieselbe. Besonders schön sind die Streifen in kugelförmigen Recipienten ausgebildet, wenn der schattenwerfende Draht in die Richtung eines Kugeldurchmessers fällt und die Kathodennormale den Draht im Kugelmittelpunkte senkrecht schneidet.

Versucht man auf Grund der bisher beschriebenen Experimente eine Deutung der Streifenbildung zu geben, so ist der nächstliegende Gedanke, welcher sich wegen der besonders im Falle eines kugelförmigen Recipienten frappanten Ähnlichkeit des Streifensystems mit den bei optischen Versuchen auftretenden Beugungsstreifen dem Beobachter aufdrängt, die Erscheinung für ein Interferenzphänomen zu halten, hervorgebracht durch die von der Kathode und dem Schattenwerfer ausgehenden Kathodenstrahlen, umsomehr, wenn man sich von vornherein auf dem Boden jener Theorien befindet, welche die Kathodenstrahlen als Wellen irgend welcher Art betrachten. In der That scheinen die mitgetheilten Beobachtungen zunächst für diese Erklärung zu sprechen. Denn: sind die Kathodenstrahlen Wellen, deren Periode durch die Periode der elektrischen Kraftschwankungen an der Kathode gegeben

ist oder wenigstens von derselben abhängt, so erscheint es nur natürlich, dass die Periode und damit auch die Wellenlänge der Strahlen und somit auch der Abstand der »Interferenzstreifen« sich mit der Eigenschwingung des erregenden Ruhmkorff'schen Apparates ändert; es ist weiterhin auch verständlich, dass es für die Wellenlänge der Kathodenstrahlen von Einfluss sein kann, wenn zwischen Kathode und Schattenwerfer ein schwingungsfähiges System geschaltet wird, wie es die Leydenerflaschen thatsächlich sind, und man bemerkt, wie aus den obigen Versuchen hervorgeht, dass die Distanz der Streifen sich deutlich ändert, wenn die für die Schwingungsdauer massgebende Capacität desselben verändert wird.

Der nächste Versuch, zu dem ich auf Grund dieser Auffassung geführt wurde, war der folgende: Werden die Streifen wirklich durch eine Interferenz der von K und K' ausgehenden Strahlen hervorgerufen, so dürfen dieselben nicht auftreten, wenn K' verhindert wird, Kathodenstrahlen in den Versuchsraum zu senden. Dies kann aber dadurch erreicht werden, dass K', wenigstens auf einen Theil seiner Länge, mit einer Glasröhre umhüllt wird. Thut man dies (der Versuch wurde in einem kugelförmigen Recipienten ausgeführt), so ist die Streifenbildung thatsächlich nur an jenem Theile der Schattengrenze zu bemerken, welche dem unbedeckten Drahte entspricht; an jenem Theile des Schattens, welcher von der glasumhüllten Strecke des Drahtes herrührte, war eine kleine Verbreiterung des Schattens, aber keine Streifenbildung wahrzunehmen.

Trotzdem scheint mir diese Auffassung der Erscheinung nicht stichhältig zu sein. Einer der Hauptgründe, welche mich bewogen, die Interferenzhypothese zu verlassen, war der Erfolg des nachstehenden Versuches:

In einer Röhre von der aus Fig. 1 ersichtlichen Form sei die schattenwerfende Kathode K' in einem Schliffstück eingekittet, welches gestattet, den Draht K' um seine eigene Axe zu drehen. An dem Drahte K' selbst befinde sich — mit Hilfe zweier Hartgummiklötzchen befestigt — eine rechteckige Glimmerplatte von etwa 0·5 *mm* Dicke, 0·5 *cm* Breite und etwa 3·5 *cm* Länge in einem Abstande von etwa 2 *mm* vom

Drahte, symmetrisch zu demselben, ihre Fläche senkrecht zur kürzesten Verbindungslinie mit dem Drahte, die längere Seite parallel dem Drahte. Der Schliff ermöglicht es, den Draht sammt der Glimmerplatte zu drehen; während aber der Draht seine Lage im Rohre beibehält, kann auf diese Weise die Platte bald zwischen K und K', bald zwischen K' und E oder in beliebige zwischenliegende Stellungen gebracht werden. Verwendet man die aus Fig. 1 ersichtliche Versuchsanordnung und befindet sich die Glimmerplatte zwischen K und K' so, dass ihre Normale mit der Rohraxe zusammenfällt, so treten die oben beschriebenen Streifen, wie früher, auf. In diesem Falle könnte man noch ganz gut an eine Interferenz der von K und K' ausgehenden Strahlen denken, welche ja beide in den zwischen K' und E gelegenen Theil des Rohres gelangen können. Dreht man aber nun den Schliff um 180°, so dass die Platte zwischen K' und E zu stehen kommt, so sind die Streifen immer noch vorhanden. Da aber unter diesen Verhältnissen Kathodenstrahlen von K' — wegen der Breite und Dicke des Glimmerschirmchens — unmöglich in den zwischen K' und E gelegenen Raum treten können, kann die Erscheinung auch nicht durch Interferenz zwischen Strahlen von K und K' zu Stande kommen.[1]

Eine andere Auffassung über die Entstehung der Streifenbildung, welche mir mit den Thatsachen verträglich zu sein scheint, möchte ich der Beschreibung jener Versuche vorausschicken, aus welchen ich dieselbe gewonnen habe.

Der secundäre Kreis des Ruhmkorff'schen Apparates führt bekanntlich bei jeder Unterbrechung des Primärstromes eine gedämpfte, im Wesentlichen sinusartig verlaufende elektrische Schwingung aus. In Folge dessen werden die Pole des secundären Kreises und die mit denselben verbundenen Leiter (im

[1] Man müsste denn annehmen, dass von der E zugewendeten Seite des Glimmerblättchens Kathodenstrahlen ausgehen. Bringt man jedoch ausser dem einen Glimmerschirme noch einen zweiten, gleichen symmetrisch zu demselben an K' an, was eine Annäherung an den Fall des glasbedeckten Drahtes bedeutet, so sind, wenigstens in dem cylindrischen Entladungsrohre, keine Streifen zu bemerken.

vorliegenden Falle also die Elektroden *A*, *K* und die eine Belegung von *L*) im Tempo der Ruhmkorffschwingung abwechselnd positiv und negativ elektrisch geladen. Die Dämpfung der Ruhmkorffschwingung hat zur natürlichen Folge, dass die aufeinanderfolgenden Potentialdifferenzen zwischen *A* und *K* von abnehmender Grösse sind. Nur in jenen Zeiten, während welcher *K* negativ ist, gehen von *K* Kathodenstrahlen aus. Nach dieser Auffassung würden demnach unter gewöhnlichen Verhältnissen von einer durch einen Ruhmkorff'schen Apparat oder überhaupt einen oscillirenden Erreger gespeisten Kathode Züge von Kathodenstrahlen im Tempo der Schwingungsperiode des Apparates ausgehen; zwischen dem Ende eines vorausgehenden und dem Beginne eines nachfolgenden Zuges würde im Raume eine kathodenstrahlenfreie Strecke liegen, deren Länge von der Geschwindigkeit der Strahlen und der Periode des Erregers abhängen müsste. Die aufeinanderfolgenden Züge bestehen, der in Folge der Dämpfung abnehmenden Stärke der Kathode entsprechend, aus Kathodenstrahlen, deren mittlere Intensität von Zug zu Zug abnehmen muss. Da nun bekanntlich die Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen durch magnetische und elektrostatische Kräfte[1] mit abnehmender Intensität der Strahlen zunimmt, so ist zu erwarten, dass die aufeinanderfolgenden, von einer durch einen gedämpft oscillirenden Erreger gespeisten Kathode ausgehenden Kathodenstrahlen durch eine und dieselbe elektrische oder magnetische Kraft in verschieden hohem Grade werden abgelenkt werden.

Befindet sich demnach im Wege der von einer solchen Kathode ausgehenden Strahlen ein schattenwerfender, etwa elektrisch negativ geladener Körper, so wird die durch elektrostatische Ablenkung bewirkte Verbreiterung seines Schattens für die aufeinanderfolgenden Züge von Kathodenstrahlen eine verschieden grosse sein, es werden statt einer einzigen so viele getrennte Schattengrenzen auftreten müssen, als von der Kathode Strahlenzüge ausgegangen sind. Die Folge hievon muss

---

[1] G. Jaumann, diese Sitzungsber., Bd. 104, 1895 und Wied. Ann., 57. S. 147, 1896. — W. Kaufmann, Wied. Ann., 61, S. 544, 1897. — W. Kaufmann und E. Aschkinass, Wied. Ann., 62, S. 588, 1897.

sein, dass auf der Wand der Entladungsröhre mehrere, verschieden stark abgelenkte Schattengrenzen mit anschliessendem Fluorescenzlichte sichtbar werden, also im Falle eines gewöhnlichen Glasrecipienten eine Reihe grüner, von dunkeln Zwischenräumen unterbrochener Streifen. Das ist aber im Wesentlichen gerade die Erscheinung, welche ich im vorangehenden Theile dieser Mittheilung beschrieben habe.

Die Verhältnisse sind bei den vorliegenden Versuchen allerdings nicht so übersichtlich, wie in dem angenommenen Falle einer stationären Ladung des Schattenwerfers, da die Ladung desselben hier, wie bei der Kathode selbst, durch eine gedämpft schwingende Elektricitätsquelle erfolgt. In den meisten Fällen gelingt es jedoch, unter Berücksichtigung dieses Umstandes ohne bedeutende Schwierigkeit die hier vertretene Auffassung mit den Thatsachen in erträgliche Übereinstimmung zu bringen.

Es möge dies bei einigen der folgenden Experimente versucht werden.

Bei Verwendung einer bestimmten Capacität (z. B. einer grossen Leydenerflasche) und eines bestimmten Ruhmkorff'schen Inductionsapparates ist sowohl die Lage und Helligkeit als auch die Zahl der auftretenden Streifen bedingt durch die Stärke des den Ruhmkorff'schen Apparat speisenden Primärstromes.

Bei einem Rohre von 27 *cm* Länge und 4 *cm* Durchmesser, in welchem der Abstand zwischen K und K' 7 *cm* betrug, ergab sich z. B. Folgendes: Zur Speisung des Ruhmkorff'schen Apparates wurden abwechselnd 4 und 6 Accumulatoren verwendet und jedesmal die Lage der convexesten Stellen der sichtbaren Streifen auf der Glaswand mit Farbstift bezeichnet, während zwischen K und K' verschiedene Capacitäten geschaltet waren. Für eine gewisse, nicht gemessene Verdünnung ist der Abstand D der convexesten Stellen der Streifen von einer durch K' senkrecht zur Rohraxe gelegten Ebene in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Capacität zwischen *K* und *K'*	Zahl der Accumulatoren	*D* in Millimetern für Streifen Nr.					
		1	2	3	4	5	6
1 Leydenerflasche	4	47	56	66	78	.	.
	6	42	51	61	73	84	.
2 Leydenerflaschen parallel	4	47	53	60	71	.	.
	6	45	50	55	60	67	78
2 Leydenerflaschen hintereinander	4	49	60	75	95	.	.
	6	43	55	69	86	.	.

Die Abhängigkeit der Streifenzahl von der Stärke des Primärstromes lässt sich auch sehr bequem in der Weise zeigen, dass man denselben durch einen regulirbaren Widerstand schickt. Sind etwa bei Beginn des Versuches, während der Rheostat ausgeschaltet ist, 7 Streifen deutlich sichtbar, und schwächt man den Strom allmälig, so verschwinden die Streifen in ihrer Reihenfolge von *E* gegen *K'* einer nach dem andern, wobei die jeweilig übrigbleibenden Streifen ihre Lage auf der Rohrwand ein wenig verändern. Wird der Strom allmälig wieder auf seine ursprüngliche Stärke gebracht, so erscheinen die Streifen wieder in der verkehrten Reihenfolge ihres Verschwindens. Einer grösseren Stärke des Primärstromes, beziehungsweise einer höheren Klemmspannung desselben entspricht auch eine grössere Spannung (Amplitude) an den Polen des secundären Kreises. Es wird daher, bei gleichbleibender Dämpfung, die Amplitude an der Kathode *K* erst nach einer grösseren Zahl von Oscillationen unter jene Grenze sinken, welche zu einer Entladung bei dem betreffenden Verdünnungsgrade — und somit auch zum Auftreten der dieselbe begleitenden Kathodenstrahlen erforderlich ist. Der grösseren Zahl entstehender Züge von Kathodenstrahlen entsprechend, werden demnach bei höherer Spannung des Primärstromes mehr Streifen zu erwarten sein als bei niederer Spannung, was den beobachteten Thatsachen vollkommen entspricht.

Bedient man sich weiters der alten, in Fig. 1 skizzirten Anordnung, und ist das Vacuum ein ziemlich vorgeschrittenes, so bemerkt man bei Erregung durch den Ruhmkorff'schen Apparat etwa 2 bis 3 Streifen; steigt der Druck im Rohre in Folge des Durchganges der Entladung allmälig, so sieht man nach einander weitere Streifen zu den alten hinzutreten, bis schliesslich etwa 6—7 Streifen vorhanden sind. Die Streifen treten hiebei in der Reihenfolge auf, dass die dem Ende *E* näherliegenden später zum Vorschein kommen. Auch hier tritt das ein, was nach der gemachten Hypothese zu erwarten ist. Bei niedrigerem Drucke, also schwer durchschlagbarem Vacuum, wird die Grenzamplitude, bei welcher Entladung

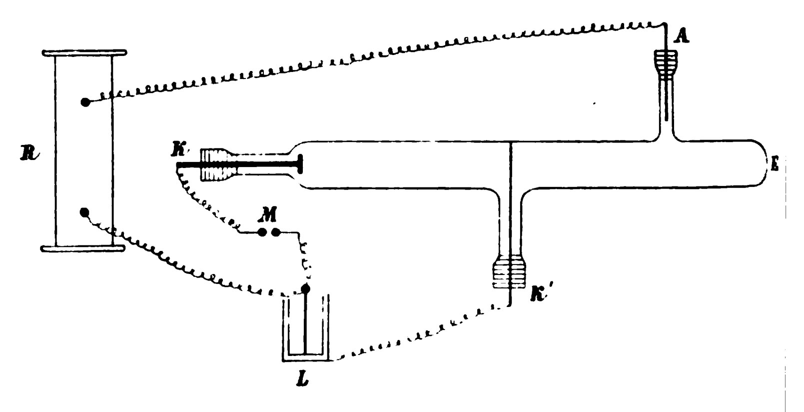


Fig. 2.

und Kathodenstrahlen noch auftreten können, bei gleicher Dämpfung und Anfangsamplitude nach einer geringeren Zahl von Oscillationen erreicht sein, als bei höheren Drucken; dementsprechend werden — wie der Versuch bestätigt — bei höheren Drucken mehr Kathodenstrahlenzüge, beziehungsweise Streifen auftreten müssen, als bei niederen Drucken.

Auch die folgenden Versuche lassen sich unter Zugrundelegung derselben Annahme verstehen. Die Bedeutung der Buchstaben in Fig. 2 ist dieselbe, wie in Fig. 1. *M* ist ein Funkenmikrometer mit Kugeln von 1 *cm* Durchmesser, die Kathode *K* ist schwach concav.

Ist das Funkenmikrometer *M* geschlossen, so tritt die alte Erscheinung auf. Durch allmälige Vergrösserung der Distanz der Mikrometerkugeln bei *M* [1] konnte nun zuerst der *K'* auf der Rohrwand nächstgelegene Streifen, dann die übrigen, einer nach dem andern, zum Verschwinden gebracht werden; dabei wurde der betreffende Streifen, während die übrigen im Ganzen ziemlich unverändert blieben, beweglich, schob sich gegen den folgenden vor, und es schien so, als ob er endlich mit diesem zusammenfiele.

Einen ähnlichen Erfolg hat nachstehender Versuch:

In Fig. 3 bedeutet *F* einen mit Leitungswasser oder einer Kupfervitriollösung getränkten Bindfaden, *S* einen Schleifcontact, der es gestattet, die Länge des zwischen *R* und *K*, *L* geschalteten Fadens *F* zu verändern. Die anderen Buchstaben

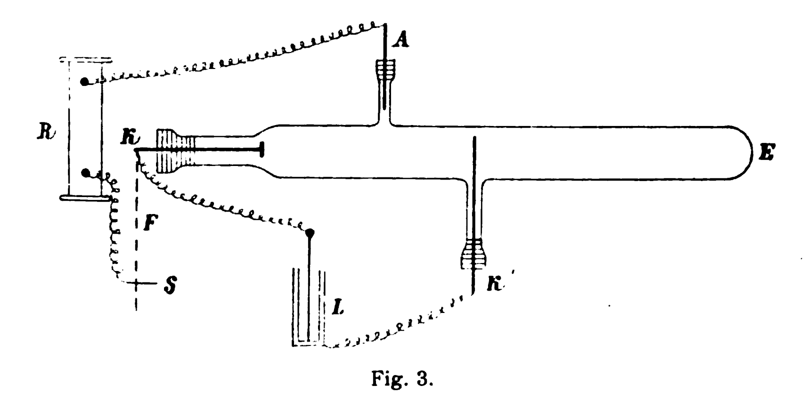


Fig. 3.

haben dieselbe Bedeutung, wie in Fig. 1. Legt man *S* unmittelbar an *K*, so erhält man die früher beschriebenen Streifen, z. B. sieben an der Zahl. Wird nun *S* längs des nassen Fadens *F* verschoben, so dass immer längere Strecken von *F* eingeschaltet werden, so verschwinden die Streifen in ihrer Reihenfolge von *E* gegen *K'*, einer nach dem andern — um bei Verkürzung des vorgeschalteten Fadens in der verkehrten Reihenfolge ihres Verschwindens wieder zu erscheinen.

[1] Die Funken bei *M* müssen bläulich und fadenförmig, nicht weiss und knallend sein!

Dieselbe Erscheinung erhält man auch, wenn der negative Ruhmkorffpol mit *K*, *L* durch einen Draht, hingegen der positive Pol mit *A* durch einen nassen Faden veränderlicher Länge verbunden ist, während sich selbstverständlich zwischen *K* und *K'* ein Condensator befindet.

Ein successives Verschwinden der Streifen lässt sich mit Hilfe eines vor die Kathode *K* geschalteten nassen Fadens noch in anderer Weise hervorbringen, so zwar, dass die Reihenfolge, in welcher die Streifen verschwinden, die umgekehrte, wie in dem letztangeführten Versuche, somit dieselbe ist, wie in dem früher erwähnten Funkenmikrometerexperimente. Die erforderliche Versuchsanordnung ist in Fig. 4 zur Darstellung gebracht. Wird der Schleifcontact *S* direct an *K* angelegt, so tritt auch hier die frühere Erscheinung auf — zwischen *K'* und *E* ist eine

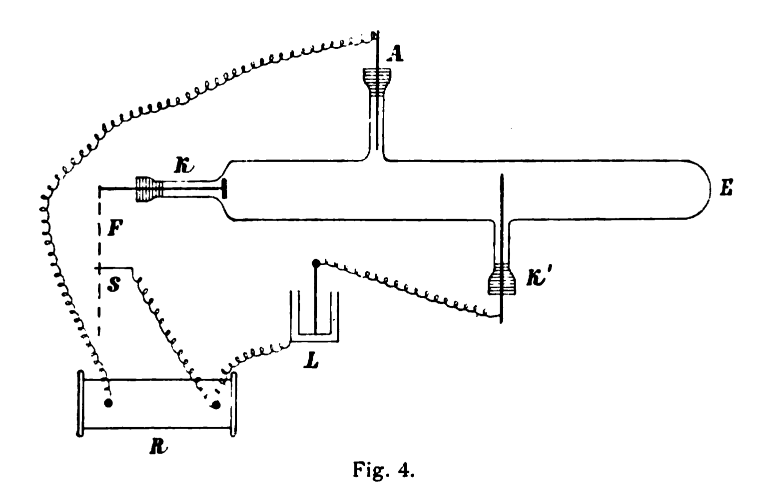


Fig. 4.

Anzahl von etwa 7 Streifen vorhanden. Verschiebt man *S* so, dass allmälig immer längere Strecken des nassen Fadens *F* zwischen *R* und *K* geschaltet werden, so verschwindet von den Streifen zuerst der *K'* auf der Glaswand nächstgelegene, dann nacheinander die übrigen Streifen gegen *E* hin gezählt, um bei Verkürzen von *F* in der verkehrten Ordnung ihres Verschwindens wieder zu erscheinen. Bei diesem Versuche bemerkte ich das früher im Falle des Mikrometers erwähnte Beweglichwerden der verschwindenden Streifen nicht.

Durch den vorgeschalteten nassen Faden von grossem Widerstande wird im Falle der Fig. 3 sowohl die Anfangsamplitude an K und an K' herabgesetzt, als auch die Dämpfung der Schwingung an beiden erhöht. Im Falle der Figuren 2 und 4 ist die Anfangsamplitude und die Dämpfung an K' ziemlich unverändert dieselbe, wie im Falle der Fig. 1. An der Kathode K aber wird durch den Funken oder den nassen Faden die Anfangsamplitude herabgesetzt und die Dämpfung erhöht. In allen Fällen muss die verminderte Anfangsamplitude und die vermehrte Dämpfung an K eine Verminderung der Streifenzahl bewirken; die verschiedene Reihenfolge des Verschwindens der Streifen scheint mir verständlich, wenn man berücksichtigt, dass sich das Verhältniss der Stärke der von K ausgehenden Strahlen zu der zugehörigen Ladung des

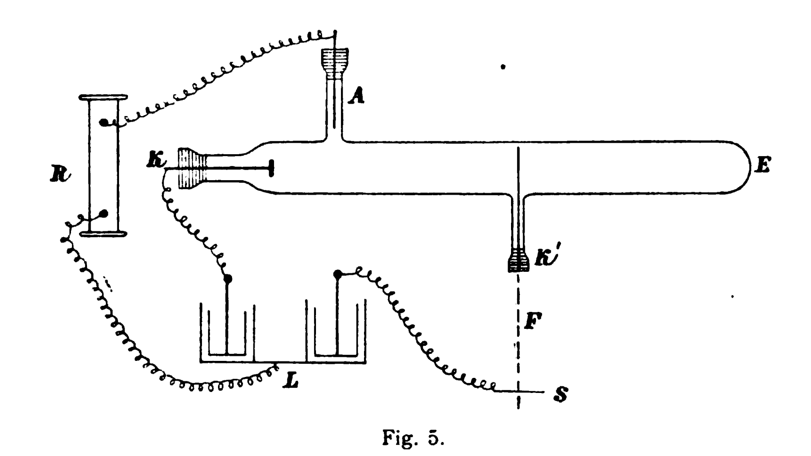


Fig. 5.

ablenkenden Drahtes K' in dem Falle der Fig. 3 mit der Länge des Flüssigkeitswiderstandes in ganz anderer Weise ändert, als in den Fällen der Figuren 2 und 4.

Ein Versuch, welcher auf diese Umstände einiges Licht wirft, ist der folgende: Legt man bei der aus Fig. 5 ersichtlichen Anordnung den Schleifcontact S direct an den schattenwerfenden Draht K', so beobachtet man im Raume zwischen K' und E eine Anzahl von etwa 5 oder 6 Streifen, wie im Falle der Fig. 1. Wird der Schleifcontact S nun längs der mit con-

centrirter Kupfervitriollösung getränkten Schnur F verschoben, so bemerkt man, wie sich der Streifen 1 gegen 2 vorschiebt, wobei alle vorhandenen Streifen weniger stark abgelenkt werden, also sich gegen E auf der Glaswand vorschieben.[1] Allmälig fallen bei weiterem Verschieben Streifen 1 und 2 zusammen und schieben sich gemeinsam gegen 3 vor u. s. w., bis alle Streifen sich auf einen einzigen Streifen (I) reduciren. Verlängert man den Faden F durch fortgesetztes Verschieben des Contactes S noch weiter, so schiebt sich nun auf der E zugewendeten, convexen Seite ein neuer Streifen (II) aus (I) hervor und wandert in der Richtung gegen E auf der Glaswand. Gleichzeitig rückt auch der K' nähere Streifen (I) gegen E, ihr Abstand vergrössert sich, und es tritt noch ein dritter Streifen (III) aus (I) heraus, welcher die Mitte zwischen den beiden schon vorhandenen einnimmt. Diese drei Streifen[2] rücken bei weiterer Verlängerung von F gemeinsam immer mehr gegen E hin. Bei nunmehr wieder vorgenommener Verkürzung von F geht die Erscheinung in der umgekehrten Reihenfolge wieder zurück. Zu beachten ist, dass die drei oder vier bei fortgesetzter Verlängerung von F auftretenden Streifen ein anderes Aussehen haben, als die ursprünglich vorhandenen, oder die bei den früher beschriebenen Experimenten zu Stande kommenden Streifen. Während die letzteren an der convexen Seite ziemlich scharf sind und gegen die concave Seite sehr rasch an Intensität abnehmen, so dass der einzelne Streifen etwa 1 bis 2 *mm* breit erscheint, sind die ersteren an der convexen Seite ganz scharf begrenzt, ihre Intensität gegen die concave Seite jedoch nimmt ganz allmälig ab, wodurch die Breite des einzelnen Streifens[3] bis zu 0·5 *cm* und darüber anwächst. Von ähnlicher Beschaffenheit sind auch jene Streifen, welche im folgenden Abschnitte beschrieben werden sollen.

---

[1] Die Streifen sind beziffert gedacht; Streifen 1 ist der K' nächstgelegene, dann folgen 2, 3 u. s. f. gegen E hin.

[2] Mehr als 4 Streifen habe ich bei diesem Versuche nicht bemerken können. Der vierte (IV) kommt geradeso zu Stande wie (III), er schiebt sich aus (I) heraus und nimmt dann die Mitte zwischen (I) und (III) ein.

[3] Immer an der convexesten Stelle gemessen.

B. Mit Hilfe eines grossen Widerstandes.

Es muss nach den hier mitgetheilten Beobachtungen und bei der Deutung, welche denselben zu geben versucht wurde, das Ergebniss des ersten der beschriebenen Experimente auffällig erscheinen.

Macht man nämlich in Fig. 1 *A* zur Anode, während die Kathode *K* mit *K'* direct durch einen Kupferdraht verbunden ist, so bemerkt man, wie schon erwähnt, nur je einen einzigen Streifen an den beiden Seiten des Rohres. Man könnte vielleicht gerade hier, bei der kräftigen Ladung von *K'*, eine besonders deutliche Trennung der von *K* ausgehenden Kathodenstrahlenzüge erwarten. Dass dies gleichwohl nicht der Fall ist, steht jedoch im Einklange mit zwei der beschriebenen Versuche. Es sei erstens daran erinnert, dass bei der in Fig. 1 skizzirten Anordnung die Distanz der Streifen eine umso geringere ist, je grösser die Capacität von *L* gewählt wird. Nimmt man dieselbe unendlich gross, was praktisch dadurch erreichbar ist, dass man eben zwischen *K* und *K'* einen guten Leiter einschaltet, so muss die Streifendistanz unendlich klein sein; die Streifen fallen dann zusammen und machen den Eindruck eines einzigen Streifens. Zweitens aber ergibt sich aus dem Verlaufe des mit der Anordnung Fig. 5 angestellten Experimentes, dass auch sonst bei gewissem Intensitätsverhältnisse zwischen *K* und *K'* alle Streifen sich in einen einzigen zusammenziehen können. Macht man von dieser zweiten Bemerkung Gebrauch und verändert das Intensitätsverhältniss zwischen *K* und *K'* in anderer Weise, als in den Versuchen des ersten Abschnittes, dadurch, dass man den gut leitenden Verbindungsdraht zwischen *K* und *K'* durch einen grossen Widerstand, z. B. einen nassen Faden ersetzt, so treten wieder mehrere Streifen an den Rohrwandungen auf, welche sich von den früher beschriebenen nur dadurch unterscheiden, dass sie unter sonst gleichen Umständen in geringerer Zahl auftreten als jene,[1] und dass die Helligkeit in denselben von einer scharfen Grenze an der convexen Seite

---

[1] Ich konnte stets nur drei, höchstens vier solcher Streifen bemerken.

gegen die concave Seite allmälig verlaufend abnimmt, wodurch die Streifen bis zu 1 *cm* breit erscheinen. Je grösser der Widerstand des nassen Fadens, desto weniger erscheinen die Streifen von der Rohraxe abgelenkt.

Ähnlichen Ursprungs wie die hier beschriebenen Streifen scheinen jene zu sein, welche Herr D. F. Tollenaar[1] beobachtet hat.

II. Zerlegung auf magnetischem Wege.

Betreffend die Trennung der von einer durch einen oscillirenden Erreger gespeisten Kathode ausgehenden Kathodenstrahlenzüge mit Hilfe magnetischer Kräfte kann und muss ich mich mit Rücksicht auf die von den Herren K. Birkeland[2] und J. J. Thomson[3] angestellten Versuche nur ganz kurz fassen.

Bedient man sich einer der in den früheren Figuren skizzirten Entladungsröhren, indem man A mit dem positiven, K mit dem negativen Ruhmkorffpole verbindet, K' aber isolirt lässt, und nähert dann dem Rohre einen Hufeisenmagneten von der Seite derart, dass er die Kathodenstrahlen und mit ihnen den Schatten, welchen K' wirft, abstösst, so bemerkt man, dass dieser Schatten dann nicht mehr, wie früher, von einem von der Schattengrenze beiderseits continuirlich an Intensität abnehmenden Fluorescenzlichte begrenzt wird, sondern dass sich innerhalb des grünen Fluorescenzlichtes Linien grösserer Intensität mit anschliessendem, an Helligkeit abnehmendem Lichte zeigen, welches auch theilweise in das Bereich des Schattens hineingreift und denselben unter Umständen ganz zum Verschwinden bringen kann. Diese Streifung des Lichtes macht ganz den Eindruck, als ob Streifen von der Constitution der in Abschnitt I, B beschriebenen sich theilweise übereinanderschieben würden. Hat man mit Hilfe eines Hufeisenmagnets die obige Erscheinung erhalten, so können, während

[1] D. F. Tollenaar, Deflexie en reflexie bij twee Kathoden, Amsterdam, 1897.

[2] Birkeland, Compt. rend. II., p. 492, 1896, September.

[3] J. J. Thomson, Phil. mag., p. 293, 1897, October.

der erste Magnet seine Lage beibehält, mit Hilfe eines zweiten Hufeisenmagnets, welchen man in passender Lage und Entfernung dem Rohre von der anderen Seite derart nähert, dass er seinerseits die Kathodenstrahlen abstösst, die früher an der Seitenwand des Rohres übereinandergeschobenen Streifen an das Ende *E* der Röhre getrieben und von einander getrennt erhalten werden. Bei geeigneter Verdünnung und sorgfältiger Einstellung der beiden Magnete haben dann die Streifen das Aussehen etwa 1 bis 2 *mm* breiter, grüner, von etwa gleich breiten dunkeln Streifen unterbrochener verticaler Striche an der Glaswand bei *E*. Ihre Zahl kann unter günstigen Umständen 6 bis 8 und mehr betragen.

Zur Hervorbringung der Streifen auf magnetischem Wege ist übrigens ein schattenwerfender Körper nicht unbedingt erforderlich. Ist der schattenwerfende Körper ein Draht, so wirkt es sogar störend, dass die beiderseits am Drahte vorbeigehenden Kathodenstrahlenbündel beim Ablenken durch den Magneten ineinandergreifen und dadurch die Erscheinung weniger deutlich machen können. Sehr schön sind die erwähnten Streifen zu erhalten, wenn man in eine der früher gebrauchten cylindrischen Röhren in einiger Entfernung von der Kathode einen halbkreisförmigen Schirm aus Metall oder Glimmer vom Radius des Rohres einführt, so dass die Kathodenstrahlen unter gewöhnlichen Verhältnissen hinter dem Schirm nur in die eine Längshälfte des Rohres gelangen können. Biegt man dann mit Hilfe des Magnets die Kathodenstrahlen in den geometrischen Schatten des Schirmes, so sieht man an der früher unbeleuchteten Wand sehr schön die erwähnten Streifen, welche mit Hilfe eines zweiten Magnets wieder an das Ende *E* der Röhre gebracht werden können. Nach der hier vertretenen Auffassung wird man die Streifen durch die von der constanten magnetischen Kraft verschieden stark abgelenkten Züge von Kathodenstrahlen entstanden denken müssen, welche während einer Emissionsperiode nach einander von der Kathode ausgesendet werden. Bemerkenswerth erscheint mir, dass die zu dieser Zerlegung erforderlichen magnetischen Kräfte keineswegs als besonders stark bezeichnet werden können, während nach dem Titel von Herrn Birkeland's erster Publication die

von ihm verwendeten magnetischen Kräfte sehr starke gewesen sein müssen. Angaben über ihren Betrag sind von Herrn Birkeland meines Wissens nicht beigebracht worden.

Es seien mir noch einige Worte über das Verhältniss gestattet, in welchem die hier beschriebenen Thatsachen zu den von K. Birkeland[1] und J. J. Thomson[2] mitgetheilten Versuchen über Streifenbildung unter dem Einflusse magnetischer und elektrischer Kräfte stehen.[3]

Die erste Abhandlung von Birkeland vom September 1896 war mir lange bekannt, ehe ich die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Erscheinungen beobachtete, welche mir zum erstenmale im Juli 1897 entgegentraten. Den grössten Theil der Versuche hatte ich bereits beendet, als mir die im Octoberhefte 1897 des Philosophical Magazine veröffentlichte Abhandlung von J. J. Thomson bekannt wurde. Die letzte Notiz von K. Birkeland[4] kam mir zu Gesicht, als ich den grössten Theil meiner vorliegenden Mittheilung bereits geschrieben hatte. Dass ich nicht früher an die Veröffentlichung meiner Beobachtungen gegangen bin, hat seinen Grund lediglich darin, dass mir eine plausible Deutung der Versuche lange nicht gelingen wollte. Die hier angenommene Deutung scheint mir übrigens ziemlich wesentlich von der Auffassung des Herrn Birkeland abzuweichen, welcher die Erscheinung als ein Spectrum bezeichnet.

Mit der Untersuchung von J. J. Thomson haben meine Beobachtungen den Ausgangspunkt gemeinsam, nämlich das Streben, zwischen der Emanations- und Undulationshypothese der Kathodenstrahlen zu entscheiden. Der Erfolg meiner bis-

---

[1] L. c.

[2] L. c.

[3] Bei Abfassung vorliegender Arbeit waren mir die Untersuchungen von Herrn Deslandres über Kathodenstrahlen (Compt. rendu. 1897, referirt in Wied. Beibl. 21, S. 444, 650, 780, 1013) leider vollständig entgangen. Doch sehe ich nachträglich, dass sowohl die Versuchsanordnung, als auch die Deutung der Versuche bei Herrn Deslandres und mir voneinander verschieden sind. Ich bin Herrn Prof. E. Wiedemann sehr zu Danke verpflichtet, welcher mich auf mein Versehen brieflich aufmerksam machte.

[4] Birkeland, Compt. rend. 1898, Nr. 3.

herigen Untersuchung scheint mir aber eine derartige Entscheidung noch nicht zu gestatten. Dieselbe Meinung möchte ich mir rücksichtlich der Ergebnisse der J. J. Thomson'schen Arbeit auszusprechen erlauben.

Betonen möchte ich, dass ich die von mir versuchte Erklärung durch die beigebrachten Versuche keineswegs als vollständig bewiesen betrachte. Gerne hätte ich mit Hilfe eines rotirenden Spiegels versucht, zu entscheiden, ob die Streifen gleichzeitig auftreten oder im Tempo der Ruhmkorffschwingung aufeinanderfolgen. Mangels der hiezu erforderlichen Apparate war es mir bis jetzt nicht möglich, dies Experiment zur Ausführung zu bringen.

Verdunstung des Meerwassers und des Süsswassers

von

Eduard Mazelle.

Anlässlich der Zusammenstellung einiger Daten fiel mir die grosse Veränderlichkeit in den Angaben auf, mit welchen das Verhältniss zwischen der Verdunstungsgrösse des Süsswassers und der des Meerwassers angegeben wird. So ist aus den Publicationen Ragona's (Studi sulla evaporazione delle dissoluzioni saline) in den Memorie della Regia Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena zu entnehmen, dass nach den Beobachtungsergebnissen, welche Prof. Chapman von der Universität Toronto dem Institute von Canada am 20. Jänner 1855 vorgelegt hatte, die Verdunstung des Meerwassers nur 0·54 der des Süsswassers entsprechen soll. Versuche, welche Ragona im Juli 1867 anstellte, und zwar unter Zuhilfenahme einer Präcisionswage, um den Gewichtsverlust zu bestimmen, und eines eigens construirten Apparates, bei welchem mittelst einer Mikrometerschraube die Niveauänderung gemessen wurde, bestätigten dieses Verhältniss, indem Ragona einen Quotienten von 0·56 bestimmte. Ragona wiederholte diese Versuche vom October bis anfangs December 1867, also bei geringerer Temperatur und grösserer Feuchtigkeit, und fand, dass mitunter sogar statt einer Verdunstung des Meerwassers eine Erhöhung des Niveaus beobachtet werden konnte. Ragona gelangte mit Hilfe dieser zweiten Versuchsreihe zur Schlussfolgerung, dass je nach der Temperatur und dem Feuchtigkeitsgehalte der Luft die Verdunstung des Meerwassers grösser sein könne als die des Süsswassers, oder

gleich gross, oder kleiner, dass mitunter gar keine Verdunstung vorkommen könne und in manchen Fällen sogar eine Zunahme des Meerwasserquantums. Das oben erwähnte Verhältniss von Chapman erklärte Ragona als einen ganz speciellen Fall, der Temperatur von 20° und der relativen Feuchtigkeit von 50% entsprechend.

In den Comptes-rendus, 1883, Paris, findet sich auf S. 1655 u. ff. eine Note von Dieulafait (Evaporation comparée des eaux douces et des eaux de mer), in welcher gegen die Annahme von Roudaire, dass das Verhältniss der Verdunstung des Meerwassers zu der des Süsswassers mit 0·62 festgestellt werden müsse, Stellung genommen wird. In dieser Mittheilung wird zugleich unter Bezugnahme auf die Äusserung Jamin's erörtert, dass das Verhältniss zwischen der Verdunstung beider Wassergattungen nicht durch einen constanten Coëfficienten dargestellt werden könne. Indem Dieulafait Versuche mit Glasgefässen anstellte, welche 1 Liter Wasser enthalten konnten und in der freien Luft, stets im Schatten, in einer gegenseitigen Entfernung von 0·60 *m* exponirt wurden, bis das Meerwasser $^1/_5$ seines ursprünglichen Volumens eingebüsst hatte, fand er, dass das Verhältniss der Meerwasser-Evaporation zu der des Süsswassers nie unter 0·92 sank. Wenn das Meerwasser hingegen nur 0·01 bis 0·02 seines Volumens verlor, wurde der Quotient nur mit 0·965 bestimmt.

Im März 1896 liess ich am k. k. astronomisch-meteorologischen Observatorium in Triest zwei der bekannten Wild'schen Verdunstungswagen, beide ganz gleicher Construction und Grösse, in ein und derselben theilweise aus hölzernen Jalousiewänden gebildeten kleinen Hütte aufstellen und des Versuches halber täglich bei der Morgenbeobachtung (7^h a.) correspondirende Ablesungen vornehmen. Das Meerwasser wurde jeden dritten Tag frisch geschöpft und als Süsswasser das aus dem Regenmesser gewonnene benützt. Die Atmometer mussten des kleinen Raumes wegen nahe bei einander stehen. Der Observatoriumslaborant wurde mit der Bedienung der Atmometer betraut, doch ergaben die Ablesungen ganz unregelmässig vertheilte Werthe, welche wirklich für die Verdunstung des Meerwassers im Vergleiche zu der des Süss-

wassers bald grössere, bald kleinere, mitunter gleich grosse Verdunstungsmengen ergab.

Angeregt durch diese Resultate liess ich die Wassermenge jeden Tag frisch wechseln und dabei die Atmometer stets auf den Nullpunkt einstellen. Herr Ingenieur Faidiga, Assistent am Observatorium, übernahm mit grösster Bereitwilligkeit die Bedienung beider Atmometer und besorgte mit grosser Gewissenhaftigkeit die täglichen Ablesungen (9^h a.), und zwar vom 1. Juni 1896 bis Ende September 1897, durch volle 16 Monate.

Die Beobachtungen finden sich im Anhange mitgetheilt. Aus 17 Aräometer-Messungen folgt für das verwendete Seewasser ein mittlerer Salzgehalt von 37·3‰.

Betrachten wir die einzelnen Aufzeichnungen, so ersehen wir, dass die Verdunstung des Süsswassers immer die des Meerwassers übertrifft; nur an 2 Tagen von den 487 Beobachtungen zeigte das mit Meerwasser gefüllte Atmometer eine grössere Verdunstung, und zwar am 19. Juli 1896 und am 27. Februar 1897 (Meerwasserverdunstung 0·9, Süsswasserverdunstung 0·7 und 0·6 gegen 0·5). An 2 Tagen war beim mit Meerwasser gefüllten Atmometer keine Verdunstung zu erkennen, und zwar am 7. und 8. Jänner 1897, an welchen Tagen das Süsswasser die kleine Verdunstung von 0·1 *mm* zeigte. Gleich grosse Evaporation findet sich an beiden Atmometern nur 8mal vor, darunter 6mal bei ganz geringer Verdunstungsgrösse, von 0·1 bis 0·5 *mm*, je 1mal bei 1·3 *mm* und bei 2·2 *mm*. Von diesen 10 Fällen und den oben angeführten zwei exceptionellen Ergebnissen abgesehen, wurde an den übrigbleibenden 475 Beobachtungstagen (98% sämmtlicher Beobachtungen) die Verdunstung des Süsswassers immer grösser als die des Meerwassers gefunden.

Die Verdunstungsgrössen eines Tages schwankten in dieser 16monatlichen Beobachtungsreihe zwischen 0·1 *mm* bis 6·5 *mm* für das Süsswasser und von 0·0 bis 5·9 *mm* für das Meerwasser.

Bilden wir uns die totale Summe der Verdunstung in diesem in Betracht gezogenen Zeitraume, so finden wir für das Süsswasser eine Höhe von 910·6 *mm* und für das Meerwasser eine solche von 750·9 *mm*. Daraus würde sich ergeben,

dass einer Süsswasserverdunstung von 100 *mm* eine des Meerwassers im Betrage von 82·46 *mm* entsprechen würde, oder bei 100 *mm* Meerwasserverdunstung 121·27 *mm* Süsswasserevaporation.

Bilden wir uns für die einzelnen Monate die Mittelwerthe und die dazugehörigen arithmetischen und geometrischen Verhältnisse und ordnen wir diese nach der Verdunstungsmenge des Süsswassers, so lässt sich schon aus dieser Zusammenstellung ersehen, dass mit der Zunahme der Verdunstungsgrösse der Exponent des arithmetischen Verhältnisses zwischen der Verdunstung des Süsswassers und der des Meerwassers zunimmt, während der Exponent des geometrischen Verhältnisses abnimmt.

Mittlere tägliche Verdunstung.

	Süsswasser	Meerwasser	Differenz	Quotient
Februar 1897	0·88	0·69	0·19	1·29
Jänner 1897	0·93	0·71	0·22	1·31
März 1897	1·03	0·71	0·32	1·44
December 1896	1·28	1·02	0·26	1·26
October 1896	1·31	1·03	0·28	1·27
November 1896	1·68	1·35	0·33	1·24
September 1896	1·68	1·36	0·32	1·23
April 1897	1·73	1·38	0·35	1·25
Mai 1897	1·79	1·39	0·40	1·29
August 1896	2·02	1·62	0·40	1·25
Juni 1896	2·07	1·78	0·29	1·16
September 1897	2·26	1·98	0·28	1·14
Juli 1896	2·32	1·96	0·36	1·18
Juni 1897	2·70	2·23	0·47	1·21
August 1897	2·88	2·55	0·33	1·13
Juli 1897	3·28	2·86	0·42	1·15

Deutlicher und regelmässiger tritt dies hervor, wenn die 16 Monatsresultate in vier Gruppen mit je vier Monatswerthen zusammengefasst werden:

Süsswasser	Meerwasser	Differenz	Quotient
1·03	0·78	0·25	1·32
1·60	1·28	0·32	1·25
2·04	1·69	0·35	1·21
2·80	2·40	0·40	1·17

Ordnen wir das ganze Beobachtungsmaterial nach der Grösse der Süsswasserverdunstung von Zehntel- zu Zehntelmillimeter fortschreitend und vereinigen je fünf dieser Gruppen, so dass die erhaltenen Grössen der Süsswasserevaporation von 5 zu 5 Zehntelmillimeter ansteigen (0·3, 0·8, 1·3...6·3), berechnen die diesen einzelnen Schwellenwerthen entsprechenden Meerwasserverdunstungen, so erhalten wir nachfolgende Werthe:

Tägliche Verdunstung des Meerwassers und des Süsswassers.

Anzahl der Fälle	Süsswasser	Meerwasser	Differenz	Quotient
41	0·36	0·25	0·11	1·44
75	0·81	0·58	0·23	1·40
88	1·29	1·02	0·27	1·26
90	1·79	1·45	0·34	1·23
83	2·30	1·92	0·38	1·20
52	2·77	2·33	0·44	1·19
29	3·27	2·81	0·46	1·16
14	3·76	3·18	0·58	1·18
4	4·15	3·75	0·40	1·11
4	4·93	4·43	0·50	1·11
3	5·13	4·63	0·50	1·11
—	—	—	—	—
4	6·40	5·80	0·60	1·10

In der ersten Columne wird die Anzahl der Fälle mitgetheilt, welche den einzelnen Verdunstungsgruppen zukommen. Da die Anzahl der Fälle eine verschiedene ist, so entspricht jeder dieser Gruppen nicht genau die oben angeführte Zahl

(0·3, 0·8, 1·3...), sondern die in der zweiten Columne angegebene Süsswasser-Verdunstungsgrösse. In der dritten Reihe wird der resultirende Mittelwerth der Evaporation des Meerwassers mitgetheilt und in der vierten und fünften die berechneten Differenzen und Quotienten.

Man ersieht aus diesen Reihen ganz deutlich, wie mit zunehmenden Verdunstungsgrössen die Differenzen grösser, die Quotienten hingegen kleiner werden. Stellen wir uns die Verdunstungen von Zehntel- zu Zehntelmillimeter vorschreitend graphisch dar, und zwar die Süsswasserverdunstungen als Abscissen, die des Meerwassers als Ordinaten, so erhalten wir nach erfolgter Ausgleichung der sich ergebenden Curve nachfolgende Werthe, welche mit grosser Regelmässigkeit obgenannte Relationen entnehmen lassen.

Ausgeglichene Werthe der täglichen Verdunstung.

Süsswasser	Meerwasser	Differenz	Quotient	
			$S:M$	$M:S$
0·3	0·21	0·09	1·43	0·70
0·8	0·59	0·21	1·36	0·74
1·3	1·02	0·28	1·27	0·78
1·8	1·46	0·34	1·23	0·81
2·3	1·91	0·39	1·20	0·83
2·8	2·37	0·43	1·18	0·85
3·3	2·84	0·46	1·16	0·86
3·8	3·32	0·48	1·14	0·87
4·3	3·81	0·49	1·13	0·89
4·8	4·30	0·50	1·12	0·90
5·3	4·78	0·52	1·11	0·90
5·8	5·25	0·55	1·10	0·91
6·3	5·71	0 59	1·10	0·91

Bezeichnen wir die Quotienten mit e_1 und e_2, so ist, wenn mit S und M die Verdunstungshöhe des Süss-, beziehungsweise des Meerwassers dargestellt wird,

$$S = e_1 M \quad \text{oder} \quad M = e_2 S,$$

wobei diese Reductionsfactoren e_1 und e_2 sich immer mehr der Einheit nähern, je grösser die Verdunstungshöhe eines Tages wird.

Der percentuelle Unterschied zwischen der Süsswasser- und Meerwasserverdunstung wird daher mit zunehmender Evaporation immer kleiner. Beim kleinsten der angeführten Werthe entspricht einer Verdunstung des Süsswassers von 100 *mm* eine solche des Meerwassers von nur 70 *mm*, oder 100 *mm* Meerwasserverdunstung würden 143 *mm* Süsswasserverdunstung entsprechen, während auf Grund obiger Tabelle bei der grössten täglichen Verdunstung zu je 100 *mm* Süsswasserverdunstung 91 *mm* Meerwasserevaporation oder zu 100 *mm* Verdunstung des Meerwassers 110 *mm* der des Süsswassers gehören müssten.

Wollte man diese Curve der Meerwasserverdunstung durch eine Gleichung von der allgemeinen Form $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + + a_3 x^3 + \ldots$ ausdrücken, so lässt sich durch folgende berechnete Curvengleichung:

$$y = -0 \cdot 018 + 0 \cdot 7303\, x + 0 \cdot 0561\, x^2 - 0 \cdot 0044\, x^3,$$

in welcher x die Verdunstung des Süsswassers und y die des Meerwassers bezeichnet, zu jedem Tageswerthe der Evaporation des Süsswassers die dazugehörige Verdunstung des Meerwassers bestimmen.

Die eingangs erwähnte grosse Verschiedenheit in den Verhältnissen zwischen der Süsswasser- und Meerwasserverdunstung findet damit eine ungezwungene Erklärung. Ist die Verdunstung klein, so entfernt sich der Quotient der beiden Verdunstungshöhen von der Einheit, während bei zunehmender Verdunstung er sich immer mehr und mehr der Einheit nähert. Unter allen 487 Ablesungen, bei den verschiedensten Temperaturen und Feuchtigkeitszuständen der Atmosphäre, wurde jedoch kein einziger Fall bemerkt, bei welchem, wie bei Ragona, eine Zunahme der Meerwassermenge hätte constatirt werden können.

Gehen wir nun zu einer kurzen Untersuchung des Verhaltens beider Verdunstungsgrössen unter dem Einfluss der verschiedenen meteorologischen Elemente über.

Ordnen wir die Monatsmittel der Temperatur nach ihrer Grösse und schreiben wir dazu die entsprechenden Monatsmittel der Verdunstungen, sowie die Mittel, beziehungsweise die Summen der Windgeschwindigkeiten, des Niederschlages, der Bewölkung, der relativen Feuchtigkeit und des Sonnenscheines, so erhalten wir folgende Tabelle:

Monatswerthe einiger meteorologischer Elemente.

	Temperatur	Süsswasser-verdunstung	Meerwasser-verdunstung	Differenz	Quotient	Wind	Regen	Bewölkung	Feuchtigkeit	Sonnenschein
		mm	*mm*			*km*	*mm*	0–10	%	h
Jänner 1897	6°4	0·93	0·71	0·22	1·31	15·4	99	6·8	72	81
December 1896	7·6	1·28	1·02	0·26	1·26	24·0	113	7·7	67	65
Februar 1897	7·9	0·88	0·6	0·19	1·29	·5	35	5·5	71	154
November 1896	8·7	1·68	1·35	0·33	1·24	30·3	60	6·4	67	107
März 1897	10·9	1·03	0·71	0·32	1·44	6·6	117	6·6	75	139
April 1897	13·5	1·73	1·38	0·35	1·25	12·5	80	6·1	68	185
Mai 1897	15·9	1·79	1·39	0·40	1·29	12·4	163	6·9	67	191
October 1896	16·3	1·31	1·03	0·28	1·27	11·7	253	6·2	76	128
September 1896	19·3	1·68	1·36	0·32	1·23	8·9	167	5·1	72	203
September 1897	20·1	2·26	1·98	0·28	1·14	12·9	158	4·7	67	222
August 1896	21·3	2·02	1·62	0·40	1·25	11·5	230	6·2	71	219
Juni 1896	21·5	2·07	1·78	0·29	1·16	9·8	163	6·1	66	254
Juni 1897	22·6	2·70	2·23	0·47	1·21	8·7	50	4·0	60	299
August 1897	23·9	2·88	2·55	0·33	1·13	8·5	69	2·8	62	336
Juli 1896	24·0	2·32	1·96	0·36	1·18	8·2	129	4·3	66	309
Juli 1897	24·4	3·28	2·86	0·42	1·15	11·4	47	4·5	60	288

Aus dieser lässt sich entnehmen, dass mit dem Steigen der Temperatur die Verdunstung im Allgemeinen zunimmt, und zwar sowohl die des Süsswassers, als die des Meerwassers, abgesehen von den sehr starken, durch andere Factoren hervorgerufenen Schwankungen.

Tragen wir die Temperaturen als Abscissen, die dazugehörigen Verdunstungshöhen des Süsswassers und des Meerwassers als Ordinaten auf, so finden wir in den zwei gebrochenen Verdunstungslinien einen gleichartigen Verlauf, unter Wiederholung der früher erwähnten Beziehungen zwischen den arithmetischen und geometrischen Verhältnissen.

Ein zu plötzliches Ansteigen der Curve, d. h. eine zu grosse Verdunstungshöhe findet sich z. B. bei der Abscisse von 9°, welches Ansteigen durch die grosse mittlere Windgeschwindigkeit erklärt wird; dieselbe erreicht in diesem Monate 30·3 *km* p. St., den grössten Betrag der in dieser Untersuchungsreihe vorkommenden mittleren Geschwindigkeit. Gleich darauf findet sich ein kleiner Verdunstungswerth bei einer höheren Temperatur. Die Windgeschwindigkeit ist aber auch bedeutend kleiner, ja erreicht das kleinste Monatsmittel dieser Reihe mit 6·6 *km* p. St.

Vergleichen wir nun die Monate mit annähernd gleicher Temperatur: December und Februar, beide mit circa 8° mittlerer Monatstemperatur, so ersehen wir einen grossen Unterschied in der Verdunstung, und zwar zeigt der erstgenannte eine grössere Evaporation, offenbar verursacht durch die stärkere Luftbewegung dieses Monates. Das Monatsmittel der Windgeschwindigkeit ist 24·0 gegen 7·5 *km*. Der Niederschlag ist jedoch im erstgenannten Monate bedeutend grösser (113 *mm* gegen 35 *mm*), ebenso die mittlere Bewölkung (7·7 gegen 5·5) und die Dauer des Sonnenscheines mehr als die Hälfte kleiner (65^h gegen 154^h), nur bei der Feuchtigkeit ist für den ersten Monat der grösseren Verdunstung ein geringeres Monatsmittel (67$^0/_0$ gegen 71$^0/_0$) zu bemerken. Man ersieht daraus, dass trotz grösserer Bewölkung und Niederschlag in Folge des kräftigeren Windes die Verdunstung gestiegen ist, und zwar gleichmässig sowohl die des Süss-, als des Meerwassers. Die Verdunstung im windstarken Monate ist beim Süsswasser 1·45mal, beim Meerwasser 1·48mal grösser. Das Verhältniss zwischen der Evaporation beider Wasserquantitäten bleibt demnach nahezu unverändert, 1·26 gegen 1·29.

Als zweiten Fall mit nahezu gleicher Monatstemperatur finden wir den Mai und den October mit circa 16°. Die

Verdunstungshöhen des erstgenannten Monates sind grösser. Die Windgeschwindigkeit ist in diesem Falle kaum besonders überwiegend zu nennen, 12·4 gegen 11·7 *km* als Monatsmittel, doch zeigt sich im ersten Monate eine geringere Regenmenge (163 gegen 253), grössere Sonnenscheindauer (191 gegen 128^h) und eine geringere mittlere Feuchtigkeit (67 gegen $76^0/_0$). Das Bewölkungsmittel variirt hier wenig, 6·9 gegen 6·2. Die vermehrte Verdunstung müsste in diesem Falle weniger dem Winde, als dem Zusammenwirken der anderen Factoren zuzuschreiben sein. Die Süsswasserverdunstung im Mai ist 1·36 mal grösser als die im October gleicher Monatstemperatur; für die Verdunstung des Meerwassers findet sich fast genau dasselbe Verhältniss, 1·35. Daher sind auch die Quotienten zwischen der Süsswasser- und Meerwasserverdunstung nahezu dieselben, 1·29 gegen 1·27.

Im dritten Falle hier vorkommender fast gleicher Monatstemperatur, August und Juni 1896, mit den Mitteln 21°3 und 21°5, sind die Süsswasserverdunstungen nahezu gleich, nur im zweiten Monate etwas grösser, 2·07 gegen 2·02. Der Unterschied wird jedoch beträchtlicher bei der Verdunstung des Meerwassers, 1·78 gegen 1·62, weshalb auch der Quotient $(S:M)$ in diesem Monate kleiner wird, 1·16 gegen 1·25. Die Windgeschwindigkeiten zeigen geringen Unterschied, eigentlich im Monate der geringeren Verdunstung eine grössere Stärke (11·5 gegen 9·8 *km*), dafür ist aber die Niederschlagsmenge grösser (230 gegen 163 *mm*) und ebenso die Feuchtigkeit (71 gegen $66^0/_0$), während die Anzahl der Sonnenstunden kleiner ist (219 gegen 254^h).

Noch einen vierten Fall von annähernd gleichen Monatsmitteln der Temperatur finden wir im August 1897, Juli 1896 und Juli 1897 (23°9, 24°0 und 24°4). Die grösste Verdunstung, sowohl des Süsswassers, als des Meerwassers findet sich im Juli 1897, die kleinste im Juli 1896. Die erste findet ihre Erklärung im etwas höheren Monatsmittel der Temperatur, in dem grösseren Windgeschwindigkeitsmittel, im geringeren Niederschlag und der kleineren Feuchtigkeit; die Bewölkung ist hingegen etwas grösser und die Anzahl der Stunden mit ungehinderter Sonnenstrahlung kleiner. August 1897 und Juli

1896 zeigen fast das gleiche Monatsmittel der Temperatur (23°9, 24°0), doch ist die Verdunstung des Süsswassers und Meerwassers im Juli kleiner. Die Windgeschwindigkeit zeigt nahezu das gleiche Monatsmittel (8·5 gegen 8·2 *km*), doch ist im Juli ein grösserer Niederschlag (129 gegen 69 *mm*), grössere Feuchtigkeit (66 gegen 62%), grössere Bewölkung (4·3 gegen 2·8) und weniger Stunden mit Sonnenschein (309 gegen 336^h). Parallel mit der Süsswasserverdunstung geht die Meerwasserverdunstung vor sich, da die Unterschiede der Quotienten ($S: M$) sehr geringe sind (1·13, 1·18 und 1·15).

Gehen wir nun zu einer detaillirteren Behandlung der einzelnen Tageswerthe über.

Um den Einfluss der Temperatur auf die Verdunstungen tabellarisch darzustellen, wurden sämmtliche Beobachtungstage nach den Temperaturen geordnet, und zwar von Grad zu Grad vorschreitend, zugleich die entsprechenden mittleren Verdunstungshöhen, sowohl für das Süss-, als für das Meerwasser bestimmt.

Die Anzahl der Beobachtungen, welche auf jedes einzelne Gradintervall entfallen, ist natürlich verschieden, weshalb den einzelnen resultirenden Verdunstungshöhen ungleiche Genauigkeiten zukommen.

Die Vertheilung der Häufigkeit ist nachfolgende:

Temperatur ...	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°
Häufigkeit	3	3	8	6	9	13	8	**24**	**22**	**23**	14	17	**25**	15

Temperatur	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°
Häufigkeit	12	16	17	22	21	**32**	**36**	25	23	**33**	**30**	15	9	4	2

Daraus ersieht man, dass die Beobachtungsanzahl bei den Temperaturen zwischen 8—10°, dann bei 13°, bei 20—21° und bei 24—25° dichter wird.

Tragen wir die Temperaturen als Abscissen, die dazugehörigen Verdunstungsmittel sowohl des Süsswassers, als des Meerwassers als Ordinaten auf, so finden wir bei beiden Verdunstungshöhen einen gleichen Verlauf; ausser der selbstverständlichen Zunahme der Verdunstung mit der Zunahme der Temperatur finden sich die grossen Unregelmässigkeiten,

welche die Verdunstungscurven noch aufweisen, bei beiden Curven überall im ganz gleichen Sinne vor.

Gleichen wir die Ordinatenwerthe sowohl rechnerisch, als graphisch aus, so erhalten wir nachfolgende Reihen, welche sehr deutlich den Zusammenhang erkennen lassen. Dieser Zusammenstellung werden gleichzeitig die Differenzen und die Quotienten (Reductionsfactoren) beigefügt.

Verdunstung und Temperatur.

Temperatur Tagesmittel	Süsswasser-verdunstung	Meerwasser-verdunstung	Differenz	Quotient
1°	1·07	0·80	0·27	1·34
3	1·09	0·82	0·27	1·33
5	1·11	0·84	0·27	1·32
7	1·14	0·87	0·27	1·31
9	1·18	0·90	0·28	1·31
11	1·25	0·97	0·28	1·29
13	1·36	1·08	0·28	1·26
15	1·50	1·21	0·29	1·24
17	1·66	1·34	0·32	1·24
19	1·87	1·52	0·35	1·23
21	2·17	1·78	0·39	1·22
23	2·52	2·11	0·41	1·19
25	2·94	2·52	0·42	1·17
27	3·39	2·96	0·43	1·14
29	3 88	3·45	0·43	1·12

Man ersieht daraus, wie mit der zunehmenden Temperatur die Verdunstung wächst und analog dem früher Gesagten bei den höheren Temperaturen der Unterschied zwischen den resultirenden Verdunstungshöhen grösser wird, der Reductionsfactor hingegen kleiner. Bei 5° ist er z. B. 1·32, bei 15° 1·24 und bei 25° 1·17.

Wollten wir diese Reihen benützen, um die Zunahme der Verdunstung per Temperaturgrad zu bestimmen, so würde im Durchschnitte für das Süsswasser eine Zunahme der Verdunstung von 0·100 *mm* pro 1° entsprechen, für das Meerwasser hingegen 0·095 *mm*.

Die Zunahme der Verdunstung wird jedoch sowohl beim Süsswasser, als beim Meerwasser rascher bei höherer Temperatur, wie auch aus nachfolgender kleiner Zusammenstellung ersichtlich wird:

Verdunstungszunahme pro Temperaturgrad.

Temperatur-intervall	Süsswasser	Meerwasser
1—5°	0·010	0·010
5—9	0·018	0·015
9—13	0·045	0·045
13—17	0·075	0·065
17—21	0·128	0·110
21—25	0·193	0·185
25—29	0·235	0·232

Da bei der Verdunstung der Windgeschwindigkeit ein grosser Einfluss zukommt, so werden wir für jene Temperaturgruppen, bei welchen eine grössere Anzahl von Beobachtungen gemacht werden konnten, eine Trennung nach den Tagesmitteln der Windgeschwindigkeit vornehmen. Zu diesem Zwecke wählen wir die Temperaturgruppen von 8, 9 und 10°, woselbst 68 Beobachtungen vorliegen, sodann die Gruppe mit 20 und 21° mit 67 Beobachtungen (eigentlich 69 und 68, aber je eine Ablesung wurde weggelassen, da diese das umgekehrte Verhältniss zwischen der Süss- und der Meerwasserverdunstung angeben und, wie bereits erwähnt, dies die zwei einzigen Fälle unter allen 487 Beobachtungen sind) und endlich die Temperaturgruppe mit 24 und 25°, auf welche 63 Beobachtungen entfallen.

Betrachten wir die Verdunstungsbeobachtungen je einer dieser Gruppen als bei einer annähernd constanten Temperatur vorgenommen, ordnen sämmtliche Atmometerablesungen nach

der Grösse der mittleren Windgeschwindigkeit und unterziehen diese Reihen noch einer rechnerischen und graphischen Ausgleichung.

Für die erste Temperaturgruppe, Temperatur circa 9°, resultiren folgende Werthe:

Verdunstung und Windgeschwindigkeit.

Temperatur 8—10°.

Kilom. p. St. Tagesmittel	Süsswasser-verdunstung	Meerwasser-verdunstung	Differenz	Quotient
1	0·54	0·37	0·17	1·46
5	0·79	0·56	0·23	1·41
9	1·00	0·72	0·28	1·39
13	1·20	0·87	0·33	1·38
17	1·38	1·02	0·36	1·35
21	1·54	1·17	0·37	1·32
25	1·68	1·30	0·38	1·29
29	1·80	1·42	0·38	1·27
33	1·91	1·52	0·39	1·26
37	2·01	1·61	0·40	1·25
41	2·09	1·69	0·40	1·24
45	2·17	1·76	0·41	1·23
49	2·24	1·83	0·41	1·22
53	2·30	1·89	0·41	1·22
57	2·35	1·94	0·41	1·21
61	2·40	1·99	0·41	1·20
65	2·45	2·04	0·41	1·20
69	2·49	2·08	0·41	1·20
73	2·53	2·12	0·41	1·19
77	2·57	2·15	0·42	1·19
81	2·60	2·18	0·42	1·19
85	2·63	2·21	0·42	1·19

Mit der Zunahme der mittleren stündlichen Windgeschwindigkeit nehmen die Verdunstungen pro Tag zu, und es ergibt

sich analog dem früher Erwähnten mit der Zunahme der Verdunstung ein der Einheit sich nähernder Reductionsfactor.

Aus diesen Beobachtungen folgt ferner, dass einer Zunahme der Windgeschwindigkeit von 84 *km* eine Zunahme der täglichen Verdunstung bei Süsswasser von 2·09 *mm*, bei Meerwasser von 1·84 *mm* entspricht, also für einen Kilometer beim Süsswasser 0·025, beim Meerwasser etwas weniger, 0·022.

Diese Zunahme ist jedoch keine constante, wie sich aus nachfolgender Zusammenstellung ergibt:

Verdunstungszunahme pro Kilometer Windgeschwindigkeit.

Intervall von	Süsswasser	Meerwasser
1—13 *km*	0·055	0·042
13—25	0·040	0·036
25—37	0·028	0·026
37—49	0·019	0·018
49—61	0·013	0·013
61—73	0·011	0·011
73—85	0·008	0·008

Die Zunahme der Verdunstung wird immer kleiner, je grösser die Windgeschwindigkeit wird. Bei kleiner mittlerer Windgeschwindigkeit von 1—13 *km* pro Stunde ist die Zunahme der Verdunstung pro 1 *km* Windgeschwindigkeit 0·055 für das Süsswasser und 0·042 für das Meerwasser. Von da an wird diese Zunahme immer kleiner, um bei einer Windgeschwindigkeit von 73—85 *km* nur mehr 0·008 *mm*, sowohl für das Süsswasser, als auch für das Meerwasser zu sein. Bei kleiner Windstärke ist die Zunahme der Süsswasserverdunstung grösser als die des Meerwassers, bei zunehmender Windstärke nähern sich beide Werthe.

Für die Temperatur von 20 und 21° finden wir nachfolgende Resultate:

Verdunstung und Windgeschwindigkeit.

Temperatur 20 und 21°.

Kilom. p. St. Tagesmittel	Süsswasser-verdunstung	Meerwasser-verdunstung	Differenz	Quotient
1	1·45	1·21	0·24	1·20
3	1·52	1·27	0·25	1·20
5	1·61	1·34	0·27	1·20
7	1·71	1·42	0·29	1·20
9	1·83	1·52	0·31	1·20
11	1·97	1·64	0·33	1·20
13	2·12	1·77	0·35	1·19
15	2·27	1·90	0·37	1·19
17	2·43	2·04	0·39	1·19
19	2·61	2·20	0·41	1·18
21	2·80	2·38	0·42	1·18
23	3·00	2·57	0·43	1·17
25	3·21	2·77	0·44	1·16
27	3·42	2·97	0·45	1·15
29	3·64	3·17	0·47	1·15
31	3·87	3·37	0·50	1·15
33	4·10	3·57	0·53	1·15
35	4·33	3·78	0·55	1·15
37	4·57	4·01	0·56	1·14

Die täglichen Verdunstungsmengen, welche hier der höheren Temperatur wegen grössere Beträge erreichen, nehmen in beiden Reihen gleichmässig mit der Windgeschwindigkeit zu, und zwar so, dass auch hier der Reductionsfactor ($S : M$) immer kleiner wird.

In dieser Temperaturgruppe entspricht einer Zunahme der mittleren Windgeschwindigkeit von 1 *km* im Durchschnitt eine Verdunstungszunahme von 0·087 *mm* beim Süsswasser und 0·078 *mm* beim Meerwasser, doch wäre hier zu bemerken, dass bei grösseren Windgeschwindigkeiten, welche sich allerdings hier nur bis zu 37 *km* p. St. erstrecken, die Zunahme der Verdunstung pro Kilometer wächst, wie im Nachfolgenden ersichtlich gemacht wird:

Verdunstungszunahme pro Kilometer Windgeschwindigkeit.

Intervall von	Süsswasser	Meerwasser
1—7 *km*	0·043	0·035
7—13	0·068	0·058
13—19	0·082	0·072
19—25	0·100	0·095
25—31	0·110	0·100
31—37	0·117	0·107

Beim Meerwasser finden sich überall kleinere Beträge.

In der dritten Temperaturgruppe von 24—25° lassen sich folgende Resultate feststellen:

Verdunstung und Windgeschwindigkeit.

Temperatur 24—25°.

Kilom. p. St. Tagesmittel	Süsswasser-verdunstung	Meerwasser-verdunstung	Differenz	Quotient
1	2·37	2·01	0·36	1·18
3	2·41	2·04	0·37	1·18
5	2·47	2·09	0·38	1·18
7	2·56	2·17	0·39	1·18
9	2·69	2·28	0·41	1·18
11	2·84	2·42	0·42	1·17
13	3·02	2·59	0·43	1·17
15	3·22	2·77	0·45	1·16
17	3·44	2·97	0·47	1·16
19	3·68	3·18	0·50	1·16
21	3·92	3·39	0·53	1·16
23	4·17	3·61	0·56	1·15
25	4·43	3·86	0·57	1·15
27	4·71	4·13	0·58	1·14
29	5·02	4·41	0·61	1·14
31	5·35	4·70	0·65	1·14
33	5·69	5·00	0·69	1·14
35	6·04	5·31	0·73	1·14

Hier ergibt sich im Allgemeinen das gleiche Resultat wie bei den früheren Temperaturgruppen, nur zeigt sich im Mittel eine Zunahme der täglichen Verdunstungshöhe von 0·108 *mm* beim Süsswasser und von 0·097 *mm* beim Meerwasser für jeden Kilometer an mittlerer Windgeschwindigkeit.

Für die einzelnen Intervalle der Windstärke ergeben sich folgende Resultate:

Verdunstungszunahme pro Kilometer Windgeschwindigkeit.

Intervall von	Süsswasser	Meerwasser
1—7 *km*	0·032	0·027
7—13	0·077	0·070
13—19	0·110	0·098
19—25	0·125	0·113
25—31	0·153	0·140
31—35	0·173	0·153

Bei grösserer Windstärke ist auch in dieser Temperaturgruppe die Zunahme der Verdunstung pro Kilometer grösser als bei den kleineren Windgeschwindigkeiten, und zwar ist die Zunahme beim Süsswasser und beim Meerwasser gleich regelmässig, nur ist der Betrag beim Meerwasser immer kleiner.

Bei der Temperatur von 9° entsprach für einen Kilometer im Durchschnitte eine Zunahme der Verdunstung von 0·025 beim Süsswasser und 0·022 beim Meerwasser, bei der Temperatur von 20—21° hingegen 0·087 und 0·078 und bei 24—25° noch mehr, und zwar 0·108 und 0·097.

Betrachten wir bei den verschiedenen Temperaturgruppen die Schwankungen in der Grösse der Reductionsfactoren oder der Quotienten zwischen der Süsswasser- und Meerwasserverdunstung, und zwar für die gleiche Variation der mittleren Windgeschwindigkeit von 1 *km* bis 33 *km* pro Stunde, so ersehen wir, dass bei der Temperatur von 9° dieser Reductionsfactor zwischen 1·46 und 1·26, also um 0·20, bei der Temperatur von 20—21° von 1·20 bis 1·15, also um 0·05, und bei 24—25° von 1·18 bis 1·14, also um 0·04 schwankt, demnach grosse Veränderungen des Reductionsfactors nur bei der niedrigeren Temperatur vorkommen.

Einer analogen Trennung wurden sämmtliche Verdunstungsbeobachtungen dieser drei Temperaturgruppen in Bezug auf die relative Feuchtigkeit unterzogen, und es kann hier nur ganz kurz hervorgehoben werden, dass mit der Zunahme des Feuchtigkeitsgehaltes der Luft die Verdunstung regelmässig abnimmt, und zwar sowohl die des Süsswassers, als die des Meerwassers. Die nachfolgenden ausgeglichenen Reihen stellen die resultirenden Verdunstungshöhen für beide Wasserarten dar.

Verdunstung und Luftfeuchtigkeit.

Feuchtigkeit % Tagesmittel	Süsswasser-verdunstung	Meerwasser-verdunstung	Differenz	Quotient
Temperatur 8—10°				
41—45	2·24	1·86	0·38	1·20
46—50	2·21	1·84	0·37	1·20
51—55	2·09	1·74	0·35	1·20
56—60	1·90	1·55	0·35	1·23
61—65	1·60	1·28	0·32	1·25
66—70	1·27	0·97	0·30	1·31
71—75	0·99	0·73	0·26	1·36
76—80	0·75	0·53	0·22	1·42
81—85	0·58	0·39	0·19	1·49
86—90	0·40	0·25	0·15	1·60
91—95	0·27	0·15	0·12	1·80
Temperatur 20—21°				
36—40	3·50	3·06	0·44	1·14
41—45	3·40	2·97	0·43	1·14
46—50	3·24	2·83	0·41	1·15
51—55	3·07	2·66	0·41	1·15
56—60	2·83	2·42	0·41	1·17
61—65	2·44	2·06	0·38	1·18
66—70	2·03	1·70	0·33	1·19
71—75	1·72	1·44	0·28	1·19
76—80	1·54	1·29	0·25	1·20
81—85	1·48	1·23	0·25	1·20

Feuchtigkeit $^0/_0$ Tagesmittel	Süsswasser-verdunstung	Meerwasser-verdunstung	Differenz	Quotient
Temperatur 24—25°				
36—40	5·25	4·68	0·57	1·12
41—45	4·70	4·13	0·57	1·14
46—50	3·93	3·40	0·53	1·16
51—55	3·29	2·81	0·48	1·17
56—60	2·90	2·46	0·44	1·18
61—65	2·59	2·20	0·39	1·18
66—70	2·28	1·93	0·35	1·18
71—75	1·96	1·66	0·30	1·18
76—80	1·63	1·37	0·26	1·19

Entsprechend dem früher Erwähnten wird der Reductionsfactor mit zunehmender Feuchtigkeit immer grösser.

Bei der Temperaturgruppe von 9° vermindert sich die tägliche Verdunstungshöhe beim Süsswasser um 1·49, beim Meerwasser um 1·33 *mm*, wenn das Tagesmittel der Feuchtigkeit von 40 bis auf 80$^0/_0$ steigt, bei 20—21° um 1·86, beziehungsweise 1·68 und bei 24—25° um 3·07 und 2·76 *mm*.

Zwischen den gleichen Feuchtigkeitsgrenzen (40—80$^0/_0$) schwankt der Reductionsfactor bei der niedrigeren Temperaturgruppe zwischen 1·20 und 1·42, bei der höchsten Temperaturgruppe um einen geringeren Betrag, und zwar nur zwischen 1·14 und 1·19.

Tägliche Verdunstung des Süsswassers und des Meerwassers.

Triest, Observatorium.[1]

Datum	Süsswasser	Meerwasser	Datum	Süsswasser	Meerwasser	Datum	Süsswasser	Meerwasser	Datum	Süsswasser	Meerwasser
1896 Juni			1896 Juli			1896 Aug.			1896 Sept.		
1	2·8	2·5	1	2·7	2·2	1	0 8	0·7	1	1·3	1·1
2	2·6	2·5	2	2·7	2·3	2	1·5	1·2	2	1·2	1·0
3	1·6	1·3	3	1·2	1·1	3	2·0	1·5	3	1·1	0·7
4	1·1	1·0	4	1·2	1·0	4	1·2	1·1	4	1·2	1·0
5	1·5	1·3	5	1·9	1·5	5	2·3	1·8	5	1·5	1·1
6	1·0	0·8	6	3·2	2·7	6	1·5	1·1	6	2·0	1·5
7	1·9	1·2	7	2·6	2·2	7	2 4	1·9	7	2·4	1·9
8	1·8	1·6	8	2·3	1·9	8	1·9	1·6	8	1·5	1·2
9	1·1	1·0	9	1·7	1·5	9	1·8	1·4	9	1·7	1·4
10	1·5	1·4	10	2·1	1·5	10	2·3	1·8	10	1·0	0·7
11	1·5	1·3	11	3·8	3·2	11	1·0	0·7	11	1·3	1·1
12	0·9	0·8	12	3·1	2·7	12	2·1	1·8	12	1·6	1·4
13	1·6	1·3	13	3·8	3·1	13	2·6	2·1	13	1·7	1·4
14	1·7	1·5	14	3·6	3·0	14	2·3	1·8	14	1·6	1·3
15	2·0	1·7	15	2·5	2·1	15	2·4	2·1	15	1·8	1·5
16	2·1	1·9	16	1·4	1·2	16	2·7	2·2	16	1·6	1·3
17	1·7	1·6	17	1·1	0·8	17	3·8	3·1	17	1·3	1 0
18	1·3	1·1	18	2·6	2·2	18	3·2	2·6	18	1·4	1·1
19	1·6	1·4	19	0·7	0·9	19	2·4	2·0	19	1·7	1·4
20	3·4	2·8	20	2·5	2·0	20	2·4	1·9	20	1·5	1·1
21	4·1	3·6	21	2·0	1·6	21	1·1	0 8	21	2·0	1·7
22	3·2	2·7	22	2·2	2·2	22	1·3	1 0	22	1·1	0·9
23	2·4	2·0	23	2·3	1·9	23	2·2	1·8	23	0·6	0·3
24	2·5	2·1	24	2·3	2·1	24	1·4	1·1	24	2·6	2·1
25	2·2	1·7	25	2·1	1·6	25	1·8	1·4	25	2·0	1·7
26	1·9	1·7	26	2·4	2·0	26	2·5	2·0	26	1·4	1·1
27	2·5	2·1	27	2·2	1·9	27	1·4	1·0	27	1·6	1·3
28	3·4	3·0	28	3·1	2·6	28	2·8	2·2	28	1·9	1·7
29	2·5	2·2	29	2·1	1·9	29	2·9	2·4	29	3·5	3·0
30	2·8	2·4	30	2·2	1·9	30	1·2	0·9	30	3·2	2·8
			31	2·3	1·9	31	1·5	1·2			
Summe	62·2	53·5	S	71·9	60·7	S	62·7	50·2	S	50·3	40·8

[1] Die zugehörigen meteorologischen Factoren wird man in extenso veröffentlicht finden in dem Rapporto Annuale dell'Osserv. Astr. Met. di Trieste per l'anno 1896 e 1897.

Verdunstung des Süsswassers und des Meerwassers.

Triest, Observatorium.

Datum	Süsswasser	Meerwasser	Datum	Süsswasser	Meerwasser	Datum	Süsswasser	Meerwasser	Datum	Süsswasser	Meerwasser
1896 Octob.			1896 Nov.			1896 Dec.			1897 Jänn.		
1	2·5	2·0	1	1·1	0·8	1	0·4	0·4	1	2·5	2·1
2	2·9	2·4	2	0·5	0·4	2	1·9	1·5	2	2·0	1·7
3	1·6	1 3	3	0·8	0·6	3	2·0	1·7	3	1·2	1·1
4	0·7	0·6	4	2 7	2·3	4	1·7	1·3	4	1·3	1·1
5	1·1	1·0	5	3·1	2·6	5	0·4	0·2	5	0·8	0·5
6	2·3	2·0	6	0·5	0·4	6	0·8	0·4	6	0·2	0·2
7	2·1	1·7	7	0·2	0·1	7	0·7	0·5	7	0·1	0·0
8	2·7	2·3	8	0·4	0·3	8	1·0	0·7	8	0·1	0·0
9	1·4	1·1	9	1·5	1·2	9	0·4	0·3	9	0·2	0·1
10	1·0	0·8	10	3·9	3·2	10	1·4	1·0	10	0·6	0·4
11	1·7	1·3	11	2·7	2·2	11	0·9	0·7	11	0·6	0 5
12	0·9	0·8	12	1·4	1·3	12	0·3	0·2	12	0·6	0·5
13	1·0	0·8	13	2·1	1·8	13	0·2	0·1	13	0·5	0·3
14	0·6	0·4	14	0·7	0·5	14	0·1	0·1	14	0·2	0·1
15	1·5	1·2	15	1·0	0·9	15	0·9	0·7	15	0·5	0·4
16	1·1	0·8	16	2·8	2·3	16	1·6	1·3	16	1·7	1·3
17	0·6	0·4	17	2·3	1·9	17	0·6	0·4	17	1·1	0·8
18	0·6	0·4	18	1·0	0·9	18	0·2	0·1	18	1·9	1·5
19	1·3	0 9	19	1·7	1·3	19	0·7	0·4	19	1·7	1·4
20	1·8	1·4	20	0·8	0·6	20	1·5	1·1	20	1·4	1·2
21	0·8	0·5	21	2·0	1·6	21	3·0	2·4	21	0·2	0·1
22	1·2	1·0	22	2·0	1 7	22	1·8	1·5	22	0·3	0·1
23	1·4	1·0	23	1·8	1·5	23	0 6	0·4	23	0·9	0·5
24	1·4	1·1	24	2·0	1·6	24	1·4	1·1	24	0·9	0·6
25	0·9	0·7	25	3·7	2·8	25	1·6	1·4	25	1·2	0·8
26	0·9	0·7	26	2·9	2·0	26	3·0	2·5	26	1·2	0·9
27	0·6	0·4	27	1·1	0·8	27	2·4	2·1	27	1·8	1·4
28	0·7	0·5	28	0·6	0·5	28	2·1	1·8	28	1·7	1·3
29	1·0	0·7	29	2·6	2·0	29	2·5	2·1	29	0·5	0·4
30	1·2	0·9	30	0·5	0·5	30	2·2	1·9	30	0·3	0·3
31	1·1	0·8				31	1·5	1·2	31	0·7	0·4
Summe	40·6	31·9	S	50·4	40·6	S	39·8	31·5	S	28·9	22·0

Verdunstung des Süsswassers und des Meerwassers.

Triest, Observatorium.

Datum	Süsswasser	Meerwasser	Datum	Süsswasser	Meerwasser	Datum	Süsswasser	Meerwasser	Datum	Süsswasser	Meerwasser
1897 Febr.			1897 März			1897 April			1897 Mai		
1	0·7	0·4	1	0·5	0·3	1	0·9	0·6	1	1·9	1·4
2	0·2	0·1	2	0·5	0·3	2	2·4	2·0	2	1·7	1·5
3	0·5	0·3	3	0·5	0·4	3	1·5	1·1	3	1·7	1·1
4	1·2	0·9	4	0·8	0·5	4	0·4	0·2	4	2·7	2·2
5	0·3	0·1	5	0·9	0·6	5	2·0	1·7	5	3·2	2·7
6	0·3	0·2	6	1·4	1·0	6	1·2	0·9	6	1·9	1·3
7	0·9	0·6	7	1·7	1·3	7	0·8	0·6	7	1·0	0·9
8	2·4	1·9	8	1·6	1·2	8	1·3	1·1	8	2·0	1·4
9	1·4	1·1	9	1·3	1·1	9	2·8	2·3	9	2·2	1·7
10	0·6	0·4	10	0·8	0·5	10	1·9	1·5	10	3·0	2·6
11	0·7	0·5	11	1·6	1·2	11	1·6	1·2	11	1·7	1·3
12	0·2	0·2	12	0·7	0·4	12	1·6	1·1	12	2·1	1·7
13	0·4	0·2	13	0·7	0·5	13	1·5	1·1	13	1·6	1·3
14	0·4	0·3	14	0·9	0·6	14	1·2	0·9	14	1·3	0·9
15	2·0	1·8	15	1·0	0·7	15	2·3	1·9	15	0·6	0·4
16	2·1	2·0	16	1·1	0·7	16	3·4	2·9	16	1·3	1·1
17	0·7	0·5	17	0·9	0·5	17	2·7	2·3	17	2·2	1·7
18	0·5	0·4	18	1·0	0·6	18	1·9	1·5	18	1·6	1·2
19	0·6	0·4	19	1·0	0·6	19	1·8	1·5	19	1·7	1·2
20	0·6	0·4	20	2·4	1·9	20	0·4	0·3	20	1·1	0·8
21	1·1	0·9	21	1·6	1·2	21	1·2	0·9	21	1·5	1·1
22	2·3	1·9	22	1·4	1·0	22	1·6	1·2	22	0·9	0·7
23	1·1	0·9	23	1·1	0·7	23	2·2	1·8	23	0·9	0·5
24	1·1	0·8	24	0·9	0·5	24	2·1	1·7	24	1·0	0·7
25	0·9	0·6	25	0·7	0·5	25	1·8	1·6	25	1·2	0·8
26	0·4	0·3	26	0·5	0·3	26	2·8	2·4	26	1·0	0·7
27	0·5	0·6	27	0·5	0·3	27	3·1	2·6	27	1·3	1·3
28	0·6	0·5	28	0·8	0·6	28	0·9	0·6	28	1·1	0·9
			29	1·2	0·9	29	1·0	0·7	29	2·7	2·1
			30	1·2	0·9	30	1·7	1·3	30	3·4	2·8
			31	0·6	0·3				31	3·9	3·1
Summe	24·7	19·2	S	31·8	22·1	S	52·0	41·5	S	55·4	3·1

Verdunstung des Süsswassers und des Meerwassers.

Triest, Observatorium.

Datum	Süsswasser	Meerwasser	Datum	Süsswasser	Meerwasser	Datum	Süsswasser	Meerwasser	Datum	Süsswasser	Meerwasser
1897 Juni			1897 Juli			1897 Aug.			1897 Sept.		
1	2·6	2·1	1	3·2	2·7	1	2·4	2·0	1	2·0	1·7
2	2·4	1·8	2	2·7	2·4	2	3·2	2·7	2	2·5	2·3
3	3·6	2·9	3	3·1	2·7	3	5·0	4·4	3	2·9	2·5
4	2·9	2·3	4	4·7	4·1	4	6·4	5·9	4	3·3	2·9
5	2·4	1·7	5	6·4	5·8	5	5·0	4·6	5	5·2	4·7
6	2·1	1·5	6	2·7	2·3	6	3·6	3·2	6	2·5	2·2
7	2·7	2·1	7	3·0	2·6	7	3·4	3·0	7	4·3	4·0
8	2·5	2·0	8	3·0	2·7	8	2·1	1·8	8	3·4	3·1
9	2·4	1·9	9	3·7	3·3	9	3·0	2·7	9	2·8	2·5
10	2·1	1·7	10	5·1	4·6	10	2·3	2·0	10	1·3	1·0
11	3·7	3·2	11	6·3	5·7	11	2·3	1·9	11	1·3	1·1
12	3·4	3·2	12	6·5	5·8	12	2·2	2·0	12	1·5	1·3
13.	5·0	4·6	13	2·9	2·6	13	3·3	2·9	13	1·8	1·5
14	5·1	4·6	14	1·8	1·6	14	3·4	3·1	14	2·8	2·5
15	2·5	2·0	15	2·1	1·7	15	3·0	2·6	15	1·7	1·4
16	3·1	2·4	16	3·5	2·9	16	2·4	2·1	16	1·4	1·0
17	2·8	2·4	17	2·5	2·1	17	3·9	3·5	17	1·7	1·5
18	2·3	2·0	18	2·8	2·3	18	2·4	2·1	18	1·7	1·4
19	1·4	1·1	19	2·7	2·4	19	2·9	2·5	19	1·9	1·6
20	1·6	1·2	20	3·4	2·9	20	3·2	2·9	20	2·0	1·7
21	2·0	1·6	21	4·0	3·5	21	2·5	2·1	21	3·2	2·9
22	2·1	1·7	22	3·7	3·4	22	2·6	2·2	22	1·6	1·3
23	2·6	2·1	23	2·5	2·0	23	1·9	1·6	23	1·2	1·0
24	2·0	1·5	24	2·5	2·1	24	1·9	1·7	24	1·0	0·9
25	2·2	1·8	25	2·4	1·9	25	2·0	1·8	25	0·9	0·7
26	2·9	2·5	26	3·1	2·7	26	2·3	2·0	26	2·1	1·9
27	2·8	2·4	27	4·1	3·6	27	1·9	1·8	27	4·1	3·8
28	2·6	2·2	28	1·4	1·1	28	2·3	2·0	28	2·8	2·5
29	2·7	2·3	29	2·1	1·9	29	2·1	1·8	29	1·6	1·3
30	2·6	2·1	30	1·6	1·4	30	2·0	1·8	30	1·3	1·1
			31	2·1	1·9	31	2·5	2·2			
Summe	81·1	66·9	S	101·6	88·7	S	89·4	78·9	S	67·8	59·3

Über den Temperatursprung bei Wärmeleitung in Gasen

von

Dr. **M. Smoluchowski R. v. Smolan.**

(Mit 2 Textfiguren.)

I.

Die Grundlage, auf welcher die mathematische Theorie der Wärmeleitung beruht, besteht darin, dass die Temperatur innerhalb eines Körpers überall stetig variirt, und dass der Wärmestrom dem Temperaturgefälle proportional ist.

Schon von Poisson[1] war jedoch die Ansicht ausgesprochen worden, dass an der Oberfläche eines Körpers oder überhaupt an der Grenzfläche zweier Körper, zwischen welchen Wärmeaustausch vor sich geht, ein endlicher — obwohl im Allgemeinen sehr kleiner — Temperaturunterschied $\theta_1 - \theta_2$ besteht, und für diesen Fall nahm er den Wärmestrom $\varkappa \frac{\partial \theta}{\partial n}$ jenem Temperaturunterschiede proportional an.

Der Proportionalitätsfactor γ in der diese Annahme ausdrückenden Gleichung:

$$\theta_1 - \theta_2 = \gamma \frac{\partial \theta_1}{\partial n}, \tag{1}$$

wo n die ins Innere des Körpers 1 gezogene Normale bedeutet, soll fernerhin als Temperatursprung-Coëfficient bezeichnet werden.

[1] Théorie de la Chaleur, insbesondere Chap. V.

Poisson begründet seine Hypothese durch Betrachtungen über die Strahlungsvorgänge (respective auch Convectionsströme) an der Oberfläche der Körper; diese pflegt man aber heutzutage von der Wärmeleitung ganz gesondert zu behandeln; es läge also kein Grund vor, warum bei blosser Wärmeleitung ein Temperatursprung auftreten sollte, und deshalb wurde auch dessen Existenz von neueren Physikern sehr bezweifelt, umsomehr, als es nicht gelungen war, einen solchen experimentell einwandsfrei nachzuweisen und zu messen.

Nun haben aber schon 1875 Kundt und Warburg[1] die Vermuthung ausgesprochen, dass eine solche Erscheinung in stark verdünnten Gasen bemerkbar sein dürfte, bei welchen sie das analoge Phänomen des Gleitens der Gase entdeckt hatten.

Dass dies wirklich der Fall ist, habe ich vor Kurzem durch Versuche nachgewiesen, die an einem anderen Orte ausführlich beschrieben sind.[2]

Dabei wurde auch das Gesetz, welches nach Analogie mit den Erscheinungen der Gleitung bei der inneren Reibung der Gase von vorneherein vermuthet worden war, dass nämlich der Temperatursprung-Coëfficient verkehrt proportional ist dem Gasdrucke, bestätigt; es ergab sich bei Anwendung von Glasapparaten:

für Luft

$$\gamma = 0{\cdot}0000171 \cdot \frac{760}{p},$$

für Wasserstoff

$$\gamma = 0{\cdot}000129 \cdot \frac{760}{p}$$

oder in mittleren Weglängen der Gasmoleküle ausgedrückt:

$$\gamma = 1{\cdot}70\,\lambda$$
$$\gamma = 6{\cdot}96\,\lambda$$

Diese Erscheinung ist noch frappanter als die des Gleitens der Gase und widerspricht noch mehr den üblichen Vorstellungen; es handelt sich nun darum, eine passende Erklärung

---

1 Pogg. Ann. 156, S. 177, 1875.

2 Wied. Ann. 64, S. 101, 1898.

zu finden, nachdem eine Zurückführung des Phänomens auf Strahlungsvorgänge etc. nach Poisson ausgeschlossen ist, umsomehr, als bei meinen Versuchen der Einfluss der Strahlung (und der Strömungen) eigens eliminirt wurde.

Es ist nun der Zweck dieser Arbeit, nachzuweisen, dass sich eine Erklärung der beobachteten Thatsachen in einfachster Weise aus der kinetischen Gastheorie ergibt, ähnlich, wie dies von Kundt und Warburg betreffs der Gleitung der Gase gezeigt worden ist, und sie scheinen mir dadurch geradezu einen neuen Beweis für die Richtigkeit jener Theorie zu bilden.

Der Grundgedanke ist folgender:

Die Wärmeleitung der Gase beruht nach Maxwell, Clausius etc. darauf, dass die Moleküle die lebendige Kraft, welche sie an einer Stelle des Gases besitzen, in Folge ihrer Bewegung an andere Stellen übertragen und dort beim Zusammenstosse mit anderen Molekülen, welche vorher eine verschiedene Bewegungsenergie hatten, an dieselben theilweise abgeben, so dass ein fortwährender Ausgleich der lebendigen Kraft unter den Molekülen (der Temperatur) stattfindet.

In der Nähe eines festen Körpers wird nun dieser Wärmeausgleich zwischen dem Körper und den Gasmolekülen in doppelter Weise behindert:

1. dadurch, dass die Beweglichkeit der letzteren durch die Nähe der Wand beeinträchtigt ist, indem sie daselbst kürzere Wege zurücklegen werden, da ihnen das Eindringen in den festen Körper verwehrt ist;

2. dadurch, dass sie beim Zusammenstoss mit den Theilchen des festen Körpers, insbesondere falls dieselben eine erheblich verschiedene Masse haben, im Allgemeinen doch nicht vollständig die Temperatur desselben annehmen werden, wie ich weiter unten noch ausführlicher nachweisen werde.

Um sich den Einfluss dieser Vorgänge, welche sich bis zu einem gewissen Grade gesondert untersuchen lassen, zu veranschaulichen, denken wir uns (Fig. 1) in eine Gassäule mit linearem Temperaturgefälle BA plötzlich eine dünne, aber undurchdringliche Wand W hineingestellt, welche die Eigenschaft hat, die Temperaturen (respective lebendigen Kräfte) der an sie anprallenden Moleküle anzunehmen und auszugleichen.

Dann wird in der Nähe von *W* zufolge des früher als 1) bezeichneten Umstandes die Wärmeleitung verringert, daher das Temperaturgefälle vermehrt werden; anschaulicher wird dies, wenn man bedenkt, dass die Temperatur an jeder Stelle

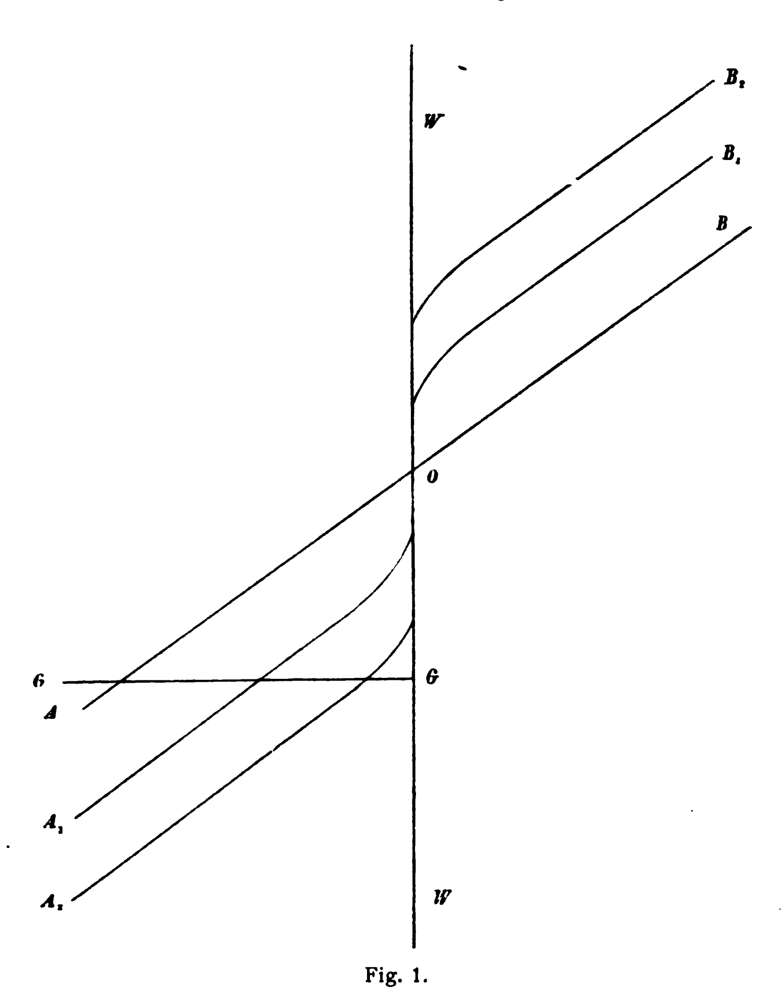


Fig. 1.

gleich ist dem Mittel der Temperaturen der von rechts nach links und der in umgekehrter Richtung fliegender Molekeln; die von der Wand wegfliegenden können aber im günstigsten Falle nur die Temperatur der Wand selbst haben, daher muss sich dieser Mittelwerth von der Wandtemperatur um eine

endliche Grösse unterscheiden.[1] Statt als Gerade AB wird die Temperatur jetzt in der durch A_1B_1 dargestellten Weise verlaufen.

Wenn aber noch der Umstand 2) dazukommt, dass nämlich die Moleküle nur einen Theil ihrer Temperaturdifferenz beim Anstossen an die Wand ausgleichen, so werden die beiden Curvenzweige sich noch mehr von AB entfernen und die Lage A_2B_2 annehmen.

Bis jetzt waren die Verhältnisse beiderseits symmetrisch angenommen, nun kommt aber noch in Betracht, dass die Temperatur innerhalb des festen Körpers so rasch ausgeglichen wird, dass die Änderung derselben in Folge des Wärmeüberganges unmerklich ist. Man wird somit, wenn man links von W den festen Körper annehmen will, daselbst anstatt der Curve A_2 eine Gerade G zu substituiren haben, so dass die Entfernung OG gleich ist der Mitteltemperatur (in Bezug auf 0) der an die Wand von rechts her stossenden Moleküle.

II.

Die Schwierigkeit bei Berechnung der Wärmeleitung, und ebenso der inneren Reibung und Diffusion, nach der kinetischen Gastheorie liegt hauptsächlich darin, dass, sobald ein Temperatur- (respective Geschwindigkeits- etc.) Gefälle sich in dem Gase einstellt, auch die Geschwindigkeitsvertheilung unter den Molekülen nach verschiedenen Richtungen eine andere wird, so dass das Maxwell'sche Gesetz nicht mehr anwendbar ist.

Der Zustand des Gases ist dann nicht mehr durch Druck oder Volum und Temperatur bestimmt, sondern es kommt noch eine Art Polarisationszustand — bei Wärmeleitung einaxig, bei innerer Reibung zweiaxig — dazu. Streng genommen sind für ein Gas in diesem Zustande die Formeln, welche den Zusammenhang zwischen Druck, Volum und Temperatur darstellen, überhaupt nicht mehr giltig. Die Abweichungen von

[1] Eine ähnliche Bemerkung macht auch Stoney in einer mir erst jetzt bekannt gewordenen Abhandlung: On the Penetration of Heat accross Layers of Gas Phil. Mag. IV (5), p. 428, welche manches Werthvolle enthält, aber durch irrige Ansichten über die Wärmeleitung der Gase entstellt ist. Siehe auch Phil. Mag. V (5), p. 457 Anm.

dem normalen Zustande werden sich hiebei jedoch im Allgemeinen nur auf Glieder zweiter Ordnung der Kleinheit beschränken, dagegen werden, wie Boltzmann[1] gezeigt hat, die Werthe des Wärmeleitungs- etc. Coëfficienten selbst um Glieder von derselben Grössenordnung wie die ausschlaggebenden gefälscht werden, falls diese Änderung der Geschwindigkeitsvertheilung vernachlässigt wird, wie dies bei der Annahme, dass die Moleküle sich wie elastische Kugeln verhalten, zu geschehen pflegt.

Eine exacte Berechnung liesse sich nun allerdings in der Weise durchführen, wie es von Boltzmann für die innere Reibung und Diffusion geschehen war, oder man könnte die Maxwell'sche Annahme einführen, dass sich die Moleküle verhalten wie Kraftcentra, zwischen denen eine der fünften Potenz der Entfernung verkehrt proportionale Kraft wirkt, aber es schien mir für den vorliegenden Zweck doch genügend, die Rechnung vorläufig unter den einfachen Annahmen von Clausius etc., welche die mathematische Behandlung so sehr erleichtern, durchzuführen, da dieselben ja qualitativ übereinstimmende Resultate liefern und da eine ganz exacte Berechnung in unserem Falle schon dadurch unmöglich gemacht wird, dass man den Einfluss des festen Körpers noch nicht in genügend sicherer Weise mathematisch formuliren kann.

Es wird also die Rechnung mit der Vereinfachung durchgeführt, dass die Bewegungsenergie (oder Temperatur) eine Eigenschaft der Molekeln sei, welche die Geschwindigkeitsvertheilung nicht alterirt, und dass einem Molekel im Mittel jene Quantität dieser Grösse zukommt, welche in der Schichte herrschte, wo dasselbe zum letztenmale zusammengestossen war; auch soll von vorneherein die Geschwindigkeit der Moleküle gleich der mittleren gesetzt werden (siehe Boltzmann, Gastheorie, S. 74).

Mit derselben Berechtigung lässt sich dann unsere Rechnung auch natürlich auf die innere Reibung anwenden — sie stimmt ja im Wesentlichen mit jener von Kundt und Warburg überein — und überhaupt auf jeden ähnlichen Process. Analoge

[1] Boltzmann, Sitzungsber., LXXXI, S. 117, 1880; auch Gasth. S. 93.

Erscheinungen müssten z. B. auch bei der Elektricitätsleitung der Gase eintreten, falls nur hiebei überhaupt die Molecularbewegung in Betracht kommt. Diese Bemerkung ist vielleicht im Hinblick auf gewisse Erscheinungen, wie den Übergangswiderstand (respective elektromotorische Gegenkraft) zwischen Metall und Gas, von Interesse; doch will ich hier nicht näher darauf eingehen.

Betrachten wir nun den Fall des stationären Wärmeüberganges zwischen zwei auf verschiedener Temperatur befindlichen parallelen festen Wänden, die so weit von einander entfernt sind, dass die mittlere Weglänge gegenüber ihrer Distanz zu vernachlässigen ist, und dass somit das Temperaturgefälle in einiger Entfernung von den Wänden jedenfalls ein lineares wird.

In der Nähe der Wand, z. B. jener, welche die niedrigere Temperatur hat und welche zur YZ-Ebene gewählt werden möge, wird dagegen das Temperaturgefälle nicht mehr linear sein. In jedem Falle muss aber durch jede Isothermenebene (parallel YZ) ebensoviel Wärme von der einen Seite nach der anderen übergehen, wie auch umgekehrt.

Fassen wir z. B. das Volumelement dv, in der Entfernung $(x-\xi)$ von der Wand, ins Auge und untersuchen, wie viel Moleküle von ihm nach rechts durch ein Element δs der Isothermenebene, welche der Abscisse x entspricht, hindurchgehen werden.

In dem Elemente dv sind $n\,dv$ Moleküle vorhanden, es werden also per Zeiteinheit $\frac{n\,dv\,c}{\lambda}$ Zusammenstösse vorkommen, und ebensoviel Moleküle werden aus dem Elemente hinausfliegen, alle mit der Geschwindigkeit c und der Temperatur $\theta(x-\xi)$, welche in jenem Abstande $x-\xi$ von dem festen Körper herrscht; dieselben verbreiten sich gleichmässig auf den ganzen Raum, also entfällt in die Richtung der Fläche δs, welche von dem Volumelement unter dem Winkel $\sin\varphi\delta\varphi\delta\psi$ gesehen wird, nur der Bruchtheil $\frac{\sin\varphi\delta\varphi\delta\psi}{4\pi} = \frac{\delta s\cos\varphi}{4\pi r^2}$ der gesammten Molekülzahl; hievon gehen aber nur jene durch δs wirklich hindurch, welche einen Weg zurücklegen, der grösser

ist als r, das ist der Bruchtheil $e^{-\frac{r}{\lambda}}$; im Ganzen gehen also von links nach rechts durch die Fläche δs, falls wir dieselbe $=1$ setzen, $N = \iiint \frac{nc}{4\pi\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} \cos\varphi \frac{dv}{r^2}$ Moleküle hindurch, wo das Integral über die Grenzen des betrachteten Raumes zwischen $\xi = 0$ und $\xi = x$ zu erstrecken ist, jedes mit dem θ der betreffenden Schichte versehen. Ist ms die auf ein Molekül entfallende Wärmemenge für die Temperatur 1 (der Wasserwerth derselben), so wird im Ganzen die Menge

$$W_1 = \frac{cmsn}{4\pi\lambda} \iiint \theta \left[x - \frac{r}{\cos\varphi}\right] e^{-\frac{r}{\lambda}} \cos\varphi \frac{dv}{r^2}$$

hindurchtransportirt, was sich durch Einführung von $\xi = r\cos\varphi$ und $dv = r^2 d\xi d\varphi d\psi \operatorname{tg}\varphi$, sowie Ausführung der Integration nach ψ reducirt auf

$$W_1 = \frac{cnms}{2\lambda} \int_0^x \theta(x-\xi)\, d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi}{\lambda\cos\varphi}} \sin\varphi\, d\varphi.$$

In analoger Weise wird von rechts nach links die Quantität

$$W_2 = \frac{cnms}{2\lambda} \int_0^\infty \theta(x+\xi)\, d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi}{\lambda\cos\varphi}} \sin\varphi\, d\varphi$$

hindurchgetragen.

Zu W_1 kommt aber noch der Theil W_3, welcher von jenen Molekeln herrührt, die an den festen Körper angeprallt waren und von ihm reflectirt wurden.

Falls bei diesem Vorgange vollständiger Temperatur-Ausgleich stattgefunden hätte, wäre ihre Temperatur gleich der Temperatur θ_0 des festen Körpers. (Die analoge Annahme ist der Rechnung von Kundt und Warburg zu Grunde gelegt.)

In Wirklichkeit wird sich nur ein Theil ausgleichen, was hier bei der Wärmeleitung von besonderer Wichtigkeit zu sein scheint. Wir nehmen also an, die Temperatur der von der Wand ausgesendeten Moleküle ϑ genüge der Formel:

$$\vartheta - \theta_0 = \beta(\theta_M - \theta_0),$$

somit

$$\vartheta = \beta\theta_M + (1-\beta)\theta_0, \tag{2}$$

wo θ_M die mittlere Temperatur der von rechts an die Wand anprallenden Molekeln bedeutet, θ_0 die Temperatur der Wand selbst und β einen Ausgleichsfactor (zwischen 0 und 1), der später noch näher untersucht werden soll.

Dann wird für W_3 analog dem Früheren gefunden:

$$W_3 = \frac{cnms}{2\lambda}\vartheta\int_x^\infty d\xi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi}{\lambda\cos\varphi}}\sin\varphi d\varphi,$$

wobei

$$\vartheta = (1-\beta)\theta_0 + \beta\frac{\int_0^\infty \theta(\xi)d\xi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi}{\lambda\cos\varphi}}\sin\varphi d\varphi}{\int_0^\infty d\xi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi}{\lambda\cos\varphi}}\sin\varphi d\varphi}. \tag{3}$$

Damit die Strömung stationär sei, muss sein:

$$W_2 - W_1 - W_3 = \text{const.},$$

also, wenn noch zur Abkürzung $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi}{\lambda\cos\varphi}}\sin\varphi d\varphi = \varphi(\xi)$ bezeichnet wird:

$$\int_0^\infty \theta(x+\xi)\varphi(\xi)\,d\xi - \int_0^x \theta(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi - \vartheta\int_0^\infty \varphi(\xi)d\xi = C;$$

hiebei bedeutet C die per Zeiteinheit von rechts nach links durchgehende Wärmemenge, dividirt durch $\frac{cnms}{2\lambda}$.

Setzt man den Temperaturunterschied $\theta - \vartheta$ gleich einer neuen Variabeln y, so erhält man für diese die Gleichung:

$$\int_0^\infty y(x+\xi)\varphi(\xi)d\xi - \int_0^x y(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi = C. \tag{4}$$

Bevor wir weitergehen, müssen wir die oben als φ definirte Function näher betrachten. Führt man die neue Variable $z = \frac{\xi}{\lambda \cos \varphi}$ ein, so wird

$$\varphi(\xi) = \frac{\xi}{\lambda} \int_{\frac{\xi}{\lambda}}^{\infty} \frac{e^{-z} dz}{z^2},$$

was sich durch partielle Integration verwandelt in:

$$\varphi(\xi) = e^{-\frac{\xi}{\lambda}} - \frac{\xi}{\lambda} \int_{\frac{\xi}{\lambda}}^{\infty} \frac{e^{-z} dz}{z}.$$

Letzteres Integral, welches wir mit $E\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$ bezeichnen wollen, wird Integrallogarithmus genannt; es kann mittelst der Reihe berechnet werden, die sich durch Entwicklung von e ergibt:

$$E(t) = C + \log t - t + \frac{t^2}{2.2!} - \frac{t^3}{3.3!} + \frac{t^4}{4.4!} - \ldots \quad (6)$$

$$C = 0{\cdot}5772157.$$

Durch Differentiation ergibt sich:

$$\varphi'(\xi) = -\frac{1}{\lambda} E\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

$$\varphi''(\xi) = \frac{1}{\lambda\xi} e^{-\frac{\xi}{\lambda}}$$

u. s. w.

Man sieht also: φ hat für $\xi = 0$ den Werth 1 und berührt daselbst die Ordinatenaxe; mit wachsendem Argument nimmt es fortwährend ab und nähert sich für $\xi = \infty$ asymptotisch der Abscissenaxe.

Im Folgenden werden wir öfters noch auf Integrale von der Form $\int_0^x \xi^n \varphi(\xi) d\xi$ (wobei n eine ganze positive Zahl) stossen, und deshalb mögen die diesbezüglichen Formeln auch gleich an dieser Stelle entwickelt werden.

Durch Vertauschung der Integrationsordnung wird jenes Integral:

$$J=\int_0^1 dy\int_0^x \xi^n e^{-\frac{\xi}{\lambda y}}\,dz.$$

Das Integral nach z lässt sich durch successive partielle Integration ausführen in

$$=n!\,\lambda^{n+1}y^{n+1}-e^{-\frac{x}{\lambda y}}\left[\lambda y x^n+n\lambda^2 y^2 x^{n-1}+\ldots+n!\,\lambda^{n+1}y^{n+1}\right]$$

und dadurch wird gefunden:

$$J=\frac{n!\lambda^{n+1}}{n+2}-\frac{\lambda x^n e^{-\frac{x}{\lambda}}}{n+2}\left[1+n\frac{\lambda}{x}+n(n-1)\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2+\ldots n!\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{x^{n+1}}{n+2}\varphi(x). \qquad (7)$$

Für den Fall $n=0$ hat man statt dessen:

$$\int_0^x \varphi(\xi)d\xi=\frac{\lambda}{2}\left[1-e^{-\frac{x}{\lambda}}\right]+\frac{x}{2}\varphi(x).$$

Kehren wir nun zur Untersuchung der Gleichung (4) zurück; dieselbe wird die Function y vollständig bestimmen, falls noch die Bedingung dazukommt, dass der Verlauf von y in hinreichender Entfernung von 0 als linear anzusehen ist.

Differenzirt man sie, so erhält man:

$$\int_0^\infty y'(x+\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi-\int_0^x y'(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi=\varphi(x)y(0),$$

und wenn man diese Gleichung (in Bezug auf y') partiell integrirt:

$$2y(x)=-\int_0^\infty y(x+\xi)\,\varphi'(\xi)\,d\xi-\int_0^x y(x-\xi)\,\varphi'(\xi)\,d\xi. \qquad (8)$$

Zu derselben Gleichung kann man aber auch direct gelangen; sie drückt nämlich nichts Anderes aus, als dass die Temperatur in einer Schichte gleich ist der mittleren Temperatur der Moleküle, die sich jeweilig darin befinden.

Denn wenn man berücksichtigt, dass die Moleküle in der Schichte während eines Zeitraumes verweilen, welcher proportional ist $\frac{1}{\cos\varphi}$, so erhält man analog dem Früheren die Gleichung:

$$x) = \frac{\int_0^\infty \theta(x+\xi) \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\xi}{\lambda y}} dy}{y} + \int_0^x \theta(x-\xi) \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\xi}{\lambda y}} dy}{y} + \vartheta \int_x^\infty d\xi \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\xi}{\lambda y}} dy}{y}}{2 \int_0^\infty d\xi \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\xi}{\lambda y}} dy}{y}}.$$

$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{\xi}{\lambda y}} dy}{y}$ ist aber $= -\lambda\varphi'(\xi)$; die Ausführung der Integration im Nenner ergibt sofort die obige Gleichung. Dieselbe ist, falls die Integrationsconstante richtig bestimmt wird, für die Kenntniss der Temperaturvertheilung gleichwerthig mit Gleichung (4), und man hätte auch auf sie die ganze Berechnung basiren können.

Wird das y aus (4) oder (8) bestimmt, so ergibt sich die Temperatur θ mit Hilfe der Relationen (3):

$$\theta = \vartheta + y$$

$$\vartheta = (1-\beta)\theta_0 + \beta \frac{\int_0^\infty \theta(\xi)\varphi(\xi) d\xi}{\int_0^\infty \varphi(\xi) d\xi}$$

$$= (1-\beta)\theta_0 + \beta \left(\vartheta + \frac{\int_0^\infty y(\xi)\varphi(\xi) d\xi}{\int_0^\infty \varphi(\xi) d\xi} \right),$$

also

$$\vartheta - \theta_0 = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{\int_0^\infty y(\xi)\varphi(\xi) d\xi}{\int_0^\infty \varphi(\xi) d\xi} = \frac{2\beta}{(1-\beta)\lambda} \int_0^\infty y(\xi)\varphi(\xi) d\xi.$$

Das Integral hat aber den Werth C, wie aus (4) folgt, wenn $x = 0$ gesetzt wird; somit:

$$\vartheta - \theta_0 = \frac{2\beta C}{(1-\beta)\lambda}$$

$$\theta = \theta_0 + y + \frac{2\beta C}{(1-\beta)\lambda}. \tag{9}$$

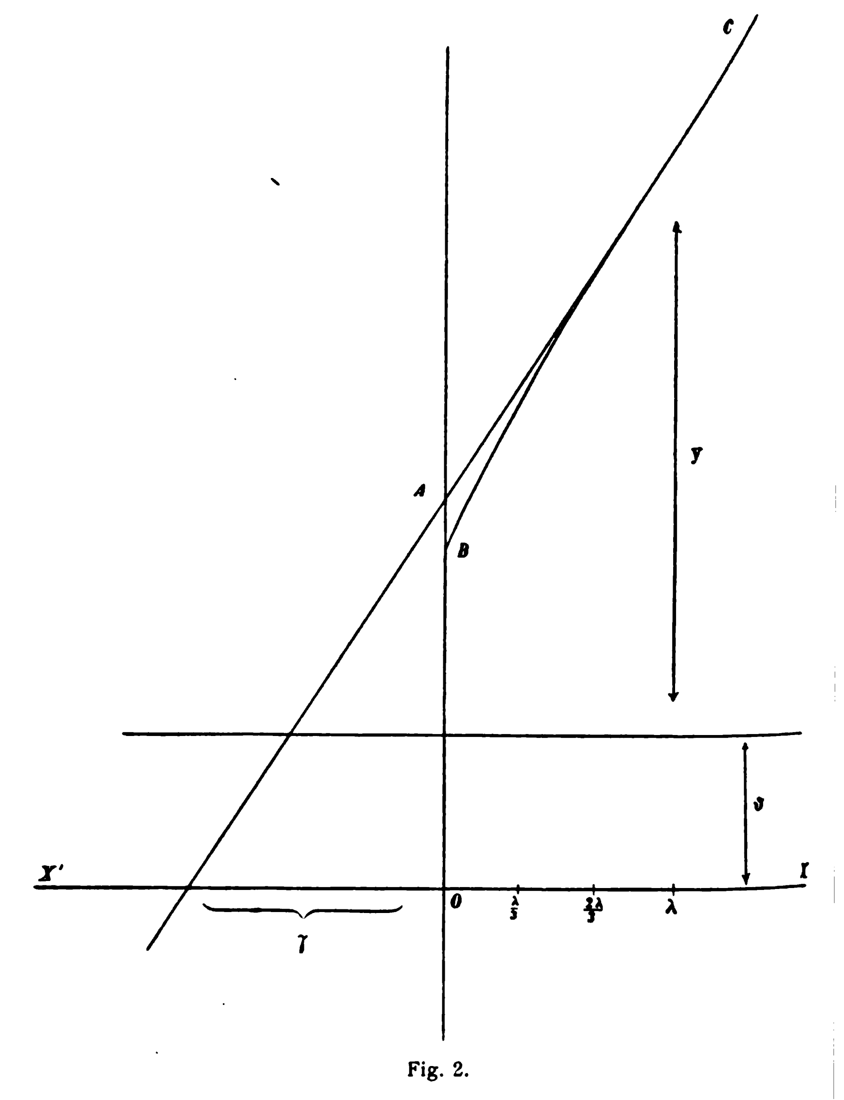


Fig. 2.

Zur besseren Illustration dieser Verhältnisse diene die Fig. 2. Daselbst ist die nahezu constante Temperatur inner-

halb des festen Körpers durch die negative Abscissenaxe OX' dargestellt; die Ordinatenstücke y würden die Gastemperatur vorstellen, falls nur der (früher als 1 bezeichnete) Umstand zu berücksichtigen wäre, dass die Gasmoleküle in der Nähe der Wand kürzere Wege zurücklegen werden, dessen Berechnung dies Capitel hauptsächlich gewidmet ist; wegen des unvollständigen Ausgleiches der Temperatur beim Stosse an die Wand kommt aber noch das von β abhängige Stück ϑ hinzu.

In einiger Entfernung von der Wand wird die Temperaturcurve BC nach Voraussetzung merklich geradlinig verlaufen, aber so, als ob die Wand nicht die Temperatur θ_0, sondern die Temperatur $\theta_0 + OA$ hätte. Der scheinbare Temperatursprung OA, das ist jene Grösse, welche in meinen früher erwähnten Versuchen gefunden wurde, ist also:

$$OA = \gamma \lim_{x=\infty} y'(x).$$

Für γ ergibt sich aber aus obiger Figur:

$$\gamma = \lim_{x=\infty} \left[\frac{\theta(x) - \theta_0}{\theta'(x)} - x \right]$$

und mit Einführung von (9):

$$= \lim_{x=\infty} \left[\frac{y(x) - xy'(x)}{y'(x)} + \frac{2\beta}{(1-\beta)\lambda} \frac{C}{y'(x)} \right]. \qquad (10)$$

Nun sieht man aber aus der Form der Definitionsgleichung (4), dass bei einem gewissen λ das y proportional ist dem C, also $y(C, x, \lambda) = C . f(x, \lambda)$.

Der Werth von γ ist somit davon unabhängig, da es sich im Zähler und Nenner weghebt.

In der Function $f(x, \lambda)$ kommt also nur das Verhältniss von x zu λ in Betracht, folglich werden — bei gleichem C — die y-Curven für verschiedene λ einander ähnlich sein, und die Werthe von γ müssen dem betreffenden λ proportional sein.

Somit erscheint das (loc. cit.) empirisch innerhalb weiter Grenzen mit hinreichender Genauigkeit constatirte Gesetz erklärt, dass der Temperatursprung-Coëfficient γ unabhängig vom Temperaturgefälle (respective Wärmeflusse), aber proportional der mittleren Weglänge, also verkehrt proportional dem Drucke ist.

Nun wäre es von Interesse, den Werth von γ (als Vielfaches der mittleren Weglänge) und überhaupt den Verlauf der Temperaturcurve kennen zu lernen, und hiezu müssen wir y z. B. mit Hilfe der Gleichung (4) zu bestimmen suchen.

Nach dem vorher Erwähnten genügt es hiebei, wenn für C irgend ein Werth, z. B. der Einfachheit wegen der Werth 1 gesetzt wird. Dann wird die Tangente des Neigungswinkels für $x = \infty$ gleich $\frac{3}{2}$, wie man leicht findet, wenn man eine lineare Form für θ substituirt. (Behält man C bei, so ergibt sich die bekannte Formel $\varkappa = \frac{cnms\lambda}{3}$).

In geschlossener Form diese Gleichung zu integriren, ist mir nicht gelungen, ich habe daher zu Näherungsrechnungen Zuflucht genommen.

Nach der sonst in solchen Fällen üblichen Methode würde man das y nach dem Mac Laurin'schen Satz in eine Potenzreihe entwickeln und die Coëfficienten derselben successive bestimmen. Dies ist aber hier nicht möglich, da $y'(x)$ für den Punkt $x = 0$ logarithmisch unendlich wird, wie sich durch zweifache Differentiation von (4) leicht nachweisen lässt.

Man wird aber im Allgemeinen noch immer um den Punkt x herum entwickeln können:

$$y(x+\xi) = y(x) + \xi y'(x) + \frac{\xi^2}{2} y''(x) + \ldots$$

Wird in dieser Weise mit Gleichung (4) verfahren, so verwandelt sie sich in:

$$y(x)\Phi_0(x) + y'(x)\Phi_1(x) + y''(x)\Phi_2(x) + \ldots = 1,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

bei geradem n:

$$\Phi_n = \frac{1}{n!}\int_x^\infty \xi^n \varphi(\xi)\, d\xi,$$

bei ungeradem n:

$$\Phi_n = \frac{1}{n!}\left[\int_0^x + \int_0^\infty \xi^m \varphi(\xi)\, d\xi\right].$$

Man kann nun, indem man nur die m ersten Glieder berücksichtigt, diese Gleichung $m-1$mal differenziren und aus den so erhaltenen m Gleichungen die Werthe von $y, y' \ldots y^{m-1}$ für ein bestimmtes x berechnen, da sich die dazugehörigen Coëfficienten Φ etc. mit Hilfe von Gleichung (7) finden lassen. Dies läuft darauf hinaus, dass wir an Stelle der wirklichen y-Curve eine Curve m^{ten} Grades substituiren, deren Coëfficienten dadurch bestimmt sind, dass die Definitionsgleichung an m Punkten in der Umgebung von x genau erfüllt ist.

Dies würde voraussichtlich eine gute Darstellung der Function in der Umgebung des Punktes x geben, aber bedeutende Fehler für grössere Entfernungen hervorrufen.

Es wäre daher schon rationeller, die Punkte, an welchen die Gleichung (4) genau erfüllt werden soll, auf den ganzen Raum, innerhalb dessen man die Function kennen will, zu vertheilen. Werden hiezu z. B. die Punkte mit den Abscissen $0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}$ gewählt, so erhalten die Constanten der Curve dritten Grades folgende Werthe:

$$
\begin{aligned}
a &= 0\cdot 6820 . \lambda^{-1} \\
b &= 3\cdot 234 . \lambda^{-2} \\
c &= -1\cdot 423 . \lambda^{-3} \\
d &= 0\cdot 2439 . \lambda^{-4}
\end{aligned}
$$

Aber auch diese Art der Darstellung ist für unseren Zweck nicht recht geeignet; für genügend grosse x muss nämlich eine derartige Curve immer nach oben oder unten umbiegen und kann sich nicht asymptotisch einer Geraden nähern, wie es von vorneherein verlangt wurde. Um bis zu einer genügend grossen Entfernung eine annähernd gerade Linie zu erhalten, welche eine Bestimmung des γ ermöglichen würde, müsste man eine Curve sehr hohen Grades, also eine grosse Anzahl von Coëfficienten berechnen, und diese Rechnungen werden dann ungemein langwierig.

Besser ist es deshalb, eine andere Methode der Annäherung zu wählen, indem man von vorneherein eine Curve substituirt, welche eine Asymptote hat.

So berechnete ich z. B. die Curve $y = a + bx + ce^{-\alpha x}$, indem ich zur Bestimmung der willkürlichen Coëfficienten a, b, c, α die vier Bedingungen benützte, dass die Gleichung (4) für die Punkte $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}$ erfüllt sei.

Wird obiger Ausdruck in Gleichung (4) substituirt, so erscheinen daselbst ausser den früher berechneten Integralen $\int \varphi(\xi)\,d\xi$, $\int \xi\varphi(\xi)\,d\xi$ noch solche von der Form $\int e^{\pm\alpha\xi}\varphi(\xi)\,d\xi$, deren Auswerthung noch besprochen werden muss. Es möge beispielsweise $J = \int_0^x e^{\alpha\xi}\varphi(\xi)\,d\xi$ für den Fall $\alpha > \frac{1}{\lambda}$ berechnet werden:

Durch partielle Integration wird dieses gleich

$$J = \frac{e^{\alpha x}\varphi(x) - 1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int_0^x e^{\alpha\xi}\varphi'(\xi)\,d\xi.$$

Letzteres Integral ist gleich $K = \lim\limits_{a=0} \int_a^x e^{\alpha\xi}\varphi'(\xi)\,d\xi$, und dies verwandelt sich durch abermalige partielle Integration in

$$K = \frac{e^{\alpha x}\varphi'(x)}{\alpha} - \lim_{a=0}\left[\frac{e^{\alpha a}\varphi'(a)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_a^x \frac{e^{\left(\alpha - \frac{1}{\lambda}\right)\xi}}{\lambda\xi}\,d\xi\right].$$

Nennt man zur Abkürzung

$$F(t) = \int_t^1 \frac{e^t\,dt}{t} = A - \log t - t - \frac{t^2}{2.2!} - \frac{t^3}{3.3!} - \cdots,$$

wo A den Werth 1·317902 hat, so kann man das letzte Integral auch schreiben:

$$\frac{F\left[\left(\alpha - \frac{1}{\lambda}\right)x\right] - F\left[\left(\alpha - \frac{1}{\lambda}\right)a\right]}{\lambda}.$$

Durch Ausführung des Grenzüberganges erhält man dann:

$$-K = \frac{1}{\alpha\lambda}\left\{e^{\alpha x}E\left(\frac{x}{\lambda}\right) + F\left[\left(\alpha - \frac{1}{\lambda}\right)x\right] - C - A + \log(\alpha\lambda - 1)\right\}.$$

was, oben eingesetzt, das gesuchte Integral liefert.

In ähnlicher Weise findet man:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\xi}\varphi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2\lambda}\log[1+\alpha\lambda].$$

Aus den so erhaltenen vier Gleichungen kann man die Coëfficienten a, b, c eliminiren und erhält eine recht complicirte Gleichung, welcher das α genügen muss; ich habe daraus durch successive Näherung den Werth $\alpha = 2{\cdot}67$ gefunden, und hiemit die Coëfficienten

$$a = 1{\cdot}043\,\lambda^{-1}$$
$$b = 1{\cdot}500\,\lambda^{-2}$$
$$c = -0{\cdot}1938\,\lambda^{-1}.$$

Diese Temperaturcurve ist auf Fig. 2 dargestellt; das γ ergibt sich darnach:

$$\gamma = \left[0{\cdot}695 + \frac{4\beta}{3(1-\beta)}\right]\lambda.$$

Nun sieht man aber, dass die Abweichungen von der Geraden, wie ja von vorneherein zu erwarten war, nur in Entfernungen $<\lambda$ merklich sind. Um diesen Theil genauer wiederzugeben, habe ich noch eine Methode versucht, indem ich nämlich die Curve aus zwei Stücken zusammensetzte: der eben berechneten Curve zwischen $x = \lambda$ und $x = \infty$ und einer vierconstantigen Curve $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ zwischen $x = 0$ und $x = \lambda$, deren Coëfficienten dadurch bestimmt wurden, dass Gleichung (4) für die Punkte $x = 0, \frac{\lambda}{3}, \frac{2\lambda}{3}, \lambda$ genau giltig sein soll.

Wird jene Exponentialcurve zur Abkürzung mit Y bezeichnet, und ist z die Abscisse, wo die beiden Curven aneinanderstossen, so erhält man zur Bestimmung des Coëfficienten vier Gleichungen von der Form

$$aA_{11} + bA_{12} + cA_{13} + dA_{14} = 1 - \int_{z-x}^\infty Y(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi,$$

wobei die A aus gewissen Ausdrücken

$$B_{11} = \int_0^{z-x_1} - \int_0^{x_1} \varphi(\xi) d\xi$$

$$B_{12} = \int_0^{z-x_1} + \int_0^{x_1} \xi \varphi(\xi) d\xi$$

$$B_{13} = \int_0^{z-x_1} - \int_0^{x_1} \xi^2 \varphi(\xi) d\xi$$

$$B_{14} = \int_0^{z-x_1} + \int_0^{x_1} \xi^3 \varphi(\xi) d\xi$$

in folgender Weise zusammengesetzt sind:

$$A_{11} = B_{11}$$

$$A_{12} = x_1 B_{11} + B_{12}$$

$$A_{13} = x_2^1 B_{11} + 2 x_1 B_{12} + B_{13}$$

$$A_{14} = x_3^1 B_{11} + 3 x_1^2 B_{12} + 3 x_1 B_{13} + B_{14}.$$

Die Werthe der daraus bestimmten Coëfficienten sind:

$$a = 0 \cdot 9033 . \lambda^{-1}$$

$$b = 1 \cdot 9024 . \lambda^{-2}$$

$$c = -0 \cdot 4170 . \lambda^{-3}$$

$$d = 0 \cdot 1593 . \lambda^{-4}$$

Die Curve würde in der Umgebung des Nullpunktes etwas höher verlaufen als die Exponentialcurve auf Fig. 2, aber die Unterschiede würden im Maassstab der Zeichnung nicht gut ersichtlich sein.

Der Temperatursprung-Coëfficient γ ergibt sich darnach zu

$$\gamma = \left[0 \cdot 707 + \frac{4\beta}{3(1-\beta)}\right] \lambda.$$

Etwas ähnlich dieser letztangewendeten Methode ist die von Kundt und Warburg benützte Art der Annäherungsrechnung bei Berechnung der Gleitung; dabei wurde die Geschwindigkeitscurve aus vier geradlinigen Stücken zusammengesetzt, welche von $x = 0$ bis $\frac{\lambda}{3}$, von $\frac{\lambda}{3}$ bis $\frac{2\lambda}{3}$, $\frac{2\lambda}{3}$ bis λ und λ bis ∞ reichten, und deren Lage in ähnlicher Weise bestimmt wurde, wie dies hier geschehen ist. Hiebei wäre keine

grosse Genauigkeit zu erwarten, und die Gestalt der Curve wird jedenfalls durch die berechnete Zickzacklinie nur unvollkommen wiedergegeben, doch stimmt der daraus gefundene Werth $\gamma = 0{\cdot}712\,\lambda$ mit dem hier abgeleiteten wider Erwarten gut überein; β ist von Kundt und Warburg $= 0$ angenommen.

Natürlich könnte man den Grad der Genauigkeit bei diesen Rechnungen noch beliebig weit treiben (namentlich, indem man Formeln wählt, mit denen in der Umgebung des 0 Punktes ein besseres Anschmiegen erzielt wird), doch glaube ich eine für den vorliegenden Zweck genügende Annäherung zu erreichen, indem ich $\gamma = \left[0{\cdot}70 + \frac{4\beta}{3(1-\beta)}\right]\lambda$ annehme.

Wenn hierin $\beta = 0$ gesetzt wird, wenn also die an die Wand prallenden Moleküle deren Temperatur vollständig annehmen, würde das Verhältniss $\frac{\gamma}{\lambda} = 0{\cdot}70$, und zwar von der Beschaffenheit des Gases unabhängig. Nun hatten sich aber, wie erwähnt, bei der experimentellen Untersuchung für $\frac{\gamma}{\lambda}$ die Werthe ergeben: 1·70 in Luft und 6·96 in Wasserstoff.

Es folgt also, dass, insbesondere bei Wasserstoff, der zweite Theil des Temperatursprunges erheblich den ersten überwiegt; der Temperatursprung rührt also zum grösseren Theile davon her, dass die Gasmoleküle, welche an die feste Wand anprallen, dabei ihre Temperatur nur theilweise ausgleichen.

III.

Eine exacte Berechnung der hier in Betracht kommenden Verhältnisse ist aber noch weniger möglich wie in dem früheren Falle, umsomehr als uns die nothwendige Grundlage zu einer solchen fehlt, nämlich die Kenntniss der inneren Constitution des festen Körpers, der Beschaffenheit seiner Oberfläche, der zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte etc.

Jedenfalls muss man dabei aber die früher gemachte vereinfachende Voraussetzung, dass die Wärme als eine die Bewegung der Moleküle nicht verändernde Eigenschaft aufgefasst werden könne, fallen lassen und muss auf den Mechanismus der Wärmebewegung und des Stosses näher eingehen.

Stossen zwei Kugeln, deren Massen m und M sind, mit den respectiven Geschwindigkeiten c und C unter dem Winkel γ auf einander und ist die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte im Momente des Stosses (die Centrallinie) gegeben, so kann man die Geschwindigkeiten nach dem Stosse durch folgende, von Maxwell herrührende Construction finden.

Man ziehe als dritte Seite des Dreieckes cAC die Verbindungslinie der Endpunkte von c und C, welche die relative Geschwindigkeit g vorstellen wird, und theile dieselbe im Verhältnisse von $m:M$. Von dem so gefundenen Punkte als Mittelpunkt aus ziehe man zwei Kugelflächen durch die Endpunkte von g und errichte in letzteren Gerade, parallel der Centrallinie, soweit bis sie die erwähnten Kugelflächen durchstossen. Die Verbindungslinien zwischen A und letzteren Punkten geben die Richtungen und Grössen der Geschwindigkeiten nach dem Stosse. Die Richtung der Centrallinie sei durch die geographische Länge β und die Polhöhe α definirt, indem g als Axe des Coordinatensystems genommen wird und die Winkel β von der Ebene des Dreieckes AcC an gezählt werden.

Man findet dann leicht $\left(\frac{M}{M+m}=\mu \text{ gesetzt}\right)$:

$$c'^2 = c^2+4\cos^2\alpha[\mu(\mu-1)c^2+\mu(1-2\mu)cC\cos\gamma+\mu^2C^2]-$$
$$-4\sin\alpha\cos\alpha.\mu cC\sin\gamma\cos\beta.$$

Treffen viele solche Kugeln zusammen, deren Geschwindigkeiten den obigen analog gerichtet sind, bei denen aber die Richtung der Centrallinie dem Zufalle überlassen bleibt, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass diese Richtung in den Winkel α bis $\alpha+d\alpha$ und β bis $\beta+d\beta$ fällt, proportional sein:

$$\sin\alpha\cos\alpha d\alpha d\beta,$$

also wird das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit nach dem Stosse:

$$[c'^2] = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}[c^2+4B\cos^2\alpha-4\mu cC\cos\alpha\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta]\sin\alpha\cos\alpha d\alpha d\beta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\sin\alpha\cos\alpha d\alpha d\beta}$$

wobei B zur Abkürzung statt des Klammerausdruckes in der früheren Formel gesetzt ist, was durch Ausführung der Integration ergibt:

$$= c^2 + 2B = c^2 + 2[\mu(\mu-1)c^2 + \mu(1-2\mu)cC\cos\gamma + \mu^2 C^2].$$

Nehmen wir schliesslich an, dass die stossenden Kugeln nicht in gegebener Richtung, sondern in allen möglichen Richtungen des Raumes, gleichmässig vertheilt, umherfliegen, so wird dann das mittlere Geschwindigkeitsquadrat nach dem Stosse sein:

$$[[c'^2]] = \frac{\int_0^\pi [c'^2]\sin\gamma\, d\gamma}{\int_0^\pi \sin\gamma\, d\gamma} = c^2 + 2[\mu(\mu-1)c^2 + \mu^2 C^2].$$

Die lebendige Kraft einer solchen stossenden Kugel ändert sich also im Mittel um

$$[[[c'^2]] - c^2]\frac{m}{2} = m[\mu(\mu-1)c^2 + \mu^2 C^2],$$

das ist, wenn wir wieder $\mu = \frac{M}{M+m}$ einführen, um

$$\frac{[MC^2 - mc^2]mM}{(M+m)^2}.$$

Der Klammerausdruck ist aber gleich dem doppelten Unterschiede der lebendigen Kräfte der beiden Kugeln vor dem Stosse, somit ist die durch den Stoss verursachte Änderung der Bewegungsenergie einer jeden Kugel gleich der Differenz derselben bei den zwei Kugeln, multiplicirt mit dem Factor $\alpha = \frac{2mM}{(m+M)^2}$.

Man sieht also, was schon Maxwell bemerkt hatte, dass die Stösse die Wirkung haben, die mittlere lebendige Kraft immer mehr auszugleichen; der Factor ist aber, wie leicht einzusehen ist, höchstens gleich $^1/_2$, welchen Werth er nur für $m = M$ erreicht.

Es wird somit die lebendige Kraft nach einem Stosse im Mittel nur dann gleich werden, wenn die stossenden Theilchen

gleiche Massen haben, z. B. im Inneren des Gases, dagegen findet sonst nur ein theilweiser Ausgleich statt, desto geringer, je verschiedener die stossenden Massen sind.

Die Anwendung dieser mechanischen Sätze auf unseren Fall ist nun leicht ersichtlich; identificiren wir die lebendige Kraft der translatorischen Bewegung mit der Temperatur, so haben wir sie auszudrücken durch die Formel:

$$\vartheta - \theta_M = \alpha(\theta_0 - \theta_M).$$

Somit: $\vartheta = \alpha\theta_0 + (1-\alpha)\theta_M$ woraus also die früher (2) als β bezeichnete Grösse sich als $\beta = 1 - \alpha$ ergeben würde.

Dabei wäre aber angenommen, dass jedes Gasmolekül nur einmal mit einem Theilchen des festen Körpers zusammenstösst; nimmt man an, dass nach dem ersten Zusammenstoss die Hälfte der Gasmoleküle ins Gas zurückfliegt, die andere Hälfte aber mit anderen Körpertheilchen zusammenstösst, hier abermals die Hälfte derselben ins Gas zurückfliegt u. s. w., so erhält man durch leichte Rechnung für obigen Factor β den Werth: $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$.

Die Unvollkommenheit einer solchen Berechnungsweise liegt hauptsächlich darin, dass von den zwei bei der früheren Rechnung eingeführten Vereinfachungen bloss eine aufgegeben wurde, indem die Natur der Wärme als lebendige Kraft der Molekularbewegung berücksichtigt wurde, dagegen die Vertheilung der Geschwindigkeiten noch immer als gleichförmig angesehen wurde.

Diese ganze Überlegung hat eben nur den Zweck, uns eine Vorstellung über die Ursache zu geben, auf welcher die Verschiedenheit des Temperatursprunges bei verschiedenen Gasen beruht. Dass derselbe speciell bei Wasserstoff so gross ist, ist darnach leicht verständlich, da in diesem Falle jedenfalls die Wasserstoffmoleküle eine bei Weitem geringere Masse haben, als die Theilchen des festen Körpers, somit der Factor α sehr klein, β relativ gross sein wird.

Das Interessanteste scheint mir dabei insbesondere darin zu liegen, dass hier vielleicht ein Weg vorliegt, auf dem wir aus der bekannten Masse der Gasmoleküle Schlüsse ziehen können

auf die Massen der Theilchen des festen Körpers, denen die Wärmebewegung zukommt, zu deren Bestimmung bis jetzt kein anderer Weg bekannt zu sein scheint.

Allerdings werden sich dabei die Verhältnisse noch complicirter gestalten, wenn man auch die Energie der rotatorischen Bewegung in Betracht zieht, die bisher gar nicht berücksichtigt wurde.

Da aber solche theoretische Speculationen sich noch auf sehr unsicherem Boden bewegen, bin ich vor Allem damit beschäftigt, weiteres diesbezügliches experimentelles Material herbeizuschaffen.

IV.

Ich möchte hier nur noch auf einen Punkt näher eingehen, worin der Unterschied zwischen den Folgerungen der älteren Theorie der Wärmeleitung und der kinetischen Wärmeleitungstheorie recht auffallend zu Tage tritt.

Ist nämlich die Entfernung der Oberflächen der festen Körper, zwischen welchen das Gas die Wärmeleitung herstellt, so gering, dass die mittlere Weglänge von derselben Grössenordnung oder noch grösser ist, so verlieren die Begriffe des Wärmeleitungs-Coëfficienten und des Temperatursprung-Coëfficienten ihre Bedeutung, und die bisherige Theorie der Wärmeleitung wird auch bei Berücksichtigung der Poisson'schen Grenzbedingung nicht mehr anwendbar sein.

Der Vorgang wird aber wieder übersichtlich, obwohl von dem normalen ganz verschieden, wenn die Wände sich so weit nähern (oder λ so gross wird), dass ihre Distanz gegenüber der mittleren Weglänge zu vernachlässigen ist.

Es ist dies ganz analog dem von Kundt und Warburg loc. cit. dargelegten Verhalten des Gases in Bezug auf innere Reibung.

Dann kann man nämlich die Wirkung der Stösse der Gasmoleküle untereinander überhaupt vernachlässigen, gegenüber der Wirkung der Stösse an die Wände, da letztere viel häufiger eintreten werden als erstere. Die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle (also auch die Gastemperatur) wird im ganzen Raume gleich und unabhängig von den Gefässdimensionen.

Hat z. B. die rechte Wand die Temperatur θ_1, die linke die Temperatur θ_2, so wird die Temperatur der von rechts nach links fliegenden Molekülen ϑ_2 mit jener der sich in entgegengesetzter Richtung bewegenden ϑ_1 in folgendem Zusammenhange stehen (nach Gleichung 2):

$$\vartheta_1 = \theta_1 + \beta(\vartheta_2 - \theta_1)$$
$$\vartheta_2 = \theta_2 + \beta(\vartheta_1 - \theta_2),$$

woraus folgt:

$$\vartheta_1 = \frac{\theta_1 + \beta\theta_2}{1+\beta} \qquad \vartheta_2 = \frac{\theta_2 + \beta\theta_1}{1+\beta}.$$

Jedes Molekül überträgt bei einem Stosse im Mittel die Wärmemenge

$$ms(\vartheta_2 - \vartheta_1) = ms[\theta_2 - \theta_1]\frac{1-\beta}{1+\beta}.$$

Sind n Moleküle in der Volumeinheit vorhanden, so üben sie einen Druck aus $p = \frac{nmc^2}{3}$, indem sie $\frac{nc}{6}$ Stösse in der Secunde gegen die Wände ausführen.

Dabei werden sie aber auch eine Wärmemenge

$$ms[\theta_2 - \theta_1]\frac{1-\beta}{1+\beta}\cdot\frac{nc}{6}$$

übertragen.

Nun ist aber der normale Wärmeleitungs-Coëfficient $\varkappa = nmcs\frac{\lambda}{3}$, somit wird die per Flächen- und Zeiteinheit übertragene Wärmemenge gleich

$$\frac{\varkappa}{2\lambda}[\theta_2 - \theta_1]\frac{1-\beta}{1+\beta}.$$

Dies ist somit die Maximalmenge von Wärme, welche ein Gas von gegebenem Druck zwischen zwei Wänden von gegebener Temperaturdifferenz übertragen kann, wenn diese Wände einander auch noch so nahe gebracht werden; sie ist offenbar dem Gasdrucke direct proportional, und ist gleich einer Wärmemenge, welche zwischen denselben Platten in der Distanz

$\Delta = 2\lambda \frac{1+\beta}{1-\beta}$ überströmen würde, falls dabei die Wärmeleitung in der normalen Weise (ohne Temperatursprung) vor sich gehen würde.

Diese Distanz gibt uns ein anschaulicheres Bild als die Zahlengrösse für die Wärmemenge selbst; nach den früher erwähnten Versuchen würde sich ergeben z. B. für Luft bei einem Drucke von 1 *mm* Quecksilber:

$$\Delta = 0 \cdot 4 \ mm$$

$$\text{Wasserstoff } \Delta = 3 \ mm.$$

Diese zuletzt entwickelten theoretischen Folgerungen sind bisher experimentell noch nicht bestätigt worden; die Schwierigkeiten, welche hauptsächlich in der Messung der dazu erforderlichen niedrigen Drucke liegen werden, sind aber nicht unüberwindbar; solche Untersuchungen würden directe Resultate bezüglich des Werthes des Coëfficienten β liefern, dessen Bedeutung vorher erwähnt wurde.

Es scheint mir überhaupt die Untersuchung dieser Vorgänge an der Grenze zwischen Gasen und festen Körpern, respective Flüssigkeiten einen Weg zu bieten, um über die Natur der letzteren näheren Aufschluss zu erlangen; insbesondere dürfte diesbezüglich auch das Phänomen des Gleitens der Gase eine noch grössere Beachtung verdienen, als sie ihm bisher zu Theil wurde.

Weitere Untersuchungen über den Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Condensatorenentladungen

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

1. Einleitung.

Im 104. Bande dieser Sitzungsberichte[1] habe ich einige Versuche mitgetheilt, welche den Zweck hatten, den Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Condensatorenentladungen im Allgemeinen festzustellen; in Verbindung damit wurde auch die Beantwortung der Frage versucht, ob die Hysteresisverluste bei sehr schnellen Feldwechseln anders sind wie bei langsamer cyclischer Magnetisirung. Die Resultate dieser Untersuchung sind am Schlusse dahin zusammengefasst worden, dass die Hysteresisverluste bei ungefähr 4000 Polwechseln pro Secunde für weiches Eisen grösser sind als jene, die man bei langsamer cyclischer Magnetisirung findet. Für Stahl und Nickel sind sie jedoch nicht wesentlich grösser gefunden worden. Die erwähnten Messungen sind in vieler Beziehung noch zu ergänzen gewesen, und ich habe daher diese Versuche nochmals aufgenommen und exacter mit einer Subvention der kaiserl. Akademie durchgeführt. Die Resultate, welche nachstehend mitgetheilt werden, bestätigen die Ergebnisse der ersten Untersuchung und lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

[1] Auch Wied. Ann. Bd. LVIII, S. 249.

Weiches Eisen mit einer Coercitivkraft bis 6 Einheiten zeigt schon bei ungefähr 2000 Polwechseln in der Secunde beträchtlich grössere Hysteresisverluste als bei langsamer cyclischer Magnetisirung.

Die Zunahme der Hysteresisverluste wächst mit der Zahl der Polwechsel und ist umso grösser, je kleiner die Coërcitivkraft der betreffenden Eisensorte ist.

Beim harten Eisen (Coercitivkraft 13·6 Einheiten) ist selbst bei 4000 Polwechseln ein merklicher Unterschied in den Hysteresisverlusten nicht nachzuweisen gewesen; ein solcher dürfte sich erst bei noch rascher wechselnden Feldern einstellen.

2. Theorie und Methode der Versuche.

Obwohl die Messungen diesmal nahezu in gleicher Weise ausgeführt wurden wie bei der ersten Untersuchung und daher hinsichtlich der Beschreibung des Verfahrens auf die erwähnte Abhandlung verwiesen werden kann, so soll doch hier eine kurze Recapitulation über das Wesen der Versuchsmethode gegeben werden. Die schnellen Feldwechsel wurden mittels elektrischer Schwingungen bei Entladung eines Condensators durch passend gewählte Rollen, welche zugleich als Magnetisirungsrollen dienten, hergestellt. Wird eine oscillatorische Entladung eines Condensators eingeleitet, so schwankt die Ladung des Condensators zwischen positiven und negativen Maximis, die jedoch fortwährend abnehmen. Für den Fall des Ladungsmaximums sitzt die ganze elektrische Energie im Condensator, sonst ist sie zum Theile auch als Stromenergie in der Entladungsspirale vorhanden. Die Abnahme der Ladungsmaxima ist hauptsächlich durch den Widerstand des Entladungskreises bestimmt; gibt man jedoch in die Entladungsspirale einen magnetisirbaren Draht, so wird durch die cyclische Magnetisirung ebenfalls ein Theil der elektrischen Energie absorbirt, so dass die Maxima nun rascher abnehmen als im ersten Falle. Diese Thatsache gibt uns einen Anhaltspunkt, um die bei der cyclischen Magnetisirung aufgewendete Energie ungefähr zu bestimmen.

Bezeichnen wir in dem Falle, wo kein Draht in die Entladungsrolle eingelegt ist, die den Ladungsmaximis ent-

sprechenden Potentiale mit V_1, V_2, V_3, so sind die betreffenden Energiequanta

$$\frac{1}{2} V_1^2 C, \ \frac{1}{2} V_2^2 C, \ \frac{1}{2} V_3^2 C,$$

wo C die Capacität des Condensators bezeichnet.

Der Verbrauch W an Erg. vom ersten bis zum dritten Maximum ist also

$$W = \frac{1}{2} C (V_1^2 - V_3^2),$$

und zwar direct in Erg. ausgedrückt, wenn man das Potential und die Capacität in absoluten Einheiten nimmt.

Bezeichnen wir mit k das Dämpfungsverhältniss, also

$$K = \frac{V_1}{V_3},$$

so ist auch

$$W = \frac{1}{2} C V_1^2 \left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right).$$

Ist ein Eisendraht in die Spule eingelegt, so setzt sich W aus zwei Theilen zusammen. Jener Theil der elektrischen Energie, welcher durch die Widerstände absorbirt wird, soll mit W_w bezeichnet werden; W_m hingegen soll den auf die Magnetisirung entfallenden Theil angeben.

Sind in diesem Falle die maximalen Ladungspotentiale V_1' und V_3', so ist jetzt

$$W = W_w + W_m = \frac{1}{2} C (V_1'^2 - V_3'^2).$$

Aus dieser Summe lässt sich W_m nur angenähert berechnen.

Wir wollen annehmen, das das eingelegte Eisenquantum sehr klein ist, so dass W_m nur einen kleinen Bruchtheil von W_w ausmacht; unter dieser Bedingung führen wir sodann die

Rechnung so durch, dass wir annehmen, es werde zuerst W_w und dann erst W_m absorbirt. W_w können wir sodann mit Hilfe von V_1' und des bei uneingelegtem Eisen beobachteten k berechnen. Die Differenz gibt W_m, und wir haben dann

$$W_m = \frac{1}{2} C\left(\frac{V_1'^2}{k^2} - V_3'^2\right).$$

Diese Berechnung muss ersichtlich einen zu kleinen Werth von W_m ergeben. Zur Schätzung dieses Fehlers sollen einige weiter unten mitgetheilte Versuche benützt werden. In dieser Berechnungsweise liegt auch insofern ein Fehler, als k in beiden Fällen in Folge der Vergrösserung des Selbstinductionscoëfficienten durch das eingelegte Eisen doch nicht ganz identisch ist. Auch dieser Umstand lässt W_m zu klein erscheinen.[1]

Vom ersten bis zum dritten Maximum würde der Eisendraht gerade einen vollen Magnetisirungscyclus durchmachen, falls die Schwingungen nicht gedämpft wären. Nimmt man jedoch die Anfangsstromstärke entsprechend hoch und gibt der Spirale sehr viele Windungen pro Längeneinheit, so dass die erzeugten Maximalfeldstärken gross ausfallen, dann hat es auf den durch die Hysteresis verbrauchten Theil der Energie keinen Einfluss, wenn auch der Cyclus bezüglich der Feldstärken nicht ganz geschlossen ist.

3. Die Apparate und die Versuchsanordnung.

Zur Untersuchung der elektrischen Schwingungen diente auch diesmal ein Hiecke'scher Fallapparat. Bei diesem Apparat werden durch ein fallendes Gewicht zwei Contacte geöffnet. Beim Öffnen des ersten Contactes wird die Oscillation eingeleitet; beim Öffnen des zweiten wird sie unterbrochen, und nun wird der Condensator durch ein Galvanometer entladen und hiemit die Grösse seiner Ladung gemessen. Von den beiden Contacten ist einer mittelst einer feinen Schraube in verticaler Richtung beweglich, wodurch die Zwischenzeit zwischen dem

---

[1] Vide die Anmerkung auf S. 731 meiner citirten Abhandlung.

Öffnen der beiden Contacte regulirt werden kann. Durch langsames Verändern des zwischen den beiden Öffnungen liegenden Zeitintervalles ist es leicht, die Oscillationscurve abzusuchen und die Maxima zu bestimmen. Selbstverständlich nimmt man nur bei den ersten Beobachtungen die ganze Oscillationscurve auf; sind einmal die Stellungen der Contacte für die Maxima ungefähr bekannt, so untersucht man die Curve später nur in der Nähe der Maxima.

Die Schraube hat eine in 100 Striche getheilte Trommel, und der Zeitwerth einer Schraubenumdrehung ist bei diesem Apparat zu 0·000118 Secunden bestimmt[1] worden, während eine Berechnung dieses Werthes aus der Fallhöhe die Zahl 0·0001165 Secunden ergab.

Als Condensator verwendete ich diesmal zwei Glimmercondensatoren von 2·2 Mikrofarad Capacität. Als Entladungs-, respective Magnetisirungsrollen benützte ich zwei verschiedene Spiralen, die in der schon früher beschriebenen Weise hergestellt waren.

1. Rolle *G.* 1·5 *mm* dicker, doppelt mit Wolle übersponnener Draht. Länge 58 *cm*, innerer Durchmesser 1·6 *cm*, äusserer 5·5 *cm*. Zahl der Windungen pro Längeneinheit 50·4, Widerstand 3·05 Ohm, Selbstinductionscoëfficient $12 \cdot 6 \times 10^6$ abs. E. Diese Rolle wurde schon bei den Eingangs erwähnten Versuchen benützt.

2. Rolle *R.* Bifilar gewickelt mit 0·9 *mm* dickem, doppelt mit Wolle umsponnenen Draht. Der Draht passirte vor dem Aufwickeln ein heisses Paraffinbad. Bei dieser Rolle konnten die beiden Lagen hintereinander, gegeneinander oder parallel geschaltet werden. Hier wurde die Rolle nur mit paralleler Schaltung gebraucht. Länge der Rolle 38, äusserer Durchmesser 4, innerer 1 *cm*. Zahl der Windungen pro Längeneinheit 37·8; Widerstand 2 Ohm (bei paralleler Schaltung). Der Selbstinductionscoëfficient wurde durch Vergleich mit der früheren aus der Schwingungszahl der Condensatoren zu $3 \cdot 36 \times 10^6$ berechnet.

[1] Die Bestimmung geschah mittelst eines Condensators von gemessener Capacität und eines bekannten inductionsfreien Widerstandes bei aperiodischer Entladung des Condensators mit Hilfe der beiden Contacte.

Die Capacität von 2·2 Mikrofarad, durch die Rolle G entladen, ergab eine Schwingungsdauer (doppelt) $= 0 \cdot 001038$ Secunden, während die Berechnung nach der Formel

$$\tau = 2\pi\sqrt{CS},$$

wo C die Capacität und S den Selbstinductionscoëfficienten bedeutet, den Werth 0·001046 ergibt. Die Übereinstimmung ist recht gut. Ferner ergab die Beobachtung ein logarithmisches Decrement (Brig.) $\lambda = 0864$, während die Formel

$$\lambda = \frac{R}{2S}\tau,$$

wo R den Widerstand bedeutet, den Werth 0·0555 liefert. Hier ist die Übereinstimmung wohl sehr schlecht. Vermuthlich ist die Ursache auf die schlechte Isolation zwischen den einzelnen Windungen der Rolle zurückzuführen. Bei Rolle R waren die Windungen in Folge Durchtränkung der Wolle mit Paraffin viel besser isolirt, und die Übereinstimmung der beiden logarithmischen Decremente ist daher auch viel besser. Es wurde gefunden: $\lambda_{beob.} = 0 \cdot 0842$ und $\lambda_{ber.} = 0 \cdot 0710$.

Von wesentlicher Bedeutung für diese Versuche ist die Vertheilung des Feldes innerhalb der Magnetisirungsspiralen, da ja die untersuchten Drahtbündel der ganzen Länge nach in einem homogenen Felde liegen sollten. Beide Rollen wurden daher mittelst kleiner Spiralen, welche längs der Axe verschoben wurden, untersucht. Die Probespiralen waren mit den Enden eines Galvanometers verbunden, und durch die Rollen ein entsprechender Strom geschickt, welcher mittelst eines Schlüssels commutirt werden konnte. Die beim Commutiren auftretenden Galvanometerausschläge sind ein Mass der Feldstärke. Diese Ausschläge sind in Tab. I unter α eingetragen. Mit d ist die Entfernung der Mitte der Probespirale von einem Ende der Rolle angegeben. Bei Rolle G ist von der Mitte aus das Feld bis auf eine Entfernung von 8 *cm* vom Ende, bei Rolle R bis auf 4 *cm* vom Ende homogen. Das homogene Feld hat also bei Rolle G eine Länge von 42, bei R eine solche von 30 *cm*.

Tabelle I.

Rolle G		Rolle R	
d *cm*	α	d *cm*	α
Ende	26·0	Ende	11·0
2	63·5	2	18·0
4	75·2	4	19·5
6	77·7	6	19·5
8	79·2	8	19·6
10	79·2	10	19·7
12	79·5	12	19·4
14	79·7		
16	79·2		
18	79·5		
20	79·7		

Zur Ladung der Condensatoren wurden immer Accumulatoren verwendet. Das maximale Ladungspotential selbst wurde durch Vergleich mit einer Batterie von 12 Clark'schen Normalelementen bestimmt. Als Galvanometer benützte ich ein von Edelmann construirtes Wiedemann-Galvanometer, welches als ballistisches Galvanometer mit einer Schwingungsdauer von 6 Secunden (einf.) und mit feindrahtigen Rollen sehr gute Dienste leistete. Gewöhnlich musste das Galvanometer mit Nebenschluss gebraucht werden, da sonst die Empfindlichkeit zu gross gewesen wäre. Übrigens ist bei einer directen Entladung von 2·2 Mikrofarad durch die Galvanometerrollen die Entladung schon merklich verzögert worden.

4. Die untersuchten Drähte.

Die Drähte wurden in Bündelform in Glasröhren eingelegt und der Zwischenraum mit Paraffin ausgegossen; dadurch wurden die Drähte nicht nur in ihrer Lage festgelegt, sondern auch von einander isolirt. Es muss bemerkt werden, dass das Bündel vor dem Einlegen nicht zusammengebunden wurde. Der feinste Draht (0·1 *mm* Durchmesser) wurde von Heräus

in Hanau als weicher Eisendraht bezogen, die übrigen Drahtsorten sind von der Gattung, wie man sie im Handel als Blumendraht zu kaufen bekommt. Entsprechend der Länge der Magnetisirungsrollen waren die Drahtbündel entweder 48 oder 30 *cm* lang. Durch die Daten der Tabelle II sind die einzelnen Drahtbündel etwas näher gekennzeichnet. Dabei bedeutet L die Länge, G das Gewicht des Bündels, r den Radius des Drahtes, N die Anzahl der im Bündel enthaltenen Drähte, σ den specifischen Widerstand der betreffenden Drahtsorten in absoluten Einheiten. Zur Berechnung der durch die Foucault'schen Ströme absorbirten Energie ist nämlich die Kenntniss des specifischen Widerstandes nothwendig. σ bedeutet hier freilich den specifischen Widerstand längs der Axe, während für die Foucault'schen Ströme jener rings um die Axe massgebend ist. Bei der Anwendung des Werthes von σ muss man also annehmen, dass beide gleich sind, was vielleicht nur angenähert richtig sein dürfte.

Tabelle II.

Bündel	N	L *cm*	G *g*	r *cm*	σ
A	10	48	1·105	0·0097	11200
B	5	48	0·553	0·0097	11200
C	2	48	0·540	0·0150	10900
D	14	30	0·970	0·0097	11200
E	3	48	0·660	0·0137	11900
F	3	30	0·505	0·0150	10900
G	56	30	1·07	0·0050	13340

Die Drähte der Bündel *A, B, D* wurden einer und derselben Rolle entnommen; ebenso war dies für die Bündel *C* und *F* der Fall.

5. Das magnetische Verhalten der Drähte.

Für die richtige Deutung der Beobachtungsresultate war es nothwendig, das magnetische Verhalten der Drähte überhaupt etwas näher zu untersuchen, sodann aber insbesondere die Hysteresisverluste bei langsamer cyclischer Magnetisirung zu bestimmen.

Zunächst habe ich den temporären und remanenten Magnetismus bei verschiedenen Feldstärken mit Hilfe des ballistischen Galvanometers untersucht; bei der maximalen Feldstärke wurde auch die Induction $\mathfrak{B}$ in absoluten Einheiten bestimmt.

In den nachfolgenden Tabellen III und IV bedeutet H die Feldstärke in absoluten Einheiten, t den Galvanometerausschlag, welcher dem temporären, r jenen, welcher dem remanenten Magnetismus proportional ist.

Tabelle III.

H	Bündel A			Bündel B			Bündel C			Bündel D		
	t	r	$\mathfrak{B}$	t	r	$\mathfrak{B}$	t	r	$\mathfrak{B}$	t	r	$\mathfrak{B}$
4·4	28·0	19·5		11·9	9·3		1·3			35·2	26·7	
9·2	66·2	57·9		37·8	33·6		36·4	33·2		95·1	83·0	
18·3	93·4	74·3		49·3	40·7		47·4	40·7		131·6	107·8	
54 9	111·9	80·8		56·4	44·2		58·0	44·5		156·6	115·8	
73·2	114 2	81·6		57·7	44·2		59·1	44·3		160·4	116·2	
91·5	116·4	83·7	16330	58·6	44·3	1648	59·8	44·1	17400	165·2	118·9	16670

Aus diesen Tabellen ersieht man, dass der Anstieg der temporären Magnetisirungsintensität von einer Feldstärke von 54·9 Einheiten bis zur Feldstärke von 91·5 Einheiten nur einige wenige Procente beträgt; eine cyclische Magnetisirung zwischen den Grenzen $H = \pm 91·5$ kann also nicht viel grössere Hysteresisverluste ergeben als jene zwischen den Grenzen $H = \pm 54·9$ Einheiten.

Tabelle IV.

H	Bündel E			Bündel F			Bündel G		
	t	r	$\mathfrak{B}$	t	r	$\mathfrak{B}$	t	r	$\mathfrak{B}$
4·4	28·7	24·5							
9·2	49·3	44·3		50·1	45·3		7·0	1·2	
18·3	61·4	50·9		68·8	59·2		113·8	99·0	
54·9	68·9	53·1		86·6	64·6		182 0	138·8	
73·2	70·2	53 2		88·6	64·7		190·4	138·6	
91·5	71·3	53·1	16450	88·6	64·5	17160	191·0	138·0	17040

Die Hysteresisverluste bei langsamer cyclischer Magnetisirung wurden für die einzelnen Bündel mehrmals bestimmt, und zwar nach der sogenannten unipolaren magnetometrischen Methode mit Hilfe einer für Spiegelablesung eingerichteten Magnetometernadel. Dabei wurden die Angaben des Magnetometers entweder mit Hilfe der Tabellen III und IV auf Magnetisirungsintensität geaicht, oder es wurde die Magnetisirungsintensität direct mit Hilfe der gemessenen Poldistanz und Horizontalintensität nach bekannten Formeln gerechnet. Es ist selbstverständlich, dass das Bündel immer ziemlich nahe an das Magnetometer herangeschoben werden musste, um genügend grosse Ablenkungen zu bekommen, dann aber auch, um eine nahezu unipolare Wirkung zu erzielen. Der Einfluss des zweiten Pols wurde übrigens in der Berechnung immer berücksichtigt. In der nachfolgenden Tabelle V sind die auf diese Weise bestimmten Hysteresisverluste unter W_l, bezogen auf die Volumeneinheit, und die gleichzeitig gemessene Coërcitivkraft unter K eingetragen. Die cyclische Magnetisirung wurde zwischen den Grenzen $H = \pm 92 \cdot 3$ Einheiten ausgeführt.

Tabelle V.

Bündel	W_l Erg.	K	Bündel	W_l Erg.	K
A	28500	4·7	*E*	24600	3·8
B	29100	4·8	*F*	38200	5·5
C	39300	5·8	*G*	71800	13·6
D	27500	4·6			

Aus der Höhe der Hysteresisverluste, sowie aus den Werthen der Coërcitivkraft ist zu ersehen, dass diese Drähte, obwohl ausgeglüht, doch nicht ein besonders weiches Eisen repräsentiren. Der Draht im Bündel ist, wie schon erwähnt, von Heräus in Hanau als weiches Eisen bezogen; er ist jedoch offenbar nach dem Ziehen nicht weiter ausgeglüht worden.

6. Die Beobachtungsresultate.

Bei den Beobachtungen handelte es sich darum, das erste und dritte Oscillationsmaximum in den beiden Fällen zu bestimmen, wo das betreffende Drahtbündel in die Entladungsrolle eingelegt und nicht eingelegt war, also mit und ohne Drahtbündel. Zu diesem Zwecke wurde die Curve in der Nähe des Maximums abgesucht, indem der eine Contact mittelst der Schraube so eingestellt wurde, dass die Unterbrechung noch vor dem Maximum lag. Durch langsames Verstellen des Contactes (um 5 oder 10 Trommelstriche) und jedesmaliges Beobachten des Galvanometerausschlages konnte das Maximum gefunden werden; dabei ist der Contact stets so lange verschoben worden, bis das Maximum deutlich überschritten war. Jeder Werth ist wieder das Mittel aus zwei oder mehreren Beobachtungen bei commutirten Polen der Ladungsbatterie. Vor und nach jeder Beobachtungsreihe bestimmte ich auch den Galvanometerausschlag für eine Condensatorladung mit 12 Clark'schen Normalelementen, sowie mit der Ladungsbatterie (direct ohne Oscillationen).

In den nachfolgenden Tabellen bedeutet:

L. B. die Ladungsbatterie, mit welcher der Condensator zur Erzeugung der Oscillationen geladen wurde.

γ den Galvanometerausschlag bei der Ladung durch 12 Clark-sche Elemente.

α den Galvanometerausschlag bei der Ladung durch die Ladungsbatterie.

»Ohne« und »Mit« bedeutet, dass sich die betreffenden Daten auf Beobachtungen ohne, respective mit eingelegtem Drahtbündel beziehen.

Tr. St. die Trommelstellung, bei welcher das entsprechende Ladungsmaximum beobachtet wurde.

β den diesem Maximum entsprechenden Galvanometerausschlag.

V das Ladungspotential des Condensators, in diesem Falle in Volt.

Erg. die in Energie ausgedrückte maximale Ladungsenergie.

k das Dampfungsverhältniss, d. h. das Verhältniss der Galvano-

Tabelle VI.

Bündel *A*, Rolle *G*, L. B. 2 Acc., $C = 2 \cdot 2$ Mf.

γ	α	Erstes Maximum						Drittes Maximum						k	W_m
		Ohne		Mit				Ohne		Mit					
		Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.	Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.		
111·5	22·6	34·2	547·8	34·2	551·2	—	79860	43 0	451·1	43·6	430·4	—	48820	1·215	5320
112·1	22·6	34·3	536·6	34·3	539·3	82.8	75480	43·1	440·9	43·5	418·5	64·3	45450	1·217	5520
110·0	22·7	34·1	537·9	34·2	540·7	84·6	78800	43·0	439·9	43·6	420·5	65·8	47630	1·223	5080
109·7	22·6	34·2	536·5	34·1	539·6	84·7	78910	42·9	436 2	43·5	418·5	65·7	47480	1·230	4680
110·0	22·5	34·1	537·4	34·2	539·5	84·5	78450	43·0	440·6	43·6	418·9	65·6	47290	1·220	5530
													Mittel......		5230 Erg.

$W_{gr} = 4730$, $W_{vol} = 37130$ Erg.

Tabelle VII.

Bündel B, Rolle G, L. B. 2 Acc., $C = 2\cdot 2$ Mf.

$\dot{\gamma}$	α	Erstes Maximum						Drittes Maximum						k	W_m
		Ohne		Mit				Ohne		Mit					
		Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.	Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.		
110·7	22 9	34·2	537·4	34·2	536 9	83·5	76740	43 0	437·9	43·3	426·9	66·4	48490	1·227	2460
109·7	22·5	34·2	534·7	34·2	536·1	84·2	77970	43·0	437·5	43·4	425·7	66·9	49160	1·222	3030
109·7	22·5	34·2	533·8	34·2	535 0	84·0	77650	43·1	436·8	43 3	425·5	66·8	49120	1·222	2880
110·0	22·5	34 2	536·4	34·2	538·0	84·2	78020	43 0	437·7	43·3	426·4	66·7	49020	1·226	2930
109·0	22 4	34·2	533·8	34·1	534·6	84·5	78450	42·9	435 6	43·3	424·2	67 0	49410	1·225	2820
													Mittel	......	2820 Erg.

$W_{gr} = 5100$, $W_{vol} = 40000$ Erg.

Tabelle VIII.

Bündel C, Rolle G, L. B. 2 Acc., $C = 2 \cdot 2$ Mf.

γ	α	Erstes Maximum						Drittes Maximum						k	W_m
		Ohne		Mit				Ohne		Mit					
		Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.	Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.		
109·4	22·4	34·2	531·3	34·2	532·5	83·8	77320	43·1	431·9	43·3	415·1	65·3	46960	1·230	4140
110·0	22·2	34·2	536·3	34·3	537·2	84·1	77800	43·1	437·1	43·3	420·1	65·8	47560	1·227	4130
108·9	22·3	34·2	533·7	34·2	534·8	84·6	78650	43·0	435·4	43·3	416·0	65·8	47600	1·226	4730
109·0	22·2	34·2	531·2	34·2	532·6	84·1	77870	43·0	435·0	43·3	416·7	65·8	47660	1·221	4600
109·0	22·1	34·2	530·3	34·2	530·9	83·9	77400	43·0	436·5	43·4	417·9	66·0	47950	1·215	4490
													Mittel.......		4420 Erg.

$W_{gr} = 8190$, $W_{vol} = 64290$ Erg.

Tabelle IX.

Bündel D, Rolle G, L. B. 2 Acc., $C = 2 \cdot 2$ Mf.

γ	α	Erstes Maximum						Drittes Maximum						k	W_m
		Ohne		Mit				Ohne		Mit					
		Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.	Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.		
108·7	22·1	34 8	527·9	34·9	530·3	84·0	77630	43·7	433·6	43·3	415·5	65·8	47640	1·217	4740
108·7	22·2	34·9	526·0	34 9	529·3	83·8	77260	43·7	434·2	44·1	417·2	66·1	48000	1·212	4630
108 0	22·1	34·8	529·7	34 8	531·5	84·8	79010	43 7	435·1	44 2	417·2	66·5	48670	1·217	4640
109·5	22·3	34·8	530·5	34 9	533·8	84·0	77620	43·7	438·2	44·2	420 1	66 1	48050	1·211	4900
108·6	22 1	34·8	530·9	34·9	533·1	84·5	78580	43·6	435 2	44·2	416·2	66·0	47890	1·220	4920
													Mittel.....		4770 Erg.

$W_{gr} = 4920$, $W_{vol} = 38600$ Erg.

Tabelle X.

Bündel E, Rolle G, L. B. 2 Acc., $C = 2·2$ Mf.

γ	α	Erstes Maximum						Drittes Maximum						k	W_m
		Ohne		Mit				Ohne		Mit					
		Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.	Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.		
108·5	22·4	34·8	525·6	34·9	527·2	83·7	77000	43·7	433·5	44·1	417·0	66·2	48150	1·213	4230
109·4	22·6	34·9	535·4	34·8	536·3	84·5	78460	43·7	440·6	44·1	423·2	66·6	48850	1·215	4270
108·5	22·3	34·9	531·5	34 9	534 2	84·8	79020	43·7	438·8	44 1	423 2	67·2	49650	1·211	4210
109·5	22·3	34·8	531·7	34·9	533·0	83·9	77350	43·7	437·8	44·1	420·6	66·2	48160	1·215	4280
109·6	22·4	34·8	530·1	34·9	531·7	83·6	76840	43·7	437·1	44 1	420·2	66 1	48600	1·213	4240
														Mittel......	4250 Erg.

$W_{gr} = 6440$, $W_{vol} = 50550$ Erg.

Tabelle XI.

Bündel D, Rolle R, L. B. 3 Acc., $C = 2 \cdot 2$ Mf.

γ	α	Erstes Maximum						Drittes Maximum						k	W_m
		Ohne		Mit				Ohne		Mit					
		Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.	Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.		
106·5	30·8	33·75	557 3	33 85	561·0	90·7	90510	38·35	458·3	38·65	433·2	70·0	53960	1·216	7230
106·0	30·9	33·80	556·5	33 80	559·8	90·9	90970	38·35	459·0	38·65	433·8	70·5	54630	1·212	7260
106·0	30·9	33·80	554·4	33·85	558·4	90·7	90510	38·40	456·4	38·65	430·3	69·9	53760	1·215	7560
105·9	30·7	33·80	551·5	33·80	554·6	90·2	89452	38 35	454·9	38·65	431·6	70·2	54160	1·212	6690
105·9	30·7	33·80	551·5	33·80	554·6	90·2	89452	38·35	453·8	38·65	428·5	69·7	53390	1·215	7170
													Mittel	……	7180 Erg.

$W_{gr} = 7500$, $W_{vol} = 58870$ Erg.

Tabelle XII.

Bündel *F*. Rolle *R*, L. B. 3 Acc., $C = 2 \cdot 2$ Mf.

γ	α	Erstes Maximum						Dritten Maximum						k	W_m
		Ohne		Mit				Ohne		Mit					
		Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.	Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.		
106·0	30·4	33·80	550·9	33·80	551·8	89·7	88407	38·35	453·4	38·50	428·5	69·6	53280	1·215	6610
105·7	30·8	33·75	554·8	33·80	557·1	90·7	90570	38·35	456·5	38·50	430·8	70·2	54180	1·215	7150
105·7	30·8	33·80	553·6	33·80	555·8	90·5	90170	38·35	456·2	38·50	430·9	70·2	54180	1·213	7050
105·5	30·6	33·80	553·6	33·80	555·2	90·6	90310	38·35	455·4	38·55	430·0	70·2	54240	1·216	6900
105·4	30·5	33·80	552·0	33·80	554·0	90·5	90130	38·35	454·9	38·55	430·0	70·2	54240	1·213	6970
														Mittel.......	6940 Erg.

$W_{gr} = 13740$, $W_{vol} = 107850$ Erg.

Tabelle XIII.

Bündel G, Rolle G, L. B. 2 Acc., $C = 2\cdot2$ Mf.

γ	α	Erstes Maximum						Drittes Maximum						k	W_m
		Ohne		Mit				Ohne		Mit					
		Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.	Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.		
109·5	22·6	34·9	536·4	35 0	540·4	85·0	79470	43·7	440·4	44·4	413·0	65·0	46430	1·218	7120
109 0	22·2	34·9	533·4	34·9	536 9	84·8	79130	43·7	440·2	44·4	413·0	65·2	46820	1·212	7080
109·4	22·4	34·9	538·2	34·9	542·9	85·5	80330	43.7	443·6	44·2	416·2	65·5	47220	1·213	7380
109·5	22·4	34·9	538·2	35·0	541·8	85·2	79850	43·7	442·9	44·3	415·8	65·4	47020	1·215	7040
109·7	22·3	34 9	538·0	34·9	542 2	85·2	79750	43·7	443 5	44·3	415·8	65·3	46850	1·213	7330
														Mittel.......	7190 Erg.

$$W_{gr} = 6720,\ W_{vol} = 52750 \text{ Erg.}$$

Tabelle XIV.

Bündel G, Rolle R, L. B. 3 Acc., $C = 2\cdot 2$ Mf.

γ	α	Erstes Maximum						Drittes Maximum						k	W_m
		Ohne		Mit				Ohne		Mit					
		Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.	Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.		
106·0	30·8	33·85	554·9	33·80	559·5	90·9	90890	38·40	455·0	38·70	426·7	69·3	52870	1·220	8210
106·0	31·2	33·80	561·4	33·80	568·2	92·3	93720	38·40	463·3	38·70	435·2	70·7	54980	1·212	8870
105·9	31·2	33·80	558·0	33·90	565·2	92·0	92990	38·40	462·0	38·70	435·2	70·8	55130	1·208	8600
105·6	31·0	33·80	552·9	33·80	559·2	91·2	91490	38·35	457·0	38·65	428·3	69·8	53640	1·210	8850
105·0	30·9	33·80	552·0	33·80	559·2	91·7	92520	38·40	454·8	38·70	427·8	70·2	54130	1·214	8680
														Mittel.......	8640 Erg.

$W_{gr} = 8070$, $W_{vol} = 63350$ Erg.

Tabelle XV.

Bündel A, Rolle G, L. B. 3 Acc., $C' = 2\cdot 2$ Mf.

γ	α	Erstes Maximum						Drittes Maximum						k	W_m
		Ohne		Mit				Ohne		Mit					
		Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.	Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.		
71·3	23·2	34·8	546·9	34·8	547·3	132·2	192280	43·7	447·7	44·1	437·6	105·7	122870	1·222	6010
71·0	22·6	34·9	534·9	34·9	538·2	130·5	187330	43·7	444·2	44·1	437 6	106·1	123820	1·204	5350
70·7	22·3	34·9	510·7	34·9	513·3	125·0	171950	43·7	421·1	44·2	412·8	100·5	111140	1·213	5530
70·7	22·0	34·9	510·7	34·9	513·2	125·0	171820	43·8	420·6	44·1	411·3	100·2	110370	1·214	6200
70·8	21·7	34·9	509·8	34·9	512·7	124·8	171280	43·7	420·9	44·1	411·3	100 2	110370	1·211	6370
														Mittel.......	5890 Erg.

$W_{gr} = 5330$, $W_{vol} = 41840$ Erg.

Tabelle XVI.

Bündel *B*, Rolle *G*, L. B. 3 Acc., $C = 2 \cdot 2$ Mf.

γ	α	Erstes Maximum						Drittes Maximum						k	W_m
		Ohne		Mit				Ohne		Mit					
		Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.	Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.		
70·8	21·7	34·9	510·0	34·9	511·0	124·4	170120	43·8	419 6	44·0	415·3	101·1	112340	1·215	2840
70·6	21·5	34·9	506·7	34·9	507·7	123·9	168860	43.7	419·5	43·9	415·2	101·3	112970	1·208	2800
71·3	21·7	34·8	514·5	34·9	516·6	124·8	171240	43·7	424·0	43·9	419·0	101·2	112650	1·213	3650
71·8	21·9	34·9	520·0	34·9	521·0	124·9	171740	43·7	427·6	43·9	422·9	101 4	113150	1·216	3000
71·3	21·8	34·9	516·4	34·9	517·1	124·9	171570	43·8	426·5	44·0	421·6	101·8	114060	1·211	2940
														Mittel.......	3050 Erg.

$W_{gr} = 5510, \ W_{vol} = 43250$ Erg.

Tabelle XVII.

Bündel G, Rolle G, L. B. 3 Acc., $C = 2\cdot 2$ Mf.

γ	α	Erstes Maximum						Drittes Maximum						k	W_m
		Ohne		Mit				Ohne		Mit					
		Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.	Tr. St.	β	Tr. St.	β	V	Erg.		
70·8	21·7	34·9	510·0	35·0	512·7	124·8	171270	43·8	419·1	44·2	408·0	99·3	108440	1·215	7520
70·6	21·5	34·9	506·6	35·0	510·5	124·6	170770	43·7	419·5	44·2	407·8	99·5	108970	1·208	8120
71·3	21·7	34·8	514·5	34·9	518·3	125·2	172340	43·7	424·0	44·1	412·4	99·6	109120	1·213	7900
71·8	21·9	34·9	520·0	34·9	523·3	125·5	173280	43·7	427·9	44·1	417·0	100·0	110040	1·216	7150
71·3	21·8	34·9	516·4	34·9	519·3	125·4	172980	43·8	426·5	44·2	414·8	100·2	110440	1·211	7500
													Mittel.......		7640 Erg.

$W_{gr} = 7140$, $W_{vol} = 56050$ Erg.

Tabelle XVIII.

Nr.	Bündel	L. B.	Rolle	τ	n	H_1	H_2	W_m	W_{gr}	W_{vol}
1	*A*	2 Acc.	*G*	0·00104	962	+ 67·1	—60·5	5230	4730	37100
2	*B*	2	*G*	0·00104	962	+ 67·1	—60·5	2820	5100	40000
3	*C*	2	*G*	0·00104	962	+ 67·1	—60·5	4420	8190	64300
4	*D*	2	*G*	0·00104	962	+ 67·1	—60·5	4770	4920	38600
5	*E*	2	*G*	0·00104	962	+ 67·1	—60·5	4250	6440	50550
6	*D*	3	*R*	0·000537	1862	+105·9	—95·4	7180	7500	58900
7	*F*	3	*R*	0·000537	1862	+105·9	— 95·4	6940	13740	107900
8	*G*	2	*G*	0·00104	962	+ 67·9	—61·2	7190	6720	52800
9	*G*	3	*R*	0·000537	1862	+106·4	—97·5	8640	8070	63350
10	*A*	3	*G*	0·00104	962	+101·6	—92·1	5890	5330	41800
11	*B*	3	*G*	0·00104	962	+ 97·7	—88·6	3050	5510	43300
12	*G*	3	*G*	0·00104	962	+ 97·7	—88·6	7640	7140	56100

meterausschläge beim ersten und dritten Maximum, ohn eingelegtem Drahtbündel.

W_m den auf das Drahtbündel entfallenden Energieverbrauch.

W_{gr} den Energieverbrauch für 1 *g* des betreffenden Drahtbündels.

W_{vol} den Energieverbrauch für die Volumeneinheit, immer ausgedrückt in Erg.

Um über die gewonnenen Resultate einen besseren Überblick zu gewinnen, sind dieselben in Tabelle XVIII zusammengestellt; dabei ist unter τ die Schwingungsdauer (doppelt) und unter n die Anzahl der Perioden pro Secunde eingetragen; H_1 und H_2 geben die Grenzen der Feldstärken für den Magnetisirungscyclus an.

7. Discussion der Beobachtungsresultate.

a) Wie aus den Tabellen VI—XVIII zu ersehen, wurden bei jeder Combination fünf Beobachtungsserien gemacht und daraus die in Tabelle XVIII enthaltenen Mittelwerthe von W_m abgeleitet. Um eine Schätzung der bei den einzelnen Beobachtungen erreichten Genauigkeit zu gewinnen, sollen hier die grössten Abweichungen des Resultates einer Beobachtungsserie vom Mittelwerthe angegeben werden. Es ist

für Nr.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12
Grösste Abweichung ..	12,	15,	7,	3,	1,	7,	5,	2,	5,	10,	20,	7%

Bei Nr. 2 und 11 ist immer nur ein Werth, der die grosse Abweichung zeigt, während die übrigen höchstens um 6 bis 7% vom Mittel differiren. Darnach kann man im Allgemeinen den Mittelwerthen vielleicht eine Genauigkeit von 5% zuschreiben, soweit es sich eben nur um die Beobachtungsfehler handelt.

Nun wollen wir jene Resultate vergleichen, welche sich auf gleiche Drahtsorten beziehen. Da sind zunächst die sub Nr. 1, 2, 4, 10 und 11 verzeichneten Beobachtungen, welche alle mit der gleichen Drahtsorte bei derselben Entladungsrolle und Condensatorcapacität gemacht wurden.

Die Drähte der einzelnen Bündel stammten alle von einer Drahtrolle her und zeigten auch ein ziemlich gleiches magnetisches Verhalten, wie das aus den Tabellen III und IV hervorgeht.

Für W_{vol} ergaben diese Messungen folgende Resultate:

Bündel	*A*	*B*	*D*	*A*	*B*
Nr.	1	2	4	10	11
W_{vol}	37100	40000	38600	41800	43200 Erg.

Die extremsten Werthe dieser Reihe differiren um circa 15%; doch ist diese Differenz zum grössten Theile nicht auf Beobachtungsfehler zurückzuführen, sondern sie ist in der Art der Berechnung und zum Theile in der Verschiedenheit der Feldgrenzen begründet. Die Berechnung von W_m ist, wie Eingangs erwähnt, nur angenähert möglich; je kleiner W_m gegen die durch den Widerstand absorbirte Energie ist, desto besser sind die Bedingungen erfüllt. Nimmt man auf diesen Punkt Rücksicht, so sind sodann etwa die Werthe von Nr. 1 und 4, ferner von 10 und 11 zu vergleichen. Diese Werthe stimmen auch in der That auf 3—4% überein. Die Bündel *A* und *D* unterscheiden sich nur durch ihre Länge, und man ersieht daraus, dass 1. bei diesen Längen der Drahtbündel die verbrauchte Energie nur vom Gewicht und nicht von der Länge des Bündels abhängt, und dass 2. die 48 *cm* langen Bündel bei der Rolle *G* in einem genügend homogenen Felde lagen. Bündel *B* hat nur das halbe Gewicht von *A*, und der Vergleich von 1 und 2 zeigt, dass der Fehler, der aus der Berechnungsweise resultirt, für Bündel *A* in 1 immerhin 7% betragen kann, wenn man den Werth von 2 als ganz richtig voraussetzt. Auch in 10 und 11 sind Beobachtungen für *A* und *B* gegeben; aber in diesem Falle war die Ladungsenergie überhaupt viel grösser als in 1 und 2, und daher ist hier die Differenz der Werthe von W_m für *A* und *B* auch kleiner.

Im Allgemeinen werden wir also sagen können, dass diesen Werthen vermöge der Beobachtungsfehler eine Genauigkeit von ungefähr 5% zukommt, dass sie aber in Folge der Berechnungsweise überhaupt zu klein ausgefallen sein müssen.

b) Der Energieverbrauch W_m setzt sich aus zwei Theilen zusammen. Erstens wird Energie verbraucht in Folge der dem betreffenden Drahtbündel zukommenden Hysteresis, und zweitens durch die beim Ummagnetisiren erzeugten Foucault-schen Ströme. Diese letzten Energieverluste werden um so kleiner, je dünner die Drähte sind.

In der schon erwähnten Abhandlung wurde für die Berechnung der Energieverluste in Folge der Foucault'schen Ströme folgende Formel aufgestellt:

$$W_f = \frac{\pi^2 r^2}{4\sigma\tau} \mathfrak{B}^2.$$

Dabei bedeutet W_f den auf die Volumeneinheit bezogenen Energieverlust, r den Radius, σ den specifischen Widerstand und $\mathfrak{B}$ die maximale Induction des Drahtes, τ die Schwingungsdauer der Condensatorentladung. Um einen Überblick zu gewinnen, wie weit die nach dieser Formel berechneten Verluste mit der Erfahrung übereinstimmen, müssen wir eine Beobachtung anstellen, wobei die Energieverluste in Folge der Foucault'schen Ströme jene der Hysteresis weit überwiegen.

Eine solche Beobachtung ist auf S. 739 meiner citirten Abhandlung sub *c* gegeben. In diesem Falle war $r = 0 \cdot 0385\,cm$, die Länge des untersuchten Drahtes $= 16 \cdot 3\,cm$, das Gewicht $= 0 \cdot 599\,g$. Für $\tau = \frac{1}{2100}$ Secunden ergab die Beobachtung zwischen den Grenzen $H = +138 \cdot 2$ und $-123 \cdot 6$

$$W_m = 19400;\ W_{gr} = 32400;\ W_{vol} = 254300 \text{ Erg.}$$

Nehmen wir für diesen Draht

$$\mathfrak{B} = 17000;\ \sigma = 11000,$$

so ergibt die Rechnung

$$W_f = 202000 \text{ Erg.}$$

Zu diesem Werthe müssen noch die Hysteresisverluste hinzugefügt werden. Nach den Resultaten der vorliegenden

Untersuchung können wir dieselben etwa mit 40000 Erg. annehmen, und so bekommen wir

$$W_{vol} = 242000 \text{ Erg. ber.}$$
$$W_{vol} = 254000 \text{ Erg. beob.}$$

Der beobachtete Werth ist sicher noch etwas zu klein, und daher würde im Allgemeinen aus diesem Vergleiche folgen, dass uns die Formel etwas zu kleine Werthe für die Energieverluste durch die Foucault'schen Ströme liefern würde. Doch ist es ganz klar, dass sie uns zur angenäherten Berechnung dieser Verluste sehr gute Dienste leisten kann.

Berechnen wir nun unter Zugrundelegung dieser Formel für die einzelnen Drahtbündel die auf die Volumeneinheit entfallenden, durch die Foucault'schen Ströme bedingten Energieverluste, so bekommen wir mit Hilfe der Tabellen II, III und IV die in Tabelle XIX verzeichneten Resultate.

Tabelle XIX.

Bündel	Rolle	n	W_f Erg.
A	*G*	962	5320
D	*R*	1862	10700
C	*G*	962	14800
E	*G*	962	10100
F	*R*	1862	27900
G	*G*	962	1290
G	*R*	1862	2500

c) Wenn wir schliesslich daran gehen, die Hysteresisverluste bei schnellen Feldwechseln mit den Hysteresisverlusten bei langsamer cyclischer Magnetisirung zu vergleichen, so wollen wir aus der Tabelle XVIII von den verschiedenen Beobachtungen für ein und dieselbe Drahtdicke jene herausgreifen, welche die richtigsten sein dürften.

Auf diese Weise ergibt sich Tabelle XX, wo die Schlussresultate zusammengestellt sind. In dieser Tabelle bedeutet $W_o = W_{vol} - W_f$ die bei der oscillatorischen Condensator-

entladung und W_l die bei langsamer cyclischer Magnetisirung gefundenen Hysteresisverluste, Δ die Differenz beider und *C.K* die Coërcitivkraft der betreffenden Drahtsorte.

Aus den Daten der Tabelle XX geht nun hervor, dass weiches Eisen bei schnellen Feldwechseln beträchtlich grössere Hysteresisverluste aufweist als bei langsamer cyclischer Magnetisirung. Die Drähte des Bündels *G* mit einer Coërcitivkraft von 13·6 Einheiten können wohl nicht mehr als weiches Eisen bezeichnet werden, und hier ist W_o kleiner gefunden worden als W_l, woraus jedoch noch nicht folgt, dass es in der That auch kleiner sein müsste.

Tabelle XX.

Bündel	Draht-dicke *cm*	C. K.	*n*	W_{vol}	W_f	W_o	W_l	Δ	$\frac{W_o}{W_l}$
C	0·0150	5·8	962	64300	14800	49500	39300	+10200	1·26
F	0·0150	5·5	1862	107800	27900	79900	38200	+41700	2·07
E	0·0137	3 8	962	50600	10100	40500	24600	+15900	1·65
A	0·0097	4·7	962	41800	5320	36500	28500	+ 8000	1·28
D	0·0097	4·6	1862	58900	10700	48200	27500	+20700	1·75
G	0·0050	13·6	962	56100	1290	54800	71800	—17000	0·76
G	0·0050	13·6	1862	63400	2500	60900	71800	—10900	0·85

Wir wollen nun die Resultate bei den einzelnen Drähten noch mit Rücksicht auf die Coërcitivkraft ordnen und bekommen dabei die Tabellen XXI und XXII, wobei sich die erste auf 962 und die zweite auf 1862 Perioden pro Secunde bezieht.

Tabelle XXI.

Bündel	C. K.	$\frac{W_o}{W_l}$
E	3·8	1·65
A	4·7	1·28
C	5·8	1·26
G	13·6	0·86

Tabelle XXII.

Bündel	C. K.	$\frac{W_o}{W_l}$
D	4·6	1·75
F	5·5	2·07
G	13·6	0·85

Aus den Daten dieser Tabellen folgt, dass das Verhältniss W_o/W_l mit steigender Periodenzahl wächst und dass es umso grösser ist, je kleiner de Coërcitivkraft ist.

d) Es entsteht noch die Frage, ob für hartes Eisen die Hysteresisverluste bei schnellen Feldwechseln wirklich kleiner sind als bei langsamer cyclischer Magnetisirung, wie dies aus den Beobachtungsresultaten hervorzugehen scheint. Wir müssen dabei bedenken, dass, wie schon erwähnt, die Art der Berechnung thatsächlich zu kleine Werthe liefern muss. Wir haben uns bisher begnügt, diese Thatsache zu constatiren; nun wollen wir daran gehen, speciell für das Drahtbündel *G* zu untersuchen, um wie viel die so berechneten Werthe zu klein ausgefallen sein könnten. Wir haben zunächst W_m so berechnet, als wenn die Absorption der Energie zuerst durch die Widerstände und dann durch die magnetischen Vorgänge im Eisenbündel geschehen würde. Durch diese Berechnung muss der Werth zu klein ausfallen, und zwar kann dieser Fehler immerhin 5% oder noch etwas mehr betragen, was aus einem Blick auf die Daten sub Nr. 8 und 12 in Tabelle XVIII hervorgeht.

Ferner wollen wir auch die Grösse des Fehlers berücksichtigen, welche darin besteht, dass wir bisher das Dampfungsverhältniss ohne und mit eingelegtem Bündel gleich angenommen haben. Die theoretische Berechnung der Oscillationen liefert für das logarithmische Decrement λ die Formel

$$\lambda = \frac{R}{2S}\tau \text{ oder } \lambda = \frac{4\pi RC}{\tau},$$

da

$$\tau = 2\pi\sqrt{CS} \text{ ist.}$$

Darin bedeutet R den Widerstand und S den Selbstinductionscoëfficienten der Entladungsrolle.

Legt man das Eisenbündel in die Entladungsrolle, so wird der Selbstinductionscoëfficient S', die Schwingungsdauer τ' und das logarithmische Decrement λ', und wir haben sodann die Gleichung

$$\lambda\tau = \lambda'\tau'.$$

Für Rolle *G* und die Capacität von 2·2 Mikrofarad ist in Nr. 12 bei nicht eingelegtem Drahtbündel

im Mittel $\lambda = 0\cdot 0839$ (brigg.)
$\tau = 8\cdot 89$ Trommelumdrehung.

Bei eingelegtem Bündel G war

$$\tau' = 9\cdot 28,$$

daher $\lambda' = 0\cdot 0801$ und daraus das Dämpfungsverhältniss $= 1\cdot 2026$.

Berechnet man aus den Daten der Tabelle XII W_m mit Zugrundelegung dieses Dämpfungsverhältnisses, so findet man $W_m = 9550$, $W_{vol} = 70120$ und $W_o = 68420$ Erg., ein Werth, welcher mit dem bei langsamer cyclischer Magnetisirung beobachteten Hysteresisverlust von 71800 schon sehr nahe übereinstimmt, zumal wenn man bedenkt, dass nach dem früheren auch der so berechnete Werth noch etwas zu klein ist.

Ebenso können wir die Rechnung für die Rolle R und für das Bündel G mit Hilfe der Daten in Tabelle XIV durchführen. Wir bekommen sodann $W_m = 9850$ und $W_{vol} = 72200$, woraus $W_o = 69700$ Erg. folgt, ein Werth, welcher mit dem früheren sehr nahe übereinstimmt.

Diese zwar nur angenähert richtige Berechnung der Resultate lehrt aber immerhin, dass beim harten Eisen die Hysteresisverluste bei ungefähr 4000 Polwechseln in der Secunde nahezu ebenso gross sind als bei langsamer cyclischer Magnetisirung. Ein gleiches Resultat wurde schon in der ersten Abhandlung für Stahl und Nickel abgeleitet. Es ist jedoch sehr wahrscheinlich, dass bei noch schnelleren Feldwechseln auch für diese Drahtsorten ein Anwachsen der Hysteresisverluste zu beobachten wäre.

VIII. SITZUNG VOM 10. MÄRZ 1898.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. II. b., Heft VIII bis X (October bis December 1897).

Der prov. Secretär theilt ein vom Commando S. M. Schiff »Pola« eingelaufenes Telegramm ddo. Suez, 5. März, mit, wonach sich an Bord Alles wohl befindet und gleichzeitig die Mission hiemit beendet ist.

Der prov. Secretär legt folgende eingelangte Abhandlungen vor:

1. »Die Tangentenprobleme der Kreis-Epicycloide mit Doppelpunkt«, von Prof. Wilhelm Binder in Wiener-Neustadt.
2. »Über den inneren Zusammenhang einiger Bahnelemente der acht grossen Planeten«, von Franz Trenkner, k. k. Steuer-Oberinspector in Wien.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. A. Lieben überreicht eine im II. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von Moriz Lilienfeld und Siegfried Tauss, betitelt: »Über das Aldol und Glykol aus Isobutyr- und Acetaldehyd«.

Die Tangentenprobleme der Kreis-Epicycloide mit Doppelpunkt

von

Prof. **W. Binder** in Wiener-Neustadt.

(Mit 2 Tafeln.)

Die Eigenschaften der vorstehend genannten Curven, welchen in der angewandten Mathematik, abgesehen von ihrem historischen Interesse, eine vielseitige Aufgabe zutheil wird, sind meines Wissens bisher ausschliesslich als sogenannte Rouletten (Rollcurven) studirt worden. Solcherart ist ihre graphische Erzeugung umständlich, während die betreffenden Tangentenconstructionen in der Regel auf keiner einheitlichen Basis beruhen, diejenigen aber der Singularitäten von Doppel-, Inflexions- und Undulationselementen gar nicht bekannt waren. Im XII. Abschnitte meines Lehrbuches[1] behandle ich wohl zuerst die Epicycloiden mit Doppelpunkt nach der projectivischen Methode als »Fusspunktenorte«, wobei auch einer linearen Construction ihrer reellen Doppeltangente Raum gegeben ist. Dort [250][2] habe ich auch hingewiesen, dass bei bestimmten Radienverhältnissen sowohl die Epicycloide, wie auch die Pericycloide mit Rückkehrpunkt gleich der Cardioide sind. Als Resultat meiner seitherigen Untersuchungen jener Thatsache füge ich an dieser Stelle das erweiterte Gesetz: »Jede Kreis-Epicycloide mit

[1] »Theorie der unicurs. Plancurven etc.« Bei B. G. Teubner, Leibzig, 1896.

[2] In [ ] gesetzte Zahlen beziehen sich auf den Artikel vorhin genannten Buches; die in ( ) stehenden Zahlen bedeuten den Artikel im vorliegenden Aufsatze.

Doppelpunkt O[1] ist identisch einer Limaçon (Pascal's Schnecke), deren fester Kreis K_π in C seinen Mittelpunkt hat, in welchem Kreise der Abstand $\overline{O\Omega}$ Durchmesser und der Radius r des Grundkreises k die constante Auftragstrecke ist«.[2]

Der Inhalt gegenwärtiger Abhandlung soll mit Hilfe des von mir genannten »Tangentialkreises« die nur lineare Construction sämmtlicher auf einer Epicycloide vorkommender Tangentengattungen zeigen.

Grundbeziehungen und Erzeugungsgesetz.

1. In den anschliessenden Figuren (1—6) dienen der Grundkreis k und ein beliebiger Punkt O in der Ebene desselben zur Grundlage. O bildet das Centrum einer circularen Strahleninvolution, welche mit dem Tangentensysteme des Grundkreises derart in Projectivität gesetzt wird, dass entsprechende Elemente rechtwinklig sind, deren Schnitte einen geometrischen Ort erzeugen, welcher eine Fusspunktencurve vierter Ordnung und unicursal ist. Sie ist [244] eine Epicycloide, deren Basiskreis K_b und Rollkreis K_ρ den gleichen Radius $\frac{r}{2}$ haben, wenn r derjenige unseres Grundkreises k ist und Ω das Centrum dieses letzteren bezeichnet. Dabei ist der Mittelpunkt von K_b der Halbirungspunkt C der Strecke $\overline{O\Omega}$, während der Mittelpunkt W für K_ρ und den ihm concentrischen Wälzungskreis K_w ebenfalls auf der Verbandlinie $|O\Omega|$ situirt.

Einem beliebigen Strahle des O-Büschels entsprechen zwei Elemente des Kreistangentensystems, was eine Zweideutigkeit des O-Büschels erkennen lässt. Aus diesem Grunde ist O als Doppelpunkt des Curvenerzeugnisses zu folgern, wie übrigens auch einzusehen ist, sobald man der Grundconstruction nachgeht. Es wird nämlich zweimal geschehen können, dass eine Kreistangente durch O zieht, demzufolge O in der genannten Eigenschaft resultiren muss. Dabei ist für

---

[1] Die Buchstabenbezeichnung ist in den beigegebenen Figuren ersichtlich.

[2] Vergl. Rohn und Papperitz, »Lehrb. der darstell. Geom.« Leipzig, 1896, Art. 575.

das Wesen dieses Punktes keineswegs gleichgiltig, ob jene Kreistangenten reell, imaginär oder in Coincidenz vorkommen. Diese Fälle finden aber für einen ausserhalb, innerhalb oder auf dem Grundkreise liegenden O-Punkt statt, wodurch derselbe dann bekanntlich in der Cycloide ein Knoten-, ein isolirter oder ein Spitzenpunkt wird.

Bemerkung. Als interessante Grenzfälle müssen diejenigen gezählt werden, wo der O-Punkt entweder in den Mittelpunkt Ω oder ∞ ferne fällt. Im ersteren Falle besteht die Erzeugnisscurve aus dem Grundkreise selbst im Vereine mit Ω als isolirten Doppelpunkt; im letzteren Falle ist sie repräsentirt durch das System der beiden gegen die Verbandlinie $|O\Omega|$ normalen Grundkreistangenten, wobei der ∞ ferne O-Punkt als Knoten aufzufassen ist.

2. Unsere Epicycloide ist [248] eine bicirculare Curve, welche die imaginären Kreispunkte der Ebene mit dem Grundkreise k gemeinschaftlich hat, folglich als Spitzen besitzt; demnach kommt ihr als Trochoide (verlängerte oder verkürzte Curve) das Symbol: C_4^4, als Curve mit reeller Spitze das Symbol: C_3^4 zu. Zwischen ihr und dem Grundkreise besteht eine quadratische Beziehung in der Art, dass sie von ihm im Allgemeinen in vier Punkten berührt wird; nachdem aber beide die schon erwähnten imaginären Kreispunkte der Ebene gemein haben, so kann diese Berührung nur mehr in zwei reellen Punkten $\beta_1\beta_2$ stattfinden, welche auf der Verbandlinie $|O\Omega| \equiv m$ liegen. Diese Eigenschaft erweist folgende Betrachtung.

Wegen der Ordnung der Cycloide enthält jeder Doppelpunktsstrahl noch zwei Curvenpunkte, die mittelst der beiden erzeugenden Kreistangenten auf ihn erzielt werden. Die Berührpunkte dieser Tangenten am Grundkreise k kann man als »Bilder« der betreffenden Curvenpunkte im quadratischen Verwandtschaftssinne bezeichnen. Verbindet man ein solches Bildpunktenpaar durch eine Gerade, so ist diese ein Durchmesser des Grundkreises. Das Durchmesserbüschel eines Kreises formirt bekanntlich eine circulare Involution, hier im Centrum Ω, und da wir (1) die Involution im O-Punkte von gleicher Eigenschaft voraussetzten, so sind beide Strahlengebilde auf der

∞ fernen Geraden perspectivisch und ihr zweites Theilerzeugniss — die Verbindungslinie der Centra $O\Omega$ — trifft den Grundkreis k in dem reellen Scheitelpaare $\beta_1\beta_2$. Gleichzeitig ist hieraus die bekannte Eigenschaft einer Kreis-Epicycloide, dass sie für die Axe $m \equiv |O\Omega|$ symmetrisch ist, zu entnehmen.

Die Doppeltangente.

3. Ist der Grundkreis k aus seinem Mittelpunkt Ω mit dem Radius r verzeichnet und in O der Doppelpunkt einer Epicycloide gegeben, so beschreiben wir in unseren Figuren zunächst aus O mit dem Radius $\frac{r}{2}$ einen Kreis k'; sodann tragen wir die Strecke $\frac{\overline{O\Omega}}{2}$ von O aus auf der Axe $m \equiv |O\Omega|$ auswärts bis zum Punkte R ab und beschreiben aus diesem letzteren einen Kreis k'' vom Radius $\frac{\overline{O\Omega}}{2}$. Satz: »Die Potenzlinie (Chordale) der Kreise $k'k''$ ist die reelle Doppeltangente Δ der Epicycloide«.

Dieser Satz begreift eine Verallgemeinerung der bezüglichen Construction, die ich in [250] gegeben habe, welche nur für eine eigentliche Doppeltangente mit reellen Berührpunkten Verwendung finden kann. Diese letzteren sind aber nichts Anderes, als die Potenzpunkte (Chordalpunkte) BB' der Kreise $k'k''$, deren quadratische Bilder $\overline{B}\overline{B}'$ nach (2) am Grundkreise k mittelst der Aussentangenten der zwei Kreise kk' als Berührpunkte desselben entstehen. Wir sind also durch unseren Satz in der Lage, sofort zu entscheiden, ob die reelle Doppeltangente Δ eine eigentliche oder eine isolirte ist, d. h. ob die Berührelemente BB' auf ihr reell oder imaginär sind, oder ob der singulare Fall der Coincidenz dieser Elemente vorkommt. Insbesondere aber fällt die Einfachheit der Construction für jeden möglichen Fall der Doppeltangente in die Augen und, wie späterhin zu ersehen sein wird, kommt ihr, ausser ihrer Eigenschaft als singulares Element in der Curve, eine besondere Bedeutung bei der Feststellung aller anderen Tangentenarten zu.

Der Tangentialkreis.

4. Damit sei jener Kreis K_t bezeichnet, welcher mit dem Radius $\frac{3}{4}r$ aus dem Halbirungspunkte C der Strecke $\overline{O\Omega}$ beschrieben wird. Aus der Lage und Grösse dieses Kreises geht hervor, dass die im vorigen Artikel genannten äusseren Tangenten der zwei Kreise kk' gleichzeitig auch solche für den Tangentialkreis K_t mit den Berührpunkten $\beta\beta'$ sind, und dass dieser selbst mit dem Basiskreise K_b in (1) concentrisch ist, soferne die Epicycloide als Roulette in Betracht gezogen wird.

Die Position von K_t zur Geraden Δ als eigentliche oder uneigentliche Secante oder aber auch als Tangente ist insoweit bemerkenswerth, als daraus auf die Art von Δ als Doppeltangente in der Curve geschlossen werden kann. In dieser Hinsicht ist das Verhältniss der Strecke $\overline{O\Omega}$ zum Radius r des Grundkreises k massgebend, wie später folgende Ableitungen erklären werden.

Erinnern wir uns der in (1) die Epicycloide erzeugenden Strahlengebilde, so lässt sich analog auf dem Kreise K_t eine Tangenteninvolution constatiren, deren Elemente mit den entsprechenden der Grundkreisinvolution, indem sie einander gleich laufen, auf der ∞ fernen Geraden perspectivisch sind. Ich gebe nun folgenden Satz: »Das Tangentensystem einer Epicycloide mit Doppelpunkt und dasjenige ihres Tangentialkreises sind auf der reellen Doppeltangente der ersteren perspectivisch«.

Tangentengattungen der Curve.

5. Bekanntlich werden durch die möglichen Coincidenzen der vier Punktenelemente, welche eine Gerade mit einer Curve vierter Ordnung gemeinsam hat, die verschiedenartigen Tangentenfälle auf ihr entstehen, so dass uns die Aufgabe wird, diese Fälle nun einzeln mit den Ergebnissen des Vorhergegangenen in Einklang zu bringen.

a) Die einfache Tangente. Fig. 1. Soll für einen beliebigen Punkt X der Epicycloide die Tangente gesucht werden, so liegt X nach dem Erzeugungsgesetz (1) auf dem

Strahle $|OX| \equiv x$ und zugleich auf der zu diesem Strahle normalen Grundkreistangente $|X\bar{X}| \equiv \theta$, wobei nach (2) der Berührpunkt $\bar{X}$ das Bild von X bedeutet. Zieht man nun an den Tangentialkreis K_τ die entsprechende Paralleltangente $\tau \| \theta$, so trifft sie die Doppeltangente Δ in einem Punkte φ, dessen Verbandlinie $|\varphi X| \equiv t$ nach dem Hauptsatze in (4) die fragliche Tangente im X-Punkte ist.

Bemerkung. Die Zweideutigkeit, welcher die Paralleltangente τ unterliegt, wird Folgendes beseitigen. Der $\bar{X}$-Punkt gehört im Grundkreise dem Durchmesserstrahle $|\bar{X}\bar{X}'|$ an, der ein Element des in (2) verzeichneten Büschels ist, und wir wissen, dass die zweite Grundkreistangente $\theta' \equiv |\bar{X}'X'|$ auf dem O-Strahle x einen anderen Curvenpunkt X' hervorruft. Nun treffen sich die gemeinschaftlichen Aussentangenten der Kreistrias $kK_\tau k'$ bekanntlich im Ähnlichkeitspunkte Z auf der Centralen m. Verbindet man Z mit den Punkten $\bar{X}\bar{X}'$ durch Gerade, so schneiden diese den Tangentialkreis in vier Punkten, wovon nothwendig zwei die Endpunkte $\xi\xi'$ eines Durchmessers dieses Kreises vom Mittelpunkte C sind. Auf diese Weise formiren die Strahlen $|\xi\xi'|$, $|\bar{X}\bar{X}'|$ in den Mittelpunkten $C\Omega$ der Kreise $K_\tau k$ zwei auf der ∞ fernen Geraden perspectivische Büschel, deren entsprechende Elemente parallel gehen.

In Umkehrung des eben Gesagten schneiden die Büschel $C\Omega$ auf dem ihnen angehörigen Kreise je eine der quadratischen Punkteninvolutionen $\xi\xi'$, $\bar{X}\bar{X}'$ aus, welche beide im Centrum Z perspectivisch sind, indem entsprechende Elemente $\xi\bar{X}$, $\xi'\bar{X}'$ paarweise auf einem Strahle von Z liegen. Wenn somit in der oben angeführten Construction von entsprechenden Parallelgeraden $\tau \| \theta$ die Rede war, so ist jetzt durch vorstehende Erörterung jede Zweideutigkeit ausgeschlossen.

6. In einer verlängerten Epicycloide C_4^4 (Fig. 1) ist der Doppelpunkt O ein Knoten mit zwei reellen Tangenten. »Man findet diese Knotentangenten dd' mittelst der aus O laufenden Grundkreistangenten $\delta\delta'$ als die gegen die letzteren normalen O-Strahlen.« Die Richtigkeit dessen wird sofort ersichtlich, sobald nach (5) die zu den $\delta\delta'$-Tangenten gleichgerichteten Tangentialkreis-Tangenten gezogen werden, welche

die Δ-Linie in φ-Punkten treffen, in denen gleichzeitig auch die betreffende Doppelpunktstangente dd' als ein O-Strahl hindurchgeht. Man erhält durch diese Construction abermals eine Bestätigung für die Eigenschaft des O-Punktes als ein Doppelelement der Curve.

Jede Knotentangente d enthält noch einen freien Tangentialpunkt D, welcher sich linear einfach dadurch ergibt, dass man den Schnitt der d-Geraden mit der zur δ-Geraden parallelen Grundkreistangente aufsucht, was in den Symmetrieverhältnissen der Tangentenpaare dd', $\delta\delta'$ begründet ist.

In einer verkürzten Epicycloide C_4^4 (Fig. 2) ist der isolirte Doppelpunkt O immer dem imaginären Tangentenfelde des Grundkreises k angehörig, weshalb auch die δ-Tangenten imaginär sind, und deswegen die bekannte Eigenschaft, dass eine solche Curve keine Doppelpunktstangenten besitzt, bestätigt wird.

Ist in Fig. 3 eine einspitzige Epicycloide C_3^4 gegeben, so wissen wir aus (1), dass ihr Rückkehrpunkt O auf dem Grundkreise k liegt. Der Nachweis, dass O hier ein Doppelelement ist, wird im Zusammenhang mit unseren Beziehungen durch die Erwägung gegeben, dass jetzt die oben genannten $\delta\delta'$-Tangenten in die einzige Tangente δ coincidiren. Aus diesem Grunde kann auf der Curve auch nur eine Zusammenfalltangente d im Spitzenpunkte O vorkommen, welche sich mit der Symmetrieaxe m als Rückkehrtangente identificirt. Ebenso einfach erhalten wir bei Anwendung der vorhin angezeigten diesbezüglichen Construction den Tangentialpunkt D von d als den einen der in (2) bemerkten β_1-Scheitel, indem der andere in den Spitzenpunkt O hineinfällt.

7. *b)* Die Doppeltangente. Der Beweis des Satzes in (3) ist erst jetzt auf Grund der seither gefundenen Resultate möglich. Dies geschieht, indem wir zeigen, dass die Chordale Δ in jedem der Punkte BB' eine Curventangente und somit für die Epicycloide die Doppeltangente ist. Verfolgen wir beispielsweise in Fig. 1 die Sache für den Punkt B. Behält man im Auge, dass die nach (1) den B-Punkt erzeugende Grundkreistangente mit der nach (5) ihren φ-Punkt auf Δ hervorbringenden Tangente von K_τ eine gemeinschaftliche Aussentangente der

Kreise kK_τ ist, so folgt, dass ihr φ-Punkt nothwendig mit B vereinigt sein muss. Eine solche Identität findet überhaupt für jeden Curvenpunkt statt, der auf der Potenzlinie Δ liegt, demnach noch ein zweitesmal in B', was nur möglich ist, wenn die Δ-Gerade die Eigenschaft einer Doppeltangente hat.

8. *c)* Die Frage nach einer Scheiteltangente in einem β_1-Punkte nach (2) erledigt sich dahin, dass eine solche selbstverständlich mit der in ihm gezogenen Grundkreistangente zusammenfallen muss, wie aus der Eigenschaft eines β_1-Punktes hervorgeht. Man kann sich aber auch davon leicht überzeugen, wenn man beachtet, dass sich mit dem ∞ fernen Punkte der Potenzlinie Δ die φ-Elemente derjenigen Tangenten des Tangentialkreises K_τ identificiren, welche dem zur Construction gelangenden O-Strahle — d. i. jetzt die Symmetrieaxe m — nach dem Grundgesetze (1) normal sind. Nur bei einer C_3^4 in Fig. 3 fällt der eine der betreffenden φ-Punkte in die m-Axe selbst hinein, weswegen auch nach (6) diese die Rückkehrtangente war.

9. *d)* Die Inflexionen. Solche kommen ausschliesslich bei einer verkürzten Epicycloide vor, und zwar nur bedingungsweise, wie erst späterhin gezeigt werden kann. Die reellen Inflexionselemente $I_1 I_2$ in Fig. 5 bilden ein Paar, welches der Tangentialkreis K_τ charakteristisch dadurch anzeigt, dass für ihn die Chordale Δ in zwei Punkten $\varphi_1\varphi_2$ zur eigentlichen Secante wird. Ist in den Fig. 1 und 4 die Δ-Linie eine uneigentliche Secante, dann besitzt die betreffende Epicycloide imaginäre Inflexionen. Wenn jedoch in den Fig. 3 und 6 der Kreis K_τ von Δ berührt wird, dann sind die Inflexionselemente in einem Singularpunkte der Curve (in Fig. 3 ist es die Spitze) coincidirend.

Die Construction eines Inflexionspunktes I_1 gestaltet sich in Fig. 5 sehr einfach. Nach (5) hat man am Grundkreise k den Bildpunkt $\bar{I}_1$ vermittelst des Strahles $|Z\varphi_1$ aufzusuchen. Die in $\bar{I}_1$ gezogene θ-Tangente von k trifft den zu ihr rechtwinkligen O-Strahl im Inflexionspunkte I_1, indem zu erinnern ist, dass die θ-Tangente und die in φ_1 an den Kreis K_τ führende Tangente parallel sind. Die Verbandlinie $|\varphi_1 I_1$ ist dann offenbar die Inflexionstangente i_1 von I_1 auf der

Curve. Um die Richtigkeit von diesem Vorgange einzusehen, verfolgen wir am besten den Weg eines beliebigen φ-Punktes der Δ-Linie in der Nähe eines B-Punktes. Zu dem Zwecke denken wir uns den variablen φ-Punkt etwa ausserhalb der Strecke $\overline{BB'}$ in der Richtung gegen B vorschreiten. Gleichzeitig und im selben Sinne nähert sich der erzeugte Cycloidenpunkt X dem B-Punkte, bis endlich in diesem letzteren beide Punkte zur Deckung gelangen. Nunmehr schreiten φ und X noch immer im gleichen Sinne auf ihren Bahnen bis zu dem Momente fort, in welchem sich φ mit dem φ_1-Punkt vereinigt, wobei X in das I_1-Element übergegangen ist. Behält der X-Punkt wie bisher über I_1 hinaus denselben Bewegungssinn, so muss jetzt der variable φ-Punkt aus der φ_1-Lage wieder gegen B und darüber hinaus auf Δ eine rückläufige Richtung einschlagen, weil sich das Bogenstück $\widehat{\varphi_1\varphi_2}$ des Tangentialkreises K_τ über Δ erhebt. Die retrograde Bewegung des φ-Elementes zeigt deutlich die Eigenschaft einer »Wendung« im I_1-Punkte der Curve an, was sich nur noch ein zweitesmal im Inflexionspunkte I_2 wiederholen wird.

Weil sich in einem Inflexionspunkte I_1 drei Elemente verbinden, so besitzt die zugehörige Wendetangente i_1 auf der Epicycloide noch einen Tangentialpunkt T_1. Seine Ermittlung kann linear folgend geschehen. Wir ziehen in Fig. 5 den Strahl $|Z\varphi_2|$, welcher direct am Grundkreise k ausser den $\overline{I}_2$-Punkt noch das Bild $\overline{T}_1$ des fraglichen Punktes ausschneidet. Diese höchst einfache Construction findet analog wie in (6) ihre Begründung durch die Wechselseitigkeit der in der Figur bedingten Symmetrieverhältnisse.

10. *e)* Die Undulation. In meiner Abhandlung: »Die Undulationen ebener Curven C_6^4« habe ich in Art. (59)[1] nachgewiesen, dass eine Epicycloide C_4^4 mit isolirtem Doppelpunkt eine Undulationstangente besitzen kann, welche in ihrem Berührpunkte vier Curvenelemente zur Vereinigung bringt. Da in jener Abhandlung von anderen Gesichtspunkten ausgegangen ist, so muss der Undulationsfall mit dem Stand-

---

[1] II. Mittheilung: »Curven mit zwei imaginären Doppelpunkten«. Diese Sitzungsberichte, Bd. CVII, Abth. II. a, Jänner 1898.

punkte, welchen der gegenwärtige Aufsatz einnimmt, in Einklang gebracht werden.

Wir haben gesehen, dass die Spitzencurve den Übergang zwischen einer Schleifencurve und einer Curve mit isolirtem Doppelpunkt bildet, wobei in der letzteren ein Paar reelle Inflexionen vorkommen können, welche nach den Grundsätzen der citirten Abhandlung den beiden reellen Berührpunkten der Doppeltangente adjungirt sind. Dieses Eintreffen von Inflexionselementen ist nun aber in der jetzigen Betrachtung im Vergleiche der Strecke $\overline{O\Omega}$ zum Radius r des Grundkreises k geknüpft an die Bedingung:

$$r > \overline{O\Omega} > \frac{r}{2};$$

wenn jedoch: $\overline{O\Omega} < \frac{r}{2}$ wird, dann sind die Inflexionen der Epicycloide C_4^4 in Fig. 4 imaginär und ihre Doppeltangente Δ ist isolirt. Folgerichtig gibt der Übergangsfall: $\overline{O\Omega} = \frac{r}{2}$ zwischen dem Vorkommen reeller und imaginärer Inflexionen mit einer eigentlichen oder isolirten Doppeltangente der Curve C_4^4 in den Fig. 2 und 4 die Specialität der »Undulation« in Fig. 6, wobei auf der Curve die adjungirten J- und B-Elemente in Coincidenz gelangen.

Ist die Undulationscurve als Roulette darzustellen, so wird auf der Symmetrieaxe m von Ω aus $\frac{r}{4} = \overline{\Omega C} = \overline{OC}$ aufgetragen und aus C mit dem Radius $\frac{r}{2}$ der Basiskreis K_b beschrieben. Die m-Axe trifft den Grundkreis k in den Punkten $\beta_1 \beta_2$. Von dem Punkte β_2, welcher dem Centrum C näher liegt, tragen wir abermals $\frac{r}{4}$ bis zum Mittelpunkte W des mit K_b gleich grossen Rollkreises K_ρ auf. Der zu wälzende Punkt β_2 liegt auf dem Wälzungskreise K_w, der ebenfalls $\frac{r}{4}$ als Radius hat und mit K_ρ concentrisch ist.

11. Die vorstehende Cycloide hat als Fusspunktencurve in O ihren isolirten Doppelpunkt, wobei also nach oben:

$$\overline{O\Omega} = \overline{O\beta_2} = \frac{r}{2}$$

gemacht und der Grundkreis k mit dem Radius r beschrieben wurde. Die beiden Kreise kk' in (3) berühren sich jetzt gemeinschaftlich im β_2-Punkte, aus welchem Grunde nur die einzige gemeinsame Tangente, und zwar in β_2 folgt. Werden weiters noch die Kreise $k''K_\tau$ nach den Anleitungen in (3), respective (4) festgestellt, so berühren sich auch diese in $\beta_2 \equiv Z$, und man sieht ohne Schwierigkeit, dass die Grundkreistangente dieses Punktes, d. i. die Potenzlinie der Kreise $k'k''$, als Doppeltangente Δ der Epicycloide anzusehen ist.

Da nun die in (4) namhaft gemachte Position eintrifft, wo der Tangentialkreis K_τ von Δ berührt wird, gleichzeitig aber diese Berührung auch in demselben Punkte β_2 mit dem Grundkreise stattfindet, so muss hieraus folgerichtig geschlossen werden, dass $\beta_2 \equiv P$ ein Undulationspunkt und $\Delta \equiv p$ eine Undulationstangente der Epicycloide sind.

Vorstehende Ergebnisse berechtigen somit zu dem Satze: »Eine Undulation in einer Epicycloide C_4^4 ist bedingt durch die gemeinschaftliche Berührung der Kreistrias $kK_\tau k'$, wobei der Berührpunkt und dessen Tangente die Undulationselemente sind«.

Secanten- und Tangentialpunkte.

12. Eine Epicycloide unserer Untersuchungen hat als Curve vierter Ordnung mit jeder Geraden g der Ebene vier Schnittpunkte $X_1 \ldots X_4$, welche paarweise reell oder imaginär sein können oder Coincidenzen bilden, in Folge deren die verschiedenen Tangentengattungen entstehen, die wir in den vorangegangenen Entwicklungen betrachtet haben. Die Vollständigkeit des Problems unseres Aufsatzes verlangt noch eine Erörterung jener Aufgaben, welche sich auf die Ermittlung der Tangentialpunkte einer einfachen Curventangente beziehen. Wir bedürfen hiezu des in (2) bereits erwähnten Apparates einer quadratischen Transformirung unserer Epicycloiden auf ihren Grundkreis, deren Principien ich in [§. 35] bei Curven C_6^4 mit zwei imaginären Doppelpunkten entwickelt habe.

Während das Doppelpunktsdreieck einer Epicycloide aus ihrem reellen Doppelpunkt O und den imaginären Kreispunkten der ∞ fernen Geraden gebildet wird, sind die reellen Bestandtheile des Fundamentaldreiecks, in polarer Übertragung des Doppelpunktsdreiecks mit Bezug auf den Grundkreis, der Ω-Punkt und die Polare ω von O. Da O nach (1) das Centrum einer circularen Strahleninvolution ist, so wird diese durch den Vorgang der Polarisation auf ω zwei imaginäre Doppelelemente bedingen, welche im Vereine mit Ω das Fundamentaldreieck ausmachen.

Der Unendlichkeit des Secantensystems in der Cycloidencurve entspricht transformatorisch ein Kegelschnittsnetz, dessen Grundpunkte die Ecken des eben genannten Fundamentaldreiecks sind. Jedes Netzindividuum enthält ausserdem denjenigen Pol im Grundkreise k, welcher der Secante, die dem betreffenden Individuum quadratisch entspricht, zugeordnet ist.[1]

Unser Thema verlangt die Lösung der nachstehenden zwei Aufgaben.

13. »Es sind die Schnittpunkte einer Geraden g mit einer Epicycloide zu ermitteln.« Fig. 2.

Wir fixiren zunächst im Grundkreise k den Pol G von g. Man kann g als Axe von zwei perspectivischen Strahlenbüscheln ansehen, deren Centra im Doppelpunkte O und im Pole G sind, und von denen sich entsprechende Elemente in α-Punkten auf g treffen. Gleichzeitig wird auf der g-Linie in Bezug des Grundkreises k eine Involution durch den G-Pol invitirt, die dem Büschel G perspectivisch ist. Es ist demnach reciprok einem α-Punkte die Polare $|G\alpha_1|$ conjugirt, so dass in diesen beiden dualen Involutionsgebilden gG entsprechende Elementenpaare: $\alpha\alpha_1$; $|G\alpha|$ $|G\alpha_1|$ sind.

Gedenken wir der beiden circularen Strahlensysteme, deren Centra nach (2) die Punkte $O\Omega$ sind, und behalten wir einerseits das Ω-Büschel, dessen Elemente den α-Strahlen des O-Büschels parallel gerichtet sind, anderseits das G-Büschel der α_1-Strahlen im Auge. Beide Büschel sind projectivisch und erzeugen einen

---

[1] Vergl. die in (10), Fussnote, citirte Abhandlung, sowie auch deren I. Mittheilung in diesen Sitzungsberichten, Bd. CVI, Aprilheft 1897.

Kegelschnitt γ, welcher dem Netze in (12) angehört und das Bild der g-Linie ist.

Dieser Kegelschnitt γ besitzt auf dem Grundkreise k die Punkte $\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_4$, deren k-Tangenten nach (1) in der Cycloide die g-Secantenpunkte $X_1 \ldots X_4$ auf den ihnen zugehörigen normalen O-Strahlen resultiren.

Bemerkung. Im Systeme der g-Secanten ist bekanntlich die ∞ ferne Gerade deshalb ausgezeichnet, weil sie auf einer Erzeugnisscurve ihre Asymptotenelemente zur Anzeige bringt. Der dieser Geraden für unser Thema entsprechende Netzkegelschnitt zerfällt insoferne, als die ihn erzeugenden Büschel concentrisch im Mittelpunkte Ω werden. Da aber diese Büschel die Eigenschaft circularer Involutionen begreifen, so sind sie gleichzeitig auf der ∞ fernen Geraden perspectivisch, und folgerichtig bilden die imaginären Kreispunkte auf ihr die in der betreffenden Cycloide stattfindenden Asymptotenelemente. Dieses Resultat deckt sich vollkommen mit der in (2) angeführten Eigenschaft, wonach die imaginären Kreispunkte in allen Fällen einer Epicycloide mit Doppelpunkt als Spitzen angesehen werden, folglich als vier einfache Punktenelemente zu zählen kommen, weswegen diese Cycloiden stets im Endlichen verlaufen.

14. »Man suche auf einer Epicycloide das Tangentialpunktenpaar TT' einer einfachen Tangente x.« Fig. 3.

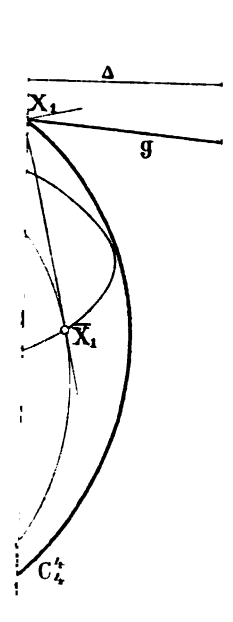
Wesentlich ist die Lösung der Aufgabe nicht von der vorigen verschieden, weil sie bekanntlich constructiv wieder auf einen Netzkegelschnitt hinauskommt, welcher aber jetzt den Grundkreis k im Bilde $\overline{X}$ des Berührpunktes X der x-Tangente einfach berührt. Eine lineare Lösung für eine C_6^4 mit zwei imaginären Doppelpunkten habe ich in [233] gezeigt. In dem Specialfalle einer Kreis-Fusspunktencurve wird die Durchführung der bezüglichen Construction sich entsprechend modificiren, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Der Berührpunkt X der x-Tangente ist a priori gegeben; sein Bild erfolgt nach (2). Die Tangente im Bildpunkte $\overline{X}$ des Grundkreises trifft die in (12) genannte Polare ω in einem Punkte λ, dessen conjugirtes Element λ_1 mittelst der circularen

Durchmesserinvolution Ω fixirt wird. Die Gerade $|\overline{X}\Omega|$ enthält am Grundkreise noch den Gegenpunkt $\overline{X}'$; ihren conjugirten Strahl in der Ω-Involution schneiden wir mittelst der Verbandlinie $|\overline{X}\lambda_1|$ in einem Punkte Y und bemerken uns gleichzeitig ihren Kreisschnitt L. Wir bestimmen jetzt den Schnitt:

$$(|\overline{X}'L|, |\Omega Y|) \equiv \sigma$$

und weiters den Schnitt σ' zwischen der Kreistangente in L und der Verbandgeraden $|Y\lambda|$. Schliesslich ergeben sich die Bilder $\overline{T}\overline{T}'$ der fraglichen Tangentialpunkte am Grundkreise k in der Secante $|\sigma\sigma'|$.


Δ
X_1
g
$\bar{X}_1$
C_4^4

Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen aus den Beobachtungen während der Jahre 1826 und 1832

von

J. v. Hepperger,

c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Jänner 1898.)

Die eigenartigen Veränderungen, welche dieser Komet erfahren hat, seine fast unter den Augen der Astronomen vor sich gegangene Theilung in zwei Componenten von wenig verschiedener Grösse, die bei ihrer nächsten Wiederkehr noch beobachtet werden konnten, seither jedoch der eifrigsten Nachforschung sich dauernd entzogen, veranlassten mich, zunächst die Bahn des Kometen vor seiner Theilung näher zu untersuchen, weil ich hiedurch einen Anhaltspunkt zu gewinnen hoffte, um die Bewegung der Theile genauer verfolgen und daraus einigen Aufschluss erhalten zu können über die Zeit des Zerfalls und die Grösse und das Wirken der denselben verursachenden Kräfte. Da der Komet seit dem Jahre 1772, in welchem er zum ersten Male entdeckt worden ist, häufig in die Erdnähe kam, ohne gesehen zu werden und vor der Theilung nur die Erscheinungen in den Jahren 1826 und 1832 durch die Zeit eines einzigen Umlaufs von einander getrennt sind, so lag es in der Natur der Sache, die Bahnbestimmung auf die Verbindung dieser Erscheinungen zu gründen und durch Ausdehnung der Störungsrechnung den Anschluss an die in früheren und späteren Epochen gemachten Beobachtungen zu suchen.

Die Durchführung der Rechnung mit dem aus den Beobachtungen während der Jahre 1826 und 1832 abgeleiteten

Elementensysteme ergab, dass die mittlere Bewegung des Kometen in der Zeit von 1805—1846 (weiter ist die Rechnung bisher noch nicht fortgesetzt worden) eine beträchtliche Acceleration erfahren hat, indem für die mittlere Anomalie M gefunden wurde

1805 December 2·0 ...... $M = 355° 16'2$
1846 Februar 11·0 ...... $M = 359\ 49·5$,

während nach Hubbard den Beobachtungen des Kometen aus diesen Jahren für dieselben Zeitpunkte die Werthe

355° 28'6
und
359° 59'7 [1]

entsprechen. Von 1833—1846 sind nur die Störungen durch Saturn und Jupiter, von 1826—1805 ausser diesen noch die Störungen durch Uranus, Mars, Erde und Venus berücksichtigt worden.

Wenn auch durch exacte Berechnung sämmtlicher Störungen die Fehler der mittleren Anomalien für obige Epochen noch merklich verkleinert werden sollten, so ist doch in Anbetracht der Grösse dieser Fehler ein genügender Anschluss an die Beobachtungen aus den Jahren 1805 und 1846 nicht zu erzielen, soferne als einzige Ursache der Bewegungsänderung des Kometen die Massenanziehung der Sonne und der grossen Planeten angenommen wird. Da nun, was immer der Grund hievon sein mag, alle Erscheinungen des Kometen ohne Heranziehung gewisser Hypothesen durch ein einheitliches Elementensystem in befriedigender Weise nicht dargestellt werden können, habe ich mich entschlossen, die auf der Verbindung der Erscheinungen von 1826 und 1832 beruhende Bahnbestimmung, welche als Grundlage für alle weiteren Untersuchungen auch für sich allein einiges Interesse beanspruchen darf, separat zu veröffentlichen.

---

[1] Mittel aus den nur um 0'7 differirenden Anomalien der beiden Componenten des Kometen.

Die mir bereitwilligst gestattete Benützung der Bibliothek der Wiener Universitäts-Sternwarte setzte mich in den Stand, die verlässlichsten Angaben über die Beobachtungen des Kometen und der Vergleichsterne zu sammeln und in verschiedene, den Gegenstand dieser Abhandlung berührende Arbeiten Einsicht zu nehmen; auch war ich in der angenehmen Lage, über so manche fallweise benöthigten Daten, deren Zusammenstellung mitunter viel Mühe verursachen musste, durch briefliche Mittheilung informirt zu werden. In aufrichtiger Anerkennung der mir hiedurch geleisteten Dienste fühle ich mich gedrängt, den Herren Director Weiss, Dr. Holetschek und Dr. Bidschof für das liebenswürdige Entgegenkommen meinen verbindlichsten Dank abzustatten.

Bei sämmtlichen in dieser Abhandlung vorkommenden Zeitangaben ist mittlere Pariser Zeit zu verstehen, soferne die Beziehung auf einen anderen Meridian oder eine andere Zeitart nicht ausdrücklich angemerkt ist.

Für die Parallaxe der Sonne ist nach Newcomb der Werth 8ʺ79 angenommen worden.

Die Grundlage der Ephemeridenrechnung bildete das folgende für 1832 November 25·0 osculirende Elementensystem, bezogen auf Ekliptik und Äquinox 1832·0:

$$\left.\begin{aligned} L &= 109^\circ\ 49'\ \ 0''81 \\ \Pi &= 109\ \ 58\ \ 59\cdot50 \\ M &= 359\ \ 50\ \ \ 1\cdot31 \\ \omega &= 221\ \ 45\ \ \ 6\cdot00 \\ \Omega &= 248\ \ 13\ \ 53\cdot50 \\ i &= 13\ \ 13\ \ 18\cdot47 \\ \varphi &= 48\ \ 42\ \ 24\cdot95 \\ \mu &= 533''78831 \\ U &= 2427\cdot9288 \text{ Tage} \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Die der Störungsrechnung entnommenen, durch die Wirkung der Planeten Mercur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn und Uranus bedingten Variationen der Elemente sind in folgender Tafel enthalten.

1832 12h M.Z.P.	ΔL	ΔΠ	ΔM	Δω	ΔΩ	Δi	Δφ	Δμ
Octob. 20	-1″780	-2″706	+0″926	-2″872	+0″166	-0″086	+1″516	-0″0181
22	-1·655	-2·408	+0·753	-2·555	+0·147	-0·058	+1·254	-0·0151
24	-1·528	-2·130	+0·602	-2·265	+0·135	-0·033	+1·006	-0·0122
26	-1·400	-1·870	+0·470	-1 999	+0·129	-0·011	+0·774	-0·0095
28	-1·271	-1·628	+0·357	-1·755	+0·127	+0·007	+0·559	-0·0070
30	-1·144	-1·406	+0·262	-1·535	+0·129	+0·022	+0·362	-0·0048
Nov. 1	-1·021	-1·204	+0·183	-1·336	+0·132	+0·034	+0·186	-0·0028
3	-0·902	-1·021	+0·119	-1·157	+0·136	+0 043	+0·032	-0·0010
5	-0·787	-0·857	+0·070	-0·996	+0·139	+0·049	-0·100	+0·0005
7	-0·676	-0·711	+0·035	-0·853	+0·142	+0·053	-0·208	+0·0018
Nov. 20	-0·117	-0·114	-0·003	-0 191	+0·077	+0·024	-0·250	+0·0025
22	-0·059	-0·060	+0·001	-0·107	+0·047	+0·014	-0·155	+0·0016
24	-0·011	-0·012	+0·001	-0.023	+0·011	+0·003	-0·034	+0·0004
26	+0·029	+0·032	-0·003	+0·064	-0 032	-0·009	+0·111	-0·0011
28	+0·059	+0·072	-0·013	+0·154	-0·082	-0·021	+0·279	-0·0028
30	+0·079	+0·109	-0·030	+0·246	-0·137	-0·033	+0·471	-0·0047
Dec. 21	-0·303	+0·675	-0·978	+1·751	-1·076	-0·131	+3·397	-0·0351
23	-0·393	+0·758	-1·151	+1·942	-1·184	-0·135	+3·715	-0·0384
25	-0·492	+0·843	-1·335	+2·138	-1·295	-0·138	+4·028	-0·0417
27	-0·605	+0·930	-1·535	+2·337	-1·407	-0·140	+4·337	-0·0449
29	-0·726	+1·017	-1·743	+2·537	-1·520	-0·141	+4·640	-0·0481
31	-0·859	+1·103	-1·962	+2·739	-1·636	-0·140	+4·937	-0·0512
33	-1·005	+1·186	-2·191	+2·941	-1·755	-0·138	+5·227	-0·0542
35	-1·163	+1·267	-2·430	+3·142	-1·875	-0·136	+5·512	-0·0572

Die aus den Leverrier'schen Tafeln berechneten, auf das mittlere Äquinox 1832·0 reducirten Sonnenörter sind:

1832 12ʰ M. Z. P.	L	B	log R
October 20	207° 36' 0"05	+0"95	9·997 7052
21	208 35 47·82	1·01	5869
22	209 35 37·71	1·05	4687
23	210 35 29·62	1·05	3505
24	211 35 23·45	1·03	2324
25	212 35 19·14	0·98	1146
26	213 35 16·63	0·92	9·996 9970
27	214 35 15·87	0·82	8799
28	215 35 16·82	0·72	7632
29	216 35 19·42	0·62	6472
30	217 35 23·62	0·50	5320
31	218 35 29·42	0·40	4176
November 1	219 35 36·79	0·30	3044
2	220 35 45·73	0·20	1924
3	221 35 56·24	0·12	0817
4	222 36 8·32	0·07	9·995 9724
5	223 36 21·98	0·04	8648
6	224 36 37·25	0·03	7589
7	225 36 54·17	0·06	9·995 6549
November 20	238 43 17·99	1·18	9·994 4609
21	239 43 59·59	1·13	3786
22	240 44 42·61	1·06	2973
23	241 45 26·94	0·97	2170
24	242 46 12·50	0·87	1380
25	243 46 59·21	0·76	0604
26	244 47 47·01	0·64	9·993 9841
27	245 48 35·84	0·53	9092
28	246 49 25·63	0·42	8359
29	247 50 16·33	0·31	9·993 7642
December 21	270 12 29·71	0·85	9·992 7752
22	271 13 39·17	0·74	7542
23	272 14 48·91	0·62	7349
24	273 15 58·85	0·50	7174
25	274 17 8·91	0·39	7016
26	275 18 19·02	0·28	6877
27	276 19 29·10	0·18	6757
28	277 20 39·08	0·11	6657
29	278 21 48·90	0·05	6578
30	279 22 58·51	0·02	6522
31	280 24 7·86	0·01	6489
32	281 25 16·91	0·03	6480
33	282 26 25·66	0·09	6497
34	283 27 34·10	0·16	6542
35	284 28 42·22	+0·28	9·992 6616

Aus diesen Sonnencoordinaten und dem Elementensysteme I wurden nun unter Berücksichtigung der angegebenen Störungen zunächst die mittleren Kometenörter berechnet und dann mit Hilfe der Constanten *f*, *G*, *g* des Berliner Jahrbuchs für 1832 die Reduction auf den scheinbaren (eigentlich wahren) Ort vorgenommen. Die Beibehaltung dieser Constanten schien mir besonders desshalb wünschenswerth, weil die Bestimmung der Königsberger und Dorpater Vergleichsterne bald nach Abschluss der Beobachtungen des Kometen erfolgte und die Reduction auf den mittleren Ort wohl auch nach den Angaben des Berliner Jahrbuchs ausgeführt worden sein dürfte.

Zur Berechnung der Sternzeit wurden die Nutationsbeträge den Oppolzer'schen Tafeln entnommen.

Ephemeride des Kometen.

1832 12h M. Z. P.		α ☌ app.	δ ☌ app.	log *r*	log Δ	Aberr. *Z*	Sternzeit
October	20	8h 46m 30s88	+22° 14' 32"9	0·02020	9·74404	4m 36s6	1h 57m 43s4
	21	53 23·22	21 16 41·4	.		35·9	2 1 39·9
	22	9 0 11·03	20 17 35·9	0·01352	9·74207	35·3	5 36·5
	23	6 54·02	19 17 24·9			35·0	9 33·0
	24	13 31·98	18 16 17·1	0·00696	9·74145	34·9	13 29·6
	25	20 4·69	17 14 21·4			35·1	17 26·1
	26	26 32·02	16 11 46·5	0·00056	9·74217	35·4	21 22·7
	27	32 53·82	15 8 41·4			36·0	25 19·3
	28	39 10·01	14 5 14·9	9·99435	9·74421	36·7	29 15·8
	29	45 20·52	13 1 35·5			37·7	33 12·4
	30	51 25·34	11 57 51·4	9·98834	9·74750	38·9	37 8·9
	31	57 24·45	10 54 10·7			40·0	41 5·5
November	1	10 3 17·86	9 50 40·8	9·98258	9·75196	41·7	45 2·0
	2	9 5·64	8 47 28·8			43·4	48 58·6
	3	14 47·84	7 44 41·5	9·97710	9·75751	45·3	52 55·2
	4	20 24·53	6 42 24·9			47·4	56 51·7
	5	25 55·82	5 40 44·5	9·97193	9·76404	49·6	3 0 48·3
	6	31 21·81	4 39 45·6			52·0	4 44·8
	7	10 36 42·61	+ 3 39 32·6	9·96710	9·77143	4 54·6	3 8 41·4

1832 12h M. Z. P.	α ☊ app.	δ ☊ app.	log r	log Δ	Aberr. Z	Sternzeit
November 20	11h 39m 22s83	−7°53′ 7″3	9·94626	9·83273	5m 39s3	3h 59m 56s6
21	43 45·25	−8 38 45·9			43·3	4 3 53·2
22	48 4·48	−9 23 18·7	9·94495	9·84313	47·5	7 49·7
23	52 20·62	−10 6 46·1			51·7	11 46·3
24	56 33·77	−10 49 9·0	9·94421	9·85355	55·9	15 42·8
25	12 0 44·05	−11 30 28·4			6 0·2	19 39·4
26	4 51·56	−12 10 45·1	9·94403	9·86395	4·5	23 35·9
27	8 56·38	−12 50 0·3			8·9	27 32·5
28	12 58·59	−13 28 15·0	9·94443	9·87425	13·3	31 29·1
29	12 16 58·28	−14 5 30·3			6 17·7	4 35 25·6
December 21	13 35 53·74	−24 15 1·1	9·98473	9·97622	7 52·1	6 2 9·9
22	39 6·43	−24 34 50·8			55·9	6 6·4
23	42 17·17	−24 54 7·0	9·99058	9·98318	59·7	10 3·0
24	45 25·95	−25 12 50·5			8 3·4	13 59·6
25	48 32·76	−25 31 2·0	9·99667	9·98982	7·1	17 56·1
26	51 37·60	−25 48 42·4			10·7	21 52·7
27	54 40·45	−26 5 52·3	0·00296	9·99613	14·2	25 49·2
28	57 41·32	−26 22 32·6			17·7	29 45·8
29	14 0 40·18	−26 38 43·8	0·00942	0·00213	21·1	33 42·3
30	3 37·04	−26 54 26·8			24·4	37 38·9
31	6 31·88	−27 9 42·3	0·01603	0·00781	27·7	41 35·4
32	9 24·69	−27 24 31·0			30·9	45 32·0
33	12 15·46	−27 38 53·5	0·02276	0·01317	34·0	49 28·5
34	15 4·19	−27 52 50·5			37·1	53 25·1
35	14 17 50·85	−28 6 22·7	0·02959	0·01823	8 40·0	6 57 21·7

Beobachtungen des Kometen im Jahre 1832.

Die erste nachweisbare Beobachtung des Kometen verdanken wir Sir J. Herschel, welcher denselben am 23. September nach kurzer Durchmusterung der durch Santini's Ephemeriden bezeichneten Himmelsregion in das Gesichtsfeld seines 20füssigen Teleskops zu bringen vermochte und als hellen, gegen die Mitte zu etwas verdichteten, rundlichen Nebel

von etwa $2^1/_2$—3 Minuten im Durchmesser wahrnahm. Während der Beobachtung bewegte sich der Komet über eine kleine Gruppe äusserst lichtschwacher (16. bis 17. Grössenclasse) Sterne, ohne eine merkliche Abnahme ihrer Helligkeit zu verursachen. Spricht dieser Umstand allein schon in überzeugender Weise für die ausserordentliche Durchsichtigkeit der Nebelmasse als Ganzes betrachtet, so wurde auch für die dichtesten Theile derselben die gleiche Eigenschaft durch eine Beobachtung Struve's nachgewiesen, welche ergab, dass ein Stern 9. Grösse bei fast genau centraler Bedeckung durch den Kometen (am 6. November) in ganz unverminderter Helligkeit sichtbar blieb. Nachdem der Komet noch am 24. September von Herschel beobachtet worden war, blieb er während einiger Wochen unbeachtet und wurde erst am 19. October durch Gambart und Valz wieder aufgefunden. Von da ab laufen die Beobachtungen, nur durch Mondschein zweimal unterbrochen, ziemlich regelmässig fort und enden erst am 3. Jänner 1833, an welchem Tage die theoretische Helligkeit des Kometen 0·8 betrug, wenn als Einheit die vom 23. September angenommen wird. Der Komet war während der ganzen Dauer seiner Sichtbarkeit immer rund und zeigte nur eine geringe Verdichtung, welche nicht genau in der Mitte gelegen, sondern etwas in der Richtung gegen die Sonne verschoben war. Fast allgemein wird die Schwierigkeit der Beobachtung wegen grosser Lichtschwäche hervorgehoben; nur am 8. November, also kurze Zeit nach dem Periheldurchgange, wurde der Komet beträchtlich hell gesehen.

Die zahlreichen von Bessel und Struve herrührenden Beobachtungen sind von so hervorragender Güte, dass von den übrigen nur jene in Betracht kommen können, welche über die Bahn des Kometen in früheren oder späteren Epochen Aufschluss geben.

Die wenigen der ersten Auffindung des Kometen unmittelbar folgenden Beobachtungen, welche Herschel in Slough ausgeführt hatte, sind, da das grosse Teleskop hiezu nicht verwendet werden konnte und ein Refractor von 5 Zoll Öffnung an dessen Stelle treten musste, wegen der grossen Lichtschwäche des Kometenbildes zu ungenau, um als Substrat für

die Bahnbestimmung zu dienen. Sie mögen daher, von den übrigen gesondert, hier Platz finden.

$$L = +0^h\,11^m\,45^s\!.0;\quad \varphi = 51°\,30'\,20''.$$

1832	Sternzeit Slough	α☿ — α*	δ☿ — δ*
September 23	3ʰ 53ᵐ 41ˢ5	—8ᵐ 4ˢ0	—53' 30"
	4 51 36·5	—7 51·0	—55 48
September 24	2 1 4·0	—2 28·5	—60 0
	2 30 46·0	—2 25·0	—61 0
	3 1 4·0	—2 14·5	—60 0

* = ϑ Aurigae.

Der Ort dieses Sternes ist nach dem »Fundam.-Catal.« von Auwers für 1832·0

$$\alpha = 5^h\,48^m\,16^s\!.05,$$
$$\delta = +37°\,11'\,29''\!.8$$

und die Reduction auf den scheinbaren Ort für

September 23 .... +1ˢ89, —7"9,
» 24 .... +1·92, —7·9.

Aus den Elementen (I) ergeben sich nach Einbeziehung der Störungen folgende Ephemeridenörter:

1832 M. Z. P.	α☿ app.	δ☿ app.	log r	log Δ	Aberr. Z
Sept. 23, 15ʰ	5ʰ 40ᵐ 0ˢ87	+36°18' 2"8	0·11331	9·87006	—6ᵐ 9ˢ7
16	40 16·10	17 47·0	0·11317	9·86978	—6 9·5
17	40 31·34	17 31·0	0·11303	9·86950	—6 9·2
Sept. 24, 13	5 45 38·44	36 11 40·3	0·11021	9·96399	—6 4·6
14	45 53·91	11 21·2	0·11007	9·96371	—6 4·3
15	46 9·38	11 2·0	0·10993	9·96344	—6 4·1

Befreit man obige Beobachtungen vom Einflusse der Refraction, so wird die Darstellung derselben:

1832	M. Z. P. —Aberration	α☄—α*	α☄	Par.	δ☄—δ*	δ☄	Par.	B—R Δα	B—R Δδ
September 23	15ʰ 47ᵐ 22ˢ1	—8ᵐ 3ˢ99	5ʰ 40ᵐ 13ˢ68	—0ˢ27	—53′31″0	+36°17′54″4	+3″5	+0ˢ79	+ 4″1
	16 45 7·9	—7 50·99	5 40 26·82	—0·13	—55 49·0	36 15 36·1	+3·2	—0·74	—118·8
September 24	13 51 12·4	—2 28·43	5 45 49·03	—0·51	—60 1·3	36 11 25·7	+5·1	—2·61	+ 1·7
	14 20 49·6	—2 24·95	5 45 52·55	—0·47	—61 1·3	36 10 25·3	+4 7	—6·73	— 49·2
	14 51 2·8	—2 14·47	5 46 3·09	—0·41	—60 1·2	36 11 24·9	+4·2	—3·98	+ 20 1

Eine wesentlich bessere Übereinstimmung war nicht zu erwarten. Die übrigen zur Bahnbestimmung verwendeten Beobachtungen des Kometen sind in folgender Tafel aufgeführt, welche auch die angenommenen Gewichte und die Abweichungen von der Ephemeride enthält.

Nr.	1832	M. Z. P. —Aberration	Ort	α☄	Par.	δ☄	Par.	Gewicht α	Gewicht δ	B—R Δα	B—R Δδ	Stern
1	Octob. 20	11ʰ 40ᵐ 39ˢ1	K.	8ʰ 46ᵐ 26ˢ19	—0ˢ66	+22°15′ 3″9	+11″8	0·5	0·5	+0ˢ21	— 3″2	1
2	20	13 6 15·2	D.	46 50·52	—0·52	22 11 44·0	+10·8	0·9	1·0	+0·04	0·0	2
3	23	14 58 45·3	D.	9 7 44·25	—0·33	19 9 45·8	+10·5	0·7	0 8	+0·21	+ 3·7	3
4	25	11 47 51·4	K.	9 20 1·95	—0·64	17 14 45·4	+12·3	0·7	0 5	—0·10	+ 4·9	4
5	25	15 21 2·5	D.	20 59·27	—0·29	17 5 26·1	+10 8	0 9	0·9	—0·12	— 2·4	4
6	26	15 1 54·6	D.	27 21·10	—0·34	16 3 37·4	+11·0	0·7	1·0	+0·21	— 1·4	5
7	27	15 44 44·7	K.	9 33 53·06	—0·33	14 58 39·5	+10·4	0·7	1·0	—0·17	+ 1·5	6
8	29	15 21 8·3	K.	46 12·28	—0·39	12 52 27·1	+10·9	1 0	0 5	+0·07	— 3·4	7
9	30	15 36 19·0	K.	52 20·04	—0·36	11 48 7·0	+11·0	0·9	1·0	+0·03	+ 0·9	8

10	Nov. 2	15h 42m 45s8	D.	10h 9m 59s24	−0s26	+ 8°37'31"3	+11"9	1·0	1·0	+0s04	− 1"1	9
11	2	16 5 18·0	K.	10 4·63	−0·30	8 36 37·6	+11·2	1·0	0 8	+0·02	+ 3·7	10
12	6	16 19 51·7	D.	32 20·20	−0·19	+ 4 28 40·7	+12·1	1·0	1·0	−0·07	+ 2·7	11
13	Nov. 20	15 28 33·2	K.	11 40 1·34	−0·34	− 8 0 0·1	+11·1	1·0	1·0	−0·04	− 1·0	12
14	21	16 13 36·2	K.	44 31·40	−0·26	− 8 46 54·0	+11·2	1·0	1·0	0·00	− 1·4	13
15	24	16 20 19·2	D.	57 19·12	−0·21	−10 56 57·1	+11·4	0·5	1·0	−0·32	− 3·8	14
16	25	15 23 13·1	K.	12 1 19·56	−0·34	−11 36 24·5	+10·7	1·0	0·7	+0·07	− 0·6	15
17	25	15 57 32·2	D.	1 25·42	−0·22	−11 37 24·4	+11·2	0·7	1·0	+0·14	− 1·8	16
18	26	15 49 51·6	D.	5 31·02	−0·23	−12 17 16·9	+11·1	1·0	0·5	−0·02	− 0·7	17
19	26	16 23 46·2	K.	5 36·85	−0·23	−12 18 17·7	+10·8	1·0	0·7	+0·01	− 5·8	18
20	26	16 24 25·8	D.	5 36·40	−0·17	−12 18 22·2	+11·2	0·4	0·5	−0·49	− 8·8	19
21	27	15 57 22·4	D.	9 36·90	−0·21	−12 56 34·8	+11·0	0·7	0·8	+0·20	− 1·1	20
22	Nov. 28	16 22 50·2	D.	12 13 42·88	−0·17	−13 35 22·8	+11·0	0·7	0·8	+0·18	− 4·4	21
23	Dec. 21	17 5 31·5	M.	13 36 34·16	−0·23	−24 19 39·2	+ 8·4	1·0	1·0	−0·85	−14·4	22
24	23	17 3 15·8	F.	42 57·80	−0·22	−24 58 21·0	+ 8·2	0·5	0·25	+0·49	− 6·5	—
25	23	17 23 26·0	M.	43 0·17	−0·19	−24 58 56·5	+ 8·4	1·0	1·0	+0·24	−25·9	23
26	24	17 22 19·7	M.	46 8·00	−0·19	−25 17 24·4	+ 8·3	1·0	1·0	−0·12	−18·5	24
27	25	16 58 39·1	M.	49 11·42	−0·23	−25 35 3·4	+ 8·1	1·0	1·0	−0·07	−10·8	25
28	25	17 14 33·2	F.	49 11·50	−0·19	−25 34 36·0	+ 8·2	0·0	0·0	−2·00	+28·0	—
29	26	12 33 56·1	C.	51 42·80	−0·55	−25 49 36·0	− 4·2	0·5	0·25	+0·28	−33·0	25, 26, 27
30	26	17 2 40·4	P.	52 16·70	−0·20	−25 52 20·7	+ 8·2	0·5	0·25	+0·30	+ 8·9	—
31	27	17 1 18·3	F.	13 55 17·70	−0·21	−26 9 50·0	+ 8·0	0·5	0·25	−0·97	−17·9	—
32	31	13 6 9·5	C.	14 6 39·02	−0·52	−27 11 2·0	− 3·5	0·5	0·25	−1·36	−41·8	28, 29, 32
33	32	13 54 9·2	C.	9 38·23	−0·48	−27 26 20·6	− 2·8	0·5	0·25	−0·55	−43·1	29, 31, 32
34	33	13 43 31·4	C.	12 28·28	−0·49	−27 39 50·7	− 2·9	0·5	0·25	+0·13	+ 0·9	29, 30, 31
35	34	14 18 59·7	C.	14 15 20·43	−0·45	−27 54 47·7	− 2·4	0·5	0·25	−0·38	−40·1	30, 31

Die Buchstaben in der Columne »Ort« bedeuten: C. = Capstadt, D. = Dorpat, F. = Florenz, K. = Königsberg, M. = Mailand, P. = Padua.

Örter der Vergleichsterne.

Nr.	Grösse	1832·0		Reduction auf den scheinbaren Ort			Autorität
		α	δ	Datum	Δα	Δδ	
1	7— 8	8h 46m 16s43	+22° 19' 44"8	October 20	+1s34	—9"8	13 KM., 6 DM.
2	8— 9	8 46 23·07	22 13 14 1	20	1·34	—9·8	2 DM., 1 Anschluss an *1
3	9—10	9 8 17·97	19 13 53·9	23	1·27	—9·5	2 Anschlüsse an *a
4	8— 9	9 20 24·48	17 4 35·1	25	1·24	—9·1	11 KM., 6 DM
5	8— 9	9 28 7·12	16 5 46·9	26	1·22	—9·0	5 DM.
6	8	9 33 55·65	14 52 55·1	27	1·21	—8·8	15 KM.
7	9	9 46 43·12	13 4 20·4	29	1·19	—8·5	13 KM.
8	9	9 52 6·31	11 34 20·9	30	1·18	—8·2	12 KM.
9	10	10 9 57·87	8 32 44·5	Nov. 2	1·16	—7·7	1 Anschluss an *b
10	8— 9	10 11 0·43	8 27 17·1	2	1·16	—7·7	13 KM.
11	9	10 32 18·66	+ 4 28 42·6	6	1·15	—7·0	1 Anschluss an *c, 2 an *d.
12	8	11 39 43·76	— 7 56 27·1	20	1·22	—5·0	14 KM.
13	9	11 42 47·20	— 9 2 31·3	21	1·24	—4·8	10 KM.
14	7	12 0 47·66	—10 54 47·0	24	1·25	—4·5	6 DM.
15	9	12 0 49·61	—10 18 4·0	25	1·28	—4·6	9 KM.
16	10	12 1 40·67	—11 33 52·6	25	1·28	—4·5	2 Anschlüsse an *e
17	11	12 5 27·12	—12 13 21·5	26	1·29	—4·4	3 Anschlüsse an *10

18	9	12ʰ	5ᵐ	47ˢ93	—12°	4'	44"7	Nov.	26	1"29	—4"5	11 KM.
19	8	12	6	39·60	—12	19	39·4		26	1·29	—4·4	5 DM.
20	10	12	9	32·88	—12	53	45·7		27	1·30	—4·3	1 Anschluss an *f
21	9	12	14	6·50	—13	39	56·8	Nov.	28	1·32	—4·2	1 Anschluss an *g
22	6·4	13	35	25·50	—24	39	7·5					Yarnall, 5755.
				25·54		.	9·0					Gould, 18675.
		13	35	25·52	—24	39	8·5	Decbr.	21	1·76	—2·8	
23	6·0	13	36	15·23	—25	16	9·6					Yarnall, 5762.
				15·33			10·6					Gould, 18698.
		13	36	15·28	—25	16	10·1		23	1·83	—2·9	
24	6·9	13	48	31·32	—25	10	28·6					Yarnall, 5867.
				31·45			30·1					Gould, 18967.
		13	48	31·38	—25	10	29·5		24	1·80	—2·7	
25	6·8	13	51	7·36	—25	26	32·2					Yarnall, 5883.
				7·44			33·0					Gould, 19022.
				7·43			28·8		25	1·83	—2·7	Henderson.
		13	51	7·41	—25	26	31·8		26	1 86	—2·8	
26	7·2	13	53	7·35	—26	1	58·9					Yarnall, 5900.
				7·52			57·5					Gould, 19050.
				7·24			59·1					Henderson.
		13	53	7·38	—26	1	58·5		26	1·85	—2·4	
27	3·3	13	56	49 48	—25	52	11·4	Decbr.	26	+1·83	—2·5	6 Katalogspositionen.
28	8·2	14	5	4·15	—26	58	18·3					Gould, 19294.
				4·47			18·9					Henderson.
		14	5	4·26	—26	58	18·5		31	1·98	—2·7	

Nr.	Grösse	1832·0 α			1832·0 δ			Reduction auf den scheinbaren Ort: Datum		Δα	Δδ	Autorität
29	7·5	14h	10m	26s86	—27°	16'	16"3					Yarnall, 6017.
				26·82			16·2	Decbr.	31	1s96	—2"4	Gould, 19383.
				26·91			16·1		32	1·99	—2·5	Henderson.
		14	10	26·86	—27	16	16·2		33	2·03	—2·7	
30	8·5	14	11	56·10	—27	58	37·3					Gould, 19426.
				56·16			37·0		33	2·03	—2·4	Henderson.
		14	11	56·13	—27	58	37·2		34	2·07	—2·5	
31	7·0	14	12	19·17	—27	32	7·4					Yarnall, 6028.
				19·13			6·1		32	1·99	—2·4	Gould, 19428.
				19·35			7·1		33	2·02	—2·5	Henderson.
		14	12	19·19	—27	32	6·8		34	2·06	—2·7	
32	5·0	14	13	26·12	—26	58	42·6		31	1·94	—2·3	10 Katalogspositionen.
								Decbr.	32	+1·98	—2·4	
a	8	9	5	4·43	+19	20	3·5					8 DM.
b	8—9	10	11	29·24	+ 8	31	52·0					5 DM.
c	9	10	32	16·16	+ 4	26	20·3					5 DM.
d	6	10	33	56·75	+ 4	27	35·1					3 DM.
e	8—9	12	6	5·58	—11	41	50·1					3 DM.
f	7	12	7	11·15	—12	52	53·6					4 DM.
g	7	12	14	14·44	—13	43	44·6					7 DM.

Die Sternpositionen, bei welchen als Autorität Henderson angeführt ist, sind den in »Memoirs of the Royal Ast. Society«, Vol. VIII, publicirten Meridiankreisbeobachtungen der von Henderson benützten Vergleichsterne entnommen.

Die Abkürzungen KM., DM. bedeuten Königsberger-, beziehungsweise Dorpater Meridianbeobachtungen. Die letzteren habe ich einer vollständigen Reduction unterzogen, um auch die mittleren Fehler der Sternpositionen zu erhalten und daraus mit Hilfe der von Struve angegebenen mittleren Fehler der beobachteten Differenzen ☌—* die mittleren Fehler der Kometenbeobachtungen bestimmen zu können, wie dies für die Königsberger Beobachtungen von Bessel selbst durchgeführt worden ist. Bei dieser Gelegenheit hatte sich herausgestellt, dass als scheinbare Declination des Sternes Nr. 17 nach den in den »Ast. Nachrichten« veröffentlichten Daten anzunehmen wäre $-12^\circ 13' 19\overset{''}{.}6$, während Baranowski aus demselben Beobachtungsmateriale zum Werthe $-12^\circ 13' 25\overset{''}{.}9$ gelangte. Da durch Annahme ersterer Position die Darstellung der Kometenbeobachtung in kaum zulässiger Weise verschlechtert würde und Baranowski weit besser in der Lage war, sich authentische Daten zu verschaffen, habe ich den von ihm gegebenen Werth beibehalten und der Beobachtung das Gewicht $\frac{1}{2}$ verliehen.

Die von Henderson in Kapstadt gemachten Beobachtungen der Ein- und Austritte von Komet und Stern habe ich trotz der grossen Unsicherheit, mit welcher sie behaftet sind, unter Berücksichtigung von Refraction und Eigenbewegung in der Weise reducirt, dass jeder Durchgang des Kometen durch den Ring mit den Durchgängen der zugehörigen Vergleichsterne in Verbindung gebracht und hieraus ein einziger Ort des Kometen abgeleitet wurde. Soviel Durchgänge des Kometen daher in einer Nacht beobachtet worden sind, ebensoviele Kometenörter wurden zu einem Mittel vereint und aus den Abweichungen der Theilbeobachtungen vom Mittel der mittlere Fehler der Beobachtung bestimmt. Diese (für Rectascension auf den Parallel reducirten) Fehler sind in der nächsten Tafel angeführt und ergeben als mittleren Fehler der fünf Henderson'schen

Beobachtungen $0^{s}38$ und $17''8$, während aus der Differenz der Abweichungen von der Ephemeride und der angenommenen Ephemeridencorrection für den III. Normalort die Werthe $0^{s}58$ und $18''5$ folgen. Die grosse Schwierigkeit der Beobachtung gegen Ende der Sichtbarkeit des Kometen erhellt auch daraus, dass die Theilbeobachtungen mitunter entschieden auf einen der wahren Bewegung des Kometen entgegengesetzten Gang hinweisen.

Auch die Mailänder Beobachtungen wurden neu reducirt; die Theilbeobachtungen sind jedoch nicht veröffentlicht, so dass die mittleren Fehler nur aus den Abweichungen von der Ephemeride bestimmt werden konnten. Dieselben sind für die vier Beobachtungen $0^{s}42$ und $6''5$. Verleiht man den Mailänder Beobachtungen das Gewicht 1, so sollten die in Kapstadt angestellten Beobachtungen das Gewicht 0·5 für Rectascension und 0·1 für Declination erhalten. Ich habe jedoch das Gewicht der Declination etwas erhöht, da die Gewichtsbemessung nach der Methode der kleinsten Quadrate bei so wenigen Beobachtungen zu unsicher wird, um so grosse Differenzen in der Annahme der Gewichte zu rechtfertigen.

Die von den Stationen Florenz und Padua veröffentlichten Beobachtungen gestatten keinen Einblick in die Ableitung der Kometenörter und mussten daher unverändert beibehalten werden.

Inghirami (Florenz) publicirte seine Beobachtungen zugleich mit den Abweichungen von den Ephemeriden, welche aus den Santini'schen und Damoiseau'schen Elementen gerechnet worden sind, woraus man schliessen könnte, dass die Kometenörter schon geocentrische Positionen sind. Da aber die Abweichungen von den Ephemeriden sehr gross sind, ist es wohl ebenso gut möglich, dass er nur beiläufig die Ephemeridencorrection geben wollte und die Berücksichtigung der Parallaxe für überflüssig hielt, wesshalb ich besonders auch in Anbetracht der Gepflogenheit der Astronomen, Beobachtungen, falls nicht das Gegentheil ausdrücklich angemerkt wird, auf den Beobachtungsort zu beziehen, die Reduction auf das Erdcentrum nicht unterlassen zu sollen glaubte. Eine Florenzer Beobachtung habe ich ausgeschlossen und den beiden übrigen, sowie der

Paduaner Beobachtung dasselbe Gewicht beigemessen, wie den Henderson'schen Beobachtungen.

Der Anzahl und zeitlichen Vertheilung der Beobachtungen entspricht am besten die Annahme von drei Normalörtern. Die Abgrenzung der zu je einem Normalorte gehörigen Beobachtungen ist oben durch Querstriche gekennzeichnet.

Die Bedeutung der in der nächsten Tafel enthaltenen Werthe ist folgende:

$M = \Delta\alpha \cos\delta;\quad M' = \Delta\delta.$

$p =$ Gewicht der beobachteten Rectascension.

$$v = M - \frac{[pM]}{[p]}.$$

$F =$ Mittlerer Fehler einer Rectascensionsbeobachtung, abgeleitet aus den Theilbeobachtungen und auf den Parallel reducirt.

$m =$ Zahl der zu einem Normalort vereinigten Beobachtungen der Rectascension.

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[pvv]}{m-1}}.$$

$$E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[p]}}.$$

$M', p', v' \ldots$ beziehen sich auf die Declination.

Bei der Gewichtsbemessung für die zu den ersten zwei Normalörtern gehörigen Beobachtungen sind neben den Werthen von F auch jene von v berücksichtigt worden, da constante Fehler, welche die Theilbeobachtungen beeinflussen, in den Grössen F, F' nicht zu Tage treten.

Die in den Columnen F, F' angeführten Werthe von ε, E sind aus den Grössen F, F' abgeleitet unter der Annahme, dass letztere Beobachtungsfehler darstellen, deren Summe $= 0$ ist.

Die aus den Werthen von F und v, beziehungsweise F' und v' abgeleiteten mittleren Fehler befinden sich in befriedigender Übereinstimmung.

Nr.	F	pM	v	p	F'	$p'M'$	v'	p'
				I. Normalort				
1	0'24	+0'100	+0'18	0·5	3'9	− 1'60	− 3'7	0·5
2	0·18	+0·036	+0·02	0·9	1·6	0·00	− 0·6	1 0
3	0·10	+0·140	+0·18	0·7	1·5	+ 2·96	+ 3·1	0·8
4	0·17	−0·063	−0·11	0·7	2·7	+ 2·45	+ 4·4	0·5
5	0·11	−0·108	−0·14	0·9	1·4	− 2·16	− 2·9	0·9
6	0.09	+0·140	+0·18	0·7	1·2	− 1·40	− 2·0	1·0
7	0·09	−0·119	−0·19	0·7	1·3	+ 1·50	+ 0·9	1·0
8	0·13	+0·070	+0·05	1·0	2·0	− 1·70	− 3·9	0·5
9	0·17	+0·027	+0·01	0·9	2·7	+ 0·90	+ 0·4	1·0
10	0·12	+0·040	+0.02	1·0	0·9	− 1·10	− 1·7	1·0
11	0·13	+0·020	0·00	1·0	1·9	+ 2·96	+ 3·1	0·8
12	0·08	−0·070	−0·09	1·0	1·2	+ 2·70	+ 2·2	1·0
$\frac{[pM]}{[p]}$		+0·021				+ 0.55		
ε	0.15		0·11		2·1		2·3	
E	0·04		0·03		0·6		0·7	
				II. Normalort				
13	0'07	−0'040	−0'04	1·0	1'0	− 1'00	+ 1'7	1·0
14	0·06	0·000	0·00	1·0	1·0	− 1·40	+ 1·3	1·0
15	0·08	−0·160	−0·32	0·5	0·9	− 3·80	− 1·1	1·0
16	0·11	+0·070	+0·07	1·0	1·8	− 0·42	+ 2·1	0·7
17	0·13	+0·098	+0·14	0·7	1·4	− 1·80	+ 0·9	1·0
18	0·09	−0·020	−0·02	1·0	1·4	− 0·35	+ 2·0	0·5
19	0·11	+0·010	+0·01	1·0	1·7	− 4·06	− 3·1	0·7
20	0·11	−0·192	−0·48	0·4	1·3	− 4·40	− 6·1	0·5
21	0·12	+0·140	+0·20	0·7	1·4	− 0·88	+ 1·6	0·8
22	0·16	+0·126	+0·18	0·7	2·1	− 3·52	− 1·7	0·8
$\frac{[pM]}{[p]}$		+0·004				− 2·70		
ε	0·10		0·15		2·1		2·1	
E	0·03		0·05		0·8		0·8	

Nr.	F	pM	v	p	F'	p'M'	v'	p'
				III. Normalort				
23	—	—0ˢ770	—0ˢ57	1·0	—	—14ˢ40	+ 4ˢ4	1·0
24	—	+0·220	+0·64	0·5	—	— 1·62	+12·3	0·25
25	—	+0·220	+0·42	1·0	—	—25·90	— 7·1	1·0
26	—	—0·110	+0·09	1·0	—	—18·50	+ 0·3	1·0
27	—	—0·060	+0·14	1·0	—	—10·80	+ 8·0	1·0
29	0ˢ16	+0·125	+0·45	0·5	25ˢ0	— 8·25	—14·2	0·25
30	—	+0·135	+0·47	0·5	—	+ 2·22	+27·7	0·25
31	—	—0·435	—0·67	0·5	—	— 4·47	+ 0·9	0·25
32	0·51	—0·605	- 1·01	0·5	8·0	—10·45	—23·0	0·25
33	0·25	—0·245	—0·27	0·5	9·0	—10·77	—24·3	0·25
34	0·24	+0·060	+0·32	0·5	13·0	+ 0·22	+19·7	0·25
35	0·42	—0·170	—0·14	0·5	18·0	—10·02	—21·3	0·25
$\frac{[pM]}{[p]}$		—0·204				—18·79		
ε			0·40				9·1	
E			0·14				3·7	

Die Summe der Gewichte ist für den ersten Normalort 10, 10; für den zweiten 8, 8 und für den dritten 8, 6.

Die zu dem mit Berücksichtigung der Gewichte abgeleiteten Mittel der Beobachtungszeiten gehörigen Abweichungen sind:

1832	Δα cos δ	1832	Δδ
October 28·64	+0ˢ021	October 28·35	+ 0ˢ55
November 25·22	+0·004	November 25·13	— 2·70
December 26·79	—0·204	December 25·85	—18·79

Es erübrigt noch, die Abweichungen für beide Coordinaten auf denselben Zeitpunkt zu beziehen, wofür die Momente October 28·5, November 25·0 und December 26·0 gewählt

worden sind. Da diese Zeiten von den oben angegebenen nur sehr wenig verschieden sind und die zu je einem Normalort vereinigten Beobachtungen zeitlich nicht weit von einander abstehen, so genügt es, die Reduction in der Weise auszuführen, dass man der Ephemeriden-Correction $\Delta\alpha \cos\delta$, beziehungsweise $\Delta\delta$ die Form $a+bt$ gibt. Die Constanten a und b werden für jeden Normalort aus der Bedingungsgleichung

$$\Sigma p(M-a-bt)^2 = \text{Minimum}$$

erhalten. Nimmt man die zu den Normalorten gehörigen Zeiten als Ausgangspunkte für die Zählung der t, so stellt a die gesuchte Ephemeriden-Correction dar. Hiefür ergab sich:

1832	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
October 28·5..........	+0ˢ022	+0ˢ34	+ 0"57
November 25·0..........	0·000	0·00	— 2·65
December 26·0..........	—0·187	—3·11	—18·95

Durch Anbringung dieser Correctionen an die auf das mittlere Äquinoctium 1832·0 bezogenen Ephemeridenörter werden die Positionen des Kometen folgende:

1832	$\alpha_{1832\cdot0}$ ☿	$\delta_{1832\cdot0}$ ☿
October 28·5.......	144° 47' 6"59	+14° 5' 26"01
November 25·0......	179 39 21·38	—11 9 47·58
December 26·0.......	207 30 41·80	—25 40 4·83

Störungsrechnung.

Die Coordinaten der störenden Körper, und zwar heliocentrische Länge, Breite und Radiusvector sind bis zum Jahre 1830, in welchem das »Berliner Jahrbuch« mit der Veröffentlichung ausgedehnter Planeten-Ephemeriden den Anfang machte,

ausnahmslos den entsprechenden Tafelwerken entnommen und auf das Äquinox 1830·0, das der gesammten Störungsrechnung zu Grunde liegt, bezogen worden. Die Coordinaten Jupiters, gerechnet von Herrn Coniel, lagen bereits vor. Die Örter des Uranus habe ich aus Newcomb's Tafeln in Intervallen von 160 Tagen, die der übrigen Planeten aus Leverrier's Tafeln berechnet. Für Mercur wurde ein Intervall von 5 Tagen eingehalten und auf die Störungstafeln keine Rücksicht genommen. Die Örter der Venus sind von 10 zu 10 Tagen berechnet worden unter Einbeziehung aller grösseren Störungen durch Erde, Mars und Jupiter, so dass die Fehler 2″, respective 2 Einheiten der fünften Decimalstelle kaum übersteigen dürften. Der Fehler der Erdörter ist noch geringer, da von den planetarischen Störungen nur die kleinsten Glieder vernachlässigt worden sind. Die Coordinaten des Mars wurden bis zum Anfang des Jahres 1832 in Intervallen von 20 Tagen mit Vernachlässigung der Störungen abgeleitet; von 1832 Februar 10 bis 1833 Jänner 15, während welcher Zeit der Komet diesem Planeten sehr nahe kam, wurde das Intervall auf 10 Tage gekürzt und allen nennenswerthen Störungen Rechnung getragen.

Die Örter des Saturn wurden bis 1830 Februar 20 in Intervallen von 80 Tagen berechnet und alle Störungsglieder einbezogen, deren Coëfficienten *S, C* Indices besitzen, welche kleiner sind als 6. Es erscheinen sonach die von mir berechneten Planeten-Ephemeriden, welche, die Mercur-Ephemeride ausgenommen, bis zum Jahre 1805 zurückreichen, mit einer für Zwecke der Störungsrechnung vollkommen ausreichenden Genauigkeit bestimmt.

Die Störungen wurden nach der Methode der Variation der Constanten berechnet. Die erste Rechnung, welche sich noch auf das Elementensystem Hubbard—Baranowski gründete und nur die Planeten Erde, Jupiter und Saturn umfasste, hatte vornehmlich den Zweck, die hauptsächlichsten Störungen zu bestimmen, um mit Hilfe derselben die Erscheinungen des Kometen in den Jahren 1826 und 1832 aufeinander beziehen und daraus verbesserte Elemente ableiten zu können. Störungen und Elemente, bezogen auf das Äquinox 1830·0, ergaben sich wie folgt:

Störungen von 1832 November 25·0 bis 1826 April 2·0				Elemente 1832 November 25·0			
ΔL ...	+2°	20′	53″	L...	109°	47′	35″
$\Delta\Pi$ ...	—0	5	22	Π ..	109	57	34
$\Delta\Omega$ ...	+3	18	19	Ω...	248	12	32
Δi ...	+0	20	38	i ...	13	13	21
$\Delta\varphi$ ...	—0	24	33	φ...	48	42	25
$\Delta\mu$ ...	—		5″80	μ...			533″75668.

Mit diesem Elementensysteme wurden nun die Störungen durch alle grossen Planeten mit Ausnahme von Mercur und Neptun bestimmt und hierauf die beiden Erscheinungen des Kometen neuerdings verknüpft. Das Resultat dieser Arbeit war:

ΔL ...	+2°	22′	1″7	L...	109°	47′	22″3
$\Delta\Pi$ ...	—0	5	25·4	Π ..	109	57	21·1
$\Delta\Omega$ ...	+3	18	45·4	Ω...	248	12	13·3
Δi ...	+0	20	41·5	i ...	13	13	19·7
$\Delta\varphi$ ...	—0	24	35·0	φ...	48	42	25·1
$\Delta\mu$ ...	—		5·8388	μ...			533·78624.

Diese Elemente wurden zur Neuberechnung der Störungen durch Jupiter und Saturn für den Zeitraum 1832 Februar 10 bis 1826 Februar 21 benützt. Da dieselben von obigen nur sehr wenig abweichen, und zwar am meisten (um 4″0) für die Änderung der Knotenlänge durch Jupiter, beziehungsweise der mittleren Länge (um 0″3) durch Saturn, wurde eine neuerliche Bestimmung der Störungen durch die übrigen Planeten unterlassen. Zu Beginn des Jahres 1832 sind die aus obigen Elementensystemen gerechneten Differenzialquotienten der Störungen einander noch so nahe gleich, dass von Februar an die Wiederholung der Rechnung auch für Jupiter unterbleiben konnte. Schliesslich wurden noch die Störungen durch Mercur ermittelt. Bei der Kleinheit der durch Uranus verursachten Störungen konnte die Wirkung Neptuns unbedenklich vernachlässigt werden.

Um einen Überblick zu geben über die Fehler der Elemente, aus welchen die Störungen berechnet worden sind, werde ich

die dem Elementensysteme I unter Einbeziehung aller auf die später angeführten Newcomb'schen Massenwerthe reducirten Störungen[1] entsprechenden Elemente in Intervallen von 80 Tagen hier folgen lassen, zugleich mit der Grösse *D*, durch deren algebraische Addition die der Störungsrechnung zu Grunde gelegten Elemente erhalten werden.

Die Differenzen *D* sind für die Zeit 1826 März 13 bis 1832 Februar 10 nicht bedeutend und, da die mittlere Anomalie nahe richtig angenommen worden ist, ausnahmslos Grössen von derselben Ordnung, wie die Fehler, mit welchen die aus den Beobachtungen der beiden Erscheinungen des Kometen gerechneten wahrscheinlichsten Elemente noch behaftet sein können. Sie rühren daher, dass die Ermittelung der Störungen durch Mercur und der Übergang auf die Newcomb'schen Massenwerthe erst nach Abschluss der übrigen Störungsrechnung stattfanden und auch in den Sternpositionen und in der Anordnung der Normalörter für 1826 nachträglich kleine Änderungen eintraten.

Die zwischen 1830 Juli 30 und October 18 stattfindende Unterbrechung des regelmässigen Verlaufes der Werthe von *D* hat darin ihren Grund, dass die Störungsrechnung nach rückwärts geführt wurde und die durch die letzte Rechnung erhaltenen Mehrbeträge der Störungen während der Jupiternähe des Kometen erst von October 18 an berücksichtigt worden sind. Während von 1826 Februar 21 bis 1832 Februar 10 die vom Orte des Kometen und des Jupiter abhängigen Theile der Differenzialquotienten der Störungen durch Rechnung mit 6 Decimalstellen bestimmt wurden, ist die frühere Störungsrechnung, aus welcher die Störungen von letzterem Datum an bis 1833 Jänner 15 durchwegs beibehalten wurden, mit 5 Stellen geführt. Die Fehler der angenommenen Elemente sind, wenn M und ω an Stelle von L und Π gesetzt wird, nur für Ω ziemlich gross; ihr Einfluss auf die Störungsbeträge ist jedoch, so lange dieselben überhaupt klein sind, wegen der geringen Neigung der Kometenbahn ganz unerheblich.

[1] Die Störungen durch Mercur wurden mit Ausnahme des durch das Doppelintegral dargestellten Theiles der Variation der mittleren Länge bei dieser Rechnung vernachlässigt.

Äquinox 1830·0.

0h M. Z. P.	L	D	Π	D	☊	D	φ	D	i	D	μ	D
		+	109°	+			48°		13°	+		
1826 März 13	109° 3' 56"5	0"9	51' 53"9	2"1	251° 31' 5"1	— 1"7	17' 46"2	+0"8	34' 1"6	0·4	527"975	+3
Juni 1	120 47 47·1	1·2	52·4	1·9	30 58·5	— 1·7	54·2	1·0	1·6	0·4	527·900	+1
Aug. 20	132 31 38·0	1·4	30·8	2·2	49·4	— 1·7	47·6	1·0	4·1	0·3	528·023	0
Nov. 8	144 15 44 9	1·7	3·3	2·3	43·1	— 1·6	44·0	0·9	8·0	0·3	152	+3
1827 Jänner 27	156 0 8·7	1·9	50 49·8	2·2	41·6	— 1·7	41·2	0·9	10·0	0·4	227	0
April 17	167 44 55·8	2·1	38·6	2·0	41·6	— 1·6	33·1	1·0	10·4	0·4	306	0
Juli 6	179 29 54·4	1·7	20·8	2·0	42·4	— 1·6	28·8	1·1	12·3	0·3	392	0
Sept. 24	191 14 59·0	1·8	7·4	2·2	42·7	— 1·7	24·7	1·0	12·7	0·3	453	—1
Dec. 13	203 0 18·8	2·0	49 52 0	2·3	43·2	— 1·6	20·2	0·8	13·1	0·3	514	—1
1828 März 2	214 45 43·1	2·3	35·1	2·1	44·8	— 1·6	19·6	0·9	14·2	0·3	569	0
Mai 21	226 31 20·0	2·2	19·8	2·1	43·2	— 1·6	15·0	1·0	13·3	0·4	612	0
Aug. 9	238 17 20·3	2 1	48 55·8	2·2	46·7	— 1·6	16·4	1·1	15·0	0·3	670	0
Oct. 28	250 3 21 2	2·1	29·3	2·3	53·9	— 1·8	30·9	0·9	18·2	0·3	734	0
1829 Jänner 16	261 49 29·2	2·4	5·0	2·2	54·6	— 1·8	17 44·2	0·9	18·5	0·3	784	0

	April	6	273°36'	2"8	2"7	47'	35"5	2"2		30'58"5	— 1"6	18'	5"1	1"0		19"9	0"3	840	0
	Juni	25	285 22	49·3	2·6		5·2	2·3		31 0·8	— 1·4	18	40·3	1·2		20·7	0·3	904	0
	Sept.	13	297 9	59·5	2·1	46	33·5	2·4		30 54·1	— 1·8	19	26·4	1·0		18·7	0·3	969	0
	Dec.	2	308 57	38·3	2·3		3·2	2·3		30 39·0	— 1·8	20	38·1	0·7		14·7	0·3	529"053	—1
1830	Febr.	20	320 45	34·7	2·6	45	41·0	2·2		29 44·0	— 2·0	22	13·7	0·8	34'	1·3	0·2	153	0
	Mai	11	332 34	20·6	2·6		22·3	2·3		27 39·1	— 1·9	24	14·6	0·8	33	33·6	0·3	257	0
	Juli	30	344 24	10·9	2·3		19·7	2·4		23 29·8	— 1·5	27	9·7	0·8	32	43·6	0·4	399	—1
	Oct.	18	356 14	54·3	1·7	45	49·9	1·9	251°	14 40·0	— 4·9	31	7·1	+0·3	31	8·4	0·0	599	0
1831	Jänner	6	8 6	28·9	1·5	47	1·8	1·7	250	56 53·6	— 3·7	36	4·4	—0·1	28	19·6	0·1	867	—2
	März	27	19 57	31·6	1·6	49	8·6	1·7	250	24 57·1	— 1·2	41	25·4	—0·2	23	58·6	0·4	530·254	—2
	Juni	15	31 45	23·4	1·7	51	36·3	1·9	249	40 32·0	+ 1·2	45	7·3	—0·2	18	57·5	0·8	530·783	—2
	Sept.	3	43 30	3·8	1·7	53	26·2	2·1	248	59 21·3	+ 2·8	45	59·6	0·0	15	17·7	1·0	531·395	—2
	Nov.	22	55 14	31·6	1·8	54	41·3	2·1		33 7·6	+ 3·5	45	16·0	0·0	13	37·7	0·8	532·038	—2
1832	Febr.	10	67 0	49·8	1·9	55	34·4	2·0		19 53·1	+ 3·8	44	11·1	0·0	13	9·2	1·0	532·623	—2
	April	30	78 49	27·2	22"	56	12·4	21"		14 20·7	+21"	43	20·4	—2"	13	8·9	3"	533·118	—0"01
	Juli	19	90 39	53·2	19	56	47·3	20		12 32·2	20	42	48·3	—3	13	14·5	3	498	0
	Oct.	7	102 31	22·3	18	57	14·5	16		12 9·6	22	42	28·3	—1	13	18·4	2	748	—0·01
	Dec.	26	114 23	7·4	14	57	20·0	15	248	12 7·8	+23	42	28·7	+1	13	18·6	2	533·750	—0·04

Die folgenden Tafeln enthalten die Differenzialquotienten der Störungen; dieselben sind für alle Planeten mit Ausnahme Jupiters, für welchen eine solche Genauigkeit grossentheils nicht erzielt werden konnte, in Einheiten der vierten, respective fünften Decimalstelle ausgedrückt, damit allfällige Correctionen mit grösserer Sicherheit angebracht werden können.

Mercur.

$$\frac{1}{m} = 7636440.$$

0ʰ M. Z. P.	$5^2 \frac{d\mu}{dt}$	$5 \frac{dL}{dt}$	$5 \frac{di}{dt}$	$5 \frac{d\Omega}{dt}$	$5 \frac{d\Pi}{dt}$	$5 \frac{d\varphi}{dt}$
	0'00	0'0	0'0	0'0	0'0	0'0
1826 Februar 1	+ 069	− 153	+ 007	− 010	− 092	− 161
	+ 038	− 156	− 001	+ 001	− 133	− 101
11	+ 008	− 157	− 008	006	− 164	− 041
	− 023	− 158	− 015	+ 005	− 187	+ 024
21	− 060	− 155	− 021	− 003	− 205	099
	− 106	− 150	− 027	− 017	− 215	194
März 3	− 166	− 136	− 033	− 038	− 210	317
	− 242	− 102	− 036	− 064	− 172	475
13	− 328	− 028	− 034	− 085	− 072	650
	− 387	+ 103	− 023	− 075	+ 111	768
23	− 347	274	− 002	− 010	340	682
	− 183	399	+ 016	+ 088	482	+ 345
April 2	+ 007	413	021	153	452	− 043
	131	344	016	162	318	− 288
12	184	251	010	142	170	− 388
	201	168	005	111	+ 045	− 414
22	200	103	001	079	− 049	− 403
	193	051	000	046	− 121	− 378
Mai 2	182	+ 010	000	+ 014	− 177	− 348
	171	− 027	001	− 018	− 224	− 314
12	157	− 065	003	− 047	− 266	− 277
	142	− 103	007	− 088	− 302	− 234
22	121	− 147	013	− 127	− 333	− 181
	090	− 199	020	− 170	− 349	− 106
Juni 1	+ 041	− 256	028	− 211	− 333	+ 001
	− 035	− 309	036	− 240	− 250	153

0^h M. Z. P.		$5^2 \frac{d\mu}{dt}$	$5 \frac{dL}{dt}$	$5 \frac{di}{dt}$	$5 \frac{d\Omega}{dt}$	$5 \frac{d\Pi}{dt}$	$5 \frac{d\varphi}{dt}$
		0^r00	0^r0	0^r0	0^r0	0^r0	0^r0
1826 Juni	11	− 145	− 325	037	− 224	− 048	345
		− 264	− 245	+ 023	− 124	+ 293	515
	21	− 321	− 044	− 011	+ 057	645	530
		− 263	+ 190	− 047	218	780	347
Juli	1	− 142	331	− 064	275	658	+ 098
		− 032	364	− 062	248	432	− 086
	11	+ 040	339	− 051	190	222	− 186
		081	295	− 037	131	+ 061	− 228
	21	104	246	− 024	080	− 057	− 238
		116	199	− 012	037	− 148	− 231
	31	121	154	000	+ 001	− 219	− 216
		123	109	+ 012	− 032	− 282	− 194
August	10	124	+ 059	024	− 064	− 341	− 167
		121	000	038	− 096	− 398	− 132
	20	114	− 073	055	− 129	− 450	− 086
		098	− 166	072	− 162	− 489	− 020
	30	067	− 288	089	− 190	− 490	+ 073
		+ 008	− 430	098	− 198	− 400	196
Sept.	9	− 084	− 543	081	− 156	− 147	326
		− 185	− 518	+ 024	− 044	+ 278	388
	19	− 234	− 288	− 058	+ 101	683	300
		− 195	+ 041	− 118	195	822	+ 099
	29	− 118	255	− 127	201	695	− 062
		− 045	358	− 110	165	480	− 159
Octob.	9	+ 006	382	− 083	118	279	− 198
		039	368	− 057	077	+ 119	− 205
	19	061	338	− 033	043	− 006	− 195
		074	302	− 012	+ 015	− 105	− 176
	29	084	263	+ 007	− 008	− 189	− 152
		091	219	026	− 029	− 265	− 124
Nov.	8	096	167	046	− 048	− 337	− 090
		099	099	068	− 067	− 410	− 047
	18	097	+ 007	092	− 086	− 479	+ 010
		088	− 124	117	− 103	− 533	088
	28	063	− 304	137	− 113	− 539	190
		+ 110	− 528	136	− 105	− 431	302
Decbr.	8	− 070	− 717	+ 089	− 065	− 129	375
		− 153	− 707	− 012	+ 008	+ 333	322

0^h M. Z. P.			$5^2 \frac{d\mu}{dt}$	$5 \frac{dL}{dt}$	$5 \frac{di}{dt}$	$5 \frac{d\Omega}{dt}$	$5 \frac{d\Pi}{dt}$	$5 \frac{d\varphi}{dt}$
			0″00	0″0	0″0	0″0	0″0	0″0
1826	Decbr.	18	− 183	− 429	− 119	076	701	+ 134
			− 149	− 060	− 170	100	780	− 069
		28	− 091	+ 210	− 164	090	645	− 192
			− 039	349	− 132	066	450	− 237
1827	Jänner	7	− 002	403	− 095	044	270	− 238
			+ 024	413	− 061	026	125	− 218
		17	042	400	− 032	012	+ 008	− 190
			055	377	− 005	+ 002	− 088	− 159
		27	064	345	+ 019	− 006	− 173	− 124
			073	306	044	− 012	− 252	− 085
	Februar	6	079	254	069	− 016	− 331	− 038
			084	180	097	− 019	− 410	+ 019
		16	085	+ 070	127	− 020	− 487	096
			078	− 098	155	− 020	− 545	193
		26	055	− 341	171	− 016	− 540	307
			+ 006	− 644	150	− 009	− 393	404
	März	8	− 069	− 879	+ 064	− 002	− 039	402
			− 134	− 834	− 072	000	+ 418	+ 236
		18	− 148	− 491	− 178	− 007	703	− 016
			− 116	− 089	− 206	− 014	713	− 203
		28	− 071	+ 193	− 181	− 018	567	− 284
			− 032	347	− 137	− 018	389	− 291
	April	7	− 004	420	− 095	− 015	235	− 269
			+ 016	445	− 057	− 011	107	− 233
		17	031	446	− 024	− 005	+ 003	− 192
			042	433	+ 005	+ 001	− 087	− 150
		27	052	410	034	009	− 169	− 105
			061	376	062	019	− 248	− 054
	Mai	7	068	325	092	030	− 328	+ 007
			074	244	125	044	− 411	082
		17	076	+ 112	159	060	− 488	178
			070	− 098	187	076	− 538	297
		27	+ 047	− 412	192	083	− 506	419
			− 002	− 785	140	064	− 307	483
	Juni	6	− 070	− 1024	+ 013	+ 006	+ 087	386
			− 118	− 902	− 138	− 070	495	+ 122

0^h M. Z. P.	$5^2 \frac{d\mu}{dt}$	$5 \frac{dL}{dt}$	$5 \frac{di}{dt}$	$5 \frac{d\Omega}{dt}$	$5 \frac{d\Pi}{dt}$	$5 \frac{d\varphi}{dt}$
	0"00	0"0	0"0	0"0	0"0	0"0
1827 Juni 16	− 120	− 495	− 223	− 119	677	− 151
	− 091	− 083	− 224	− 125	628	− 305
26	− 056	+ 197	− 184	− 107	480	− 348
	− 027	+ 355	− 134	− 081	+ 325	− 331
${}^{I}f$(1827 Juni 23·5)	−0"00641	−0"4017	−0"0010	−0"0016	+0"0694	+0"1629
${}^{II}f$(1827 Juni 26·0)	+2"04434					

${}^{I}f$ ist das Anfangsglied der ersten, ${}^{II}f$ das der zweiten summirten Reihe; obige Werthe entsprechen den für 1827 Juni 25·65 geltenden Störungsbeträgen.

Die Störungen in der Zeit zwischen 1827 Juni 25·65 und 1831 November 15·00 wurden nach den in meiner Abhandlung »Integration der Gleichungen für die Störungen der Elemente periodischer Kometen von geringer Neigung...« (diese Sitzungsberichte, Bd. 99, Abth. II a. Jänner 1890, Wien) gegebenen Näherungsformeln berechnet. In der Nähe der Anschlussstellen wurden die Störungen sowohl durch directe Integration, als auch durch mechanische Quadratur ermittelt, wobei sich eine ganz befriedigende Übereinstimmung der Resultate ergab.

Die folgende Tafel gibt für die angegebenen Epochen die Störungen der Elemente von der Osculationsepoche (1832 November 25·0) an gezählt, so dass die direct berechneten Störungsbeträge für jedes Element durch die erste Differenzreihe ausgedrückt werden. $\Delta^2\mu$ bedeutet die durch Änderung von μ bewirkte Änderung der mittleren Länge des Kometen.

M. Z. P.	$\Delta\mu$	$\Delta^2\mu$	ΔL	Δi	$\Delta\Omega$	$\Delta\Pi$	$\Delta\varphi$
1827							
Juni 25·65	−0ᵀ001336	+2ᵀ04476	−0ᵀ3949	−0ᵀ0093	−0ᵀ0063	+0ᵀ0913	+0ᵀ1480
August 20·75	− 644	1·97690	+ 78	+ 250	+ 269	− 325	+ 636
Sept. 22·85	− 1262	1·95155	− 3972	− 150	− 140	+ 901	+ 1405
Nov. 17·70	− 687	1·88613	+ 397	+ 308	+ 440	− 367	+ 677
Decbr. 20·90	− 1201	1·86053	− 3978	− 199	− 243	+ 887	+ 1342
1828							
Febr. 14·50	− 728	1·79684	+ 677	+ 359	+ 630	− 402	+ 717
März 18·90	− 1149	1·77096	− 3965	− 241	− 362	+ 871	+ 1287
Mai 13·20	− 768	1·70867	+ 922	+ 403	+ 832	− 432	+ 754
Juni 15·80	− 1104	1·68250	− 3937	− 276	− 491	+ 856	+ 1236
August 9·80	− 807	1·62119	+ 1136	+ 438	+ 1040	− 457	+ 790
Sept. 12·60	− 1063	1·59475	− 3891	− 305	− 625	+ 841	+ 1189
Nov. 6·40	− 845	1·53417	+ 1320	+ 466	+ 1250	− 481	+ 825
Decbr. 10·45	− 1026	1·50744	− 3831	− 328	− 760	+ 823	+ 1143
1829							
Februar 2·90	− 883	1·44751	+ 1478	+ 486	+ 1460	− 502	+ 860
März 9·20	− 992	1·42049	− 3754	− 345	− 894	+ 805	+ 1099
Mai 2·40	− 921	1·36091	+ 1612	+ 498	+ 1664	− 522	+ 895
Juni 6·00	− 960	1·33356	− 3661	− 357	− 1024	+ 787	+ 1055
Juli 29·95	− 960	1·27419	+ 1719	+ 502	+ 1860	− 538	+ 931
Sept. 2·85	− 929	1·24649	− 3557	− 363	− 1147	+ 768	+ 1011
Octob. 26·40	− 999	1·18739	+ 1800	+ 499	+ 2048	− 554	+ 968
Nov. 30·65	− 899	1·15934	− 3438	− 362	− 1263	+ 747	+ 967
1830							
Jänner 22·90	− 1040	1·10028	+ 1854	+ 487	+ 2220	− 569	+ 1007
Febr. 27·55	− 871	1·07184	− 3302	− 356	− 1368	+ 723	+ 921
April 21·40	− 1083	1·01273	+ 1887	+ 468	+ 2378	− 581	+ 1048
Mai 27·45	− 843	0·98386	− 3150	− 344	− 1460	+ 697	+ 875
Juli 18·90	− 1129	0·92455	+ 1891	+ 438	+ 2512	− 591	+ 1092
August 24·40	− 815	0·89523	− 2984	− 326	− 1538	+ 668	+ 827
Octob. 15·40	− 1179	0·83557	+ 1872	+ 399	+ 2628	− 599	+ 1141
Nov. 21·50	− 788	0·80562	− 2799	− 301	− 1602	+ 634	+ 777

M. Z. P.	$\Delta\mu$	$\Delta^2\mu$	ΔL	Δi	$\Delta\Omega$	$\Delta\Pi$	$\Delta\varphi$
1831							
Jänner 12·00	−0ʺ001234	+0ʺ74541	+0ʺ1828	+0ʺ0348	+0ʺ2714	−0ʺ0605	+0ʺ1194
Febr. 18·75	− 760	0·71479	− 2592	− 268	− 1649	+ 594	+ 725
April 10·65	− 1296	0·65387	+ 1753	+ 285	+ 2767	− 607	+ 1255
Mai 19·15	− 733	0 62248	− 2368	− 225	− 1662	+ 547	+ 670
Juli 8·40	− 1368	0 56037	+ 1648	+ 206	+ 2751	− 606	+ 1326
August 16·80	− 706	0·52810	− 2121	− 179	− 1627	+ 491	+ 613
Octob. 5·25	− 1454	0·46436	+ 1512	+ 121	+ 2633	− 600	+ 1413
Nov. 15·00	−0·000680	0·43070	−0·1850	−0·0126	−0·1516	+0·0418	+0·0554

Die Störungen der Elemente für November 15·00 ergeben sich durch mechanische Quadratur der in folgender Tafel angeführten Differenzialquotienten der Störungen, wenn der gewählten Osculationsepoche entsprechend als Anfangsglieder der summirten Reihen genommen werden:

${}^{I}f$(1832 November 23·5) = +0ʺ00018, +0ʺ0047, +0ʺ0006,
= +0·0023, +0·0052, —0·0035.

${}^{II}f$(1832 November 26·0) = +0ʺ00005.

0ʰ M. Z. P.	$5^2\frac{d\mu}{dt}$	$5\frac{dL}{dt}$	$5\frac{di}{dt}$	$5\frac{d\Omega}{dt}$	$5\frac{d\Pi}{dt}$	$5\frac{d\varphi}{dt}$
	0ʺ00	0ʺ0	0ʺ0	0ʺ0	0ʺ0	0ʺ0
1831 Nov. 2	− 007	− 430	− 025	− 445	− 261	− 279
	− 027	− 299	− 015	− 269	− 331	− 252
12	− 041	− 184	− 006	− 121	− 368	− 217
	− 052	− 082	000	+ 007	− 385	− 179
22	− 061	+ 011	+ 006	123	− 393	− 138
	− 069	104	011	234	− 388	− 094
Dec. 2	− 075	202	016	347	− 370	− 042
	− 080	311	020	465	− 332	+ 020
12	− 079	434	024	585	− 256	100
	− 070	562	027	689	− 119	200

0^h M. Z. P.	$5^2 \frac{d\mu}{dt}$	$5 \frac{dL}{dt}$	$5 \frac{di}{dt}$	$5 \frac{d\Omega}{dt}$	$5 \frac{d\Pi}{dt}$	$5 \frac{d\varphi}{dt}$
	0″00	0″0	0″0	0″0	0″0	0″0
1831 Decbr. 22	– 043	662	027	722	+ 118	316
	+ 013	649	021	578	460	409
1832 Jänner 1	092	+ 410	+ 006	+ 164	802	397
	154	– 030	– 013	– 397	906	+ 226
11	157	– 418	– 023	– 767	682	– 011
	117	– 582	– 023	– 817	327	– 177
21	066	– 569	– 018	– 679	+ 034	– 245
	+ 025	– 481	– 012	– 494	– 158	– 249
31	– 005	– 378	– 007	– 323	– 275	– 226
	– 028	– 281	– 003	– 178	– 338	– 191
Februar 10	– 045	– 193	– 001	– 057	– 376	– 155
	– 058	– 112	+ 001	+ 049	– 396	– 118
20	– 071	– 033	002	164	– 405	– 078
	– 082	+ 048	003	241	– 405	– 034
März 1	– 092	138	003	337	– 390	+ 017
	– 099	242	002	437	– 350	078
11	– 101	365	002	534	– 266	152
	– 091	500	000	602	– 103	238
21	– 053	611	– 001	579	+ 174	319
	+ 023	607	– 002	+ 368	554	339
31	121	386	000	– 055	870	236
	184	+ 010	+ 005	– 484	884	+ 031
April 10	178	– 295	009	– 673	612	– 148
	131	– 428	010	– 630	277	– 229
20	078	– 435	009	– 488	+ 019	– 236
	034	– 388	008	– 338	– 150	– 209
30	+ 007	– 326	005	– 207	– 253	– 170
	– 025	– 264	003	– 100	– 318	– 129
Mai 10	– 046	– 205	000	– 009	– 359	– 087
	– 065	– 148	– 003	+ 069	– 385	– 046
20	– 082	– 089	– 006	142	– 403	– 003
	– 099	– 026	– 009	213	– 410	+ 044
30	– 116	+ 048	– 014	284	– 405	097
	– 132	142	– 019	356	– 373	160
Juni 9	– 140	259	– 024	414	– 290	230
	– 130	400	– 027	443	– 118	295
19	– 081	529	– 025	374	+ 180	317
	+ 022	559	– 011	+ 152	568	236
29	148	401	+ 013	– 172	841	+ 034
	220	+ 120	034	– 409	807	– 178

0^h M. Z. P.	$5^2 \frac{d\mu}{dt}$	$5 \frac{dL}{dt}$	$5 \frac{di}{dt}$	$5 \frac{d\Omega}{dt}$	$5 \frac{d\Pi}{dt}$	$5 \frac{d\varphi}{dt}$
	0"00	0"0	0"0	0"0	0"0	0"0
1832 Juli 9	213	− 115	041	− 456	551	− 286
	164	− 238	037	− 382	271	− 292
19	109	− 277	029	− 276	+ 058	− 249
	062	− 275	020	− 179	− 089	− 191
29	+ 023	− 256	012	− 099	− 179	− 133
	− 009	− 231	+ 005	− 037	− 242	− 079
August 8	− 037	− 205	− 002	+ 014	− 287	− 026
	− 063	− 177	− 008	056	− 321	+ 026
18	− 090	− 148	− 015	093	− 349	083
	− 120	− 113	− 022	126	− 370	145
28	− 153	− 067	− 030	156	− 380	219
	− 189	− 003	− 038	181	− 369	306
Sept. 7	− 223	+ 091	− 045	193	− 315	397
	− 237	221	− 046	178	− 180	466
17	− 194	371	− 033	116	+ 071	440
	− 064	469	− 003	+ 008	391	+ 238
27	+ 114	429	+ 034	− 092	606	− 094
	236	278	055	− 125	592	− 361
Oct. 7	268	119	055	− 103	435	− 464
	245	+ 009	044	− 064	264	− 452
17	205	− 055	031	− 032	131	− 393
	165	− 090	019	− 012	+ 037	− 325
27	129	− 110	010	− 001	− 029	− 262
	099	− 122	+ 002	+ 001	− 075	− 204
Nov. 6	071	− 130	− 004	− 004	− 110	− 149
	044	− 137	− 010	− 014	− 135	− 094
16	+ 014	− 145	− 014	− 031	− 157	− 033
	− 023	− 152	− 018	− 053	− 171	+ 041
26	− 072	− 158	− 021	− 082	− 174	139
	− 139	− 155	− 023	− 115	− 155	274
Decbr. 6	− 231	− 131	− 021	− 144	− 091	453
	− 336	− 061	− 016	− 146	+ 049	654
16	− 408	+ 076	− 006	− 083	271	777
	− 365	248	+ 002	+ 049	481	671
26	− 199	365	+ 003	178	533	+ 328
	− 014	377	− 001	226	418	− 034
1833 Jänner 5	+ 108	325	− 005	203	250	− 260
	163	257	− 007	155	+ 105	− 354
15	+ 181	+ 191	− 007	+ 109	− 005	− 372

Venus.

$$\frac{1}{m} = 401839.$$

0ʰ M. Z. P.	$10^2 \frac{d\mu}{dt}$	$10 \frac{dL}{dt}$	$10 \frac{di}{dt}$	$10 \frac{d\Omega}{dt}$	$10 \frac{d\Pi}{dt}$	$10 \frac{d\varphi}{dt}$
1826 Februar 21	– 0"04285	–0"1009	–0"0310	–0"0044	–0"2368	+0"4073
	– 4621	– 599	– 293	– 345	– 1488	4518
März 13	– 4808	– 223	– 247	– 610	– 550	4762
	– 4884	+ 124	– 181	– 779	+ 397	4840
April 2	– 4867	462	– 109	– 805	1332	4773
	– 4742	816	– 46	– 664	2245	4548
22	– 4470	1203	– 6	– 364	3094	4132
	– 4024	1626	– 1	+ 56	3815	3505
Mai 12	– 3388	2081	– 34	532	4331	2670
	– 2572	2554	– 99	992	4570	1660
Juni 1	– 1608	3028	– 182	1369	4480	+ 533
	– 545	3484	– 268	1612	4043	– 636
21	+ 545	3896	– 339	1697	3282	– 1757
	1576	4236	– 380	1631	2272	– 2733
Juli 11	2455	4452	– 388	1448	+ 1108	– 3468
	3112	4466	– 360	1185	– 126	– 3888
31	3539	4197	– 291	854	– 1408	– 3968
	3773	3650	– 174	455	– 2704	– 3748
August 20	+ 0·03842	+0·2881	–0·0006	+0·0013	–0·3940	–0·3288

0ʰ M. Z. P.	$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1826 Juni 21	+ 0"02179	+0"7792	–0"0678	+0"3394	+0"6563	–0"3513
Juli 11	9820	8904	– 776	2895	+ 2217	– 6936
31	14157	8394	– 583	1707	– 2815	– 7936
August 20	15368	5763	– 11	+ 26	– 7879	– 6575
Sept. 9	13981	+ 1884	+ 841	– 1618	–1·1553	– 3702
29	10124	– 2435	1627	– 2565	–1·2447	– 165
October 19	+ 4540	– 6439	2008	– 2585	–1 0131	+ 3058
Nov. 8	– 1535	– 9231	1764	– 1835	– 5068	5011
28	– 6704	– 9927	+ 870	– 718	+ 1494	5261

0h M. Z. P.	$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1826 Decbr. 18	− 0"09723	−0"7980	−0"0460	+0"0291	+0"7744	+0"3082
1827 Jänner 7	− 9882	− 3583	− 1803	831	1·1741	− 247
27	− 7283	+ 2419	− 2674	813	1·2328	− 3759
Februar 16	− 2841	8282	− 2718	435	9205	− 6157
März 8	+ 2047	1·2365	− 1883	+ 49	+ 3482	− 6558
28	6008	1·3430	− 416	− 41	− 3027	− 4794
April 17	8122	1·1051	+ 1244	+ 269	− 8470	− 1396
Mai 7	8068	+ 5734	2610	854	−1·1454	+ 2605
27	6039	− 1264	3257	1409	−1·1251	5984
Juni 16	+ 2620	− 8235	2942	1569	− 7931	7649
Juli 6	− 1288	−1·3286	+ 1688	+ 1063	− 2394	6931
26	− 4653	−1·4804	− 183	− 132	+ 3768	+ 3856
August 15	− 6559	−1·2014	− 2099	− 1703	8672	− 741
Sept. 4	− 6513	− 5459	− 3414	− 3066	1·0771	− 5388
24	− 4635	+ 3028	− 3666	− 3600	0·9466	− 8501
October 14	− 1594	1·0935	− 2762	− 2938	+ 5330	− 9002
Nov. 3	+ 1668	1·5960	− 1002	− 1145	− 184	− 6735
23	4267	1·6696	+ 1065	+ 1300	− 5354	− 2382
Decbr. 13	5612	1·2939	2831	3671	− 8734	+ 2785
1828 Jänner 2	5470	+ 5628	3788	5195	− 9482	7290
22	3953	− 3404	3636	5254	− 7475	9798
Februar 11	+ 1477	−1·1770	2372	3598	− 3324	9434
März 2	− 1302	−1·7028	+ 324	+ 515	+ 1712	6110
22	− 3621	−1·7397	− 1891	− 3136	6052	+ 681
April 11	− 4839	−1·2496	− 3550	− 6136	8290	− 5186
Mai 1	− 4654	− 3684	− 4093	− 7356	7755	− 9567
21	− 3206	+ 6366	− 3348	− 6247	4772	−1·1024
Juni 10	− 990	1·4655	− 1585	− 3065	+ 469	− 9130
30	+ 1345	1·8855	+ 626	+ 1253	− 3710	− 4518
Juli 20	3210	1·7881	2626	5433	− 6520	+ 1437
August 9	4190	1·2024	3849	8222	− 7222	7050
29	4094	+ 2790	3944	8689	− 5706	1·0732
Sept. 18	2968	− 7410	2856	6484	− 2483	1·1338
October 8	+ 1097	−1·5716	+ 871	+ 2036	+ 1418	8518
28	− 1029	−1·9556	− 1423	− 3422	4713	+ 2956
Nov. 17	− 2827	−1·7547	− 3291	− 8134	6281	− 3684
Decbr. 7	− 3806	−1·0169	− 4113	−1·0446	5623	− 9270
27	− 3727	+ 303	− 3636	− 9479	+ 3064	−1·1994
1829 Jänner 16	− 0·02677	1·0661	−0·2054	− 5495	−0·0403	−1·1055

0ʰ M. Z. P.			$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1829	Februar	5	− 0ʺ00991	1ʺ7915	+0ʺ0100	+0ʺ0275	−0ʺ3563	−0ʺ6847
		25	+ 877	2 0145	2169	6104	− 5411	− 685
	März	17	2480	1·6851	3567	1·0289	− 5430	+ 5666
	April	6	3456	+ 8922	3910	1·1557	− 3671	1·0438
		26	3572	− 1558	3093	9363	− 720	1·2236
	Mai	16	2779	−1·1774	+ 1333	+ 4132	+ 2463	1·0416
	Juni	5	+ 1247	−1 8666	− 852	− 2705	4760	+ 5362
		25	− 634	−2 0019	− 2771	− 9002	5323	− 1447
	Juli	15	− 2350	−1·5295	− 3797	−1·2621	3917	− 7845
	August	4	− 3431	− 5985	− 3612	−1·2284	+ 1068	−1·1783
		24	− 3597	+ 4999	− 2324	− 8090	− 2175	−1·2074
	Sept.	13	− 2836	1·4390	− 390	− 1390	− 4665	− 8771
	October	3	− 1367	1·9632	+ 1583	+ 5766	− 5577	− 2984
		23	+ 446	1·9435	3032	1·1298	− 4622	+ 3581
	Nov.	12	2178	1 3938	3567	1·3598	− 2087	9094
	Decbr.	2	3410	+ 4591	3047	1·1884	+ 1254	1·2004
		22	3801	− 6104	+ 1617	+ 6454	4320	1·1398
1830	Jänner	11	3184	−1·5098	− 299	− 1223	6020	7333
		31	+ 1658	−1·9635	− 2101	− 8784	5644	+ 974
	Februar	20	− 392	−1·8241	− 3205	−1·3718	+ 3201	− 5675
	März	12	− 2393	−1·1382	− 3272	−1·4340	− 507	−1·0474
	April	1	− 3779	− 1291	− 2333	−1 0470	− 4194	−1·1964
		21	− 4175	+ 8946	− 744	− 3420	− 6600	−0·9841
	Mai	11	− 3482	1·6457	+ 975	+ 4598	− 6935	− 4918
		31	− 1870	1·9336	2324	1·1234	− 5066	+ 1287
	Juni	20	+ 286	1·6955	2946	1·4607	− 1502	7019
	Juli	10	2472	9998	2689	1·3691	+ 2737	1·0690
		30	4114	+ 310	1644	8595	6349	1·1227
	August	19	4708	− 9430	+ 126	+ 679	8091	8400
	Sept.	8	3983	−1·6356	− 1381	− 7640	7210	+ 3012
		28	+ 2053	−1·8340	− 2398	−1·3657	+ 3821	− 3238
	October	18	− 517	−1·4833	− 2613	−1·5345	− 1026	− 8327
	Nov.	7	− 3135	− 7080	− 2014	−1·2208	− 5728	−1·0680
		27	− 4908	+ 2446	− 858	− 5378	− 8749	− 9725
	Decbr.	17	− 5402	1·0989	+ 451	+ 2926	− 9147	− 5958
1831	Jänner	6	− 4471	1 6326	1519	1·0223	− 6799	− 631
		26	− 2308	1·7200	2066	1·4454	− 2332	+ 4695
	Februar	15	+ 598	1 3524	1978	1·4415	+ 3030	8541
	März	7	3524	+ 6304	+0ʺ1317	1·0026	7735	9830

0^h M. Z. P.	$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1831 März 27	0"05646	-0"2507	+0"0310	+0"2475	1"0274	0"8169
April 16	6258	-1·0413	- 710	- 5947	9664	+ 4052
Mai 6	5038	-1·5099	- 1416	-1 2496	5902	- 1193
26	+ 2232	-1·5247	- 1606	-1·4992	+ 98	- 5834
Juni 15	- 1372	-1·1056	- 1282	-1·2707	- 5887	- 8408
Juli 5	- 4771	- 3908	- 622	- 6577	-1·0191	- 8219
25	- 6989	+ 3930	+ 112	+ 1263	-1·1524	- 5565
August 14	- 7429	1·0406	687	8385	- 9565	- 1422
Sept. 3	- 5917	1 3979	966	1·2778	- 4869	+ 2900
23	- 2723	1·3908	920	1·3305	+ 1325	6152
October 13	+ 1445	1·0369	618	9883	7348	7429
Nov. 2	5514	+ 4375	+ 197	+ 3538	1·1424	6386
22	8281	- 2431	- 183	- 3747	1 2195	+ 3388
Decbr. 12	8780	- 8170	- 399	- 9604	9259	- 522
1832 Jänner 1	6669	-1·1313	- 413	-1·2159	+ 3440	- 3964
21	+ 2419	-1·1195	- 279	-1.0770	- 3452	- 5762
Februar 10	- 2838	- 8171	- 108	- 6229	- 9316	- 5396
März 1	- 7708	- 3330	- 2	- 296	-1·2508	- 3136
21	- 0·10968	+0·1986	-0·0010	+0·5046	-1·2296	+0·0164

0^h M. Z. P.	$10^2 \frac{d\mu}{dt}$	$10 \frac{dL}{dt}$	$10 \frac{di}{dt}$	$10 \frac{d\Omega}{dt}$	$10 \frac{d\Pi}{dt}$	$10 \frac{d\varphi}{dt}$
1832 Februar 10	- 0"00710	-0"4086	-0"0054	-0"3114	-0"4658	-0"2698
20	- 1351	- 2947	- 21	- 1654	- 5658	- 2230
März 1	- 1927	- 1665	- 1	- 148	- 6254	- 1568
11	- 2400	- 325	+ 4	+ 1281	- 6416	- 775
21	- 2742	+ 993	- 5	2523	- 6148	+ 82
31	- 2932	2218	- 26	3491	- 5480	931
April 10	- 2958	3282	- 54	4125	- 4472	1703
20	- 2816	4131	- 85	4398	- 3199	2332
30	- 2504	4719	- 111	4324	- 1751	2763
Mai 10	- 2024	5019	- 129	3935	- 212	2952
20	- 1391	5031	- 132	3283	+ 1334	2879
30	- 0·00632	0·4781	-0·0117	0 2429	0·2791	0·2546

0^h M. Z. P.	$10^2 \frac{d\mu}{dt}$	$10 \frac{dL}{dt}$	$10 \frac{di}{dt}$	$10 \frac{d\Omega}{dt}$	$10 \frac{d\Pi}{dt}$	$10 \frac{d\varphi}{dt}$
1832 Juni 9	+ 0″00207	0″4310	−0″0082	0″1445	0″4062	0″1981
19	1070	3664	− 28	+ 416	5048	1230
29	1897	2892	+ 44	− 560	5675	+ 354
Juli 9	2630	2043	125	− 1392	5898	− 571
19	3218	1172	209	− 2008	5712	− 1466
29	3618	+ 329	284	− 2363	5145	− 2249
August 8	3802	− 443	341	− 2443	4262	− 2850
18	3758	− 1107	371	− 2274	3156	− 3215
28	3491	− 1641	368	− 1909	1930	− 3310
Sept. 7	3020	− 2034	331	− 1425	+ 695	− 3131
17	2380	− 2284	262	− 910	− 442	− 2696
27	1618	− 2404	168	− 449	− 1396	− 2049
October 7	+ 787	− 2408	+ 61	− 115	− 2098	− 1249
17	− 55	− 2321	− 45	+ 47	− 2518	− 371
27	− 855	− 2168	− 136	+ 20	− 2651	+ 507
Nov. 6	− 1570	− 1977	− 199	− 173	− 2530	1320
16	− 2186	− 1755	− 225	− 478	− 2209	2030
26	− 2716	− 1580	− 212	− 823	− 1745	2636
Decbr. 6	− 3196	− 1394	− 166	− 1127	− 1165	3162
16	− 3646	− 1200	− 98	− 1319	− 474	3620
26	− 4056	− 975	− 26	− 1350	+ 342	3990
1833 Jänner 5	− 4386	− 690	+ 32	− 1202	1270	4225
15	− 0 04584	−0·0346	+0·0060	−0·0889	+0·2263	+0 4270
^{I}f(1826 Aug. 5·0)	− 0″24155	−2″7007	−0″3424	+1″0658	+2″8358	+1″2250
^{II}f(1826 Juli 31·0)	+21·84997					
^{I}f(1832 Feb. 15·0)	− 0·05253	−2·0220	−0·1102	−1·4318	+0 5838	+0·1850
^{II}f(1832 Feb. 10·0)	+ 2 85159					
^{I}f(1832 Nov. 21·0)	+ 0·01047	+0·0647	+0·0087	+0 0303	+0·0739	−0 1010
^{II}f(1832 Nov. 26·0)	+ 0·00213					

Erde.

$$\frac{1}{m} = 355499.$$

0ʰ M. Z. P.	$10^2 \frac{d\mu}{dt}$	$10 \frac{dL}{dt}$	$10 \frac{di}{dt}$	$10 \frac{d\Omega}{dt}$	$10 \frac{d\Pi}{dt}$	$10 \frac{d\varphi}{dt}$
1826 Februar 21	+ 0ʺ01161	+0ʺ1160	+0ʺ0095	+0ʺ0013	+0ʺ1612	−0ʺ0999
März 3	1039	1137	71	83	1439	− 943
13	850	1166	42	104	1344	− 813
23	648	1259	+ 16	+ 68	1358	− 670
April 2	533	1408	− 1	− 5	1462	− 623
12	613	1580	− 5	− 68	1556	− 780
22	930	1709	− 1	− 75	1482	− 1166
Mai 2	1409	1728	+ 1	− 27	1128	− 1674
12	1897	1610	− 2	+ 32	+ 511	− 2129
22	2267	1384	− 5	+ 51	− 239	− 2409
Juni 1	2475	1098	− 1	+ 8	− 986	− 2481
11	2539	784	+ 14	− 86	− 1656	− 2382
21	2493	470	42	− 210	− 2209	− 2165
Juli 1	2370	+ 162	80	− 343	− 2640	− 1870
11	2195	− 140	126	− 470	− 2958	− 1528
21	1982	− 438	176	− 581	− 3168	− 1160
31	1741	− 733	228	− 668	− 3276	− 780
August 10	1481	− 1026	278	− 729	− 3288	− 401
20	+ 0·01206	−0·1314	+0·0322	−0·0761	−0·3206	−0·0031

0ʰ M. Z. P.	$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1826 Juni 21	+ 0ʺ09974	+0ʺ0941	+0ʺ0084	−0ʺ0419	−0ʺ4418	−0ʺ4330
Juli 11	8780	− 280	252	− 940	− 5915	− 3056
31	6966	− 1466	456	− 1336	− 6552	− 1560
August 20	4822	− 2628	645	− 1522	− 6412	− 62
Sept. 9	2516	− 3725	772	− 1486	− 5547	+ 1281
29	+ 197	− 4671	798	− 1258	− 4026	2325
October 19	− 1972	− 5342	697	− 898	− 1978	2942
Nov. 8	− 0·03816	−0·5596	+0·0462	−0·0481	+0·0397	+0·3036

0ʰ M. Z. P.	$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1826 Nov. 28	− 0·05168	−0·5312	+0·0113	−0·0093	+0·2824	+0·2580
Decbr. 18	− 5902	− 4423	− 306	+ 194	4985	1628
1827 Jänner 7	− 5960	− 2943	− 732	338	6584	+ 324
27	− 5374	− 988	− 1093	332	7394	− 1122
Februar 16	− 4260	+ 1249	− 1327	213	7321	− 2477
März 8	− 2788	3532	− 1396	+ 37	6403	− 3532
28	− 1153	5622	− 1288	− 126	4801	− 4140
April 17	+ 459	7310	− 1020	− 220	2748	− 4230
Mai 7	1894	8427	− 628	− 205	+ 503	− 3804
27	3036	8846	− 158	− 68	− 1681	− 2916
Juni 16	3824	8496	+ 342	+ 182	− 3610	− 1656
Juli 6	4242	7379	827	520	− 5132	− 145
26	4295	5571	1245	900	− 6135	+ 1463
August 15	4002	3200	1548	1255	− 6530	2996
Sept. 4	3388	+ 430	1691	1518	− 6260	4272
24	2499	− 2520	1642	1611	− 5326	5113
October 14	1408	− 5368	1390	1477	− 3806	5375
Nov. 3	+ 215	− 7796	946	1081	− 1856	4962
23	− 959	− 9464	+ 356	+ 435	+ 295	3864
Decbr. 13	− 1986	−1·0101	− 306	− 397	2361	2184
1828 Jänner 2	− 2750	− 9557	− 950	− 1301	4056	+ 126
22	− 3174	− 7850	− 1478	− 2135	5150	− 2024
Februar 11	− 3230	− 5182	− 1818	− 2756	5512	− 3960
März 2	− 2944	− 1890	− 1925	− 3055	5142	− 5421
22	− 2381	+ 1629	− 1793	− 2973	4148	− 6225
April 11	− 1630	4978	− 1453	− 2510	2713	− 6301
Mai 1	− 785	7826	− 955	− 1714	+ 1051	− 5672
21	+ 69	9914	− 362	− 675	− 624	− 4431
Juni 10	861	1·1070	+ 260	+ 502	− 2130	− 2724
30	1538	1·1199	850	1700	− 3315	− 718
Juli 20	2060	1·0279	1351	2795	− 4077	+ 1404
August 9	2398	8367	1715	3662	− 4352	3441
29	2534	5595	1900	4181	− 4116	5187
Sept. 18	2455	+ 2174	1872	4248	− 3394	6434
October 8	2162	− 1591	1625	3796	− 2262	7000
28	1673	− 5314	1172	2817	− 857	6758
Nov. 17	1029	− 8553	+ 560	+ 1382	+ 632	5674
Decbr. 7	+ 291	−1·0868	− 137	− 348	1988	3836
27	− 0·00462	−1·1919	−0·0823	−0·2145	+0·3003	+0·1463

0^h M. Z. P.	$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1829 Jänner 16	− 0"01147	−1"1533	−0"1400	−0"3744	+0"3521	−0"1130
Februar 5	− 1694	− 9759	− 1787	− 4904	3478	− 3578
25	− 2051	− 6853	− 1938	− 5453	2908	− 5556
März 17	− 2200	− 3218	− 1849	− 5331	1936	− 6835
April 6	− 2144	+ 702	− 1543	− 4560	+ 728	− 7288
26	− 1906	4471	− 1075	− 3253	− 531	− 6918
Mai 16	− 1522	7729	− 508	− 1573	− 1673	− 5811
Juni 5	− 1030	1·0193	+ 93	+ 288	− 2561	− 4117
25	− 470	1·1670	666	2161	− 3097	− 2022
Juli 15	+ 123	1·2044	1157	3844	− 3224	+ 276
August 4	711	1·1274	1520	5169	− 2922	2564
24	1258	9405	1720	5984	− 2221	4625
Sept. 13	1721	6569	1730	6158	− 1192	6240
October 3	2055	+ 2997	1541	5614	+ 62	7206
23	2220	− 971	1167	4350	1330	7366
Nov. 12	2181	− 4907	646	2464	2471	6650
Decbr. 2	1924	− 8325	+ 43	+ 166	3276	5097
22	1461	−1·0771	− 562	− 2241	3593	2892
1830 Jänner 11	832	−1·1914	− 1081	− 4416	3350	+ 326
31	+ 104	−1·1613	− 1445	− 6040	2567	− 2244
Februar 20	− 643	− 9951	− 1610	− 6890	+ 1368	− 4468
März 12	− 1333	− 7203	− 1570	− 6872	− 64	− 6078
April 1	− 1899	− 3753	− 1343	− 6026	− 1520	− 6911
21	− 2293	− 25	− 977	− 4494	− 2801	− 6930
Mai 11	− 2489	+ 3589	− 528	− 2487	− 3755	− 6192
31	− 2475	6761	− 50	− 237	− 4272	− 4827
Juni 20	− 2255	9229	+ 407	+ 2017	− 4298	− 3006
Juli 10	− 1839	1·0807	797	4057	− 3820	− 920
30	− 1247	1·1367	1088	5685	− 2866	+ 1235
August 19	− 509	1·0856	1252	6730	− 1512	2353
Sept. 8	+ 328	9308	1280	7073	+ 116	4936
28	1199	6834	1155	6578	1846	6094
October 18	2019	3652	901	5290	3463	6572
Nov. 7	2690	+ 80	544	3297	4735	6278
27	3116	− 3483	+ 131	+ 821	5447	5220
Decbr. 17	3219	− 6601	− 280	− 1816	5446	3522
1831 Jänner 6	2960	− 8885	− 630	− 4237	4692	+ 1418
26	2349	−1·0062	− 871	− 6094	3267	− 792
Februar 15	+ 0·01450	−1·0033	−0·0980	−0·7130	+0·1365	−0·2796

0^h M. Z. P.			$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
	März	7	+ 0ʺ00363	−0ʺ8887	−0ʺ0951	−0ʺ7237	−0ʺ0747	−0ʺ4338
		27	− 794	− 6842	− 810	− 6452	− 2791	− 5256
	April	16	− 1903	− 4198	− 589	− 4930	− 4519	− 5494
	Mai	6	− 2864	− 1277	− 329	− 2907	− 5752	− 5087
		26	− 3597	+ 1637	− 69	− 644	− 6377	− 4136
	Juni	15	− 4043	4296	+ 161	+ 1600	− 6352	− 2783
	Juli	5	− 4165	6502	340	3590	− 5689	− 1196
		25	− 3937	8096	453	5134	− 4443	+ 453
	August	14	− 3341	8949	500	6090	− 2706	1990
	Sept.	3	− 2382	8997	481	6368	− 611	3257
		23	− 1099	8249	410	5927	+ 1662	4125
	October	13	+ 414	6791	300	4789	3872	4485
	Nov.	2	2014	4777	171	3066	5742	4284
		22	3521	+ 2419	+ 48	+ 978	7005	3537
	Decbr.	12	4740	− 28	− 49	− 1185	7456	2346
1832	Jänner	1	5494	− 2285	− 105	− 3100	7004	+ 898
		21	5659	− 4114	− 117	− 4494	5703	− 575
	Februar	10	5188	− 5348	− 90	− 5192	3738	− 1835
	März	1	4119	− 5929	− 42	− 5157	+ 1388	− 2696
		21	2558	− 5894	+ 9	− 4480	− 1040	− 3050
	April	10	+ 651	− 5345	44	− 3342	− 3261	− 2874
		30	− 1442	− 4421	51	− 1966	− 5052	− 2216
	Mai	20	− 3574	− 3265	+ 23	− 583	− 6269	− 1173
	Juni	9	− 5617	− 1989	− 35	+ 604	− 6830	+ 135
		29	− 7457	− 661	− 111	1427	− 6691	1584
	Juli	19	− 8997	+ 700	− 182	1752	− 5825	3050
	August	8	− 0·10066	+0·2171	−0·0205	+0·1469	−0·4126	+0·4400

0^h M. Z. P.			$10^2 \frac{d\mu}{dt}$	$10 \frac{dL}{dt}$	$10 \frac{di}{dt}$	$10 \frac{d\Omega}{dt}$	$10 \frac{d\Pi}{dt}$	$10 \frac{d\varphi}{dt}$
1832	Juni	29	− 0ʺ01864	−0ʺ0330	−0ʺ0056	+0ʺ0713	−0ʺ3345	+0ʺ0792
	Juli	9	− 2069	+ 8	− 75	830	− 3177	1161
		19	2249	350	− 91	876	− 2912	1525
		29	− 0·02402	+0·0707	−0·0102	+0·0846	−0·2545	+0·1874

0ʰ M. Z. P.	$10^2 \frac{d\mu}{dt}$	$10 \frac{dL}{dt}$	$10 \frac{di}{dt}$	$10 \frac{d\Omega}{dt}$	$10 \frac{d\Pi}{dt}$	$10 \frac{d\varphi}{dt}$
1832 August 8	− 0″02516	+0″1085	−0″0102	+0″0734	−0″2063	+0″2200
18	− 2576	1504	− 87	535	− 1435	2483
28	− 2544	1984	− 47	+ 246	− 622	2690
Sept. 7	− 2344	2560	+ 29	− 124	+ 454	2748
17	− 1819	3248	154	− 535	1882	2497
27	− 685	4022	332	− 887	3730	+ 1636
October 7	+ 1376	4689	522	− 974	5762	− 226
17	4216	4851	612	− 636	7158	− 3056
27	6518	4228	500	− 74	6855	− 5602
Nov. 6	6965	3195	274	+ 237	5117	− 6391
16	5834	2325	95	202	3242	− 5538
26	4236	1809	+ 13	+ 50	2002	− 4043
Decbr. 6	2836	1573	− 8	− 51	1409	− 2824
16	1838	1506	− 5	− 61	1227	− 1913
26	1224	1535	0	− 3	1245	− 1380
1833 Jänner 5	913	1619	− 2	+ 90	1219	− 1147
15	+ 0·00819	+0·1735	−0·0013	+0·0188	+0·1370	−0·1128
${}^{I}f$(1826 Aug. 5·0)	− 0″03543	−4″4549	−0″2495	+1″2771	−1″1943	+0″2692
${}^{II}f$(1826 Iuli 31·0)	+19·42456					
${}^{I}f$(1832 Juli 9·0)	− 0·17018	−3·5589	−0·2056	−0·0912	−2·3959	+0·4218
${}^{II}f$(1832 Juni 29·0)	+ 2·48873					
${}^{I}f$(1832 Nov. 21·0)	− 0·01818	−0·0752	−0·0009	−0·0031	−0·0871	+0·1730
${}^{II}f$(1832 Nov. 26·0)	− 0·00330					

Mars.

$$\frac{1}{m} = 2680337.$$

0ʰ M. Z. P.	$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1826 Februar 21	+ 0″00380	+0″0023	+0″0011	+0″0002	+0″0080	−0″0183
März 13	+ 319	45	6	+ 15	59	− 157
April 2	+ 161	80	1	+ 6	75	− 85
22	− 34	140	0	− 18	159	− 6
Mai 12	− 132	229	2	− 38	284	+ 8
Juni 1	− 10	319	+ 3	− 26	332	− 88
21	+ 257	350	0	0	+ 210	− 223
Juli 11	468	312	− 1	+ 3	− 1	− 289
31	558	246	+ 6	− 17	− 189	− 278
August 20	568	172	18	− 42	− 328	− 224
Sept. 9	534	98	34	− 65	− 420	− 154
29	477	+ 24	50	− 79	− 473	− 78
October 19	404	− 52	65	− 84	− 493	− 1
Nov. 8	320	− 127	76	− 79	− 481	+ 70
28	233	− 201	82	− 68	− 442	130
Decbr. 18	146	− 269	82	− 52	− 382	177
1827 Jänner 7	+ 65	− 326	78	− 36	− 304	207
27	− 0·00006	−0·0370	+0·0067	−0·0020	−0·0218	+0·0220

0ʰ M. Z. P.	$40^2 \frac{d\mu}{dt}$	$40 \frac{dL}{dt}$	$40 \frac{di}{dt}$	$40 \frac{d\Omega}{dt}$	$40 \frac{d\Pi}{dt}$	$40 \frac{d\varphi}{dt}$
1827 Jänner 27	− 0″00025	−0″0741	+0″0135	−0″0041	−0″0437	+0″0439
März 8	− 454	− 837	+ 75	− 2	− 95	400
April 17	− 696	− 831	+ 5	+ 1	+ 190	282
Mai 27	− 795	− 749	− 60	− 26	391	+ 126
Juli 6	− 800	− 615	− 113	− 71	513	− 37
August 15	− 751	− 446	− 153	− 124	569	− 192
Sept. 24	− 669	− 249	− 178	− 175	571	− 330
Nov. 3	− 568	− 24	− 189	− 216	530	− 448
Decbr. 13	− 449	+ 234	− 186	− 241	449	− 541
1828 Jänner 22	− 0·00310	+0·0524	0·0165	−0·0238	+0·0325	−0·0599

0^h M. Z. P.	$40^2 \frac{d\mu}{dt}$	$40 \frac{dL}{dt}$	$40 \frac{di}{dt}$	$40 \frac{d\Omega}{dt}$	$40 \frac{d\Pi}{dt}$	$40 \frac{d\varphi}{dt}$
1828 März 2	− 0″00150	+0″0847	−0″0123	−0″0196	+0″0162	−0″0608
April 11	+ 33	1174	− 58	− 100	− 41	− 543
Mai 21	235	1454	+ 31	+ 58	− 263	− 380
Juni 30	432	1585	137	273	− 465	− 105
August 9	596	1466	235	503	− 593	+ 261
Sept. 18	682	1062	294	667	− 587	627
October 28	666	+ 454	288	691	− 447	874
Decbr. 7	559	− 179	221	560	− 224	928
1829 Jänner 16	406	− 690	122	327	0	811
Februar 25	248	− 1012	+ 23	+ 64	+ 172	589
April 6	+ 108	− 1159	− 60	− 178	272	333
Mai 16	− 9	− 1173	− 121	− 376	308	+ 83
Juni 25	− 105	− 1095	− 161	− 524	291	− 140
August 4	− 189	− 948	− 183	− 622	238	− 334
Sept. 13	− 265	− 751	− 189	− 673	152	− 494
October 23	− 337	− 504	− 180	− 673	+ 41	− 621
Decbr. 2	− 409	− 201	− 157	− 612	− 90	− 707
1830 Jänner 11	− 476	+ 159	− 117	− 479	− 236	− 742
Februar 20	− 531	575	− 61	− 259	− 382	− 700
April 1	− 554	1021	+ 12	+ 53	− 501	− 558
Mai 11	− 518	1423	92	432	− 547	− 300
Juni 20	− 392	1663	162	804	− 474	+ 56
Juli 30	− 166	1624	201	1053	− 261	433
Sept. 8	+ 120	1291	195	1078	+ 42	721
October 18	393	775	148	869	337	837
Nov. 27	592	+ 240	83	518	540	783
1831 Jänner 6	697	− 198	+ 21	+ 139	626	615
Februar 15	724	− 504	− 26	− 190	611	405
März 27	691	− 689	− 55	− 440	525	197
Mai 6	618	− 780	− 69	− 606	399	+ 12
Juni 15	512	− 806	− 70	− 698	243	− 140
Juli 25	374	− 780	− 64	− 721	+ 70	− 261
Sept. 3	+ 197	− 719	− 52	− 684	− 117	− 344
October 13	− 28	− 624	− 37	− 586	− 317	− 391
Nov. 22	− 320	− 490	− 21	− 430	− 520	− 390
1832 Jänner 1	− 689	− 317	− 7	− 219	− 712	− 329
Februar 10	− 1140	− 97	0	+ 27	− 859	− 193
März 21	− 0·01648	+0·0172	−0·0001	+0·0256	−0·0909	+0·0026

0^h M. Z. P.	$10^2 \frac{d\mu}{dt}$	$10 \frac{dL}{dt}$	$10 \frac{di}{dt}$	$10 \frac{d\Omega}{dt}$	$10 \frac{d\Pi}{dt}$	$10 \frac{d\varphi}{dt}$
1832 Februar 20	− 0·00079	−0·0008	0·0000	+0·0022	−0·0220	−0·0037
März 1	− 87	+ 8	0	37	− 225	− 24
11	− 95	25	0	51	− 228	− 9
21	− 103	43	0	64	− 227	+ 6
31	− 111	60	− 1	75	− 226	24
April 10	− 119	81	− 1	83	− 219	42
20	− 127	101	− 2	88	− 211	62
30	− 135	123	− 2	89	− 198	81
Mai 10	− 142	146	− 3	85	− 182	102
20	− 150	171	− 3	75	− 162	126
30	− 158	198	− 3	56	− 138	149
Juni 9	− 166	230	− 1	+ 27	− 107	176
19	− 175	267	+ 1	− 16	− 71	205
29	− 186	312	6	− 79	− 28	237
Juli 9	− 199	367	15	− 172	+ 27	276
19	− 215	443	32	− 311	98	323
29	− 0·00235	+0·0544	+0·0063	−0·0523	+0·0197	+0·0381

0^h M. Z. P.	$5^2 \frac{d\mu}{dt}$	$5 \frac{dL}{dt}$	$5 \frac{di}{dt}$	$5 \frac{d\Omega}{dt}$	$5 \frac{d\Pi}{dt}$	$5 \frac{d\varphi}{dt}$
1832 August 3	− 0·00061	+0·0305	+0·0044	−0·0337	+0·0132	+0·0208
8	− 62	343	62	− 434	175	225
13	− 62	388	84	− 557	229	241
18	− 57	439	116	− 715	300	251
23	− 42	495	163	− 918	397	246
28	− 9	546	225	− 1166	525	209
Sept. 2	+ 55	578	305	− 1446	688	+ 111
7	166	565	395	− 1702	876	− 86
12	325	477	470	− 1828	1044	− 393
17	495	318	494	− 1716	1120	− 751
22	616	139	446	− 1369	1062	− 1034
27	645	+ 2	349	− 931	892	− 1143
October 2	600	− 65	247	− 560	692	− 1097
7	519	− 81	163	− 305	513	− 966
12	430	− 71	104	− 151	371	− 810
17	+ 0·00350	−0·0052	+0·0065	−0·0067	+0·0268	−0·0665

0^h M. Z. P.	$5^2 \frac{d\mu}{dt}$	$5 \frac{dL}{dt}$	$5 \frac{di}{dt}$	$5 \frac{d\Omega}{dt}$	$5 \frac{d\Pi}{dt}$	$5 \frac{d\varphi}{dt}$
1832 October 22	+ 0·00284	−0·0033	+0·0040	−0·0024	+0·0194	−0·0541
27	230	− 16	24	− 3	142	− 439
Nov. 1	186	− 5	14	+ 5	102	− 356
6	150	+ 4	8	7	74	− 287
11	120	10	4	7	54	− 231
16	95	16	2	5	39	− 184
21	75	19	+ 1	3	29	− 145
26	57	21	0	+ 1	23	− 111
Decbr. 1	43	22	0	0	20	− 84
6	+ 0·00031	+0·0023	0·0000	0·0000	+0·0018	−0·0061

0^h M. Z. P.	$10^2 \frac{d\mu}{dt}$	$10 \frac{dL}{dt}$	$10 \frac{di}{dt}$	$10 \frac{d\Omega}{dt}$	$10 \frac{d\Pi}{dt}$	$10 \frac{d\varphi}{dt}$
1832 Nov. 26	+ 0·00229	+0·0041	+0·0001	+0·0003	+0·0046	−0·0223
Decbr. 6	125	47	0	0	37	− 123
16	54	50	0	− 1	42	− 57
26	+ 8	52	0	+ 1	54	− 15
1833 Jänner 5	− 21	54	0	5	68	+ 10
15	− 0·00038	+0·0055	−0·0001	+0·0009	+0·0080	+0·0023
${}^{I}f$(1826 Dec. 28·0)	− 0·14245	−0·6523	−0·3573	+1·6737	−0·8303	+0·6110
${}^{II}f$(1826 Dec. 18·0)	+16·99370					
${}^{I}f$(1832 März 1·0)	− 0·31299	−0·7310	−0·3907	+1·4432	−0·8077	+0·5593
${}^{II}f$(1832 Feb. 10·0)	+ 2·19953					
${}^{I}f$(1832 Aug. 3·0)	− 0·10190	−0·4183	−0·3806	+1·4055	−0·9868	+0·7772
${}^{II}f$(1832 Juli 29·0)	+ 0·72624					
${}^{I}f$(1832 Nov. 23·5)	− 0·00018	−0·0006	0·0000	0·0000	−0·0007	+0·0035
${}^{II}f$(1832 Nov. 26·0)	− 0·00004					
${}^{I}f$(1832 Decbr. 1·0)	+ 0·00128	+0·0026	0·0000	+0·0001	+0·0026	−0·0124
${}^{II}f$(1832 Decbr. 6·0)	+ 0·00110					

Jupiter.

$$\frac{1}{m} = 1047\cdot879.$$

0^h M. Z. P.	$10^2 \frac{d\mu}{dt}$	$10 \frac{dL}{dt}$	$10 \frac{di}{dt}$	$10 \frac{d\Omega}{dt}$	$10 \frac{d\Pi}{dt}$	$10 \frac{d\varphi}{dt}$
1826 Februar 21	−0″01698	+ 0″318	+ 0″002	0″000	+ 0″298	+ 0″203
März 3	− 5601	235	− 24	− 28	159	570
13	− 9345	+ 113	− 46	− 114	66	929
23	− 12082	− 50	− 60	− 258	+ 9	1·199
April 2	− 13075	− 252	− 61	− 449	− 56	1·308
12	− 12139	− 484	− 46	− 662	− 183	1·242
22	− 9644	− 726	− 15	− 871	− 400	1·041
Mai 2	− 6225	− 952	+ 27	− 1·054	− 699	770
12	− 2490	− 1·140	76	− 1·197	− 1·048	485
22	+ 1131	− 1·274	129	− 1 296	− 1·411	+ 222
Juni 1	4386	− 1·349	180	− 1·351	− 1·758	− 1
11	7163	− 1·366	228	− 1·367	− 2·069	− 179
21	9442	− 1 330	270	− 1·352	− 2·333	− 315
Juli 1	11251	− 1·249	306	− 1·312	− 2·547	− 414
11	12642	− 1·133	336	− 1·253	− 2·712	− 484
21	13678	− 989	359	− 1·182	− 2 833	− 531
31	14417	− 825	377	− 1·103	− 2·914	− 560
August 10	14915	− 646	389	− 1·020	− 2 962	− 577
20	+0·15217	− 0·459	+ 0 396	− 0·936	− 2·983	− 0·585

0^h M. Z. P.	$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1826 Juli 31	+0″57667	− 1″649	+ 0″753	− 2″207	− 5″829	− 1″121
August 20	60869	− 918	793	− 1·871	− 5·966	− 1·170
Sept. 9	61587	− 145	800	− 1·541	− 5·923	− 1·171
29	60801	+ 627	784	− 1·237	− 5·768	− 1·155
October 19	59158	1·371	752	− 968	− 5·552	− 1·137
Nov. 8	57068	2·079	709	− 738	− 5·308	− 1·125
28	54789	2·744	661	− 545	− 5 059	− 1·121
Decbr. 18	52478	3·368	610	− 386	− 4·819	− 1·126
1827 Jänner 7	+0·50229	+ 3·952	+ 0·558	− 258	− 4·598	− 1·138

0ʰ M. Z. P.	$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1827 Jänner 27	+0″·48091	+ 4″·502	+ 0″·508	− 155	− 4″·399	− 1″·155
Februar 16	46092	5·020	459	− 74	− 4·226	− 1·175
März 8	44242	5·512	414	− 11	− 4·080	− 1·196
28	42542	5·980	373	+ 37	− 3·959	− 1·216
April 17	40989	6·428	336	73	− 3·865	− 1·234
Mai 7	39574	6·861	302	99	− 3·794	− 1·248
27	38289	7·280	274	118	− 3·747	− 1·257
Juni 16	37124	7·687	249	133	− 3·722	− 1·260
Juli 6	36069	8·087	229	144	− 3·717	− 1·255
26	35114	8·480	213	154	− 3·731	− 1·243
August 15	34253	8·867	202	164	− 3·762	− 1·220
Sept. 4	33475	9·251	194	175	− 3·810	− 1·189
24	32774	9·634	191	187	− 3·872	− 1·146
October 14	32143	10·016	191	203	− 3·948	− 1 092
Nov. 3	31576	10·398	194	222	− 4·037	− 1·027
23	31068	10·783	201	245	− 4·136	− 948
Decbr. 13	30614	11·170	211	273	− 4·246	− 857
1828 Jänner 2	30209	11·560	224	306	− 4·366	− 752
22	29851	11·956	239	345	− 4·493	− 633
Februar 11	29536	12 356	256	389	− 4·629	− 499
März 2	29262	12·762	276	438	− 4·770	− 349
22	29025	13·176	297	493	− 4·918	− 183
April 11	28824	13·597	320	553	− 5·070	− 1
Mai 1	28657	14·026	344	618	− 5·227	+ 200
21	28523	14·465	369	688	− 5·387	418
Juni 10	28422	14·914	394	762	− 5·549	656
30	28351	15·374	420	840	− 5·713	913
Juli 20	28312	15·846	445	919	− 5·878	1·191
August 9	28304	16·330	469	1·000	− 6·044	1·491
29	28326	16·829	491	1·082	− 6·208	1·814
Sept. 18	28380	17·343	512	1·162	− 6·372	2·160
October 8	28467	17·874	530	1·239	− 6·533	2·532
28	28588	18·421	546	1·311	− 6·691	2·929
Nov. 17	28745	18·988	557	1·376	− 6·845	3·355
Decbr. 7	28937	19·576	564	1·431	− 6·994	3·810
27	29167	20·186	565	1·472	− 7·138	4·296
1829 Jänner 16	29437	20·821	560	1·497	− 7·274	4·814
Februar 5	29751	21·482	547	1·500	− 7·403	5·367
25	+0·30111	+22·172	+ 0·525	+ 1·477	− 7·522	5·957

0^h M. Z. P.			$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1829	März	17	+0″·30520	+22″·893	+ 0″·493	+ 1″·423	− 7″·631	+ 6″·587
	April	6	30982	23·648	450	1·330	− 7·728	7·259
		26	31502	24·440	393	1·190	− 7·811	7·975
	Mai	16	32084	25·273	321	996	− 7·879	8·740
	Juni	5	32734	26·150	232	735	− 7·930	9·556
		25	33458	27·075	+ 122	+ 396	− 7·962	10·428
	Juli	15	34261	28·054	− 11	− 35	− 7·972	11·360
	August	4	35152	29·090	− 169	− 576	− 7·959	12·357
		24	36139	30·190	− 358	− 1·246	− 7·918	13·424
	Sept.	13	37230	31·360	− 581	− 2·069	− 7·848	14·567
	October	3	38435	32·606	− 844	− 3·073	− 7 744	15·793
		23	39768	33·935	− 1·152	− 4·290	− 7·602	17·108
	Nov.	12	41240	35·355	− 1·511	− 5·761	− 7·417	18·521
	Decbr.	2	42866	36·875	− 1·931	− 7·530	− 7·185	20·041
		22	44661	38·504	− 2·420	− 9·654	− 6·899	21·677
1830	Jänner	11	46643	40·250	− 2·988	− 12·200	− 6·552	23·439
		31	48833	42·124	− 3·648	− 15·246	− 6·136	25·339
	Februar	20	51255	44·136	− 4·415	− 18·889	− 5·642	27·390
	März	12	53934	46·295	− 5·305	− 23·242	− 5·060	29·605
	April	1	56896	48·609	− 6·338	− 28·444	− 4·378	31·997
		21	60178	51·084	− 7·538	− 34·659	− 3·581	34·579
	Mai	11	63818	53 722	− 8·930	− 42·088	− 2·654	37·366
		31	67855	56·524	−10 546	− 50·967	− 1·582	40·370
	Juni	20	72335	59·484	−12·421	− 61·583	− 0·344	43·600
	Juli	10	77318	62·578	−14·594	− 74·276	+ 1·080	47·060
		30	82870	65·769	−17·109	− 89·443	2·713	50 747
	August	19	89066	68·997	−20·013	−107·548	4·578	54·647
	Sept.	8	0·95979	72·175	−23·351	−129·112	6·693	58·725
		28	1·03709	75·174	−27·170	−154·710	9 079	62·927
	October	18	1·12373	77·809	−31·505	−184·960	11·746	67·163
	Nov.	7	1·22063	79·838	−36·368	−220·407	14·690	71·292
		27	1 32903	80·937	−41·743	−261·519	17·887	75·123
	Decbr.	17	1·45022	80·707	−47·559	−308 511	21·286	78·401
1831	Jänner	6	1·58515	78·686	−53·673	−361·153	24·795	80·799
		26	1·73404	74·381	−59·836	−418·503	28·270	81·927
	Februar	15	1·89709	67·326	−65·702	−478·745	31·527	81·379
	März	7	2·07247	57·216	−70·810	−538·905	34·330	78·776
		27	2·25684	44·016	−74·635	−594·943	36·420	73·861
	April	16	+2·44497	+28·085	−76·673	−642·097	+37·601	+66·597

0ʰ M. Z. P.	$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1831 Mai 6	+2″62933	+10″252	-76″532	-675″530	+37″698	+57″243
26	2·80150	- 8·277	-74·052	-691·377	36·701	46·357
Juni 15	2·95296	-26·090	-69·368	-687·645	34·732	34·734
Juli 5	3·07564	-41·814	-62·895	-664·757	32·026	23·257
25	3·16487	-54·437	-55·233	-625·380	28·895	12·715
August 14	3·21903	-63·419	-47·042	-573·765	25·652	+ 3·678
Sept. 3	3·23916	-68·708	-38·917	-514·753	22·557	- 3·561
23	3·22859	-70·636	-31·308	-452·845	19·788	- 8·961
October 13	3·19225	-69·782	-24·502	-391·725	17·441	-12·676
Nov. 2	3·13507	-66·797	-18·637	-333·995	15·539	-14·961
22	3·06189	-62 311	-13·733	-281·227	14·061	-16·109
Decbr. 12	2·97673	-56·874	- 9·738	-234·181	12·949	-16·407
1832 Jänner 1	2·88259	-50·921	- 6·559	-193·013	12·137	-16·102
21	+2·78178	-44·789	- 4·086	-157·501	+11·555	-15·397

0ʰ M. Z. P.	$10^2 \frac{d\mu}{dt}$	$10 \frac{dL}{dt}$	$10 \frac{di}{dt}$	$10 \frac{d\Omega}{dt}$	$10 \frac{d\Pi}{dt}$	$10 \frac{d\varphi}{dt}$
1832 Februar 10	+ 0″66911	-19″355	- 1″104	-63″598	+ 5″576	- 7″222
20	65553	-17·877	- 730	-56·937	5·494	- 6·960
März 1	64149	-16·435	- 411	-50·817	5·418	- 6·687
11	62730	-15·036	- 143	-45·215	5·351	- 6·409
21	61277	-13·684	+ 81	-40·099	5·286	- 6·130
31	59798	-12·385	264	-35·436	5·222	- 5·853
April 10	58293	-11·141	412	-31·191	5·156	- 5·581
20	56750	- 9·953	527	-27·330	5·086	- 5·314
30	55166	- 8·824	614	-23·835	5·008	- 5·056
Mai 10	53541	- 7·756	677	-20·674	4·922	- 4·805
20	51861	- 6·749	717	-17·821	4·825	- 4·563
30	50135	- 5·804	737	-15·257	4·715	- 4·331
Juni 9	48335	- 4·922	741	-12·958	4·590	- 4·106
19	46474	- 4·106	730	-10·910	4·448	- 3·891
29	44513	- 3·352	707	- 9·086	4·287	- 3·680
Juli 9	42457	- 2·663	673	- 7·475	4·106	- 3·476
19	40285	- 2·040	630	- 6·058	3·903	- 3·274
29	+ 0·37970	- 1·482	+ 0·580	- 4·824	+ 3·675	- 3·072

0h M. Z. P.	$10^2 \frac{d\mu}{dt}$	$10 \frac{dL}{dt}$	$10 \frac{di}{dt}$	$10 \frac{d\Omega}{dt}$	$10 \frac{d\Pi}{dt}$	$10 \frac{d\varphi}{dt}$
1832 August 8	+ 0ʺ35492	− 990	+ 0ʺ524	− 3·757	+ 3·423	− 2·867
18	32808	− 566	464	− 2·846	3·145	− 2·653
28	29895	− 211	401	− 2·081	2·840	− 2·427
September 7	26693	+ 75	337	− 1·451	2·509	− 2·181
17	23152	291	272	− 946	2·154	− 1·908
27	19221	438	209	− 558	1·783	− 1·598
October 7	14841	517	149	− 278	1·403	− 1·244
17	10024	532	95	− 98	1·035	− 840
27	+ 4859	492	47	− 7	704	− 392
November 6	− 369	410	+ 9	+ 8	441	+ 75
16	− 5188	300	− 17	− 37	270	517
26	− 8984	176	− 31	− 121	194	872
December 6	− 11322	+ 43	− 33	− 225	177	1·094
16	− 12196	− 98	− 25	− 330	173	1·182
26	− 11955	− 247	− 8	− 425	145	1·170
1833 Jänner 5	− 11051	− 398	+ 13	− 504	+ 81	1·104
15	− 0·09856	− 0·548	+ 0·038	− 0·566	− 0·015	+ 1·019
^{I}f(1826 August 5·0)	− 57ʺ88165	− 26′ 3ʺ240	+ 20′ 34ʺ858	+197′ 48ʺ388	−5′ 20ʺ145	−24′ 53ʺ373
^{II}f(1826 Juli 31·0)	+153′40·10432					
^{I}f(1832 Jänner 31·0)	− 23·76140	+ 2′ 52·246	− 7·530	+ 8′ 45·190	−1′ 49·665	+ 1′ 49·278
^{II}f(1832 Jänner 21·0)	+ 2′16·13660					
^{I}f(1832 Nov. 21·0)	+ 0·03350	− 0·080	+ 0·012	+ 0·041	− 0·081	− 0·326
^{II}f(1832 Nov. 26·0)	+ 0·00711					

Saturn.

$$\frac{1}{m} = 3501 \cdot 6.$$

0^h M. Z. P.	$10^2 \frac{d\mu}{dt}$	$10 \frac{dL}{dt}$	$10 \frac{di}{dt}$	$10 \frac{d\Omega}{dt}$	$10 \frac{d\Pi}{dt}$	$10 \frac{d\varphi}{dt}$
1826 Februar 21	+ 0″00058	−0″0504	−0″0007	−0″0001	−0″0535	−0″0116
März 3	352	− 436	− 7	− 8	− 417	− 379
13	600	− 339	− 6	− 14	− 337	− 603
23	742	− 227	− 4	− 18	− 290	− 731
April 2	752	− 107	− 3	− 19	− 245	− 735
12	647	+ 12	− 1	− 16	− 170	− 635
22	474	123	0	− 10	− 56	− 477
Mai 2	276	217	0	− 2	+ 90	− 304
12	+ 82	290	0	+ 7	255	− 143
22	− 92	340	− 2	17	423	− 6
Juni 1	− 243	369	− 4	27	586	+ 105
11	− 369	378	− 6	37	738	190
21	− 474	370	− 9	46	876	254
Juli 1	− 559	347	− 13	55	999	300
11	− 629	312	− 17	64	1108	332
21	− 686	266	− 22	71	1205	353
31	− 732	213	− 27	78	1290	366
August 10	− 769	153	− 32	84	1363	371
20	− 0·00798	+0·0088	−0·0038	+0·0089	+0·1427	+0·0372

0^h M. Z. P.	$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1826 Juli 31	− 0″02928	+0″0427	−0″0053	+0″0156	+0″2579	+0″0732
August 20	− 3193	+ 175	− 75	178	2855	743
Sept. 9	− 3358	− 112	− 100	192	3064	722
29	− 3454	− 420	− 126	199	3222	682
October 19	− 3503	− 740	− 155	200	3341	630
Nov. 8	− 3516	− 1066	− 185	193	3430	572
28	− 3507	− 1393	− 217	179	3496	511
Decbr. 18	− 0·03479	−0·1719	−0·0250	+0·0158	+0·3544	+0·0449

0^h M. Z. P.	$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1827 Jänner 7	– 0·03438	–0·2039	–0·0284	+0·0131	+0·3577	+0·0386
28	– 3388	– 2353	– 319	97	3600	324
Februar 16	– 3331	– 2661	– 354	57	3615	263
März 8	– 3269	– 2961	– 193	+ 10	3623	203
28	– 3204	– 3253	– 428	– 42	3626	144
April 17	– 0·03136	–0·3537	–0·0465	–0·0100	+0·3625	+0·0086

0^h M. Z. P.	$40^2 \frac{d\mu}{dt}$	$40 \frac{dL}{dt}$	$40 \frac{di}{dt}$	$40 \frac{d\Omega}{dt}$	$40 \frac{d\Pi}{dt}$	$40 \frac{d\varphi}{dt}$
1827 März 8	– 0·13076	–0·5922	–0·0782	+0·0021	+0·7246	+0·0407
April 17	– 12546	– 7074	– 930	– 201	7249	+ 172
Mai 27	– 11987	– 8155	– 1082	– 468	7224	– 57
Juli 6	– 11416	– 9165	– 1235	– 777	7180	– 281
August 15	– 10846	–1·0106	– 1387	– 1125	7123	– 502
Sept. 24	– 10282	–1·0979	– 1538	– 1510	7056	– 721
Nov. 3	– 9726	–1·1786	– 1687	– 1927	6980	– 939
Decbr. 13	– 9182	–1·2530	– 1832	– 2374	6895	– 1157
1828 Jänner 22	– 8650	–1·3213	– 1972	– 2848	6802	– 1374
März 2	– 8130	–1·3836	– 2107	– 3345	6700	– 1593
April 11	– 7621	–1·4402	– 2236	– 3862	6588	– 1811
Mai 21	– 7124	–1·4911	– 2356	– 4395	6467	– 2029
Juni 30	– 6638	–1·5367	– 2470	– 4942	6335	– 2245
August 9	– 6164	–1·5772	– 2576	– 5498	6192	– 2460
Sept. 18	– 5700	–1·6128	– 2671	– 6060	6038	– 2672
October 28	– 5246	–1·6433	– 2757	– 6625	5872	– 2881
Decbr. 7	– 4802	–1·6692	– 2832	– 7190	5696	– 3085
1829 Jänner 16	– 4367	–1·6905	– 2898	– 7751	5507	– 3284
Februar 25	– 3941	–1·7073	– 2952	– 8305	5307	– 3476
April 6	– 3523	–1·7198	– 2995	– 8848	5096	– 3660
Mai 16	– 3112	–1·7281	– 3026	– 9378	4874	– 3836
Juni 25	– 2709	–1·7322	– 3046	– 9890	4642	– 4002
August 4	– 2312	–1·7324	– 3053	–1·0383	4400	– 4156
Sept. 13	– 1922	–1·7287	– 3049	–1·0853	4151	– 4298
October 23	– 1537	–1·7211	– 3032	–1·1295	3894	– 4427
Decbr. 2	– 1157	–1·7098	– 3002	–1·1708	3630	– 4542

0^h M. Z. P.	$40^2 \frac{d\mu}{dt}$	$40 \frac{dL}{dt}$	$40 \frac{di}{dt}$	$40 \frac{d\Omega}{dt}$	$40 \frac{d\Pi}{dt}$	$40 \frac{d\varphi}{dt}$
1830 Jänner 11	– 782	–1·6947	– 2960	–1·2089	3362	– 4640
Februar 20	– 410	–1·6759	– 2906	–1·2433	3091	– 4723
April 1	– 41	–1·6535	– 2839	–1·2740	2817	– 4788
Mai 11	+ 326	–1·6276	– 2759	–1·3005	2545	– 4834
Juni 20	693	–1·5983	– 2668	–1·3226	2275	– 4861
Juli 30	1060	–1·5654	– 2564	–1·3402	2010	– 4869
Sept. 8	1429	–1·5292	– 2447	–1·3530	1753	– 4856
October 18	1801	–1·4894	– 2318	–1·3607	1506	– 4821
Nov. 27	2178	–1·4460	– 2176	–1·3630	1273	– 4765
1831 Jänner 6	2562	–1·3990	– 2021	–1·3597	1057	– 4689
Februar 15	2956	–1·3483	– 1853	–1·3503	863	– 4590
März 27	3361	–1·2938	– 1673	–1·3339	693	– 4471
Mai 6	3780	–1·2352	– 1484	–1·3095	555	– 4331
Juni 15	4218	–1·1722	– 1287	–1·2755	451	– 4171
Juli 25	4682	–1·1046	– 1087	–1·2311	389	– 3993
Sept. 3	5179	–1·0320	– 889	–1·1756	374	– 3799
October 13	5718	– 9539	– 694	–1·1090	412	– 3591
Nov. 22	6311	– 8697	– 504	–1·0311	510	– 3376
1832 Jänner 1	6969	– 7783	– 320	– 9420	674	– 3159
Februar 10	+ 0·07706	–0·6789	–0·0146	–0·8414	+0·0910	–0·2951

0^h M. Z. P.	$20^2 \frac{d\mu}{dt}$	$20 \frac{dL}{dt}$	$20 \frac{di}{dt}$	$20 \frac{d\Omega}{dt}$	$20 \frac{d\Pi}{dt}$	$20 \frac{d\varphi}{dt}$
1832 Jänner 1	+ 0·01742	–0·3891	–0·0160	–0·4710	+0·0337	–0·1580
21	1832	– 3648	– 116	– 4466	391	– 1527
Februar 10	1926	– 3394	– 73	– 4207	455	– 1476
März 1	2027	– 3130	– 32	– 3934	527	– 1427
21	2134	– 2853	+ 7	– 3645	609	– 1382
April 10	2246	– 2563	44	– 3341	699	– 1342
30	2363	– 2259	78	– 3022	795	– 1307
Mai 20	2485	– 1943	108	– 2687	897	– 1280
Juni 9	2608	– 1613	134	– 2337	1000	– 1260
29	2724	– 1271	154	– 1973	1097	– 1247
Juli 19	+ 0·02825	–0·0921	+0·0166	–0·1599	+0·1179	–0·1241

0^h M. Z. P.	$10^2 \frac{d\mu}{dt}$	$10 \frac{dL}{dt}$	$10 \frac{di}{dt}$	$10 \frac{d\Omega}{dt}$	$10 \frac{d\Pi}{dt}$	$10 \frac{d\varphi}{dt}$
1832 August 8	+ 0·00721	−0·0285	+0·0085	−0·0609	+0·0615	−0·0616
18	721	− 199	84	− 514	619	− 611
28	713	− 115	81	− 419	613	− 601
Sept. 7	694	− 36	76	− 328	595	− 585
17	658	+ 36	69	− 241	564	− 556
27	601	98	60	− 161	516	− 509
October 7	512	146	49	− 91	450	− 437
17	384	177	35	− 37	368	− 327
27	+ 210	187	20	− 3	277	− 174
Nov. 6	− 10	174	+ 5	+ 4	188	+ 26
16	− 254	137	− 10	− 21	121	252
26	− 479	+ 77	− 20	− 77	85	466
Decbr. 6	− 637	− 5	− 24	− 161	68	617
16	− 698	− 108	− 19	− 260	+ 43	681
26	− 662	− 226	− 7	− 361	− 16	660
1833 Jänner 5	− 558	− 350	+ 12	− 454	− 119	584
15	− 0·00415	−0·0471	+0·0036	−0·0532	−0·0260	+0·0480
${}^{I}f$(1826 Aug. 5·0)	+ 0·30793	+65·4183	+9·5718	+41·0456	−22·7088	+15·3872
${}^{II}f$(1826 Juli 31·0)	+32·26838					
${}^{I}f$(1827 Feb. 26·0)	+ 0·26666	+64·1948	+9·3639	+41·2081	−19·2679	+15·9339
${}^{II}f$(1827 März 8·0)	+37·08912					
${}^{I}f$(1832 Jän. 21·0)	− 0·65093	+ 2·1515	−0·1126	+ 3·1687	− 1·2735	+ 1·6986
${}^{II}f$(1832 Jän. 1·0)	+ 2·61874					
${}^{I}f$(1832 Juli 9·0)	− 0·13095	+ 0·0727	−0·0753	+ 0·4371	− 0·6446	+ 0·5515
${}^{II}f$(1832 Juni 29·0)	+ 0·35973					
${}^{I}f$(1832 Nov. 21·0)	+ 0·00176	− 0·0036	+0·0008	+ 0·0025	− 0·0036	− 0·0172
${}^{II}f$(1832 Nov. 26·0)	+ 0·00038					

Uranus.

$$\frac{1}{m} = 22000.$$

0h M. Z. P.	$40^2 \frac{d\mu}{dt}$	$40 \frac{dL}{dt}$	$40 \frac{di}{dt}$	$40 \frac{d\Omega}{dt}$	$40 \frac{d\Pi}{dt}$	$40 \frac{d\varphi}{dt}$
1826 Februar 1	− 0"00155	−0"0008	−0"0002	−0"0003	−0"0029	+0"0035
März 13	− 32	− 20	− 2	− 5	− 23	+ 7
April 22	+ 143	− 13	0	− 9	− 29	− 32
Juni 1	132	+ 9	+ 1	− 5	− 18	− 31
Juli 11	+ 57	34	− 1	+ 4	+ 14	− 23
August 20	− 18	52	− 5	11	54	− 21
Sept. 29	− 85	60	− 10	16	94	− 25
Nov. 8	− 0·00140	+0·0062	−0·0017	+0·0017	+0·0131	−0·0034

0h M. Z. P.	$160^2 \frac{d\mu}{dt}$	$160 \frac{dL}{dt}$	$160 \frac{di}{dt}$	$160 \frac{d\Omega}{dt}$	$160 \frac{d\Pi}{dt}$	$160 \frac{d\varphi}{dt}$
1826 Juni 1	+ 0"02110	+ 0"004	0"000	− 0"002	− 0"007	− 0"013
Nov. 8	− 2243	+ 25	− 7	+ 7	+ 52	− 14
1827 April 17	− 4624	− 2	− 22	− 5	97	− 38
Sept. 24	− 5740	− 61	− 40	− 39	120	− 66
1828 März 2	− 5940	− 137	− 59	− 94	124	− 90
August 9	− 5432	− 215	− 76	− 162	119	− 106
1829 Jänner 16	− 4346	− 285	− 87	− 233	104	− 112
Juni 25	− 2786	− 337	− 92	− 297	88	− 106
Decbr. 2	− 894	− 361	− 88	− 343	74	− 92
1830 Mai 11	+ 1166	− 351	− 76	− 358	66	− 70
October 18	3195	− 307	− 58	− 341	65	− 47
1831 März 27	4926	− 233	− 36	− 290	70	− 26
Sept. 3	6003	− 140	− 16	− 208	75	− 13
1832 Februar 10	+ 0·05939	− 0·049	− 0·002	− 0·107	+ 0·071	− 0·009

0h M. Z. P.	$40^2 \frac{d\mu}{dt}$	$40 \frac{dL}{dt}$	$40 \frac{di}{dt}$	$40 \frac{d\Omega}{dt}$	$40 \frac{d\Pi}{dt}$	$40 \frac{d\varphi}{dt}$
1832 Februar 10	+ 0"00371	−0"0122	−0"0005	−0"0268	+0"0178	−0"0023
März 21	350	− 72	0	− 206	166	− 24
April 30	317	− 31	+ 4	− 148	148	− 25

0^h M. Z. P.	$40^2 \frac{d\mu}{dt}$	$40 \frac{dL}{dt}$	$40 \frac{di}{dt}$	$40 \frac{d\Omega}{dt}$	$40 \frac{d\Pi}{dt}$	$40 \frac{d\varphi}{dt}$
1832 Juni 9	+ 0ʺ00268	+0ʺ0001	+0ʺ0005	−0ʺ0095	+0ʺ0123	−0ʺ0025
Juli 19	193	22	5	− 50	90	− 20
August 28	+ 88	27	+ 3	− 17	49	− 8
October 7	− 59	+ 14	0	0	+ 7	+ 16
Nov. 16	− 142	− 8	− 2	− 5	− 13	+ 34
Decbr. 26	+ 0·00019	−0·0022	−0·0003	−0·0016	−0·0026	−0·0001
^{I}f(1826 Oct. 19·0)	+ 0ʺ02022	+2ʺ455	+0ʺ656	+2ʺ492	−1ʺ141	+0ʺ788
^{II}f(1826 Nov. 8·0)	+ 1·50813					
^{I}f(1831 Nov. 22·0)	− 0·08044	+0·041	+0·001	+0·127	−0·103	+0·012
^{II}f(1832 Feb. 10·0)	+ 0·01448					
^{I}f(1832 Oct. 27·0)	+ 0·00105	0·000	0·000	0·000	+0·001	−0·002
^{II}f(1832 Nov. 16·0)	+ 0·00013					

In der folgenden Tafel bezeichnen $\Delta\mu$, ΔL etc. die unter Zugrundelegung der früher angeführten Werthe der Planetenmassen resultirenden Störungsbeträge für das Intervall 1832 November 25·0 bis 1826 April 2·0. Um der neueren Forschung Rechnung zu tragen, habe ich schliesslich die von Herrn Newcomb vorgeschlagenen Massenwerthe acceptirt, und zwar

	$\frac{1}{m}$
Mercur	6944444
Venus	406690
Erde + Mond	328016
Mars	3093500
Jupiter	1047·35.

Die Änderungen, welche die ursprünglichen Störungsbeträge durch diese Annahmen erleiden, sind durch $\delta\Delta\mu$, $\delta\Delta L$ etc. ausgedrückt.

Störungen durch die Planeten. 1826 April 2·0.

	Mercur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus
$\Delta\mu$	− 0ʺ00371	− 0ʺ01161	− 0ʺ02672	− 0ʺ00905	− 5ʺ82524	+ 0ʺ03273	+ 0ʺ00045
$\delta\Delta\mu$	− 37	+ 14	− 224	+ 121	− 294		
ΔL_1	− 0·322	− 6·331	− 5·448	− 0·781	− 25' 50·279	+1' 5·099	+ 2·441
ΔL_2	+ 2·596	+25·286	+21·492	+19·158	+165 21·160	+0 28·242	+ 1·396
Summe....	+ 2·274	+18·955	+16·044	+18·377	+139 30·881	+1 33·341	+ 3·837
$\delta\Delta L$	+ 226	− 229	+ 1·344	− 2·454	+ 0 4·228		
Δi	− 0·010	− 0·098	− 0·315	− 0·399	+ 20 32·661	+0 9·582	+ 0·658
$\delta\Delta i$	− 1	+ 1	− 26	+ 53	+ 0 0·623		
$\Delta\Omega$	− 0·015	+ 0·071	+ 1·522	+ 1·730	+198 2·631	+0 41·009	+ 2·490
$\delta\Delta\Omega$	− 2	− 1	+ 127	− 231	+ 0 6·002		
$\Delta\Pi$	+ 0·080	− 0·409	− 0·023	− 0·612	− 4 59·201	−0 23·431	− 1·153
$\delta\Delta\Pi$	+ 8	+ 5	− 2	+ 82	− 0 0·151		
$\Delta\varphi$	+ 0·358	+ 0·928	+ 2·353	+ 0·710	− 24 55·304	+0 15·390	+ 0·801
$\delta\Delta\varphi$.......	+ 36	− 11	+ 197	− 95	− 0 0·755		

Um mit Hilfe der hier angegebenen, auf das Äquinox 1830·0 bezogenen Störungen das auf S. 379 enthaltene Elementensystem (I) auf das Äquinox 1826·0 zu übertragen, wurde dasselbe zunächst auf das Äquinox 1830·0 reducirt, dann durch Addition der Störungsbeträge in das System (II) übergeführt und letzteres schliesslich auf das Äquinox 1826·0 bezogen.

	I. 1832·0 (Oscul. 1832 Nov. 25·0)	Reduction auf 1830·0	I. 1830·0
L....	109° 49′ 0″81	—1′40″353	109° 47′ 20″457
Π....	109 58 59·50	—1 40·353	109 57 19·147
Ω....	248 13 53·50	—1 44·411	248 12 9·089
i....	13 13 18·47	+0 0·242	13 13 18·712
φ....	48 42 24·95		48 42 24·950
μ....	533·78831		533·78831

	Störungen der Elemente
L........	+2° 22′ 6″824
Π........	—0 5 24·807
Ω........	+3 18 55·333
i........	+0 20 42·729
φ........	—0 24 35·392
μ........	— 5·84735

2429×533″78831 = 360° 9′ 31″805

	II. 1830·0 (Oscul. 1826 April 2·0)	Reduction auf 1826·0
L.......	111° 59′ 55″476	—3′ 20″695
Π.......	109 51 54·340	—3 20·695
Ω.......	251 31 4·422	—3 28·715
i.......	13 34 1·441	+0 0·376
φ.......	48 17 49·558	
μ.......	527″94096	

Es ist daher

	II. 1826·0 (Oscul. 1826 April 2·0)
L........	111° 56′ 34″781
Π........	109 48 33·645
M.......	2 8 1·136
ω........	218 20 57·938

II. 1826·0
(Oscul. 1826 April 2·0)

☊	251°	27′	35″707
i	13	34	1·817
φ	48	17	49·558
μ			527·94096.

Mit Rücksicht auf die gewählte Osculationsepoche ergeben sich für den Zeitraum der Sichtbarkeit des Kometen im Jahre 1826 die durch die planetarischen Störungen (unter Annahme der Newcomb'schen Massenwerthe, welche auch den Angaben der Tafel auf S. 380 zu Grunde liegen) hervorgerufenen Änderungen der Elemente aus folgender Zusammenstellung.

1826 12ʰ M. Z. P.	ΔL	ΔΠ	ΔM	Δω	Δ☊	Δi	Δφ	Δμ
Febr. 27	−1″415	−0″582	−0″833	−1″386	+0″804	+0″230	−4″698	+0″0473
März 3	−1·139	−0·549	−0·590	−1·333	+0·784	+0·210	−4·349	+0·0438
7	−0·886	−0·517	−0·369	−1·266	+0·749	+0·186	−3·927	+0·0396
11	−0·660	−0·480	−0·180	−1·175	+0·695	+0·160	−3·433	+0·0347
15	−0·464	−0·432	−0·032	−1·051	+0·619	+0·131	−2·870	+0·0291
19	−0·298	−0·367	+0·069	−0·886	+0·519	+0·100	−2·249	+0·0228
23	−0·163	−0·280	+0·117	−0·674	+0·394	+0·069	−1·588	+0·0161
27	−0·063	−0·170	+0·107	−0·416	+0·246	+0·039	−0·913	+0·0092
31	−0·007	−0·047	+0·040	−0·119	+0·072	+0·010	−0·245	+0·0025
April 4	−0·004	+0·077	−0·081	+0·208	−0·131	−0·017	+0·403	−0·0040
8	−0·057	+0·192	−0·249	+0·558	−0·366	−0·041	+1·026	−0·0103
12	−0·169	+0·290	−0·459	+0·925	−0·635	−0·061	+1·620	−0·0163
16	−0·338	+0·367	−0·705	+1·305	−0·938	−0·078	+2·179	−0·0220
20	−0·560	+0·418	−0·978	+1·691	−1·273	−0·089	+2·695	−0·0272
24	−0·834	+0·436	−1·270	+2·072	−1·636	−0·094	+3·163	−0·0318
28	−1·157	+0·413	−1·570	+2·438	−2·025	−0·093	+3·577	−0·0358
Mai 2	−1·526	+0·343	−1·869	+2·780	−2·437	−0·086	+3·931	−0·0391
6	−1·935	+0·221	−2·156	+3·090	−2·869	−0·070	+4·223	−0·0417
10	−2·378	+0·043	−2·421	+3·362	−3·319	−0·047	+4·454	−0·0436

Die mittleren Sonnenörter wurden aus den Leverrier'schen Tafeln berechnet und auf das Äquinox 1826·0 bezogen. Die zur Reduction auf den wahren Ort dienenden Constanten sind den Oppolzer'schen Tafeln entlehnt. Diese Grössen, aus welchen in Verbindung mit den Elementen und deren Störungen die Ephemeride des Kometen abgeleitet wurde, sind zusammen mit den (von der Erdbahnexcentricität unabhängigen) Constanten zur Berechnung der Aberration in folgender Tafel enthalten. Die der Ephemeride des Kometen beigefügte Sternzeit ist in derselben Weise berechnet worden, wie für das Jahr 1832

Sonnenörter (Äquinox 1826·0) und Reductionsconstanten.

1826 12ʰ M. Z. P.		L	B	log R	f	G	log g	H	log h	log i
Februar	27	338° 54' 19"16	−0"02	9·996 1447	22"98	17° 12'	1·0190	292° 48'	1·2783	0"8805
März	1	340 54 37·64	+0·24	3696	23·16	17 2	0220	290 40	2774	8860
	3	342 54 50·00	+0·48	5983	23·33	16 52	0250	288 32	2766	8910
	5	344 54 55·83	+0·63	8295	23·51	44	0279	286 23	2759	8954
	7	346 54 54·65	+0·68	9·997 0622	23 68	36	0308	284 13	2752	8992
	9	348 54 45·94	+0·63	2962	23·85	29	0336	282 4	2746	9024
	11	350 54 29·15	+0 49	5309	24·01	23	0364	279 54	2741	9051
	13	352 54 3·86	+0·29	7667	24·18	18	0392	277 44	2737	9073
	15	354 53 29·72	+0·05	9·998 0038	24·34	14	0420	275 34	2734	9089
	17	356 52 46·49	−0·17	2425	24·50	11	0448	273 24	2732	9099
	19	358 51 54·05	−0·36	4837	24·66	9	0476	271 14	2731	9105
	21	0 50 52·52	−0 44	7278	24·82	8	0504	269 5	2731	9106
	23	2 49 42·25	−0·40	9756	24·98	7	0532	266 55	2732	9101
	25	4 48 23·84	−0·21	9·999 2271	25·15	8	0560	264 46	2734	9091
	27	6 46 57·84	+0·05	4815	25·31	9	0588	262 37	2737	9076
	29	8 45 24·69	+0·31	7377	25·47	10	0617	260 28	2741	9056
	31	10 43 44·55	+0·51	9945	25·64	12	0646	258 20	2745	9030

April	2	12	41	57·31	+0·61	0·000	2500	25·80		14	0675	256	12	2751	8999
	4	14	40	2·76	+0·61		5036	25·97		17	0705	254	5	2757	8962
	6	16	38	0·55	+0·50		7542	26·15		21	0735	251	58	2764	8920
	8	18	35	50·32	+0·34	0·001	0017	26·32		25	0766	249	51	2772	8873
	10	20	33	31·73	+0·12		2456	26·50		30	0797	247	46	2781	8820
	12	22	31	4·49	—0·13		4862	26·68		35	0828	245	41	2790	8762
	14	24	28	28·40	—0·34		7236	26·87		40	0860	243	37	2800	8697
	16	26	25	43·36	—0·50		9585	27·06		46	0893	241	33	2811	8627
	18	28	22	49·41	—0·54	0·002	1916	27·25		52	0926	239	30	2822	8551
	20	30	19	46·89	—0·45		4237	27·45	16	57	0960	237	28	2833	8467
	22	32	16	36·41	—0·23		6552	27·65	17	3	0994	235	27	2845	8377
	24	34	13	18·72	+0·05		8862	27·86		8	1029	238	27	2857	8280
	26	36	9	54·51	+0·30	0·003	1158	28·07		14	1065	231	27	2869	8176
	28	38	6	24·24	+0·47		3425	28·29		20	1100	229	28	2882	8065
	30	40	2	48·06	+0·52		5650	28·51		25	1136	227	30	2894	7946
Mai	2	41	59	5·98	+0·48		7825	28·74		31	1173	225	33	2907	7818
	4	43	55	17·89	+0·35		9937	28·97		36	1210	223	36	2920	7681
	6	45	51	23·59	+0·14	0·004	1982	29·20		41	1247	221	41	2932	7535
	8	47	47	22·88	—0·09		3956	29·45		45	1285	219	46	2945	7378
	10	49	43	15·62	—0·31	0·004	5857	29·69	17	49	1·1323	217	52	1·2957	0"7212

Ephemeride des Kometen.

1826·0 12ʰ M. Z. P.	α☄ app.	δ☄ app.	log r	log Δ	Aberr.-Zeit	Sternzeit
Febr. 27	1ʰ 49ᵐ 32ˢ98	9° 14' 0"7	9·97743	0·08328	10ᵐ 4ˢ1	10ʰ 29ᵐ 5ˢ6
28	53 34·60	20 20·8			10 0·5	33 2·1
März 1	57 38·85	26 33·1	9·97324	0·07815	9 57·0	36 58·7
2	2 1 45·75	32 37·2			53·4	40 55·3
3	5 55·31	38 32·3	9·96943	0·07294	49·8	44 51·8
4	10 7·53	44 18·0			46·3	48 48·4
5	14 22·41	49 53·5	9·96604	0·06766	42·7	52 44·9
6	18 39·97	55 18·4			39·1	56 41·5
7	23 0·21	10 0 32·1	9·96307	0·06232	35·6	11 0 38·0
8	27 23·12	5 33·9			32·0	4 34·6
9	31 48·70	10 23·3	9·96057	0·05693	28·5	8 31·1
10	36 16·96	14 59·7			25·0	12 27·7
11	40 47·88	19 22·5	9·95854	0·05153	21·5	16 24·2
12	45 21·46	23 31·2			18·0	20 20·8
13	49 57·69	27 25·2	9·95701	0 04613	14·5	24 17·3
14	54 36·56	31 4·0			11·1	28 13·9
15	59 18·05	34 26·9	9·95598	0·04074	7·7	32 10·4
16	3 4 2·15	37 33·6			4·3	36 7·0
17	8 48·85	40 23·4	9·95547	0·03541	1·0	40 3·5
18	13 38·12	42 56·0			8 57·7	44 0·1
19	18 29·93	45 10·7	9·95548	0·03015	54·5	47 56·7
20	23 24·27	47 7·2			51·3	51 53·2
21	28 21·11	48 45·1	9·95602	0·02499	48·2	55 49·8
22	33 20·41	50 3·9			45·1	59 46·3
23	38 22·15	51 3·2	9·95707	0·01997	42·1	12 3 42·9
24	43 26·30	51 42·7			39·2	7 39·4
25	48 32·81	52 1·9	9·95863	0·01511	36·3	11 36·0
26	53 41·66	52 0·6			33·5	15 32·5
27	58 52·80	51 38·5	9·96068	0·01046	30·8	19 29·1
28	4 4 6·18	50 55·1			28·2	23 25·6
29	9 21·75	49 50·3	9·96321	0·00605	25·6	27 22·2
30	14 39·46	48 23·8			23·2	31 18·7
31	19 59·25	46 35·4	9·96619	0·00190	20·8	35 15·3
April 1	25 21·05	44 24·7			18·6	39 11·8
2	30 44·79	41 51·6	9·96961	9·99807	16·4	43 8·4
3	36 10·39	38 55·9			14·4	47 4·9
4	41 37·77	35 37·5	9·97344	9·99457	12·5	51 1·5
5	47 6·83	31 56·3			10·6	54 58·0

1826·0 12h M. Z. P.	α☄ app.	δ☄ app.	log r	log Δ	Aberr.-Zeit	Sternzeit
April 6	$4^h\,52^m\,37^s{\cdot}48$	$10°27'52''{\cdot}2$	9·97764	9·99145	$8^m\ 8^s{\cdot}9$	$12^h\,58^m\,54^s{\cdot}6$
7	58 9·62	23 25·1			7·3	13 2 51·1
8	5 3 43·13	18 35·0	9·98220	9·98873	5·9	6 47·7
9	9 17·91	13 22·0			4·5	10 44·2
10	14 53·83	7 46·1	9·98708	9 98645	3·3	14 40·8
11	20 30·78	1 47·5			2·3	18 37·3
12	26 8·62	9 55 26·2	9·99225	9·98464	1·3	22 33·9
13	31 47·22	48 42·6			0·5	26 30·5
14	37 26·43	41 36·8	9·99769	9·98332	7 59·9	30 27·0
15	43 6·12	34 9·1			59·3	34 23·6
16	48 46·14	26 20·0	0·00335	9·98251	59·0	38 20·1
17	54 26·33	18 9·7			58·7	42 16·7
18	6 0 6·54	9 38·8	0·00923	9·98224	58·7	46 13·2
19	5 46·62	0 47·7			58·8	50 9·8
20	11 26·42	8 51 37·0	0·01529	9·98252	59·0	54 6·3
21	17 5·79	42 7·1			59·4	58 2·9
22	22 44·57	32 18·8	0 02150	9·98337	59·9	14 1 59·4
23	28 22·61	22 12·7			8 0·6	5 56·0
24	33 59·76	11 49·4	0·02784	9·98479	1·5	9 52·5
25	39 35·87	1 9·5			2·5	13 49·1
26	45 10·81	7 50 13·8	0·03429	9·98678	3·7	17 45·7
27	50 44·42	39 3·1			5·1	21 42·2
28	56 16·57	27 38·0	0·04082	9·98934	6·6	25 38·8
29	7 1 47·12	15 59·2			8·2	29 35·3
30	7 15·94	4 7·6	0·04743	9·99246	10·1	33 31·9
Mai 1	12 42·89	6 52 3·9			12·1	37 28·4
2	18 7·85	39 48·9	0·05409	9·99614	14·2	41 25·0
3	23 30·70	27 23·4			16·5	45 21·5
4	28 51·32	14 48·1	0·06078	0·00034	19·0	49 18·1
5	34 9·61	2 3·9			21·7	53 14·6
6	39 25·46	5 49 11·5	0·06750	0·00505	24·5	57 11·2
7	44 38·77	36 11·6			27·4	15 1 7·7
8	49 49·45	23 5·1	0·07423	0·01025	30·6	5 4·3
9	54 57·41	9 52·7			33·8	9 0·9
10	8 0 2·58	4 56 35·2	0·08095	0 01590	8 37·2	15 12 57·4

Beobachtungen des Kometen im Jahre 1826.

Der Komet ist am 27. Februar 1826 von Hauptmann v. Biela in Josefstadt (Böhmen) entdeckt worden. Die Vorgeschichte dieser Entdeckung, oder richtiger gesagt, Auffindung

des Kometen ist nach R. Wolf's »Handbuch der Astronomie« folgende. Die von Bessel, Gauss und anderen Astronomen berechneten Elemente des von Pons am 10. November 1805 entdeckten Kometen zeigten eine so auffällige Ähnlichkeit mit den Elementen des von Montaigne am 8. März 1772 entdeckten Kometen, dass Bessel anfänglich an die Identität dieser Kometen glaubte; später jedoch liess er diese Annahme fallen, da die von ihm aus der zwischen beiden Erscheinungen verflossenen Zeit berechnete Halbaxe der Bahn den Beobachtungen nicht genügte. Gauss hatte für die Umlaufszeit des Pons'schen Kometen lediglich aus den Beobachtungen während des Jahres 1805 4·7 Jahre gefunden.

Es ist noch unaufgeklärt, wie es kam, dass Morstadt, ein Liebhaber der Astronomie und Besitzer einer Sternwarte in Prag, nicht nur an der Identität der Kometen Montaigne und Pons festhielt, sondern auch die Ansicht vertrat, dass letzterer Komet die fünfte Wiederkehr des ersteren sei, die Umlaufszeit daher etwa $6^3/_4$ Jahre betrage. Thatsächlich machte Morstadt den ihm befreundeten Hauptmann v. Biela auf die Anfangs des Jahres 1826 zu gewärtigende Wiederkehr des Kometen aufmerksam und veranlasste ihn hiedurch zu eifriger Nachforschung, welche dann auch bald von Erfolg gekrönt wurde. Die Verdienste, welche sich Biela durch die Auffindung des Kometen und die wissenschaftliche Begründung der Annahme einer Periode von $6^3/_4$ Jahren erworben hat, fanden auch gebührende Anerkennung, indem der Komet seither den Namen »Biela« trägt.

Am 9. März wurde der Komet in Marseille von Gambart, welcher von der erfolgten Entdeckung durch Biela noch keine Kenntniss hatte, aufgefunden und, nachdem der elliptische Charakter seiner Bahn bald allgemein bekannt worden war, während der folgenden zwei Monate an verschiedenen Sternwarten häufig beobachtet. Er war immer rund, etwa 2′ im Durchmesser, mit merklicher Verdichtung gegen die Mitte zu, aber ohne eigentlichen Kern, und stets so schwach, dass Mondschein die Beobachtung vereitelte. Die kleinste Entfernung des Kometen von der Erde war 0·96; die letzte Beobachtung datirt vom 9. Mai.

Åbo (Argelander).

$L = -1^h\ 19^m\ 45{}^s5.$ $\varphi = 60°\ 17'\ 3''.$

Die Differenz Komet—Stern ist aus den angegebenen scheinbaren Sternörtern abgeleitet worden.

1826	M. Z. Åbo	α☄ — α*	n	α☄	Par.	δ☄ — δ*	n	δ☄	Par.	M. Z. P.-Aberr.	B—R Δα	B—R Δδ	Stern
April 3	10ʰ 0ᵐ55ˢ	+0ᵐ 33ˢ63	6	4ʰ 35ᵐ 22ˢ66	+0ˢ30					8ʰ 32ᵐ 55ˢ	−0ˢ49	—	21
3	10 4 4					— 9' 21"8	3	10°39'23"5	+ 7"6	8 36 4	—	+ 8"9	21
4	9 38 11					— 4 24·4	8	10 36 3·6	+ 7·5	8 10 13	—	+ 0·4	23
4	9 38 31	+0 53·42	10	4 40 44·53	+0·30					8 10 33	−0·36	—	23
5	9 17 45	−1 29·13	4	4 46 8·71	+0·30	+ 0 54·3	4	10 32 30·5	+ 7·5	7 49 49	−0·53	+ 1·6	25
6	9 41 38	+0 6·85	1	4 47 44·68	+0·30	— 3 10·7	1	10 28 25·5	+ 7·6	8 13 43	−0·44	+ 1·1	25
9	9 17 7	−1 11·81	} 1	5 8 19·07	+0·30	— 6 34·8	} 1	10 13 52·6	+ 7·6	7 49 17	−0·17	−18·0	30
9	9 17 7	−1 23·83		5 8 19·31	+0·30	−18 23·5		10 13 54·3	+ 7·6	7 49 17	+0·07	−16·3	31

Altona (Clausen).

$L = -0^h\,30^m\,25^s5.$ $\varphi = 53°\,32'\,45''.$

1826	M. Z. Altona	n	α☄	Par.	n	δ☄	Par.	M. Z. P.-Aberr.	B−R Δα	B−R Δδ
März 20	8h 16m 41s	2	3h 22m 31s13	+0s32	2	10° 46' 53"4	+6"2	7h 37m 24s	+1s04	+12"2
27	8 54 49	3	3 58 4·08	+0·34				8 15 52	+0·16	—
27	8 57 34				2	10 51 27·7	+6·6	8 18 37	—	— 8·9
28	8 33 36	4	4 3 12·47	+0·33				7 54 42	+0·17	—
28	8 37 27				3	10 50 51·0	+6·5	7 58 33	—	— 6·4
31	8 35 30	2	4 19 4·85	+0·34	2	10 46 47·2	+6·6	7 56 43	+0·11	— 1·4

Bremen (Olbers).

$L = -0^h\,25^m\,54^s0.$ $\varphi = 53°\,4'\,36''.$

1826	M. Z. Bremen	α☄	Par.	δ☄	Par.	M. Z. P.-Aberr.	B−R Δα	B−R Δδ
März 28	8h 24m 19s	4h 3m 9s60	+0s33	10° 51' 12"0	+6"4	7h 49m 56s	−1s66	+14"3
30	8 51 29	4 13 48·73	+0·35	10 48 34·0	+6·6	8 17 11	−1·09	+ 2·0
31	8 20 48	4 19 1·13	+0·33	10 47 2·0	+6·5	7 46 33	−1·36	+12·5
April 7	8 36 30	4 57 14·09	+0·35	10 24 21·8	+6·7	8 2 28	− 0·29	+17·7
8	8 48 46	5 2 49·49	+0·35	10 19 26·5	+6·8	8 14 46	−1·03	+11·4
9	8 39 15	5 8 21·35	+0·35	10 14 21·9	+6·8	8 5 16	−1·56	+14·1
10	8 48 47	5 13 58·60	+0·35	10 8 41·2	+6·8	8 14 50	−2·29	+ 7·9
25	9 26 45	6 38 50·73	+0·36	8 3 24·0	+7·0	8 52 49	−1·15	+57·4
30	9 37 44	7 6 33·73	+0·35	7 6 5·0	+6·9	9 3 40	− 1·69	+36·5

Göttingen (Harding).

$L = -0^h\,30^m\,25^s.5.$ $\varphi = 51°\,31'\,48''.$

1826		M. Z. Göttingen	α☄	Par.	δ☄	Par.	M. Z. P.-Aberr.	B—R Δα	B—R Δδ
März	12	8h 21m 6s	2h 44m 31s13	+0s32	10° 22' 39"0	+ 5"8	7h 41m 22s	—0s68	— 2"8
	12	8 25 19	32·40	+0·32	45·0	+ 5·8	7 45 35	—0·21	+ 2·5
	13	7 54 24	2 49 3·13	+0·31	10 26 17·0	+ 5·7	7 14 43	+0·68	—17·3
	14	7 44 53	2 53 38·80	+0·30	10 30 6·0	+ 5·7	7 5 16	—0·16	— 8·7
April	8	8 28 33	5 2 44·40	+0·36	10 19 38·0	+ 6·6	7 50 1	—0·37	+17·6
	8	8 38 39	46·20	+0·36	32·0	+ 6·6	8 0 7	- 0·92	+13·6
	8	8 54 10	50·67	+0·36	30·0	+ 6·6	8 15 38	- 0·12	+14·8
	9	8 49 2	5 8 23·53	+0·37	10 13 45·0	+ 6·7	8 10 32	—0·58	—21·7
	9	8 58 55	26·27	+0·37	35·0	+ 6·7	8 20 25	—0·14	—29·5
	9	9 9 19	28·07	+0·37	26·0	+ 6·7	8 30 49	—0·77	—36·2
	27	9 38 20	6 50 2·13	+0·37	—	—	8 59 50	—0·25	—
	27	9 54 57	7·13	+0·38	7 40 28·0	+ 6·9	9 16 27	+0·91	+14·9

Josefstadt (Biela).

$L = -0^h\,54^m\,24^s.5.$ $\varphi = 50°\,20'\,25''$

1826	M. Z. Josefstadt	α☄ — α*	α☄	Par.	δ☄ — δ*	δ☄	Par.	M. Z. P.-Aberr.	B—R Δα	B—R Δδ	Stern	Bemerkungen
Feb. 28	8ʰ 7ᵐ 37ˢ	+1ᵐ36ˢ30	1ʰ52ᵐ44ˢ94	+0ˢ30	—28' 17"5	9°18'40"4	+5"3	7ʰ 3ᵐ 11ˢ	+ 0ˢ65	— 17"3	1	9 Vergl., gute Beob.
März 2	8 33 4		2 0 59·95	+0·31		9 31 29·0	+5·4	7 28 45	+ 1·21	+ 5·1	—	3 Vergl.
3	8 4 3	+1 47·53	2 5 2·28	+0·30	+ 6 18·0	9 36 45·5	+5·3	6 59 48	— 0·49	— 28·2	2	Sehr gute Beobachtung
4	7 59 3		2 9 14·73	+0·30		9 42 —	+5·4	6 54 51	+ 1·17	—	—	Mittelm. Beobachtung
7	7 58 18		2 22 4·93	+0·31		9 59 26·8	+5·5	6 54 18	+ 0·50	+ 5·9	—	Sehr gute Beobachtung
11	7 40 4		2 39 44·27	+0·30		10 18 35·0	+5·5	6 36 17	— 2·17	+ 15·8	—	Nur 1 Vergl.
12	7 39 51	—0 36·10	2 44 20·57	+0·31	—13 0·0	10 22 39·7	+5·6	6 36 8	+ 1·18	+ 8·7	5	Gute Beob.
12	8 4 23	—0 31·07	25·60	+0·31	—12 45·0	54·7	+5·6	7 0 40	+ 1·54	+ 19·6	5	Gute Beob.
29	9 4 41	+4 14·00	4 8 41·92	+0·37	+12 42·0	10 47 15·9	+6·4	8 1 50	+12·88	—160·2	14	3 Vergl., Declinat. unsicher.

Mailand (Carlini).

$L = -0^h\ 27^m\ 25^s.0.$ $\varphi = 45°\ 27'\ 59''.$

1826		M. Z. Mailand			α☄			Par.	δ☄			Par.	M. Z. P.-Aberr.			B—R Δα	B—R Δδ
März	29	9h	1m	12s	4h	8m	33s47	+0s41	10°	49'	48"0	+5"8	8h	25m	21s	—0s69	— 7"5
	30	8	57	10	4	13	46·93	+0·41		48	42·0	+5·8	8	21	21	—3·75	+ 9·5
	31	8	28	31	4	19	4·33	+0·39		46	52·0	+5·7	7	52	45	+0·52	+ 2·2
April	1	7	55	5	4	24	12·93	+0·37		44	53·0	+5·6	7	19	21	—4·87	+ 6·7
	2	7	46	19	4	29	39·40	+0·36		42	0·0	+5·6	7	10	37	+0·19	—18·6
	4	8	52	44	4	40	47·67	—0·41		36	30·0	+5·9	8	17	6	+1·10	+26·2
	5	8	5	56	4	46	4·87	+0·38		32	44·0	+5·7	7	30	20	+0·17	+10·2
	6	7	52	19	4	51	27·47	+0·37		28	51·0	+5·7	7	16	45	—4·48	+14·7
	7	7	59	2	4	57	2·93	+0·37		24	49·0	+5·7	7	23	29	—2·43	+36·6
	7	9	9	25			19·73	+0·42		24	2·0	+6·0	8	33	52	—1·84	+ 3·3
	8	8	42	45	5	2	48·80	+0·41		20	22·0	+5·9	8	7	14	+0·07	+64·4
	9	8	37	28	5	8	21·40	+0·40	10	14	59·0	+5·9	8	1	58	—0·71	+49·6

Nîmes (Valz).

$L = -0^h\,8^m\,3^s1.$ $\varphi = 43°\,50'\,36''.$

1826		M. Z. Nîmes			α ☄			Par.	δ ☄			Par.	M. Z. P.-Aberr.			B—R Δα	B—R Δδ
März	29	9ʰ	41ᵐ	22ˢ	4ʰ	8ᵐ	44ˢ20	+0ˢ42	10°	50'	35"0	+5"9	9ʰ	24ᵐ	53ˢ	—3ˢ03	+42"6
	30	8	9	59		13	44·20	+0·39		49	58·0	+5·4	7	53	32	—0·35	+83·2
	31	9	30	15		19	20·27	+0·43		47	12·0	+5·8	9	13	51	—1·55	+28·8
April	1	9	3	27		24	36·20	+0·42		45	2·0	+5·7	8	47	5	—1·20	+24·2
	2	9	29	7		30	6·27	+0·43		43	43·0	+5·9	9	12	47	—0·40	+98·4
	3	9	12	4		35	26·33	+0·43		39	25·0	+5·8	8	55	46	—1·87	+11·1
	4	9	9	8		40	53·20	+0·43		36	7·0	+5·8	8	52	52	—1·50	+ 8·2
	5	9	17	55		46	24·73	+0·43		32	4·0	+5·9	9	1	41	—0·83	—15·0
	6	9	10	12	4	51	52·20	+0·43	10	29	34·0	+5·9	8	54	0	—2·06	+74·9

Mannheim (Nicolai).

$L = -0^h\,24^m\,29^s\!.5.$ $\varphi = 49°\,29'\,11''.$

1826	M. Z. Mannheim	α☄—α*	α☄	Par.	δ☄—δ*	δ☄	Par.	M. Z. P.-Aberr.	B—R Δα	B—R Δδ	Stern	Vergl.
April 1	8h 38m 17s	—2m 14s92	4h 24m 28s31	+0s37	—18' 4"2	10° 44' 44"7	+6"2	8h 5m 29s	+0s18	+3"4	20	3
8	8 41 54	+2 26·00	5 2 48·74	+0·38	—20 16·2	10 19 25·6	+6·4	8 9 18	—0·49	+8·9	29	4
9	8 30 41	—1 10·00	5 8 20·88	+0·37	— 6 18·3	10 14 9·1	+6·3	7 58 7	—0·34	—0·8	30	4

Prag (David).

$L = -0^h\,48^m\,20^s\!.6.$ $\varphi = 50°\,5'\,19''.$

1826	M. Z. Prag	α☄—α*	α☄	Par.	δ☄—δ*	δ☄	Par.	M. Z. P.-Aberr.	B—R Δα	B—R Δδ	Stern
März 31	8h 47m 23s	+ 1m 9s53	4h 19m 3s48	+0s37	— 1' 25"0	10° 47' 20"1	+6"3	7h 50m 41s	+0s11	+30"7	16
April 1	8 5 11	+ 6 20·55	4 24 14·49	+0·35	— 3 17·0	10 45 28·1	+6·1	7 8 32	—0·91	+41·3	16
8	8 56 38	+ 4 38·93	5 2 48·71	+0·38	—21 36·6	17 40·3	+6·5	8 0 11	+1·60	—98·1	28
9	8 45 53	—17 16·77	5 8 18·03	+0·37	+26 51·5	10 15 18·8	+6·5	7 49 28	—1·18	+67·2	33

Florenz (Inghirami).

$L = -0^h\ 35^m\ 40^s.8$. $\varphi = 43°\ 46'\ 4''$.

1826.	M. Z. Florenz	α☿ — α*	Refr.	Eigen-bew.	α☿	Par.	δ☿ — δ*	Refr.	Eigen-bew.	δ☿	Par.	Stern
März 19	8h 48m 8s	— 4m59s60	—0s17	—0s01	3h 17m41s90	+0s40						12
19	8 57 39	— 1 23·26	— 4	— 1	17 44·01	40	— 1' 59"2	— 0"3	— 4"1	10° 44' 49"5	+ 5"4	10
19	8 58 7	— 3 11·45	+ 2	— 1	17 44·10	40	+ 0 55·3	+ 0·1	— 4·1	44 48·9	5·4	11
April 1	9 46 32	—10 8·02	— 21	+ 1	4 24 40·84	43	— 3 46·5	— 1·5	— 5·6	44 51·7	5·9	21
2	8 29 12	— 6 34·85	— 28	+ 1	29 47·78	42	—40 34·7	— 2·6	— 3·4	42 0·4	5·7	22
2	8 48 23	— 4 56·79	— 7	0	29 52·18	41						21
3	9 3 37	+ 0 30·73	— 13	— 1	35 19·62	43	— 9 40·2	— 1·1	+11·3	39 15·3	5·8	21
4	8 52 21	+ 5 55·95	— 14	0	40 44·83	42	—13 15·8	— 1·2	—34·2	34 54·1	5·7	21
5	8 55 47	+11 25·03	— 18	0	46 13·85	42	—16 24·5	— 1·5	—25·4	31 53·9	5·8	21
6	9 16 33	+17 1·02	— 34	+ 1	51 49·68	43	—19 58·4	— 2·6	—14·4	28 29·9	5·9	21
7	8 35 51	+11 50·39	+ 24	— 1	4 57 11·24	41	+32 19·6	+ 2·2	+ 6·4	24 20·9	5·7	24
8	8 42 54	+17 25·68	+ 22	— 1	5 2 46·49	42	+27 33·7	+ 2·0	+ 7·2	10 19 35·6	5·7	24
9	8 33 4	—17 15·56	+ 17	— 1	5 8 19·40	41	+25 50·9	+ 1·6	+ 8·0	14 27·8	5·7	33
10	7 55 20	—11 48·19	+ 11	— 2	5 13 46·69	40	+20 29·6	+ 1·1	+ 7·2	10 9 5·2	5·7	33
Mai 2	9 15 6	— 2 37·52	— 12	+ 4	7 17 23·05	41	—12 58·9	— 1·1	— 4·4	6 42 36·9	5·8	40
2	9 25 38	— 1 17·54	— 35	+ 4	7 17 23·99	40	—35 57·6	— 3·1	— 3·9	6 41 2·3	5·8	39
8	9 23 6	+18 52·82	—0·14	+0·01	7 49 5·46	+0·39	— 12 8·6	— 1·3	—58·7	5 26 27·6	+ 5·7	42

Florenz (Fortsetzung).

1826	M. Z. P.-Aberr.	B—R		α☄—α*		δ☄—δ*	
		Δα	Δδ	ε	E	ε	E
März 19	8h 3m 33s	+0s47	—				
19	8 13 3	+0·64	+ 4"2	0s41	0s24	6"0	3"5
19	8 13 31	+0·64	+ 3·6	0·33	0·23	5·7	4·0
April 1	9 2 32	—0·01	+15·6				
2	7 45 14	+0·83	—14·2				
2	8 4 26	+0·90	—	0·53	0·31		
3	8 19 42	—0·41	— 3·2	0·24	0·12	8·9	4·4
4	8 8 27	+0·24	—71·2	0·05	0·03	37·8	26·7
5	8 11 55	—0·33	—33·2				
6	8 32 43	+0·32	+ 7·1				
7	7 52 2	—0·67	+13·9				
8	7 59 7	—0·33	+16·1				
9	7 49 19	+0·26	+15·3				
10	7 11 36	+0·62	+15·6				
Mai 2	8 31 11	+2·61	+66·5				
2	8 41 43	+1·16	—22·7	1·62	0·94	12·0	6·9
8	8 38 56	—0·37	+97·9				

Marseille (Gambart).

$L = -0^h\ 12^m\ 7^s\!.2.$ $\varphi = 43°\ 17'\ 49''.$

1826	M. Z. Marseille	α☄—α*	Refr.	α☄	Par.	δ☄—δ*	Refr.	Red.	δ☄	Par.	Stern
März 9	8ʰ 10ᵐ 12ˢ	— 2ᵐ 6ˢ28	+ 0ˢ08	2ʰ 31ᵐ 2ˢ32	+ 0ˢ36	+ 9' 48"2	+0"7	— 0"9	10° 9' 28"8	+ 4"9	4
11	7 54 21	—11 22·42	+ 5	2 39 57·38	36	+ 7 37·8	+ 4	— 2	18 11·4	4·8	6
13	7 27 0	— 2 18·31	+ 6	2 49 1·48	34	+15 56·1	+ 7	— 2	26 29·9	4·8	6
15	7 51 26	— 5 3·66	+ 2	2 58 24·76	36	+ 5 19·7	+ 3	+ 4	33 44·4	4·9	8
15	7 51 26	— 5 11·89	— 1	2 58 24·66	36	— 2 35·3	— 1	— 1·6	33 55·0	4·9	9
17	7 47 53	+ 4 25·63	+ 5	3 7 54·06	36	+10 59·2	+ 6	— 1	39 23·7	5·0	8
17	7 47 53	+ 4 17·33	+ 2	3 7 53·89	36	+ 3 12·5	+ 2	— 1	39 44·5	5·0	9
19	7 32 46	— 3 25·01	0	3 17 30 53	35	+ 0 36·6	0	— 1	44 34·1	4·9	11
21	7 52 36	+ 6 29·58	+ 2	3 27 25·12	37	+ 4 7·0	+ 2	— 1	48 4·7	5·1	11
27	7 56 3	—15 47·43	— 3	3 57 54·15	38	— 5 51·6	— 3	0	51 55·4	5·2	15
April 1	8 6 35	—10 25·55	— 2	4 24 23·49	39	— 4 5·5	— 2	+ 2	44 39·8	5·4	21
3	7 52 59	+ 0 20·10	— 4	4 35 9·09	39	— 9 14·3	— 4	+ 8	39 31·4	5·4	21
4	7 57 12	+ 5 48·27	— 5	4 40 37·24	39	—12 34·8	— 6	+ 2	36 10·1	5·4	21
5	8 8 12	+11 19·64	— 8	4 46 8·56	40	—16 7·2	— 8	+ 2	32 37·5	5·5	21
9	8 26 27	+11 25·40	— 5	5 8 22·08	41	— 9 48·9	— 5	— 1·4	14 4·1	5·6	26
9	8 26 27	+11 18·02	— 9	5 8 22·12	42	—13 5·2	— 8	+ 2·0	10 14 2·5	5·7	27
30	8 53 3	+ 6 11·01	— 0·01	7 6 28·03	+ 0·40						37
30	8 53 3					+ 3 12·8	+0·3	+14·0	7 5 24·8	+ 5·8	38

Marseille (Fortsetzung).

1826	M. Z. P.-Aberr.	B−R		α☄−α*		δ☄−δ*		n	n'
		Δα	Δδ	ε	E	ε	E		
März 9	7ʰ 48ᵐ 36ˢ	+0ˢ54	0″0	0ˢ38	0ˢ13	6″3	3″1	9	4
11	7 32 52	+0·32	−18·6	43	18	7·4	5·2	6	2
13	7 5 37	+0·81	− 3·9	42	14	14·1	8·1	9	3
15	7 30 10	+0·02	− 0·8	58	19	11·0	7·8	9	2
15	7 30 10	−0·08	+ 9·8	63	21			9	1
17	7 26 44	+0·18	−23·8	36	12	6·3	3·6	9	3
17	7 26 44	+0·01	− 3·0	33	11	1·5	0·9	9	3
19	7 11 43	−0·42	− 6·2	31	18			3	1
21	7 31 40	−0·11	−18·5	58	19	7·1	4·1	9	3
27	7 35 24	−0·96	+16·5	30	17			3	1
April 1	7 46 9	−0·29	− 4·2	45	15	8·3	4·8	9	3
3	7 32 37	−0·32	+ 6·5	57	19	1·9	0·9	9	4
4	7 36 52	−0·19	0·0	35	12	2·2	1·3	9	3
5	7 47 54	−0·14	+ 6·3	65	27	4·9	3·5	6	2
9	8 6 15	−1·00	− 4·7	40	17			6	1
9	8 6 15	−0·95	− 6·2	47	19			6	1
30	8 32 46	−0·30	—	0·59	0·24			6	—
30	8 32 46	—	−20·2			4·4	2·5	—	3

Neapel (Brioschi).

$L = -0^h\ 47^m\ 39^s.5.$ $\varphi = 40°\ 51'\ 45''.$

1826	Sternzeit Neapel	α☿—α*	Refr.	Eigen-bew.	α☿	Par.	δ☿—δ*	Refr.	Eigen-bew.	δ☿	Par.	Stern
März 31	8h 50m 44s	— 7m 2s05	—0s19		4h 18m 55s70	+0s42	—5° 22' 3"0	— 9"8		10° 46' 49"3	+5"1	18
31	9 12 41	— 6 56·60	—0·88		19 0·46	43	—5 22 7·0	—17·8		46 37·3	5·2	18
April 1	9 5 58	— 1 36·03	—0·53		24 21·37	43	—5 24 3·0	—13·7		44 45·4	5·2	18
4	9 43 41	+14 44·13	+0·73		40 42·74	44	—5 32 40·5	+ 1·5		36 23·0	5·4	18
8	9 39 24	+36 42·88	+2·51	+0s01	5 2 43·24	43	—5 49 39·9	+21·8	—1"9	19 41·9	5·3	18
10	8 58 24	+47 39·78	+4·32	— 1	13 41·90	39	—6 0 36·5	+40·1	+1·5	9 6·9	5·1	18
10	9 10 7	+47 42·62	+3·86	+ 1	13 44·30	40	—6 0 25·5	+35·5	—2·2	10 9 9·6	5·2	18
15	9 38 25	— 3 51·19	+1·17	+ 1	41 56·48	40	+2 13 38·0	+15·9	—2·2	9 35 41·5	5·3	35
15	9 49 36	— 3 47·35	+0·67	— 1	5 41 59·80	41	+2 13 25·4	+10·6	+2·1	9 35 27·9	5·3	35
27	11 23 7	—40 24·02	—0·62		6 49 48·27	43	+2 0 59·7	— 4·0		7 40 31·4	5·5	42
27	11 35 52	—40 18·39	—1·65	+ 1	49 52·88	44	+2 1 6·3	—16·1	—1·7	7 40 24·2	5·5	42
Mai 1	11 6 2	—18 29·08	—0·06		7 11 43·72	39	+1 14 12·0	+ 1·3		6 53 49·2	5·3	42
5	11 36 36	+ 3 0·86	+1·30		33 14·97	39	+0 24 39·5	+15·2		6 4 30·8	5·3	42
7	12 28 59	+13 36·04	+2·70		43 51·52	42	—0 2 45·0	+32·8		5 37 23·9	5·4	42
8	11 57 42	+18 42·05	+1·74		48 56·56	39	—0 13 42·0	+19·5		5 26 13·7	5·3	42
8	12 36 6	+18 51·01	— 1·25		49 2·53	42	—0 14 42·0	—15·2		5 24 39·0	5·4	42
9	12 43 19	+23 56·97	+5·28		7 54 15·01	+0·41	—0 29 2·0	+64·7		5 11 38·9	+5·4	42

Neapel (Fortsetzung).

1826	M. Z. P.-Aberr.	B—R		α☄		δ☄	
		Δα	Δδ	ε	E	ε	E
März 31	7ʰ 20ᵐ 13ˢ	+0ˢ84	— 3″7	0ˢ93	0ˢ54	7″4	4″3
31	7 42 6	—0·94	—13·9				
April 1	7 31 31	+0·90	— 0·1				
4	7 57 25	+0·68	+15·9	0·84	0·60	2·8	2·0
8	7 37 32	+1·43	+17·6				
10	6 48 50	+1·13	+11·4	0·25	0·18	3·9	2·7
10	7 0 31	+0·82	+17·0				
15	7 9 9	—0·60	+ 5·6	0·47	0·33	7·0	4·9
15	7 20 18	+0·10	— 4·5				
27	8 6 18	—1·67	—16·0				
27	8 19 0	+0·01	—17·2				
Mai 1	7 33 25	+1·61	—24·3	1·68	0·84	26·9	13·4
5	7 48 1	+1·28	+17·8	1·53	0·76	16·3	8·1
7	8 32 17	—1·79	—35·2	3·61	2·55	13·5	9·6
8	7 57 7	—0·28	+60·8	1·62	1·15	52·1	36·9
8	8 35 25	—2·52	—12·9				
9	8 38 37	+0·91	+ 0·4	1·65	0·95	14·9	8·6

Padua (Santini).

$L = -0^h\ 38^m\ 7^s\!.9.$ $\varphi = 45°\ 24'\ 2''.$

1826	Sternzeit Padua	α☄ — α*	Refr.	α☄	Par.	δ☄ — δ*	Refr.	δ☄	Par.	Stern
März 25	7h 49m 13s	— 3m35s59	−0s25	3h 47m28s26	+0·36	− 1° 6'50"0	−3"0	10° 52' 33"5	+5"4	13
25	8 3 2	— 3 33·79	— 31	3 47 30·00	36	−1 7 10·0	−3·4	52 13·1	5·4	13
29	8 37 27	+17 17·74	— 39	4 8 21·40	38	−1 9 40·0	−4·0	49 42·4	5·6	13
31	8 7 57	— 7 17·17	+ 20	18 50·36	36	+0 59 38·0	+2·6	47 20·7	5·5	19
31	8 21 40	— 7 14·57	+ 26	18 53·02	36	+0 59 30·0	+3·0	47 13·1	5·5	19
April 1	8 16 57	−10 36·36	— 1	24 12·69	36	−0 4 10·0	−0·2	44 35·1	5·5	21
1	8 33 1	−10 33·66	— 2	24 15·38	36	−0 3 58·0	−0·2	44 47·1	5·5	21
4	8 41 35	+ 5 41·58	— 5	40 30·55	37	−0 12 34·0	−0·6	36 10·7	5·6	21
7	9 11 9	−28 10·20	+ 31	57 7·77	38	+1 3 28·0	+3·4	25 12·5	5·8	32
7	9 11 9	−30 15·19	+ 36	57 7·56	38	+1 14 10·0	+4·0	25 23·2	5·8	34
7	9 54 25	−27 59·50	+ 64	57 18·80	41	+1 2 24·0	+5·7	24 10·8	6·0	32
7	9 54 25	−30 4·89	+ 76	57 18 26	41	+1 13 0·0	+6·7	24 15·9	6·0	34
8	9 20 10	−22 54·02	+ 16	5 2 40·96	39	+0 30 56·0	+1·7	19 25·0	5·8	33
8	10 5 4	−22 43·52	+ 35	2 51·65	42	+0 30 52·0	+3·0	19 22·3	6·1	33
11	9 13 50	— 6 10·38	+ 5	19 24·44	37	+0 13 32·0	+0·6	10 1 59·9	5·8	33
15	10 1 32	−10 44·36	— 2	42 5·65	40	−0 2 57·0	−0·2	9 35 12·9	6·0	36
15	10 19 16	−10 39·66	— 3	5 42 10·34	40	−0 3 32·0	−0·2	9 34 37·9	6·0	36
Mai 1	12 3 22	−15 22·44	+ 48	7 11 58·31	40	+0 40 4·0	+4·3	6 54 19·4	6·0	41
1	12 3 22	−18 14·63	+ 91	11 59·14	40	+1 14 36·0	+8·1	54 20·0	6·0	42
2	11 57 34	— 9 55·26	+ 26	17 25·26	40	+0 27 10·0	+2·4	41 23·5	6·0	41
2	11 57 34	−12 47·35	+ 61	17 26·11	40	+1 1 40·0	+5·7	41 21·6	6·0	42
2	12 17 19	— 9 51·56	+ 40	17 29·10	40	+0 27 30·0	+3·5	41 44·6	6·0	41
2	12 17 19	−12 42·85	+0·92	7 17 30·92	+0·40	+1 1 54·0	+8·0	6 41 37·9	+6·0	42

Padua (Fortsetzung).

1826	M. Z. P.-Aberr.	B—R		$_{\alpha}$☿—α*		$_{\delta}$☿—δ*	
		Δα	Δδ	ε	E	ε	E
März 25	6ʰ 51ᵐ 42ˢ	+1ˢ62	+39ʺ4	0ˢ85	0ˢ60	14ʺ5	10ʺ2
25	7 5 28	+0·43	+18·8				
29	7 24 15	+0·63	—16·4				
31	6 47 2	+1·14	+25·4	0·28	0·20	4·6	3·2
31	7 0 43	+0·76	+18·9				
April 1	6 52 8	+0·97	—13·9	0·64	0·45	9·6	6·7
1	7 8 8	+0·08	— 0·4				
4	7 5 0	+0·36	— 3·7				
7	7 22 46	+2·59	+60 0				
7	7 22 46	+2·38	+70·7	0·75	0·53	37·9	26·7
7	8 5 55	+3·68	+ 6·7	0·52	0·36	42·0	29·5
7	8 5 55	+3·14	+11·8				
8	7 27 51	+1·36	— 0·8	0 21	0·15	4·5	3·2
8	8 12 39	+1·69	+ 6·0				
11	7 9 49	+2·00	—55·8				
15	7 41 42	+0·89	—12·1	0·37	0·26	20·9	14·7
15	7 59 23	+1·40	—41·5				
Mai 1	8 40 5	+1·10	+40·3				
1	8 40 5	+1·93	+40·9				
2	8 30 21	+5·00	— 7·1				
2	8 30 21	+5·85	— 9·0	0·42	0·29	22·1	15·6
2	8 50 2	+4·40	+24·1	0·27	0·19	18·7	13·2
2	8 50 2	+6·22	+17·4				

Speier (Schwerd).

$L = -0^h\ 24^m\ 24^s.6.$ $\varphi = 49°\ 18'\ 55''.$

1826	Sternzeit Speier	α☄ — α*	Refr.	Eigen-bew.	α☄	Par.	δ☄ — δ*	Refr.	Eigen-bew.	δ☄	Par.	Stern
März 10	$6^h58^m54^s$	+ $2^m42^s.85$	+$0^s.15$	+$0^s.01$	$2^h35^m23^s.17$	+$0^s.31$						3
10	7 0 56						+ 26′ 3″2	+ 1″8	+ 2″3	10°13′55″6	+ 5″4	3
11	7 10 1	+ 6 46·38	+ 12	+ 1	39 55·01	32	+ 18 35·1	+ 1·3	+ 3·6	18 20·7	5·4	4
12	7 13 7	+11 19·19	+ 14	+ 1	44 27·83	32	+ 22 48·9	+ 1·6	+ 3·5	22 34·7	5·5	4
12	7 50 2	+11 26·38	+ 28	0	44 35·15	34	+ 22 52·0	+ 2·7	+ 3·5	22 38·9	5·6	4
13	7 13 34	— 4 17·28	+ 4	— 1	2 49 2·94	32	+ 7 26·4	+ 0·5	— 4·0	26 41·3	5·5	7
16	7 15 11	— 0 32·80	0	0	3 3 3·75	32						9
16	7 15 11	— 0 24·75	+ 4	0	3 3 3·68	32						8
16	7 17 25						+ 0 21·9	0	— 4·7	36 49·2	5·6	9
16	7 17 25						+ 8 26·1	+ 0·5	— 4·7	36 45·9	5·6	8
April 1	8 43 35	+ 2 57·06	+0·12	0·00	4 24 19·92	+0·35	+ 22 40·3	+ 1·4	+ 3·2	10 44 40·1	+ 6·1	17

Speier (Fortsetzung).

1826	M. Z. P.-Aberr.	B—R		$\alpha_{☄}-\alpha*$		$\delta_{☄}-\delta*$	
		Δα	Δδ	ε	E	ε	E
März 10	7h 13m 22s	+0ˢ14	—	0ˢ22	0ˢ09		
10	7 15 23	—	— 5"1			4"1	1"8
11	7 20 35	+0·23	— 6·5	0·34	0·20	9·3	5·4
12	7 19 48	+0·13	— 3·8	0·46 (12 & 12)	0·27 (12 & 12)	2·0 (12 & 12)	1·2 (12 & 12)
12	7 56 37	+0·46	— 5·7				
13	7 16 22	+0·18	+ 6·5	0·20	0·10	6·2	3·1
16	7 6 21	+0·06	—	0·16	0·07		
16	7 6 21	—0·01	—	0·36	0·14		
16	7 8 35	—	— 2·3			3·5	1·6
16	7 8 35	—	— 5·6			5·7	2·5
April 1	7 32 23	—0·82	— 4·5	0·37	0·19	3·4	1·7

Åbo: Beide Beobachtungen vom April 9 wurden unter Annahme gleicher Gewichte zum Mittel vereint; die so erhaltene Declination erhielt wegen ihrer relativ grossen Abweichung von der Ephemeride das Gewicht $\frac{1}{2}$, während allen anderen Beobachtungen das Gewicht 1·0 zugemessen wurde.

Altona: Da die Vergleichung des aus den Theilbeobachtungen abgeleiteten Ganges des Kometen mit dem durch die Ephemeride angezeigten für die vier Beobachtungen folgende mittlere Fehler ergab:

0^s41,	0^s13,	0^s10,	0^s10,
$4''6$,	$1''5$,	$3''9$,	$3''7$,

wurde der ersten Rectascension das Gewicht 0·3, den übrigen Rectascensionen 1·0 und den Declinationen das Gewicht 0·8 beigelegt.

Bremen: Die beobachteten Rectascensionen sind im Vergleich zu den an fast allen übrigen Sternwarten erhaltenen Resultaten durchwegs beträchtlich zu klein. Die Declinationen stimmen — mit Ausnahme der beiden letzten — recht gut mit einander überein, scheinen aber etwas zu gross zu sein. Da die Beobachtungen ohne Angabe jeglichen Details veröffentlicht sind, habe ich den Rectascensionen das Gewicht 0·2, den Declinationen nach Ausschluss der Beobachtung vom April 25 das Gewicht 0·4 gegeben und nur der letzten Declinationsbeobachtung das Gewicht 0·1 beigelegt.

Göttingen: Die aus den Theilbeobachtungen abgeleiteten mittleren Fehler der aus den Beobachtungen gleichen Datums gebildeten arithmetischen Mittel sind:

März 12.......	0^s21	$2''6$.
April 8.......	0·26	1·3.
» 9.......	0·18	4·3.
» 27.......	0·58	—

Bei der Gewichtsbemessung wurde auch der Abweichung vom Ephemeridenort Rechnung getragen; die beiden einzelnen Beobachtungen erhielten das Gewicht $\frac{1}{2}$.

Josefstadt: Die Beobachtungen erhielten im Durchschnitte das Gewicht $\frac{1}{2}$; eine Änderung trat nur in den Fällen ein, wo die beigefügten »Bemerkungen« oder besonders grosse Abweichungen dazu drängten. Die letzte Beobachtung wurde ausgeschlossen.

Mannheim: Diesen Beobachtungen wurde das Gewicht 1·0 verliehen.

Mailand: Hubbard hat sämmtliche Beobachtungen von der Bahnbestimmung ausgeschlossen. Diesem Beispiel glaubte ich jedoch nicht folgen zu sollen, da ungewöhnlich grosse Fehler nur bei wenigen Beobachtungen vorkommen und besonderen Zufällen beim Gebrauche des Äquatorialsectors, welcher eine unabhängige Bestimmung beider Coordinaten gestattet, zugeschrieben werden können. Die nicht ausgeschlossenen Rectascensionen erhielten das Gewicht 0·3, die Declinationen zum grössten Theile das Gewicht 0·5.

Nîmes: Wegen der grossen Fehler in Declination und der systematischen, in ähnlicher Weise nur den Olbers'schen Beobachtungen eigenthümlichen Fehler in Rectascension wurden sämmtliche Beobachtungen, nach Hubbard's Vorgange, ausgeschlossen.

Prag: Die Declinationen mussten ausgeschlossen werden; die Rectascensionen erhielten das Gewicht 0·2.

Die nun folgenden Sternwarten haben auch die Theilbeobachtungen vollständig veröffentlicht, aus welchen bei zwei oder mehreren Durchgängen durch Vergleich mit dem aus der Ephemeride folgenden Gang des Kometen der mittlere Fehler (ε) der einzelnen Beobachtungen und der (E) des gebildeten Mittels berechnet werden konnte.

Florenz: Bei der Reduction der Beobachtungen wurde auch der Gang der Uhr mit Bezug auf Sternzeit berücksichtigt. Als durchschnittliches Gewicht wurde $\frac{1}{2}$ angenommen und nur in einigen besonderen Fällen hievon abgegangen. Das Mittel aus den drei Beobachtungen vom März 19 und den zwei vom April 2 wurde in der Weise gebildet, dass die erste Beobachtung halbes Gewicht erhielt. Die ausgeschlossene

Beobachtung vom Mai 2 gründet sich nur auf einen Durchgang des Sternes durch den Ring.

Marseille: Durch die gütige Vermittlung des Herrn Schulhof, welche mich zu grossem Danke verpflichtet, gelangte ich in den Besitz einer Copie der auf der Pariser Sternwarte befindlichen Aufzeichnungen Gambart's. Die Beobachtungen sind mit Hilfe eines Fadenmikrometers erhalten worden, das an gewissen Mängeln litt, in Folge deren, nach Gambart's eigener Angabe, die Bestimmung der Declination etwas unsicherer ausfiel als die der Rectascension. Die Antritte von Komet und Vergleichstern wurden ausnahmslos an den drei Fäden des Mikrometers beobachtet. Die mittleren Fehler sind aus den einzelnen Antrittszzeiten und ihrer Zahl (n), beziehungsweise aus den einzelnen Declinationseinstellungen und ihrer Zahl (n') abgeleitet. Vom März 21 bis inclusive April 4 ist kein Uhrstand angegeben; es mussten daher für diesen Zeitraum die in den »Astronomischen Nachrichten«, Bd. V, S. 125, veröffentlichten Beobachtungszeiten beibehalten werden. Weitere Anmerkungen sind:

März 9. Beobachtungen scheinen ziemlich genau.
» 11. Zuerst schön, später Wolken, welche den Stern am letzten Faden und während der Declinationseinstellung schwächen.
» 13. Trotz Wolken Komet leidlich gut sichtbar; seine centrale Partie erscheint mehr markirt.
» 15. Sehr wolkig, Komet schwach.
» 17. Ganz wolkig und dunstig, Komet kaum sichtbar. Beobachtung sehr schwierig.
» 19. Ziemlich gute Beobachtung, Komet besser sichtbar; Wolken verhindern fernere Beobachtung.
» 21. Komet äusserst schwach, Pointirung unsicher.
» 27. Seit 21. dauernd, auch heute, bewölkt, Komet äusserst schwach, nur einen Moment sichtbar.
April 1. Komet schwach, immer rund, höchstens 2′ Durchmesser. Centrale Partie immer heller als die andere.
» 4. Himmel sehr rein, Komet gut sichtbar, centrale Partie noch markirter, wie ein Beginn von Kern.

April 30. Komet äusserst schwach; »on a été contraint de recourir à l'usage des plaques«.

Die mit verschiedenen Sternen erhaltenen Beobachtungen vom März 15, 17 und April 9 sind in der Weise zusammengezogen, dass das relative Gewicht der Rectascensionen gleich, das der Declinationen aber der Reihe nach 2, 1; 1, 4; 1, 1 angenommen wurde. Die Rectascensionen erhielten vorwiegend das Gewicht 1·0, die Declinationen ein etwas kleineres Gewicht. Die auffallend abweichende Beobachtung vom März 27 bekam nur das Gewicht 0·2.

Die beobachteten Declinationen sind durch Addition der in der Columne »Red.« stehenden Beträge auf die Zeit der Rectascensionsbeobachtungen bezogen.

Neapel: Die Beobachtungen sind mittelst einer parallaktischen Maschine angestellt worden, welche die Vergleichung weit auseinanderliegender Objecte ermöglichte. An den ersten drei Tagen konnten die Antritte von Komet und Vergleichstern noch an den schwach erleuchteten Fäden des Instrumentes beobachtet werden; später jedoch wurde wegen der grossen Lichtschwäche des Kometen ein Ringmikrometer in Anwendung gebracht und bis inclusive April 27 die Ein- und Austritte an beiden Rändern des Ringes beobachtet. Vom Mai 1 an war der Komet schon so schwach, dass die Ein- und Austritte nicht mehr erkannt werden konnten und die Vergleichung von Komet und Stern durch möglichst centrale Einstellung derselben mit Bezug auf den Ring ausgeführt werden musste. Es wurde daher auch vom Stunden- und Declinationskreise nur mehr je ein Nonius abgelesen, während bis Mai immer je zwei Nonien Berücksichtigung fanden.

Die erste Beobachtung vom April 27 beruht auf je einer Centrumsposition von Komet und Stern und wurde daher der anderen gegenüber vernachlässigt.

Bei der meist sehr grossen Entfernung von Komet und Vergleichstern ergab sich die Nothwendigkeit, die Refractionsbeträge für jedes Object besonders zu berechnen (in der Tafel ist nur die Differenz angegeben). Durch Bekanntgabe des Indexfehlers beider Nonien konnten zunächst aus den am Stunden-

kreise gemachten Ablesungen für die gegebenen Uhrzeiten die Stundenwinkel der Vergleichsterne und hieraus die Refractionsbeträge in beiden Coordinaten berechnet werden. Da nun die Summe aus Stundenwinkel und der durch Refraction veränderten scheinbaren Rectascension des Sternes der Sternzeit gleich ist, so erhält man durch Subtraction der gegebenen Uhrzeit den Stand der Uhr mit Bezug auf Sternzeit. Die noch mit Refraction behafteten Kometenörter werden dann mit Hilfe der Differenz der Lesungen des Stunden- und Declinationskreises für Komet und Stern erhalten und durch Anbringung der für den Kometen geltenden Refractionsbeträge in die scheinbaren Örter übergeführt.

Bei der Zusammenfassung der an denselben Tagen gemachten Beobachtungen erhielt die erste Beobachtung vom März 31 der Anzahl der genommenen Durchgänge gemäss das doppelte Gewicht von der zweiten, während für die übrigen Tage das einfache arithmetische Mittel aus den Coordinaten gebildet wurde. Bis Ende April wurde das Gewicht der Rectascensionen im Durchschnitt zu 0·3, der Declinationen zu circa 0·5, vom Mai an natürlich noch kleiner festgesetzt.

Padua: Auch hier war eine parallaktische Maschine im Gebrauche, welche jedoch nur zur Messung der Declinationsdifferenzen diente, da Komet und Sterne stets in demselben Stundenkreise beobachtet worden sind. Es konnten daher die relativen Refractionsbeträge in einfacher Weise direct berechnet werden. Die mittleren Fehler sind aus den Beobachtungen gleichen Datums, welche sich auf denselben Vergleichstern beziehen, abgeleitet. Die Beobachtungen vom April 7 und die Rectascension vom Mai 2 mussten weggelassen werden. Die übrigen Doppelbeobachtungen wurden durch das arithmetische Mittel ersetzt und erhielten mit wenigen Ausnahmen die Gewichte 0·3—0·5.

Speier: Die Differenzen in Rectascension und Declination wurden für jeden Durchgang durch den Ring separat berechnet. Die erste Beobachtung vom März 12 entspricht zwei Durchgängen, die zweite nur einem, wesshalb die erste doppeltes Gewicht bekam. Von den Beobachtungen am Mai 16 erhielt die mit dem Stern (9) wegen ihres geringeren mittleren Fehlers

doppeltes Gewicht mit Bezug auf die Beobachtung mit dem Stern (8). Als Gewicht der Tagesmittel gilt meist 1·0.

Die an verschiedenen Sternwarten gemachten Beobachtungen zeigen auch eine merkliche Verschiedenheit in der Auffassung der als Mittelpunkt der Verdichtung angenommenen Stelle des Kometen, wie aus folgender Zusammenstellung der für jede Sternwarte aus allen vom 28. Februar bis inclusive 15. April angestellten Beobachtungen (unter Berücksichtigung der später angegebenen Gewichte) gebildeten Mittelwerthe hervorgeht.

$\frac{[pt]}{[p]}$	$\frac{[p\Delta\alpha]}{[p]}$	Ort	$\frac{[pt]}{[p]}$	$\frac{[p\Delta\delta]}{[p]}$
März 5·5	+0ˢ32	Josefstadt	März 6·2	+ 1"0
14·6	+0·07	Speier	16·2	— 2·7
22·8	—0·03	Marseille	25·1	— 2·4
25·4	—0·27	Göttingen	20·7	— 5·1
28·2	+0·23	Altona	26·8	— 1·1
April 3·7	+0·09	Florenz	April 3·1	+ 6·9
4·5	—0·15	Mailand	2·7	+ 4·8
4·6	—1·33	Bremen	4·6	+11·4
4·7	+0·98	Padua	4·4	— 1·0
4·8	—0·10	Prag	—	—
5·7	—0·37	Åbo	5·3	+ 0·8
6·3	—0·22	Mannheim	6·3	+ 3·8
8·4	+0·35	Neapel	6·6	+ 5·3

Es ist sonach klar, dass die Ephemeridencorrection für die zu bildenden Normalörter nicht unwesentlich davon abhängen wird, an welchen Sternwarten die Beobachtungen vorzugsweise angestellt worden sind.

Um möglichst sichere Positionen der Vergleichsterne zu erhalten, hielt ich es für angemessen, dieselben vorzugsweise auf die in den letzten Jahrzehnten gemachten Beobachtungen

zu gründen. Hiebei traf es sich sehr gelegen, dass sämmtliche Sterne in Leipzig mindestens zweimal, durchschnittlich aber öfter beobachtet waren und bereits reducirt vorlagen. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Bruns für die gütige Mittheilung ihrer (auf 1875·0 bezogenen) Positionen meinen besten Dank auszusprechen. Die Reduction auf 1826·0 ist mit Struve's Constanten ausgeführt. In der Regel wurden die Örter der Sterne nach den Leipziger Beobachtungen, deren Anzahl durch die vorgesetzte Ziffer ersichtlich gemacht ist, angenommen. Nur für jene Sterne, welche entweder in dem von Herrn Auwers herausgegebenen Katalog der Bradley'schen Sterne vorkommen, oder mit Rücksicht auf die Angaben der älteren Kataloge eine merkliche Eigenbewegung zu besitzen scheinen, sind Mittelwerthe gebildet worden. Die in dem Auwers'schen Kataloge angegebenen Eigenbewegungen wurden auch zur Reduction der übrigen Beobachtungen desselben Sternes verwendet; nur die in Mädler's Katalog enthaltenen Sterne sind mit den dort angenommenen Eigenbewegungen reducirt worden.

Die Eigenbewegung (in Rectascension) der Sterne Nr. 40 und 41, welche für ersteren Stern wohl etwas zweifelhaft, für letzteren jedoch gewiss sehr beträchtlich ist, habe ich aus den in der Rubrik α angeführten Positionen berechnet; bei den in der letzten Columne angegebenen Positionen ist die Eigenbewegung bereits berücksichtigt.

Die Declination des Sternes Nr. 6 wurde nach Weisse angenommen, da sie die beiden Marseiller Beobachtungen wesentlich besser macht und eine ziemlich starke Eigenbewegung nicht unwahrscheinlich ist. Da es schwer zu rechtfertigen sein dürfte, bei einer grösseren Zahl von Beobachtungen die äussersten Werthe als die besten beizubehalten, wurden die Örter der Sterne Nr. 17, 21 und 27 von den Leipziger Beobachtungen etwas abweichend angenommen.

Die Declination des Sternes Nr. 38 nach Weisse würde den Fehler des Kometenortes etwas verkleinern.

Vergleichsterne.

Nr.	Grösse	1826·0 α	1826·0 δ	Red. auf den scheinbaren Ort Datum	Δα	Δδ	Autorität, Epoche, Eigenbewegung
1	8·0	1h 51m 8ˢ40	9° 46' 57"3				Lalande 3689, 1796·0
		8·08	56·9				Weisse 359, 1825
		7·76	55·9	Febr. 28	+0ˢ79	+ 2"4	Paris 1855·9, 58·8
		7·80	55·1				Armagh 260, 1873·1
		7 85	55·1				2 Leipzig 1885·9
		1 51 7·85	9 46 55·5				
2	8·5	2 3 14·00	9 30 30·3	März 3	+0·81	+ 1·8	Weisse 57, 1825
		13·94	25·7				2 Leipzig 1885·9
		2 3 13·94	9 30 25·7				
3	7·4	2 32 39·28	9 47 47·6	März 10	+0·86	+ 0·8	3 Bradley-Auwers 379, 1866·0 } −0ˢ0023
		39·33	47·3				6 Leipzig 1875·9 } −0"030
		2 32 39·30	9 47 47·5				Declination bei Bradley unsicher.
4	7·3	2 33 7·62	9 59 40·6	März 9	+0·88	+ 0·9	Mädler 381, 1850
		7·64	39·1	» 11	0·86	0·8	2 Bradley-Auwers 381, 1854 1 } −0ˢ0041
		7·62	39·9	» 12	0·85	0·8	Grant 616, 1866·0, 74·9 } −0"028
		7·65	40·2				6 Leipzig 1876·1
		2 33 7·64	9 59 39·9				

Nr.	Grösse	1826·0 α	1826·0 δ	Red. auf den scheinbaren Ort Datum	Δα	Δδ	Autorität, Epoche, Eigenbewegung
5	8·5	2h 44m 55s76	10° 35' 38"7	März 12	+0s90	+ 0"6	Weisse 799, 1825
		55·77	39·1				4 Leipzig 1870·7
		2 44 55·77	10 35 39·1				
6	6·8	2 51 18·05	10 10 33·9	März 11	+0·94	+ 0·3	Lalande 5554, 1793·9
		18·96	33·1	» 13	0·92	0·2	Weisse 929, 1825
		18·81	28·0				6 Leipzig 1871·1
		2 51 18·81	10 10 33·1				
7	8·5	2 53 19·16	10 19 29·4				Lalande 5616, 1793·9
		19·32	20·9				Weisse 966, 1825
		19·27	—	März 13	+0·93	+ 0·2	Paris 1859·4
		19·16	19·4				Paris 1870·0
		19·26	18·2				6 Leipzig 1871·1
		2 53 19·26	10 19 18·2				
8	7·9	3 3 27·61	10 28 33·9	März 15	+0·95	— 0·2	Lalande 5942, 1793·9
		27·72	26·5	» 16	0·94	— 0·2	Weisse 70, 1825
		27·45	24·2	» 17	0·93	— 0·2	2 Leipzig 1869·0
		3 3 27·45	10 28 24·2				

9	7·9	3ʰ 3ᵐ 35ˢ54	10° 36' 35″8				Lalande 5945, 1793·9
		35·76	31·7				Weisse 73, 1825
		35·30	32·8	März 15	+0ˢ95	— 0″1	Paris 1862·0, 60·0
		35·45	30·3	» 16	0·94	— 0·1	Grant 743, 1872·2, 70·5
		35·61	32·1	» 17	0·93	— 0·2	5 Leipzig 1881·6
		35·59	30·9				Paris 1882·0
		3 3 35·61	10 36 32·1				
10	7·1	3 19 6·18	10 46 52·9				Weisse 359, 1825
		6·32	52·4	März 19	+0·97	— 0·7	Grant 804, 1863·7, 67·7
		6·35	53·8				2 Leipzig 1869·0
		3 19 6·35	10 46 53·8				
11	4·7	3 20 54·53	10 43 58·1	März 19	+0·98	— 0·8	Mädler 485, 1850
		54·55	58·1	» 21	0·96	— 0·8	4 Bradley-Auwers 485, 1861·0 } −0ˢ0019
		54·59	59·1				2 Leipzig 1869·0 } −0″018
		3 20 54·56	10 43 58·4				
12	6·8	3 22 41·03	10 56 43·7				Weisse 426, 1825
		40·70	43·3	März 19	+0·99	— 0·8	Grant 818, 1870·6, 73·1
		40·69	43·9				4 Leipzig 1880·1
		3 22 40·69	10 56 43·9				
13	3·8	3 51 3·05	11 59 28·2	März 25	+1·05	— 1·7	Auwers Fundamental-Catalog, λ Tauri
				» 29	1·00	— 1·8	

Nr.	Grösse	1826·0 α	1826·0 δ	Red. auf den scheinbaren Ort Datum	Δα	Δδ	Autorität, Epoche, Eigenbewegung
14	8·2	4h 4m 26ˢ74	10° 34' 40"5				Piazzi 16, 1800
		26·92	35·8	März 29	+1ˢ05	— 2"7	Weisse 100, 1825
		26·90	38·0				Taylor 1459, 1835
		26·87	36·6				4 Leipzig 1870·8
		4 4 26·87	10 34 36·6				
15	6·2	4 13 40·22	10 57 58·0				Lalande 8221, 1798·1
		40·34	49·0				Weisse 304, 1825
		40·27	51·0	März 27	+1·12	— 2·9	Paris 1861·1, 56·0
		40·49	50·2				2 Leipzig 1869·6
		40·43	47·6				Grant 1052, 1872·0
		40·62	52·1				Paris 1879·0
		4 13 40·49	10 57 50·2				
16	6·5	4 17 52·82	10 48 50·4				Lalande 8372, 1798·1
		53·11	49·6	März 31	+1·08	— 3·3	Weisse 397, 1825
		52·86	48·4	April 1	1·07	— 3·3	Schjellerup 1420, 1862
		52·87	48·1				4 Leipzig 1870·8
		52·97	48·7				Grant 1073, 1874·0, 77·0
		4 17 52·87	10 48 48·4				

17	8·1	4ʰ 21ᵐ 21ˢ26	10° 21′ 62″3				Lalande 8498, 1796·0
		21·62	58·6				Weisse 477, 1825
		21·66	59·4	April 1	+1ˢ08	— 3″4	Paris 1859·4
		21·83	58·2				4 Leipzig 1870·8
		—	59·9				Paris 1880·1
		4 21 21·66	10 21 58·6				In Rectascension eine merkliche Eigenbewegung wahrscheinlich
				März 31	+1·18	— 1·9	
18	1	4 25 56·76	16 9 4·0	April 5	1·11	— 2·0	Auwers Fundamental-Catalog, α Tauri
				» 10	1·05	— 2·2	
19	4·1	4 26 6·09	9 47 45·6	März 31	+1·11	— 3·8	Mädler 632, 1850
		6·20	43·9				3 Bradley-Auwers 632, 1866·7 } +0ˢ0011 −0″054
		6·24	43·9				6 Leipzig 1875·7
		4 26 6·22	9 47 43·9				
20	6·8	4 26 41 95	11 2 52·9				Lalande 8669, 1798·1
		42·09	53·3				Weisse 600, 1825
		42·28	51·0	April 1	+1·11	— 3·5	Grant 1110, 1870·1, 74 3
		42·12	52·4				4 Leipzig 1879·8
		42·10	49·6				Armagh 568, 1881·0
		4 26 42 12	11 2 52·4				

Nr.	Grösse	1826·0 α	1826·0 δ	Red. auf den scheinbaren Ort Datum	Δα	Δδ	Autorität, Epoche, Eigenbewegung
21	6 5	4h 34m 47s53	10° 48' 49"4				Lalande 8898/9, 1797·0
		47·31	51·1				Piazzi 169, 1800
		47·99	52·4	März 31	+1s16	— 3"9	Weisse 792, 1825
		47·63	50·4	April 3	1·12	— 3·9	Taylor 1656, 1835
		47·84	50·7	» 6	1·08	— 3·9	British Ass. Catalogue 1460, 1850
		47·92	49·2				Yarnall 2064, 1861·6, 68·6
		47·92	48·9				Grant 1148, 1861·8, 61·3
		47·91	48·2				4 Leipzig 1870 8
		4 34 47·91	10 48 49·2				
22	6·0	4 36 22·05	11 22 45·7				Weisse 818, 1825
		21·71	44·8	April 2	+1·15	— 3·8	2 Leipzig 1869·6
		21·80	45·0				Grant 1154, 1875·9, 71·0
		4 36 21·75	11 22 44·9				
23	8·7	4 39 50·49	10 40 31·4				Weisse 889, 1825
		49·98	33·1	April 4	+1·13	— 4·1	Yarnall 2103, 1877·2
		49·98	32·1				2 Leipzig 1890·0
		4 39 49·98	10 40 32·1				

24	4·9	4ʰ 45ᵐ 19ˢ40	9° 51' 57"8	April 7	+1ˢ11	— 4"6	Mädler 679, 1850
		19·49	57·5	» 8	1·09	— 4·6	5 Bradley-Auwers 679, 1867·0 } +0ˢ0019, −0"129
		19·54	57·1				7 Leipzig 1878·6
		4 45 19·51	9 51 57·3				
25	8·5	4 47 36·45	10 31 40·3	April 5	+1·15	— 4·5	Lalande 9281, 1796·0
		36·69	40·7	» 6	1·14	— 4·5	3 Leipzig 1871·4
		4 47 36·69	10 31 40·7				
26	8·6	4 56 55·43	10 23 65·8				Lalande 9590, 1796·0
		55·52	58·0				Weisse 1314, 1825
		55·48	62·1	April 9	+1·14	— 5·0	Paris 1860 5
		55·59	59·9				3 Leipzig 1871·4
		55·69	—				Paris 1880·1
		4 56 55·59	10 23 59·9				
27	8·6	4 57 2·47	10 27 8·6				Lalande 9597, 1796·0
		3·14	12·9				Weisse 1317, 1825
		3·00	11 2	April 9	+1·14	— 4·9	Paris 1860·5, 60·0
		3·01	11·0				2 Leipzig 1872·5
		3·15	11·9				Paris 1880·1
		4 57 3·05	10 27 11·4				
28	7·6	4 58 8·78	10 39 26·0	April 8	+1·16	— 4·9	Lalande 9631, 1796·0
		8·62	21·8				3 Leipzig 1871·4
		4 58 8·62	10 39 21·8				

Nr.	Grösse	1826·0 α	1826·0 δ	Red. auf den scheinbaren Ort: Datum	Δα	Δδ	Autorität, Epoche, Eigenbewegung
29	8·3	5ʰ 0ᵐ 21ˢ47	10° 39′ 49″8	April 8	+1ˢ17	— 5″0	Weisse 7, 1825
		21·57	46·8				5 Leipzig 1878·3
		5 0 21·57	10 39 46·8				
30	7·9	5 9 29·75	10 20 34·3	April 9	+1·19	— 5·5	Weisse 237, 1825
		29·69	32·9				2 Leipzig 1869·0
		5 9 29·69	10 20 32·9				
31	8·9	5 9 41·77	10 32 23·0	April 9	+1·20	— 5·5	Weisse 245, 1825
		41·94	23·3				2 Leipzig 1879·5
		5 9 41·94	10 32 23·3				
32	5·0	5 25 16·38	9 21 47·6	April 7	+1·28	— 6·5	Auwers Fundamental-Catalog, φ′ Orionis
33	3·3	5 25 33·48	9 48 33·4	April 8	+1·28	— 6·4	Mädler 794, 1850
		33·55	33·5	April 11	1·23	— 6·4	6 Bradley-Auwers 794, 1857·5 } −0ˢ0015
		33·52	34·2				3 Leipzig 1895·2 } −0″018
		5 25 33·54	9 48 33·7				

34	6·0	5h 27m 21s·03 21·06 21·18	9° 11' 15"6 16·0 15·8	April 7	+1s·29	− 6"7	Mädler 805, 1850 3 Bradley-Auwers 805, 1859·1 } +0s·0040 −0"305 2 Leipzig 1891·2
		5 27 21·10	9 11 15·9				
35	1·2	5 45 45·25	7 21 57·8	April 15	+1·24	− 8·0	Auwers Fundamental-Catalog, α Orionis
36	5·1	5 52 48·70 48·70 48·77	9 38 19·6 17·8 17·6	April 15	+1·30	− 7·6	Mädler 877, 1850 3 Bradley-Auwers 877, 1865·5 } +0s·0001 0"000 4 Leipzig 1885·1
		5 52 48·73	9 38 17·7				
37	8·6	7 0 15·42 15·90 15·86 15·64	7 7 2·3 1·9 3·8 2·9	April 30	+1·39	−11·0	Piazzi 342, 1800 Weisse 10, 1825 Taylor 2858 2 Leipzig 1885·1
		7 0 15·64	7 7 2·9				
38	8·4	7 2 22·31 22·36	7 2 11·4 8·8	April 30	+1·40	−11·1	Weisse 92, 1825 2 Leipzig 1886·6
		7 2 22·36	7 2 8·8				
39	6·7	7 18 40·38 40·38 40·38	7 17 19·9 19·2 17·8	Mai 2	+1·46	−11·7	Mädler 1084, 1850 3 Bradley-Auwers 1084, 1865·8 } −0s·0009 −0"018 2 Leipzig 1885·2
		7 18 40·38	7 17 18·6				

Nr.	Grösse	1826·0 α	1826·0 δ	Red. auf den scheinbaren Ort Datum	Δα	Δδ	Autorität, Epoche, Eigenbewegung		
40	7·3	7h 19m 59s·23	6° 55' 51"·7				Weisse 649, 1825	59·23	
		59·04	54·3	Mai 2	+1s·46	−11"·8	2 Bonn-Argelander, 1688, 1864·2	59·23	
		58·86	52·7				Grant 1877, 1868·5	59·07	
		58 90	53·1				2 Leipzig 1887·1	59·20	
		7 19 59·19	6 55 53·1				Angenommene Eigenbeweg. —0s·0050, 0"·000		
41	5·9	7 27 18·90	6 14 21·6				Piazzi 150, 1800	18·64	
		19·17	26·5				Lalande 14828, 1797·1	18·87	
		18·81	24·2	Mai 1	+1·50	−12·4	Taylor 3115, 1835	18·90	
		18·56	23·3	» 2	+1·49	−12·4	Paris 1840·2	18·71	−0s·0102
		18·42	23·5				Paris 1856·5, 57·0	18·73	0"·000
		18·25	21·7				Grant 1915, 1867·8, 73·1	18·68	
		18·30	23·5				Paris 1872·1	18·77	
		18·21	23·5				2 Leipzig 1887·1	18·83	
		7 27 18·77	6 14 23·5						
				April 27	+1·56	−12·9			
42	1·0	7 30 11·35	5 39 48·6	Mai 1	+1·51	−12·7	Auwers Fundamental-Catalog, Procyon		
				» 5	+1·46	−12·5			
				» 9	+1·41	−12·4			

Die Abweichungen der zur Bahnbestimmung verwendeten Beobachtungen von der Ephemeride und die angenommenen Gewichte sind in Folgendem übersichtlich geordnet. Die Reduction auf den Parallel konnte wegen der fast unmerklichen Änderungen von cos δ für die zu je einem Normalorte gehörigen Beobachtungen unterbleiben.

M. Z. P. 1826	Ort	Δα	p	Δδ	p'
		I.			
Febr. 28·29	Josefstadt	+0ˢ65	0·5	−17″3	0·5
März 2·31	»	+1·21	0·5	+ 5·1	0·5
3·29	»	−0·49	1·0	−28·2	0·3
4·29	»	+1·17	0·3	—	—
7·29	»	+0·50	1·0	+ 5·9	1·0
9·33	Marseille	+0·54	1·0	0·0	1·0
10·30	Speier	+0·14	1·0	− 5·1	1·0
11·27	Josefstadt	−2·17	0·3	+15·8	0·3
·31	Marseille	+0·32	1·0	−18·6	0·5
·31	Speier	+0·23	1·0	− 6·5	0·7
12·28	Josefstadt	+1·36	0·5	+14·1	0·5
·31	Speier	+0·24	0·7	− 4·4	1·0
·32	Göttingen	−0·45	1·0	− 0·2	1·0
13·30	»	+0·68	0·5	−17·3	0·5
·30	Marseille	+0·81	1·0	− 3·9	0·5
·30	Speier	+0·18	1·0	+ 6·5	1·0
14·30	Göttingen	−0·16	0·5	− 8·7	0·5
15·31	Marseille	−0·03	1·0	+ 2·7	0·5
16·30	Speier	+0·04	1·0	− 3·4	1·0
17·31	Marseille	+0·09	1·0	− 7·1	0·8
19·30	»	−0·42	1·0	− 6·2	0·7
·34	Florenz	+0·60	0·7	+ 3·9	0·8
20·32	Altona	+1·04	0·3	+12·2	0·8
21·31	Marseille	−0·11	1·0	−18·5	0·5

M. Z. P. 1826	Ort	Δα	p	Δδ	p'
		II.			
März 25·29	Padua	+1ˢ02	0·3	+29″1	0.2
27·32	Marseille	—0·96	0·2	+16·5	0·2
·34	Altona	+0·16	1·0	— 8·9	0·8
28·33	»	+0·17	1·0	— 6·4	0·8
·33	Bremen	—1·66	0·2	+14·3	0·4
29·31	Padua	+0·63	0·3	—16·4	0·3
·35	Mailand	—0·69	0·3	— 7·5	0·5
30·34	»	—	—	+ 9·5	0·5
·35	Bremen	—1·09	0·2	+ 0·2	0·4
31·29	Padua	+0·95	0·5	+22·1	0·2
·31	Neapel	—0·87	0·3	— 7·1	0·8
·32	Bremen	—1·36	0·2	+12·5	0·4
·33	Altona	+0·11	1·0	— 1·4	0·8
·33	Prag	+0·11	0·2	—	—
·33	Mailand	+0·52	0·3	+ 2·2	0·5
April 1·29	Padua	+0·52	0·5	— 7·1	0·5
·30	Prag	—0·91	0·2	—	—
·31	Neapel	+0·90	0·3	— 0·1	0·5
·31	Speier	—0·82	0·5	— 4·5	1·0
·31	Mailand	—	—	+ 6·7	0·5
·32	Marseille	—0·29	1·0	— 4·2	0·7
·33	Mannheim	+0·18	1·0	+ 3·4	1·0
·38	Florenz	—0·01	0·5	+15·6	0·5
2·30	Mailand	+0·19	0·3	—18·6	0·3
·33	Florenz	+0·88	0·5	—14·2	0·5
3·31	Marseille	—0·32	1·0	+ 6·5	1·0
·35	Florenz	—0·41	1·0	— 3·2	0·8
·36	Åbo	—0·49	1·0	+ 8·9	1·0
4·30	Padua	+0·36	0·5	— 3·7	0·5
·32	Marseille	—0·19	1·0	0·0	1·0
·33	Neapel	+0·68	0·3	+15·9	0·5
·34	Åbo	—0·36	1·0	+ 0·4	1·0
·34	Florenz	+0·24	1·0	—	—
·35	Mailand	+1·10	0·3	+26·2	0·2

M. Z. P. 1826	Ort	Δα	p	Δδ	p'
		III.			
April 5·31	Mailand	+0ˢ17	0·3	+10″2	0·5
5·32	Marseille	−0·14	0·7	+ 6·3	0·8
·33	Åbo	−0·53	1·0	+ 1·6	1·0
·34	Florenz	−0·33	0·5	—	—
6·30	Mailand	—	—	+14·7	0·5
·34	Åbo	−0·44	1·0	+ 1·1	1·0
·36	Florenz	+0·32	0·5	+ 7·1	0·5
7·33	»	−0·67	0·5	+13·9	0·5
·34	Bremen	−0·29	0·2	+17·7	0·4
·36	Mailand	−1·84	0·3	+ 3·3	0·5
8·32	Neapel	+1·43	0·2	+17·6	0·5
·33	Göttingen	−0·47	0·7	+15·3	0·5
·33	Prag	+1·60	0·2	—	—
·33	Florenz	−0·33	0·5	+16·1	0·5
·33	Padua	+1·52	0·5	+ 2·6	1·0
·34	Bremen	−1·03	0·2	+11·4	0·4
·34	Mannheim	−0·49	1·0	+ 8·9	1·0
·34	Mailand	+0·07	0·3	—	—
9·33	Åbo	−0·05	1·0	−17·1	0·5
·33	Mannheim	−0·34	1·0	− 0·8	1·0
·33	Prag	−1·18	0·2	—	—
·33	Florenz	+0·26	0·5	+15·3	0·5
·33	Mailand	−0·71	0·3	—	—
·34	Bremen	−1·56	0·2	+14·1	0·4
·34	Marseille	−0·98	0·5	− 5·4	0·8
·35	Göttingen	−0·50	1·0	−29·1	0·3
10·29	Neapel	+0·97	0·5	+14·2	0·5
·30	Florenz	+0·62	0·5	+15·6	0·5
·34	Bremen	−2·29	0·2	+ 7·9	0·4
11·30	Padua	+2·00	0·3	—	—
15·30	Neapel	−0·25	0·7	+ 0·6	0·7
15·33	Padua	+1·14	0·5	−26·8	0·2

M. Z. P. 1826	Ort	Δα	p	Δδ	p'
		IV.			
April 25·37	Bremen	—1ˢ15	0·2	—	—
27·34	Neapel	+0·01	0·3	—17ʺ2	0·4
27·38	Göttingen	+0·33	0·3	+14·9	0·3
30·36	Marseille	—0·30	0·7	—20·2	0·3
30·38	Bremen	—1·69	0·2	+36·5	0·1
Mai 1·31	Neapel	+1·61	0·2	—24·3	0·2
1·36	Padua	+1·51	0·3	+40·6	0·1
2·36	Florenz	+1·16	0·2	—22·7	0·2
2·36	Padua	—	—	+ 6·3	0·2
5·33	Neapel	+1·28	0·2	+17·8	0·3
7·36	»	—1·79	0·2	—35·2	0·1
8·34	»	—1·40	0·1	+24·0	0·1
8·36	Florenz	—0·37	0·2	—	—
9·36	Neapel	+0·91	0·2	+ 0·4	0·3

Die getrennte Summirung der positiven und negativen Abweichungen ergibt für die einzelnen Normalorte:

	[pΔα]	Zahl der Beob.	[p]	[p'Δδ]	Zahl der Beob.	[p']
I. . .	+6ˢ051	17	13·0	+ 40ʺ97	$8^1/_2$	5·9
	—2·231	7	5·8	— 78·28	$14^1/_2$	10·0
II. . .	+3·749	17	9·3	+ 74·45	$16^1/_2$	9·0
	—4·139	15	8·6	— 55·84	$14^1/_2$	9·3
III. . .	+3·693	11	4·3	+111·75	21	12·6
	—6·142	20	11·7	— 27·76	5	2·8
IV. . .	+1·547	7	1·7	+ 21·30	7	1·4
	— 1·350	6	1·6	— 25·86	5	1·2

Der Hauptsache nach entspricht die Vertheilung der Fehler den Forderungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Werden ebenso für die Beobachtungszeiten die Mittel mit Rücksicht auf die angenommenen Gewichte gebildet, so ergeben sich hiefür folgende Abweichungen von der Ephemeride, denen auch ihre aus der Quadratsumme abgeleiteten mittleren Fehler E beigesetzt sind:

1826	$\Delta\alpha$	E	$[p]$	1826	$\Delta\delta$	E	$[p]$
März 12·52	+0ˢ203	0ˢ116	18·8	März 12·85	−2″35	2″00	15·9
April 1·41	−0·022	0·099	17·9	April 1·21	+1·02	1·69	18·3
April 8·63	−0·153	0·142	16·0	April 8·35	+5·45	2·00	15·4
Mai 1·78	+0·060	0·307	3·3	Mai 2·16	−1·75	6·21	2·6

Die Werthe von E passen ziemlich gut zu den Werthen von $[p]$ und sind mit wenigen Ausnahmen ungefähr gleich den Abweichungen von der Ephemeride oder noch grösser als dieselben.

Ich muss hier bemerken, dass bei Bildung der Grundlagen für die Berechnung der wahrscheinlichsten Elemente unter den zum dritten Normalorte gehörigen Beobachtungen die Marseiller Beobachtung vom 5. April aus Versehen übergangen worden ist. Die Abweichung dieser Beobachtung von der Ephemeride ist dem Mittel der Abweichungen so nahe gleich, dass durch ihren Wegfall die Coordinaten des Normalortes nur ganz unerheblich geändert werden. Wohl aber vergrössert sich das Mittel der Beobachtungszeiten um ein paar Zehntel eines Tages, so dass die Ephemeridencorrection auf das Datum April 9·0 bezogen werden konnte. Nachdem eine geringfügige Änderung in der Gewichtsvertheilung das Mittel der Zeiten um einen ähnlichen Betrag zu erhöhen im Stande wäre, und wie aus der Beobachtungsreihe zu ersehen ist, durch successive Einbeziehung der das letzte Drittel bildenden Beobachtungen eine langsame Abnahme der Abweichungen in Declination sich bemerkbar macht, habe ich die in der vorausgegangenen Rechnung angenommene Ephemeridencorrection beibehalten. Es ist

überdies der Einfluss einer kleinen Änderung derselben auf die Endergebnisse ganz belanglos. Reducirt man die Abweichungen mit Hilfe des durch dieselben angezeigten Ganges auf gleiche Zeitpunkte, so erhält man:

1826	$\Delta\alpha$	$\Delta\alpha\cos\delta$	$\Delta\delta$
März 12·5	+ 3"05	+ 3"00	— 2"41
April 1·5	— 0·33	— 0·32	+ 1·12
April 9·0	— 2·31	— 2·27	+ 5·38
Mai 2·0	+ 0·90	+ 0·89	— 1·75

Durch Vereinigung dieser Correctionen mit den Ephemeridenörtern werden die auf das mittlere Äquinox 1826·0 bezogenen Positionen des Kometen folgende:

1826	☄ $\alpha_{1826\cdot0}$	☄ $\delta_{1826\cdot0}$
März 12·5	41° 19' 59"18	+10° 23' 22"96
April 1·5	66 19 47·54	+10 44 24·29
April 9·0	76 37 4·69	+10 16 7·40
Mai 2·0	108 50 55·31	+ 6 46 3·78

Bestimmung der wahrscheinlichsten Elemente.

Als Fundamentalebene wurde der Äquator für 1830·0 mit dem zugehörigen Äquinox gewählt und an die Normalörter und Elemente (I, II) des Kometen die entsprechende Reduction angebracht. Diese Elemente, deren Beziehung auf den Äquator durch Beifügung eines Striches markirt ist, sind:

	II' 1826 April 2·0		I' 1832 November 25·0
M	2° 8' 1"1	M_0	359° 50' 1"3
Π'	107 12 6·7	Π'	107 25 3·4
Ω'	325 5 24·1	Ω'	325 33 28·4

	II′ 1826 April 2·0				I′ 1832 November 25·0		
i'	22°	52′	39″1	i'	22°	3′	17″5
σ	283	45	52·7	σ	280	6	25·0
φ	48	17	49·6	φ	48	42	24·9
μ			527·941	μ			533·788.

σ bedeutet den in der Bewegungsrichtung gemessenen Bogen der Bahn zwischen Äquator und Ekliptik. Die Abweichungen der Normalörter von der Ephemeride konnten auch für das neue Äquinox unverändert beibehalten werden. Dieselben sind sammt den Logarithmen der Differenzialquotienten in folgender Tafel enthalten. Die Zeit ist hierin von 1832 November 25·0 an gezählt.

	1. 1826 März 12·5	2. 1826 April 1·5	3. 1826 April 9·0	4. 1826 Mai 2·0	5. 1832 October 28·5	6. 1832 Nov. 25·0	7. 1832 Decemb. 26·0
$t-t_0$	−2449·5	−2429·5	−2422·0	−2399·0	−27·5	0	+31·0
$\Delta\alpha \cos\delta$	+ 3″00	− 0″32	− 2″27	+ 0″89	+ 0″33	0″00	− 2″80
$\cos\delta\, d\alpha : dM_0$	0·62278	0·73489	0·76936	0·81475	0·84750	0·49917	0·29824
$\cos\delta\, d\alpha : d\mu$	4n01914	4n12740	4n16043	4n20141	2·34934	2·46380	2·44879
$\cos\delta\, d\alpha : d\varphi$	0n30409	0n12791	9n97209	9·84476	0·31080	0·47111	0·45292
$\cos\delta\, d\alpha : d\Pi'$	9·65723	9·62921	9·64133	9·75355	9·49303	9·44846	9·71887
$\cos\delta\, d\alpha : \sin i' d\Omega'$	9n15509	8n26739	8·71553	9·34574	8·74451	9·37546	8·88500
$\cos\delta\, d\alpha : di'$	8n73654	8·31416	8·20725	9n08773	9·81802	9·38806	8n21678
$\Delta\delta$	− 2″41	+ 1″12	+ 5″38	− 1″75	+ 0″57	− 2″65	−18″95
$d\delta : dM_0$	0n04135	0n28171	0n34385	0n43549	0n78340	0n14403	9·74037
$d\delta : d\mu$	3·42390	3·66662	3·72884	3·81945	1·37114	1n96850	1n56143
$d\delta : d\varphi$	9n52585	9n54336	9n60190	9n83561	9·61523	9n97367	9n55839
$d\delta : d\Pi'$	8n98637	9n29995	9n36769	9n48845	9n73111	9n09968	7n50385
$d\delta : \sin i' d\Omega'$	9·74772	9·95795	0·00062	0·03033	9·58370	9·96225	9·99596
$d\delta : di'$	9·76103	9·42210	9·03912	9n56525	0·19779	9·87299	8n96024

Die den Normalörtern zugemessenen Gewichte sind in Folgendem angegeben. Bildung und Auflösung der Normal-

gleichungen geschahen nach den in v. Oppolzer's »Lehrbuch der Bahnbestimmung« II. Theil, zusammengestellten Formeln. Die in denselben auftretenden Grössen sind hier in gleicher Weise bezeichnet. Die eingeklammerten Werthe sind Logarithmen.

$$x = (0\cdot99801)\,\delta M_0$$
$$y = (4\cdot16043)\,\delta\mu$$
$$z = (0\cdot62162)\,\delta\varphi$$
$$t = (9\cdot88162)\,\delta\Pi'$$
$$v = (0\cdot11276)\sin i'\,\delta\Omega'$$
$$w = (0\cdot34830)\,\delta i'$$
$$\log \nu = 1\cdot12710.$$

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Rect-ascension							
Gewicht	1·0	1·0	1·0	0·5	2·0	2·0	1·0
a	+0·4215	+0·5456	+0·5907	+0·4637	+1·0000	+0·4484	+0·1996
b	−0·7223	−0·9268	−1·0000	−0·7771	+0·0218	+0·0284	+0·0194
c	−0·4814	−0·3208	−0·2241	+0·1182	+0·6913	+1·0000	+0·6781
d	+0·5965	+0·5592	+0·5751	+0·5265	+0·5780	+0·5216	+0·6875
e	−0·1102	−0·0143	+0·0401	+0·1209	+0·0606	+0·2589	+0·0592
f	−0·0244	+0·0092	+0·0072	−0·0388	+0·4171	+0·1550	−0 0074
n	+0·2239	−0·0239	−0·1694	+0·0470	+0·0348	0·0000	−0·2090
s	−0·0964	−0·1718	−0·1804	+0·4604	+2·8036	+2·4123	+1·4274
Declination							
Gewicht	1·0	1·0	1·0	0·5	2·0	2·0	0·5
a	−0·1105	−0·1922	−0·2217	−0·1936	−0·8628	−0·1979	+0·0391
b	+0·1834	+0·3208	+0·3702	+0·3225	+0·0023	−0·0091	−0·0018
c	−0·0802	−0·0835	−0·0956	−0·1157	+0·1394	−0·3181	−0·0611
d	−0·1273	−0·2620	−0·3062	−0·2860	−1·0000	−0·2337	−0·0030
e	+0·4315	+0·7001	+0·7724	+0·5849	+0·4183	+1·0000	+0·5404
f	+0·2587	+0·1185	+0·0491	−0·1165	+1·0000	+0·4734	−0·0289
n	−0·1799	+0·0836	+0·4015	−0·0923	+0·0602	−0·2797	−1·0000
s	+0·3757	+0·6853	+0·9697	+0·1033	−0·2426	+0·4349	−0·5153

$[aa] = 3\cdot2009$							
$[bb] = 3\cdot3639$	$[ab] = -1\cdot9494$						
$[cc] = 2\cdot4968$	$[ac] = +0\cdot8285$	$[bc] = +0\cdot7230$					
$[dd] = 3\cdot6701$	$[ad] = +3\cdot1863$	$[bd] = -2\cdot2057$	$[cd] = +0\cdot8838$				
$[ee] = 3\cdot1848$	$[ae] = -0\cdot7903$	$[be] = +0\cdot7378$	$[ce] = -0\cdot1235$	$[de] = -1\cdot0720$			
$[ff] = 1\cdot5221$	$[af] = -0\cdot5310$	$[bf] = +0\cdot1096$	$[cf] = +0\cdot4096$	$[df] = -0\cdot8650$	$[ef] = +1\cdot1035$		
$[nn] = 1\cdot4175$	$[an] = -0\cdot1069$	$[bn] = +0\cdot1070$	$[cn] = -0\cdot0362$	$[dn] = -0\cdot1635$	$[en] = -0\cdot5937$	$[fn] = -0\cdot0422$	
$[ss] = 18\cdot0755$	$[as] = +3\cdot8380$	$[bs] = +0\cdot8862$	$[cs] = +5\cdot1820$	$[ds] = +3\cdot4340$	$[es] = +2\cdot4466$	$[fs] = +1\cdot7066$	$[ns] = +0\cdot5820$
$2S = -0\cdot7806$	Summe der nicht quadrirten Glieder $S = -0\cdot3903$						

Die Auflösung der Normalgleichungen ergibt für die Summe der Fehlerquadrate und die Logarithmen der Unbekannten und ihrer mittleren Fehler folgende Werthe:

$\nu^2[nn_6] = 222''52$ $\qquad\log\varepsilon = 0\cdot72213$

$\varepsilon = 5''274$

$\log x = 8\cdot99916 \qquad \log\varepsilon_x = 0\cdot92607$

$\log y = 9\cdot07978 \qquad \log\varepsilon_y = 0\cdot79394$

$\log z = 9^n00896 \qquad \log\varepsilon_z = 0\cdot78174$

$\log t = 8^n85974 \qquad \log\varepsilon_t = 1\cdot02581$

$\log v = 9^n45307 \qquad \log\varepsilon_v = 0\cdot57930$

$\log w = 9\cdot28000 \qquad \log\varepsilon_w = 0\cdot89103.$

Die noch übrig bleibenden Fehler der Normalörter ($\Delta\alpha'$ cos δ und $\Delta\delta'$) sind im Vergleich zu den früheren folgende:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$\Delta\alpha$ cos δ	+3ˢ00	−0ˢ32	−2ˢ27	+0ˢ89	+0ˢ33	0ˢ00	− 2ˢ80
$\Delta\alpha'$ cos δ	+3·163	+0·468	−1·066	+3·524	−0·165	+1·285	− 1·260
$\Delta\delta$	−2·41	+1·12	+5·38	−1·75	+0·57	−2·65	−18·95
$\Delta\delta'$	−1·810	+2·852	+7·465	+0·832	+0·152	−1·086	−16·131

Die hieraus gerechnete Summe der Fehlerquadrate $[pvv] = 222^s50$ stimmt mit dem Werthe von $\nu^2[nn_6]$ gut überein. $\nu^2[nn] = 254^s5$; die geringe Abnahme dieser Summe, welche im Ganzen nur 32ˢ0 beträgt, während sie in Folge der Verringerung des Fehlers in Declination für den siebenten Normalort allein 49ˢ1 betragen würde, lässt schon erkennen, dass von einer wesentlichen Verbesserung der Elemente durch diese Ausgleichsrechnung nicht die Rede sein kann. Die Correctionen der auf die Ekliptik bezogenen Elemente für 1832 November 25·0 und ihre mittleren Fehler sind:

$$\left.\begin{aligned}
\delta M_0 &= +0^s134 && \pm\ 0^s847\\
\delta\Pi &= -0\cdot631 && \pm 13\cdot953\\
\delta\Omega &= +2\cdot677 && \pm 15\cdot185\\
\delta i &= +3\cdot089 && \pm\ 2\cdot947\\
\delta\varphi &= -0\cdot327 && \pm\ 1\cdot446\\
\delta\mu &= +0\cdot000111 && \pm\ 0\cdot000430
\end{aligned}\right\} A)$$

Diese Grössen beziehen sich, soferne sie überhaupt von der Lage der Fundamentalebenen abhängen, auf Ekliptik und Äquinox 1830·0, erfahren aber bei der Reduction auf 1832·0 nur so geringfügige Änderungen, dass nach der bisher durchgeführten Rechnung als wahrscheinlichste Elemente für 1832 November 25·0 gelten können: $\mathrm{I}_{1832\cdot0}+A$.

Die durch A gegebenen Änderungen der Elemente sind mit Ausnahme von δi, welches nahe gleich ε_i ist, viel kleiner als ihre mittleren Fehler, so dass, da auch die Darstellung der

Normalörter im Allgemeinen durch die neuen Elemente kaum merklich verbessert wird, die Systeme I und $I + A$ als fast gleichwerthig anzusehen sind.

Wenn man die Fehler (siehe S. 400 und 401) der zur Berechnung der Störungen für die Zeit 1832 Februar 10 bis December 26 benützten Elemente mit den in den Gleichungen A) angeführten mittleren Fehlern vergleicht, so wird man es begreiflich finden, dass, wie auch Stichproben gezeigt haben, der Einfluss ersterer Fehler auf die Resultate der Störungsrechnung ganz unerheblich ist.

Nachdem die Declination des siebenten Normalortes sehr schlecht dargestellt wird und in Folge dessen die Quadratsumme der Fehler zum grössten Theile nur vom Fehler dieser Declination abhängt, schien es mir angezeigt, noch zu untersuchen, inwieweit durch deren Ausschluss die Vertheilung der übrigen Fehler sich günstiger gestaltet. Ich habe daher, anknüpfend an die frühere Rechnung die Coëfficienten $a, b, \ldots n$ für die Declination des letzten Normalortes weggelassen und die übrigen n auf eine neue Fehlereinheit reducirt, wofür die nunmehr grösste Abweichung 5'38 angenommen worden ist. Es wird demnach

$$\log v' = 0 \cdot 73078$$

$[aa] = 3 \cdot 1994$						
$[bb] = 3 \cdot 3639$	$[ab] = -1 \cdot 9493$					
$[cc] = 2 \cdot 4931$	$[ac] = +0 \cdot 8309$	$[bc] = +0 \cdot 7228$				
$[dd] = 3 \cdot 6701$	$[ad] = +3 \cdot 1864$	$[bd] = -2 \cdot 2058$	$[cd] = +0 \cdot 8836$			
$[ee] = 2 \cdot 8928$	$[ae] = -0 \cdot 8115$	$[be] = +0 \cdot 7387$	$[ce] = -0 \cdot 0905$	$[de] = -1 \cdot 0704$		
$[ff] = 1 \cdot 5213$	$[af] = -0 \cdot 5299$	$[bf] = +0 \cdot 1094$	$[cf] = +0 \cdot 4078$	$[df] = -0 \cdot 8651$	$[ef] = +1 \cdot 1191$	
$[nn] = 2 \cdot 5890$	$[an] = -0 \cdot 1686$	$[bn] = +0 \cdot 2624$	$[cn] = -0 \cdot 2421$	$[dn] = -0 \cdot 4142$	$[en] = -0 \cdot 1324$	$[fn] = -0.1771$

$v'^2[nn_6] = 67{}^{\prime\prime}47$ $\log \varepsilon = 0 \cdot 49200$
$\varepsilon = 3{}^{\prime\prime}105$

$\log x = 9 \cdot 79210$ $\log \varepsilon_x = 0 \cdot 69804$
$\log y = 9^n 08423$ $\log \varepsilon_y = 0 \cdot 56901$
$\log z = 8 \cdot 97388$ $\log \varepsilon_z = 0 \cdot 55533$
$\log t = 9^n 92356$ $\log \varepsilon_t = 0 \cdot 79998$
$\log v = 7 \cdot 75892$ $\log \varepsilon_v = 0 \cdot 38566$
$\log w = 9^n 60013$ $\log \varepsilon_w = 0 \cdot 67469$

Den Werthen dieser Unbekannten und ihrer mittleren Fehler entsprechen folgende Correctionen der Elemente für 1832 November 25·0:

$$\left.\begin{aligned} \delta M_0 &= +0{}^{\prime\prime}335 & \pm 0{}^{\prime\prime}501 \\ \delta \Pi &= -6 \cdot 039 & \pm 8 \cdot 296 \\ \delta \Omega &= -4 \cdot 117 & \pm 9 \cdot 239 \\ \delta i &= -0 \cdot 192 & \pm 1 \cdot 883 \\ \delta \varphi &= +0 \cdot 121 & \pm 0 \cdot 858 \\ \delta \mu &= -0 \cdot 000045 & \pm 0 \cdot 000256. \end{aligned}\right\} B)$$

Die Änderungen der Elemente sind durchwegs kleiner als ihre mittleren Fehler; letztere sind wegen der bedeutenden Verminderung des Fehlers (ε) der Gewichtseinheit natürlich beträchtlich kleiner geworden, stehen jedoch in fast gleichem Verhältnisse zu einander, wie die entsprechenden Grössen in *A*.

Die Darstellung der Normalörter durch das System I+*B* ist im Anschluss an die früher gewonnenen Resultate folgende:

Elemente		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	Angenommenes Gewicht ..	1·0	1·0	1·0	0·5	2·0	2 0	1·0
	Mittlerer Fehler	±1″7	±1″5	±2″1	±4″6	±0″5	±0″8	± 2″1
I	Δα.cos δ	+3·00	−0·32	−2·27	+0·89	+0·33	0·00	− 2·80
I+*A*	Δα.cos δ	+3·16	+0·47	−1·07	+3·52	−0·17	+1·28	− 1·26
I+*B*	Δα.cos δ	+4·01	−0·04	−2·17	+1·14	+0·21	+0·49	− 0·71
	Angenommenes Gewicht ..	1·0	1·0	1·0	0·5	2·0	2·0	0·5
	Mittlerer Fehler	±2·0	±1·7	±2·0	±6 2	±0·7	±0·8	± 3·7
I	Δδ	−2·41	+1·12	+5·38	−1·75	+0·57	−2·65	−18·95
I+*A*	Δδ	−1·81	+2·85	+7·46	+0 83	+0·15	−1·09	−16·13
I+*B*	Δδ	−1·92	+1·06	+5·11	−2·66	−0·87	−2·12	[−19·22]

Die Summe der Fehlerquadrate $[pvv]$ ist in der Darstellung I bei Weglassung der letzten Declinationsdifferenz gleich 74ˑ94, in der Darstellung I+B gleich 67ˑ48. Der geringen Verminderung dieser Summe entspricht auch eine so geringe Änderung der Fehlervertheilung, dass das letzte Elementensystem als nicht erheblich besser anzusehen ist, wenn auch im Allgemeinen eine etwas günstigere Darstellung hiedurch erzielt wird.

Die Elemente I+A vermitteln den engsten Anschluss an die letzten drei Normalörter und lassen die am genauesten bestimmten Örter 5 und 6 nur mehr mit Fehlern behaftet erscheinen, welche entweder kleiner oder nur wenig grösser sind, als die aus den Beobachtungen abgeleiteten mittleren Fehler; dagegen stellen sie die Erscheinung des Kometen im Jahre 1826 am schlechtesten dar, indem sie speciell die Declination des dritten Ortes mit einem kaum zulässigen Fehler betheilen.

Wenn auch das System I+A einen unbestreitbaren Vorzug vor dem System I nicht besitzt, wird man es doch als das wahrscheinlichere betrachten müssen, da es den Normalörtern mit Rücksicht auf deren mittlere Fehler im Allgemeinen etwas besser genügt.

Nach Anbringung des Correctionssystems A an die Elemente I und II erhält man

1832·0 Oscul. 1832 November 25·0				1826·0 Oscul. 1826 April 2·0			
$L =$	109°	49′	0ˑ31	$L =$	111°	56′	34ˑ01
$\Pi =$	109	58	58·87	$\Pi =$	109	48	33·01
$\Omega =$	248	13	56·18	$\Omega =$	251	27	38·38
$i =$	13	13	21·56	$i =$	13	34	4·91
$\varphi =$	48	42	24·62	$\varphi =$	48	17	49·23
$\mu =$			533·78842	$\mu =$			527·94107.

IX. SITZUNG VOM 17. MÄRZ 1898.

Se. Excellenz Arthur Graf Bylandt-Rheydt macht mit Note vom 8. März 1898 Mittheilung, dass Seine k. u. k. Apostolische Majestät mit Allerhöchstem Handschreiben vom 7. März l. J. ihn zum Minister für Cultus und Unterricht allergnädigst zu ernennen geruht haben und er mit dem heutigen Tage die Geschäftsleitung übernommen hat.

Der prov. Secretär theilt den Inhalt einer Note der Marine-Section des k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministeriums, ddo. 11. März l. J. mit, worin dieselbe die kaiserl. Akademie der Wissenschaften aus Anlass des Abschlusses der oceanographischen Forschungsreisen für die vielfachen und werthvollen Forschungsergebnisse beglückwünscht.

Ferner bringt derselbe eine Zuschrift der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Krakau zur Kenntniss, worin diese der Wiener Akademie für deren Beschluss, ihre Anzeiger den Mitgliedern der Krakauer Akademie zuzusenden, den Dank ausspricht.

Das c. M. Herr Prof. V. Uhlig in Prag dankt für die ihm bewilligte Subvention von 500 fl. zur Fortsetzung seiner geologischen Arbeiten in den Ostkarpathen.

Ferner übersendet Herr Prof. V. Uhlig eine Abhandlung, betitelt: »Die Geologie des Tatragebirges. II. Tektonik und geologische Geschichte des Tatragebirges nebst Beiträgen zur Oberflächengeologie.«

Das w. M. Herr Ober-Bergrath Dr. Edm. v. Mojsisovics legt namens der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften den V. Theil der Mittheilungen derselben

vor, welche den Titel führen: »Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1897 innerhalb des Beobachtungsgebietes erfolgten Erdbeben«.

Das w. M. Herr Prof. Dr. H. Weidel überreicht zwei im I. chemischen Laboratorium der Universität in Wien ausgeführte Arbeiten:

I. »Studien über die Bestandtheile des Guajakharzes« (II. Abhandlung), von J. Herzig und F. Schiff.

II. »Über die Einwirkung von Jodwasserstoffsäure auf aromatische Bromderivate«, von J. Herzig.

Die Mitglieder der vorjährigen ärztlichen Mission nach Bombay zum Studium der Beulenpest, Herren Dr. Heinrich Albrecht und Dr. Anton Ghon überreichen die Fortsetzung des wissenschaftlichen Theiles des Berichtes über die Ergebnisse der Mission: »*B.* Pathologisch-anatomische Untersuchungen über die Beulenpest in Bombay im Jahre 1897, mit Einschluss der pathologischen Histologie und Bakteriologie«. (Unter Mitwirkung des Hilfsarztes Dr. Rudolf Pöch.)

X. SITZUNG VOM 31. MÄRZ 1898.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. 19, Heft I (Jänner 1898).

Der prov. Secretär theilt mit, dass die II. wissenschaftliche Expedition aus dem Rothen Meer glücklich zurückgekehrt und S. M. Schiff »Pola« am 25. März l. J. im Centralhafen von Pola eingelaufen ist.

Der Commandant S. M. Schiff »Pola«, Herr k. u. k. Linienschiffs-Capitän Paul v. Pott übersendet einen vorläufigen Reise- und Thätigkeitsbericht der zweiten Reise dieses Schiffes in das Rothe Meer 1897—98.

Der prov. Secretär bringt zur Kenntniss, dass laut Note der Marine-Section des k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministeriums vom 15. März 1898 der Beobachter auf der von S. M. Schiff »Saida« in vorigen Jahre neu activirten meteorologischen Beobachtungsstation in Jidda, Herr Dr. Xanthopulides, sich erbötig gemacht hat, die Beobachtungen auch weiters fortzusetzen, zu welchem Zwecke von S. M. Schiff »Pola« die nöthigen Vorkehrungen getroffen worden sind, und dass der Endtermin für diese Beobachtungen auf Februar 1899 festgelegt wurde.

Das k. k. Eisenbahnministerium übermittelt mit Note vom 11. März l. J. die Abschrift eines an die k. k. Staatsbahndirectionen ergangenen Erlasses mit dem Beifügen, dass auch den Verwaltungen der österreichischen Privatbahnen empfohlen wurde, behufs Heranziehung der Eisenbahnorgane zur Mitwirkung bei dem von der Erdbebencommission eingeleiteten Beobachtungsdienst im Interesse der Förderung dieses vaterländischen, wissenschaftlichen Unternehmens die erforderlichen Einleitungen zu treffen.

Prof. Dr. R. Přibram übersendet zwei aus seinem Laboratorium hervorgegangene Arbeiten, und zwar:

1. »Über den Zusammenhang zwischen Volumänderung und dem specifischen Drehungsvermögen activer Lösungen« (III. Mittheilung), von Richard Přibram und C. Glücksmann.
2. »Beitrag zur quantitativen Methoxylbestimmung« von Georg Gregor.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer übersendet eine im Laboratorium für allgemeine Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit der Herren Prof. Dr. Max Bamberger und Anton Landsiedl: »Über den Nachweis von Argon in den Quellengasen des Bades Vöslau«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. Dr. A. v. Waltenhofen übersendet eine Arbeit aus dem elektrotechnischen Institute der k. k. technischen Hochschule in Wien von Friedrich Eichberg und Ludwig Kallir, betitelt: »Beobachtungen über scheinbare Gleichströme im Wechselstromlichtbogen zwischen verschiedenartigen Elektroden«.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann übersendet eine Arbeit aus dem III. chemischen Universitätslaboratorium in Wien von Leo Schwarz, betitelt: »Volumetrische Bestimmung nitrirter Phenolderivate«.

Der prov. Secretär legt eine Abhandlung von Dr. H. Harting in Jena vor, welche den Titel führt: »Über algebraische und numerische Berechnung der Mikroskopobjective geringer Apertur«.

Herr Prof. Karl Zickler in Brünn übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Telegraphie vermittelst Lichtstrahlen«.

Das w. M. Herr Oberbergrath Dr. Edm. v. Mojsisovics überreicht einen Aufsatz von Prof. Ferd. Seidl in Görz, betitelt: »Die Erderschütterungen Laibachs in den Jahren 1851—1886, vorwiegend nach den handschriftlichen Aufzeichnungen K. Deschmann's«, welcher den VI. Theil

der »Mittheilungen der Erdbebencommission der kais. Akademie der Wissenschaften« bildet.

Das w. M. Herr Prof K. Grobben überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Beiträge zur Morphologie und Anatomie der Tridacniden«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Herrn L. Grabowski in München unter dem Titel: »Einige Bemerkungen zur Erklärung der Polbewegung«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang legt eine Arbeit von Prof. A. Grau vor, welche den Titel führt: »Über Wirbelströme und Hysteresis«.

Das w. M. Herr Hofrath Dr. F. Steindachner überreicht einen Bericht von cand. med. Alfred Oberwimmer in Wien über die Mollusken II. (Heteropoden und Pteropoden; *Sinusigera*), welche anlässlich der österreichischen Tiefsee-Expeditionen S. M. Schiffes »Pola« 1890—1894 gesammelt wurden.

Herr Dr. Jaroslav Perner in Prag übersendet einen Bericht über die von der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien subventionirte Studienreise nach Skandinavien. (Mit Druck.)

Über Wirbelströme und Hysteresis

von

Prof. **A. Grau.**

(Mit 2 Tafeln und 1 Textfigur.)

Um den Effectverlust durch die im Eisen auftretenden Wirbelströme zu bestimmen, bestand bisher immer die Gepflogenheit, von den gesammten, bei wechselnder Magnetisirung im Eisen auftretenden Verlusten, welche sich aus Stromwärme in den magnetisirenden Windungen, Hysteresis und Wirbelströme zusammensetzen, die Effectverluste für Stromwärme und für Hysteresis abzuziehen und so in dem Restbetrag das gesuchte Resultat zu erhalten.

Der in der Erwärmung aufgewendete Arbeitsbetrag war mittelst der Joule'schen Formel leicht zu ermitteln, für die Bestimmung der Hysteresisarbeit musste der experimentelle Weg betreten werden, wenn man sich nicht mit den nach der Steinmetz'schen Formel erhaltenen angenäherten Werthen begnügen konnte.[1]

Die folgende Arbeit ist der umgekehrten Aufgabe gewidmet. Es sollen die Effectverluste durch Wirbelströme bestimmt und durch Verminderung des Gesammtverlustes um diesen und den auf die Stromwärme entfallenden Betrag die Hysteresisarbeit ermittelt werden.

Zu diesem Zwecke wurden drei Ringe mit gleichem Durchmesser aus isolirtem Eisendraht gebildet. Die Eisendrähte von 1 *mm*, 2 *mm* und 3 *mm* Durchmesser waren aus ein und

---

[1] Erving, Magnetische Induction im Eisen. Ch. P. Steinmetz, El. Zeitschrift, 1891, 1892.

demselben Materiale (Frischeisen) gefertigt und wurden mir in liebenswürdiger Weise von der Alpinen Montangesellschaft zur Verfügung gestellt.

Aus diesen drei Drähten, welche mit Zwirn umsponnen waren, wurden drei Ringe von gleichem Gewicht gebildet. Die angewandten Drahtlängen betrugen

98·25 *m* beim Durchmesser von 1 *mm*,
24·56 *m* » » » 2 *mm*,
10·915 *m* » » » 3 *mm*.

Diese drei so gebildeten Ringe wurden als Transformatorkerne betrachtet und jeder mit 600 Windungen eines 1 *mm* starken Kupferdrahtes bewickelt, durch welche Wicklungen dann ein Wechselstrom gesendet wurde.

Ist d der Durchmesser des Drahtes, dx die Dicke einer Zone und 1 *cm* die Länge des Drahtstückes, so ist, wenn k die Leitungsfähigkeit des Eisens bezeichnet, das Leitungsvermögen dieser Zone $\frac{kdx}{2\pi x}$.

Ist B die magnetische Induction, so ist die von der Fläche $x^2\pi$ eingeschlossene Kraftlinienzahl $x^2\pi B$. Die in der Zone auftretende E. K.

$$dE = \sqrt{2}\pi n x^2 \pi B$$

und der Strom

$$di = \frac{kdx}{2\pi x}\sqrt{2}\pi^2 nBx^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi knBx\,dx.$$

Der in dieser Zone verzehrte Effect ist

$$dA = dE.di = \pi^3 kn^2 B^2 x^3 dx$$

und somit der in der Länge von 1 *cm* im *dmm* dicken Draht verzehrte Effect

$$A = \int_0^{\frac{d}{2}} dA = \pi^3 kn^2 B^2 \int_0^{\frac{d}{2}} x^3 dx = \frac{\pi^3}{64} kn^2 B^2 d^4.$$[1]

Da die drei bei den Versuchen verwendeten Drähte aus demselben Materiale bestanden, also dieselbe Leitungsfähigkeit

[1] Ch. P. Steinmetz, E. T. Z. 1895.

besassen (was sich auch aus der Messung ergab), ausserdem bei je einer Versuchsreihe in jedem der drei Ringe sowohl das n, als auch das B constant gehalten wurde und die Längen der drei Eisendrähte sich wie 9 : 4 : 1 verhielten, so standen die unter diesen Umständen auf die Wirbelströme aufgewendeten Arbeitsbeträge in dem Verhältniss wie 1 : 4 : 9.

Nachdem

$$A_1 = 9825 \frac{\pi^3}{64} kn^2B^2 = 153 \cdot 5 \pi^3 kn^2B^2$$

$$A_2 = 2456 \frac{\pi^3}{4} kn^2B^2 = 614 \pi^3 kn^2B^2$$

$$A_3 = 1091 \cdot 5 \frac{81\pi^3}{64} kn^2B^2 = 1381 \cdot 5 \pi^3 kn^2B^2,$$

so ist

$$A_2 - A_1 = 460 \cdot 5 \pi^3 kn^2B^2$$
$$A_3 - A_1 = 1228 \cdot 0 \pi^3 kn^2B^2$$
$$A_3 - A_2 = 767 \cdot 5 \pi^3 kn^2B^2.$$

Somit verhält sich

$$(A_3 - A_1) : (A_3 - A_2) : (A_2 - A_1) = 1228 : 767 \cdot 5 : 460 \cdot 5$$

oder

$$\frac{A_3 - A_1}{A_2 - A_1} = 2 \cdot 67$$

$$\frac{A_3 - A_1}{A_3 - A_2} = 1 \cdot 60$$

$$\frac{A_3 - A_2}{A_2 - A_1} = 1 \cdot 67.$$

Bezeichnet man mit a_1, a_2 und a_3 die in den Kupferwicklungen der drei Ringe consumirten Arbeitsbeträge, so setzt sich jeder derselben aus drei Theilen zusammen

$$a_1 = \alpha_{W_1} + \alpha_{H_1} + A_1$$
$$a_2 = \alpha_{W_2} + \alpha_{H_2} + A_2$$
$$a_3 = \alpha_{W_3} + \alpha_{H_3} + A_3,$$

wobei α_W der auf die Stromwärme, α_H auf Hysteresis, A auf Wirbelströme entfallende Betrag ist.

Wird nun bei jeder Versuchsreihe die magnetische Induction B und die Frequenz n in den drei Ringen constant gehalten, so wird, nachdem dieselbe Eisensorte verwendet und das Volumen in den drei Ringen das gleiche ist, der für die Hysteresis entfallende Arbeitsbetrag der gleiche sein, und es ergibt sich

$$a_1 = \alpha_{W_1} + \alpha_H + A_1$$
$$a_2 = \alpha_{W_2} + \alpha_H + A_2$$
$$a_3 = \alpha_{W_3} + \alpha_H + A_3.$$

Da die Widerstände der drei Kupferwicklungen 1·55 Ω, 1·25 Ω und 1·175 Ω betrugen, die Stromwerthe mittelst dynamometrischer Messung erhalten wurden, so waren α_W bekannte Grössen, die von den Werthen a_1, a_2 und a_3 in Abzug gebracht, die Gleichungen liefern:

$$p_1 = a_1 - \alpha_{W_1} = \alpha_H + A_1$$
$$p_2 = a_2 - \alpha_{W_2} = \alpha_H + A_2$$
$$p_3 = a_3 - \alpha_{W_3} = \alpha_H + A_3.$$

Durch Subtraction der Gleichungen erhält man:

$$p_3 - p_1 = A_3 - A_1$$
$$p_2 - p_1 = A_2 - A_1$$
$$p_3 - p_2 = A_3 - A_2.$$

Es liefern also diese Werthe die Differenzen der in den einzelnen Ringen für Wirbelströme verbrauchten Effectverluste. Genügen diese gefundenen Werthe den früher aufgestellten Gleichungen:

$$\frac{A_3 - A_1}{A_2 - A_1} = 2 \cdot 67, \quad \frac{A_3 - A_1}{A_3 - A_2} = 1 \cdot 60 \text{ etc.},$$

so lässt sich mittelst der Beziehung

$$A_1 : (A_2 - A_1) = 153 \cdot 5 : 460 \cdot 5$$

A_1 und ferners auch A_2 und A_3 berechnen.

Diese Ermittlung der Werthe für A_1, A_2 und A_3 gestaltet sich aber noch einfacher, wenn man die Thatsache berück-

sichtigt, dass sich unter den angenommenen Verhältnissen $A_1 : A_2 : A_3 = 1 : 4 : 9$ verhalten. Man hat dann

$$p_1 = \alpha_H + A_1$$
$$p_2 = \alpha_H + A_1 + 3A_1 = p_1 + 3A_1$$
$$p_3 = \alpha_H + A_1 + 8A_1 = p_1 + 8A_1.$$

Nachdem p_1, p_2, p_3 aus den Messungen zahlenmässig bestimmte Werthe sind, so ist

$$\underline{\underline{A_1}} = \frac{p_2 - p_1}{3}, \text{ respective } \frac{p_3 - p_1}{8}$$
$$\underline{\underline{A_2}} = 4A_1$$
$$\underline{\underline{A_3}} = 9A_1.$$

und es sind die auf die Wirbelströme entfallenden Effectverluste direct ermittelt.

Mit diesen so bestimmten Werthen von A kann man dann die auf Hysteresis entfallenden Arbeitsbeträge α_H nach der Formel $\alpha_H = p - A$ erhalten.

Nachdem die Stärke des magnetisirenden Stromes, die Spannung am Ring zur Bestimmung der jeweiligen magnetischen Induction und die aufgewendete Arbeit gemessen werden mussten, so wurde ein Elektrodynamometer, ein Hitzdrahtvoltmeter und ein Weston-Wattmeter benützt.

Der bei den ersten Versuchen benützte Wechselstrom hatte 43 Perioden pro Secunde.

Die Inductionswerthe B wurden aus der gemessenen Spannung am Ringe mittelst der Formel

$$B = \frac{10^8 E}{\pi \sqrt{2}\, nqz}$$

ermittelt, wobei

E die Spannung,

n die Periodenzahl,

$q = 1{\cdot}61\, cm^2$ die Eisenquerschnittsfläche,

$z = 600$ die Windungszahl

bedeuten.

Das Wattmeter gestattete bei einer Maximalstromstärke von circa 2 Ampère $^1/_2$ Watt direct abzulesen.

In Folge dieser engen Begrenzung der Stromstärke musste mit einer hohen E. K. gearbeitet werden, damit die Ablesungen am Wattmeter nicht zu geringe Werthe erhielten.

Ring I.

Durchmesser des Eisendrahtes 1 *mm.*
Länge des Eisendrahtes 98·25 *m.*
Zahl der magnetisirenden Windungen 600.
Widerstand der magnetisirenden Wicklung 1·55 Ω.

Spannung am Ring in Volt	Stromstärke in Ampère	Am Wattmeter abgelesene Watt	Um den Verlust durch Stromwärme corrigirte Watt
38	1·15	11·2	9·15
36	1·00	9·8	8·25
34	0·93	8·5	7·16
32	0·75	7·6	6·73
30	0·65	7·3	6·65
28	0·63	6·41	5·80
26	0·61	5·68	5·10
24	0·58	5·45	4·92

Ring II.

Durchmesser des Eisendrahtes 2 *mm.*
Länge des Eisendrahtes 24·56 *cm.*
Zahl der magnetisirenden Windungen 600.
Widerstand der magnetisirenden Wicklung 1·25 Ω.

Spannung am Ring in Volt	Stromstärke in Ampère	Am Wattmeter abgelesene Watt	Um den Verlust durch Stromwärme corrigirte Watt
38	1·38	23	20·64
36	1·15	19·5	17·90
34	0·98	16·8	15·60
32	0·92	16·09	15·03
30	0·80	14·06	13·26
28	0·69	12·09	11·50
26	0·55	10·50	10·12
24	0·51	9·2	8·89

Ring. III.

Durchmesser des Eisendrahtes 3 *mm.*
Länge des Eisendrahtes 10·915 *m.*
Zahl der magnetisirenden Windungen 600.
Widerstand der magnetisirenden Wicklung 1·175 Ω.

Spannung am Ring in Volt	Stomstärke in Ampère	Am Wattmeter abgelesene Watt	Um den Verlust durch Stromwärme corrigirte Watt
38	2·08	44·8	39·8
36	1·77	37·8	34·12
34	1·53	32·7	29·92
32	1·38	30·73	28·50
30	1·23	26·20	24·42
28	1·05	22·30	21
26	0·92	19·39	18·40
24	0·83	16·16	15·35

Bildet man aus diesen für die drei Ringe erhaltenen Werthen die Quotienten

$$\frac{A_3-A_1}{A_2-A_1}, \quad \frac{A_3-A_1}{A_3-A_2} \quad \text{und} \quad \frac{A_3-A_2}{A_2-A_1},$$

so bekommt man:

$\frac{A_3-A_1}{A_2-A_1}$	$\frac{A_3-A_1}{A_3-A_2}$	$\frac{A_3-A_2}{A_2-A_1}$
2·67	1·59	1·68
2·68	1·595	1·68
2·69	1·59	1·69
2·60	1·61	1·62
2·69	1·59	1·69
2·67	1·60	1·67
2·65	1·60	1·65
2·63	1·61	1·63
Mittel 2·66	1·597	1·663
gegen 2·67	1·60	1·67

Die grösste Abweichung zeigte sich bei den der Spannung von 32 Volt entsprechenden Werthen, die durch eine ungenaue Ablesung entstanden sein dürften.

Es lassen sich somit die auf Foucoultströme allein entfallenden Arbeitsbeträge nach der Relation $A_1 : (A_3 - A_1) = 153 \cdot 5 : 1228$ ermitteln.

	Wirbelstromarbeit in Watt für			
	Ring I	Ring II	Ring III	B *
bei 38 Volt	3·83	15·32	34·48	20588
» 36 »	3·233	12·88	29·10	19500
» 34 »	2·845	11·285	25·601	18421
» 32 »	2·721	11·02	24·49	17357
» 30 »	2·221	8·83	19·99	16254
» 28 »	1·9	7·60	17·10	15170
» 26 »	1·66	6·68	14·96	14087
» 24 »	1·303	5·27	11·73	13003

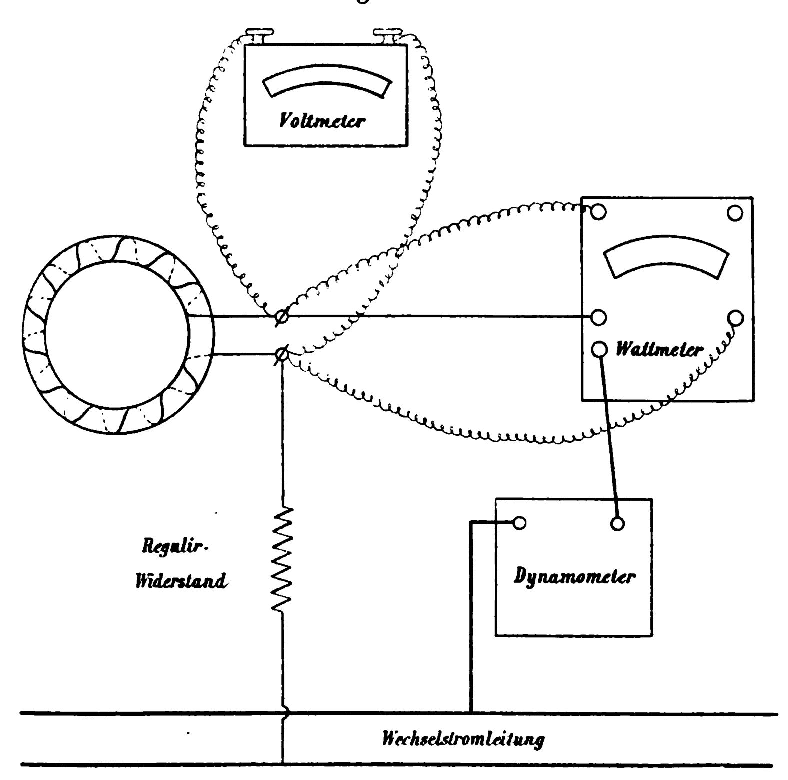
Bestimmt man mittelst dieser so erhaltenen Werthe die für Hysteresis entfallenden Arbeitsbeträge, so erhält man, da dieselben für jeden der drei Ringe gleich sein müssen, die folgenden Resultate:

B	Hysteresis-arbeit in Watt für das ganze Eisenvolumen
20588	5·32
19500	5·02
18421	4·31
17357	4·01
16254	4·43
15170	3·90
14087	3·44
13000	3·62

* Die Inductionswerthe B wurden nach der früher angegebenen Formel $B = \frac{10^8 E}{\pi \sqrt{2}\, nqz}$ berechnet.

Der dem Werthe $B = 16254$ entsprechende Betrag passt nicht in die Reihe und liegt diese Abweichung in der schon früher bemerkten fehlerhaften Ablesung. Die Resultate finden sich in der Tafel I niedergelegt.

Dieselben Resultate ergeben sich, wenn man den zweiten im Vorangehenden beschriebenen Vorgang einhält und A_1, A_2, A_3 nach den Relationen $A_1 = \frac{p_2 - p_1}{3}$, $A_2 = 4A$, $A_3 = 9A_1$ bestimmt.



Diese Bestimmung ist in Tafel II graphisch durchgeführt. Es sind die Spannungen als Abscissen, die Werthe $p_2 - p_1$, $p_3 - p_1$, $p_3 - p_2$ als Ordinaten aufgetragen (gestrichelte Curven) und daraus die Werthe für A_1, A_2 und A_3 bestimmt (stark ausgezogene Curven).

Um über die Richtigkeit der so ermittelten Werthe ein Urtheil zu gewinnen, wurde eine zweite Versuchsreihe mit 22 Perioden in der Secunde durchgeführt.

Die dabei erhaltenen Resultate sind folgende:

Ring I.

22 Perioden pro Secunde.

Spannung in Volt am Ring	Stromstärke in Ampère	Am Wattmeter abgelesene Watt	Um den Verlust durch Stromwärme corrigirte Watt
20	1·15	5·9	3·85
19	1·00	5·1	3·55
18	0·94	4·48	3·11
17	0·83	3·82	2·75

Ring II.

Spannung in Volt am Ring	Stromstärke in Ampère	Am Wattmeter abgelesene Watt	Um den Verlust durch Stromwärme corrigirte Watt
20	1·27	8·10	6·49
19	1·12	7·55	5·98
18	1·00	6·48	5·23
17	0·87	5·56	4·71

Ring III.

Spannung in Volt am Ring	Stromstärke in Ampère	Am Wattmeter abgelesene Watt	Um den Verlust durch Stromwärme corrigirte Watt
20	1·62	14·00	10·92
19	1·46	12·60	10·10
18	1·29	10·88	8·93
17	1·15	9·52	7·97

Es ergibt sich hieraus:

	$A_3—A_1$	A_3-A_2	$A_2—A_1$
20	7·07	4·43	2·64
19	6·55	4·12	2·43
18	5·82	3·70	2·12
17	5·22	3·26	1·96

Nachdem sich die in den vier Fällen statthabenden Inductionswerthe B aus der gemessenen Spannung nach der Formel $B = \frac{10^8 E}{\pi \sqrt{2} nqz}$ ermitteln, so ergibt sich bei

E	B	Verlust durch Wirbelströme im ersten Ring	Verlust durch Wirbelströme im zweiten Ring	Verlust durch Wirbelströme im dritten Ring	Hysteresisverlust in Watt für die drei Ringe
20 Volt	20720	0·88	3·52	7·92	2·97
19 »	19680	0·81	3·24	7·29	2·74
18 »	18648	0·71	2·84	6·39	2·40
17 »	17610	0·65	2·61	5·87	2·10

Nachdem die Periodenzahl von 43 pro Secunden auf 22 erniedrigt wurde, so muss bei gleichen magnetischen Inductionen der Effectverlust durch Wirbelströme im Verhältniss $\left(\frac{22}{43}\right)^2$ und der Effectverlust durch Hysteresis im Verhältniss $\frac{22}{43}$ sich vermindern.

Am Schlusse möge noch bemerkt werden, dass diese Bestimmungen auch mit zwei Ringen allein (die auch aus Blechen hergestellt sein können) durchführbar sind.


A. Grau : Wirbelströme u. Hysteresis.


Taf. I.

Watt

38
36
34
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0

24 26 28 30 32 34 36 38 Volt

A_3

$p_3 - p_1$

$p_3 - p_2$

A_2

$p_2 - p_1$

A_1

Autor del.

Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.


A. Grau : Wirbelströme u. Hysteresis.


Taf. II.

Watt

38
36
34
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0

P_3

A_3

P_2

A_2

P_1

A_1

24 26 28 30 32 34 36 38 Volt.

Autor del.

Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.

Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd. CVII. Abth. IIa. 1898.

Einige Bemerkungen zur Erklärung der Polbewegung

von

L. Grabowski.

(Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.)

1.

Prof. Helmert hatte im December 1890[1] die Bewegung des Rotationspoles für den Fall untersucht, dass die Bewegung des Trägheitspoles C gegeben ist als eine harmonische Bewegung in einer beliebigen Ellipse (einer Geraden, einer Ellipse, einem Kreise) um den Mittelpunkt C_0, mit der Periode 1 Jahr. Die Bewegung des Rotationspoles M ist dadurch definirt, dass derselbe in jedem Augenblick eine unendlich kleine kreisförmige Drehung um die momentane Lage des Punktes C mit der Winkelgeschwindigkeit λ ausführt. Denkt man sich die Coordinatenaxen längs der Hauptaxen jener Ellipse genommen und ist dann die Bewegung von C durch die Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} X &= A\cos(mt+G) \\ Y &= B\sin(mt+G) \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

wo also m die Winkelgeschwindigkeit $\dfrac{2\pi}{1\,\text{Jahr}}$ bedeutet, die Halbaxen A, B und die Anfangsphase G gegebene Constanten sind, so ist die Bewegung von M, wie man durch Integration der bekannten Differentialgleichungen findet, in demselben Coordinatensystem durch die Gleichungen ausgedrückt:

[1] »Zur Erklärung der beobachteten Breitenänderungen.« Astr. Nachr. 3014 (Bd. 126).

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos(mt+G)+c\cos(\lambda t+d) \\ y &= b\sin(mt+G)+c\sin(\lambda t+d) \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

wo c und d unbestimmte Integrationsconstanten sind, dagegen λ, m, G die frühere Bedeutung haben und a, b mit den Halbaxen der Trägheitspolellipse durch die Relationen zusammenhängen:

$$a = \frac{\lambda^2 A + \lambda m B}{\lambda^2 - m^2}, \qquad b = \frac{\lambda^2 B + \lambda m A}{\lambda^2 - m^2}.$$

Die Gleichungen (2) können so interpretirt werden, dass der Rotationspol M einen Kreis mit dem Radius c und in der Periode $\frac{2\pi}{\lambda}$ um einen Punkt M_0 beschreibt, welcher gleichzeitig seinerseits auf der Peripherie einer um C_0 beschriebenen Ellipse fortschreitet, deren Halbaxen die Längen a, b und die nämlichen Richtungen wie diejenigen der Trägheitspolellipse besitzen und die in der Periode $\frac{2\pi}{m}$ (= 1 Jahr) durchlaufen wird. Ich will im Folgenden diesen Mittelpunkt des beweglichen Kreises, der Kürze halber, als den »mittleren Rotationspol« bezeichnen. Der Trägheitspol und der mittlere Rotationspol gehen beide zu gleicher Zeit durch die Endpunkte der sich entsprechenden Halbaxen ihrer Bahnen hindurch.

2.

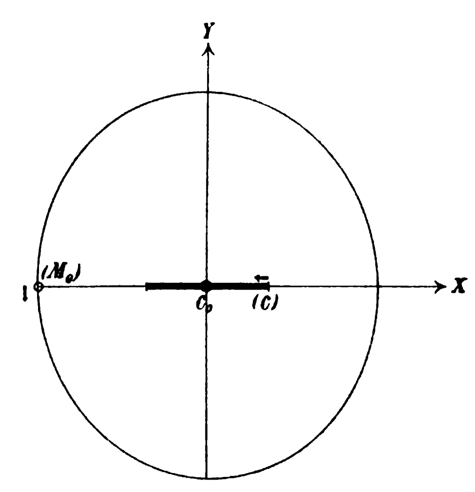
In dem citirten Aufsatz knüpft Prof. Helmert an diese Gleichungen verschiedene specielle Beispiele und gewisse Schlüsse über die sogenannte Multiplication an, wobei für λ (die Winkelgeschwindigkeit der Momentandrehung von M um C) der aus der Euler'schen Theorie hergenommene Werth $\lambda = \frac{2\pi}{10 \text{ Monate}}$ benutzt wird. Nachdem später durch die Chandler'sche Formel gezeigt und von Newcomb erklärt wurde, dass $\lambda = \frac{2\pi}{14 \text{ Monate}}$ ist, bedürfen diese Schlüsse einer Revision; und es scheint mir nicht ohne Nutzen zu sein, einige derselben in der corrigirten Gestalt mitzutheilen.

Setzt man in den die Bewegung von C definirender Gleichungen (1) $B = 0$, so hat man den schon früher von

Radau untersuchten Fall: eine geradlinige harmonische Schwingung des Trägheitspoles C durch seine mittlere Lage C_0 mit der Halbamplitude A. Man erhält dann für die Halbaxen der Ellipse des mittleren Rotationspoles:

$$a = -\frac{36}{13}A, \qquad b = -\frac{42}{13}A.$$

Wir sehen, dass die in der Richtung der Geraden liegende und die darauf senkrechte Halbaxe, ihrer absoluten Länge nach, beziehungsweise 2·8 mal und 3·2 mal so gross sind wie die Halbamplitude von C; die Bewegung ist rechtläufig, und zwar entspricht der grössten Elongation des C nach rechts die grösste Elongation des M_0 nach links; die Multiplication ist annähernd so gross, wie sie Radau gefunden hat (unter der Annahme $\lambda = \frac{2\pi}{10 \text{ Monate}}$), doch ist die in der Richtung der Geraden C_0C liegende Halbaxe die kleinere. (Die Unterschiede gegen Radau sind durch Sperrdruck markirt.)



Es hätte keinen Zweck, hier weitere specielle Fälle zu verfolgen, in welchen vielfach durch die Einführung des neuen Werthes von λ die Formen der Ellipsen noch stärker geändert werden.[1] Ebenso unterlasse ich es, die Bedingungen der rechtläufigen und der rückläufigen Bewegung zu erörtern.

[1] Es braucht nicht erst gesagt zu werden, dass auch die Figuren, die dem citirten Aufsatze beigegeben sind, ihre (bedingte) Giltigkeit für die Erde verlieren. — Hier ist auch die Gelegenheit, darauf aufmerksam zu machen, dass die Helmert'sche Figur 2 ausserdem durch ein Versehen des Zeichners falsch gezeichnet ist, wie man gleich bemerkt, wenn man sie aufmerksam anschaut und den erläuternden Text berücksichtigt.

Desgleichen dürfte es überflüssig sein, obwohl es nicht uninteressant ist, die Frage zu discutiren, in welchen Fällen überhaupt echte Multiplication, d. h. der Umstand eintritt, dass wenigstens eine der absolut genommenen Halbaxen der M_0-Ellipse grösser ist als die grössere der absolut genommenen Halbaxen der Trägheitspolellipse. — Der Multiplicationsindex (ich verstehe darunter das Verhältniss der grösseren der Zahlen $|a|$, $|b|$ zu der grösseren der Zahlen $|A|$, $|B|$) variirt für die verschiedenen Fälle der Bewegung des Trägheitspoles zwischen $\frac{6}{13}$ und 6.

3.

Ist umgekehrt die Bewegung des Rotationspoles bekannt und ausgedrückt durch Gleichungen von der Form der (2), so bestimmt sich diejenige des Trägheitspoles durch die Gleichungen (1), wobei die Constanten A und B

$$A = a - \frac{m}{\lambda} b, \qquad B = b - \frac{m}{\lambda} a$$

sind und die Constanten m λ, G dieselben Werthe haben wie in den gegebenen Bewegungsgleichungen des Rotationspoles. — Nun geht aus den Beobachtungen hervor, nach der Discussion von Chandler, dass, wenn man die x-Axe in der Richtung nach 45° Länge (östlich von Greenwich), die y-Axe in der Richtung nach 135° Länge nimmt, die Bewegungsgleichungen des Rotationspoles so geschrieben werden können:

$$x = 0''15 \cos m(t\text{—Oct. }5) + 0''16 \cos\{\lambda(t\text{—1892 Oct. }5)\text{—}88°\}$$
$$y = 0''04 \sin m(t\text{—Oct. }5) + 0''16 \sin\{\lambda(t\text{—1892 Oct. }5)\text{—}88°\}.$$

wo $m = \frac{2\pi}{1 \text{ Jahr}}$, $\lambda = \frac{2\pi}{7/6 \text{ Jahr}}$ bezeichnen; folglich sind diejenigen des Trägheitspoles C

$$\left.\begin{aligned} X &= +0''103 \cos m(t\text{—Oct. }5) \\ Y &= -0''135 \sin m(t\text{—Oct. }5) \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

In der beigegebenen Figur, welche die ganze siebenjährige Bahn des Rotationspoles zeigt, stellt die stark ausgezogene Ellipse die Bahn des Trägheitspoles dar; dieselbe wird im Laufe eines Jahres rückläufig durchlaufen. Die beiden con-

structiven Elemente der Polcurve, nämlich die Leitellipse (Bahn des mittleren Rotationspoles) und der erzeugende Kreis, sind — letzterer nur in seiner Anfangsstellung — punktirt gezeichnet. Am 5. October jedes Jahres befinden sich der Trägheitspol und der mittlere Rotationspol in den beziehungsweise mit C und M_0 bezeichneten Punkten ihrer Ellipsen; am 5. October 1892 befand sich der Rotationspol in dem mit M bezeichneten Punkte seines Kreises.

4.

In seiner unlängst erschienenen, durch ihre unerwarteten Ergebnisse interessanten Abhandlung »Die Ursache der Breitenschwankungen«[1] betrachtet Herr Spitaler an der Hand der Isobarenkarten die Verlagerungen von Luftmassen, welche von den »Gebieten mit Drucküberschuss im Januar« zu den »Gebieten mit Drucküberschuss im Juli« im Laufe der ersten Hälfte des Jahres (und umgekehrt in der zweiten Hälfte des Jahres) stattfinden. Es werden dabei sieben einzelne Luftverlagerungen in Betracht gezogen und für jede derselben einzeln die daraus entstehende Verschiebung des Trägheitspoles C, ihrer Grösse und Richtung nach, berechnet; durch einfache geometrische Zusammensetzung dieser einzelnen Verschiebungen ergibt sich, dass die Entfernung der Juli-Lage desselben von seiner Januar-Lage, $C^{\mathrm{I}}C^{\mathrm{VII}}$, 0"212 beträgt und in der Richtung nach 75° Länge geht.

Um zu prüfen, ob die Polbewegung in der That durch diese Luftverlagerungen, und nur durch sie wesentlich, hervorgebracht wird, braucht man nur dieses Ergebniss der Rechnung mit den Beobachtungen zu vergleichen. Dazu bieten sich zunächst offenbar zwei Wege dar. Man muss entweder

a) aus dieser Verschiebung des Trägheitspoles die entsprechende Bewegung des mittleren Rotationspoles berechnen und dieselbe mit der beobachteten Bewegung des mittleren Rotationspoles vergleichen; oder

b) aus der beobachteten Bewegung des Rotationspoles die Bewegung des Trägheitspoles herleiten und mit derselben die berechnete Verschiebung des Trägheitspoles vergleichen.

---

[1] Denkschriften der mathem.-naturw. Cl. der k. Akad. d. Wiss. in Wien, LXIV. Bd.

Herr Spitaler schlägt den ersteren Weg ein.

Um aber den in *a)* enthaltenen Schluss machen zu können, müsste man wissen, auf welchem Wege der Trägheitspol von der Lage C^{I} in C^{VII} übergeht, da — wie wir gesehen haben — die Gestalt der Bahn desselben auf die Gestalt und Grösse der Bahn des mittleren Rotationspoles einen durchaus bestimmenden Einfluss hat. Da man aber (besonders in Ermangelung der Monatsisobaren) darüber nichts wissen kann, so bleibt, wenn man diesen Weg verfolgen will, nichts Anderes übrig, als eine willkürliche Voraussetzung über die Bewegung des C von C^{I} nach C^{VII} probeweise zu treffen, z. B. dass sie längs der dieselben verbindenden geraden Linie vor sich geht. Bei dieser Annahme, die Herr Spitaler auch macht, finden wir nach §. 2 für die Bahn des mittleren Rotationspoles die dort beschriebene corrigirte Radau'sche Ellipse, deren Axen, $2a$ und $2b$, (absolut) beziehungsweise

0ʺ6 und 0ʺ7

sind, wobei die Endpunkte der ersteren Axe die Längen 75° (für Januar) und 255° (für Juli) haben würden und die Bewegung rechtläufig wäre. Die »Maximalschwankung des mittleren Rotationspoles« würde danach 0ʺ7 betragen und in die Richtungen nach 165°, beziehungsweise 345° Länge fallen.

Man sieht, dass die auf diesem Wege erhaltene Bewegung des mittleren Rotationspoles mangelhaft mit der beobachteten übereinstimmt, bei welcher die Maximalschwankung des mittleren Rotationspoles, wie wir sahen, 0ʺ3 beträgt, in der Richtung nach 45°, beziehungsweise 225° Länge geht und die Bewegung rückläufig ist.[1]

Es erscheint daher zweckmässig, die Vergleichung der von Herrn Spitaler berechneten Trägheitspolverschiebung mit

[1] Herr Spitaler findet allerdings die Übereinstimmung zwischen dem Ergebniss der Rechnung und den Beobachtungen befriedigend genug; das erklärt sich einerseits dadurch, dass er sich darauf beschränkt hat, nur die Grösse der Maximalschwankung des mittleren Rotationspoles zu berechnen, ohne die übrigen Elemente seiner Bewegung ins Auge zu fassen: er erhält (das Gesetz der uncorrigirten Radau'schen Ellipse anwendend) für diese Maximalschwankung den Werth 0ʺ7. Anderseits nimmt er für den aus den Beobachtungen folgenden Werth derselben nicht 0ʺ3, sondern 0ʺ5.

den Beobachtungen auf die andere Weise *b)* vorzunehmen, da dieser Weg keine Nothwendigkeit einer willkürlichen Annahme über die Gestalt der Bahn involvirt. Den ersten Schritt des in *b)* vorgeschlagenen Verfahrens haben wir bereits gethan: die Bewegung des Trägheitspoles, wie sie aus den Beobachtungen hervorgeht, ist (§. 3) gefunden. Sind nun die erwähnten Luftverlagerungen in der That die einzige wesentliche Ursache der Polhöhenschwankungen, so wird die im §. 3 gefundene Ellipse durch die Punkte C^{I} und C^{VII}, wie sie von Herrn Spitaler bestimmt worden sind, hindurchgehen müssen, und zwar zu den betreffenden Zeiten. Man überzeugt sich leicht, dass dies nicht der Fall ist. Zwar liegen die Punkte C^{I} und C^{VII} sehr nahe an der Ellipse, aber die Ellipsenpunkte, welche der Trägheitspol im Januar und Juli passirt, sind weit von ihnen entfernt; mit anderen Worten: die berechnete Januar-Juli-Transposition weicht sowohl in Betreff der Richtung, wie der Länge sehr stark von der astronomisch beobachteten Januar-Juli-Transposition ab. Diese starke Discordanz zwischen dem Resultat der Rechnung einerseits und der Beobachtung anderseits zeigt, dass ausser diesen Luftverlagerungen noch andere Processe, von nicht verschwindendem Einfluss auf die Bewegung des Trägheitspoles, im Spiele sind.

5.

In der letzteren Hinsicht dürfte folgende Constatirung nicht ohne Interesse sein. Man kann die aus den Beobachtungen hervorgehende Bewegung des Trägheitspoles in zwei geradlinige harmonische Schwingungen zerlegen, die eine in der Richtung nach 75° (und 255°) Länge, die andere senkrecht darauf. Es zeigt sich nun, dass diejenige componente harmonische Schwingung, welche in der ersteren Richtung wirkt (also in der Richtung, in welcher die durch Luftverlagerungen hervorgerufene Verschiebung stattfindet), eine Amplitude von 0ʺ223 besitzt. Sie deckt sich also auffallend genau mit der von Herrn Spitaler berechneten Verschiebung des Trägheitspoles. Damit die Übereinstimmung vollständig sei, sollten die grössten Ausschläge dieser componenten Schwingung auf die Monate (etwa Mitte) Juli und Januar fallen; sie fallen that-

sächlich in die zweite Hälfte des Monates August, beziehungsweise Februar, eine Verzögerung, die — angesichts der Unvollkommenheit des beiderseitigen Materials — die genannte Übereinstimmung nur wenig beeinträchtigt.

Man sieht somit, dass es schon durch Vornahme verhältnissmässig recht geringer Änderungen in den durch meteorologische Vorgänge bestimmten Elementen (der Amplitude und den Epochen der Extreme, eventuell auch der Richtung) gelingt, das zu erreichen, dass bei einer rechtwinkligen — oder nahezu rechtwinkligen — Zerlegung der astronomisch beobachteten Bewegung des Trägheitspoles die eine der Componenten sich als identisch mit der barometrischen Verschiebung des Trägheitspoles erweist.

Diese Überlegung führt also — in Verbindung mit der des Schlussabsatzes des vorigen Paragraphen — zu folgenden Conclusionen:

Der Complex der von Herrn Spitaler angezeigten Luftverlagerungen ist der eine Hauptfactor der Polbewegung, neben welchem noch ein anderer, mit ihm vergleichbarer, existiren muss. Dieser letztere ist in einem Process oder Processcomplex zu suchen, der in einer darauf annähernd senkrechten Richtung vor sich geht.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. IV. UND V. HEFT.

JAHRGANG 1898. — APRIL UND MAI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 40 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1898.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 4. und 5. Heftes April und Mai 1898 des CVII. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 10 kr. = 4 Mk. 20 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. IV. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XI. SITZUNG VOM 21. APRIL 1898.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. II. a., Heft X (December 1897).

Herr Vicepräsident Prof. E. Suess macht die Mittheilung, dass laut eingelangter Trauerbotschaft das w. M. der kaiserlichen Akademie, Herr Hofrath Prof. Dr. Georg Bühler am 8. April d. J. anlässlich einer Bootfahrt im Bodensee bei Lindau verunglückt ist.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrer Theilnahme an diesem erschütternden Ereignisse durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Ferner gibt der Vorsitzende Nachricht von dem am 2. April d. J. erfolgten Ableben des correspondirenden Mitgliedes dieser Classe Herrn Dr. Salomon Stricker, Professor der k. k. Universität in Wien.

Die Mitglieder erheben sich zum Zeichen ihres Beileides.

Der prov. Secretär legt ein von Sr. kaiserlichen und königlichen Hoheit dem durchlauchtigsten Herrn Erzherzog Ludwig Salvator, Ehrenmitgliede der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, verfasstes und der Akademie geschenktes Werk: »Cannosa« (Dalmatien) vor.

Herr Alfred Ziegler, d. z. in Pilsen, übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit folgender Inhaltsangabe:

1. Verwerthungsformen der Ablauge des Sulfitcellulose-Verfahrens.
2. Verbrennungsofen zum Unschädlichmachen der Sulfitcellulose-Ablauge.
3. Ein neues Enthaarungsverfahren für thierische Häute.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. G. Tschermak überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. A. Pelikan in Wien: »Über die Schalsteinformation in Mähren und Schlesien«.

Das w. M. Herr Intendant Hofrath F. Steindachner überreicht eine Abhandlung: »Über eine noch unbeschriebene *Kuhlia*-Art«, welche während der I. Tiefsee-Expedition nach dem Rothen Meere in drei Exemplaren im nördlichsten Theile des Golfes von Akabah mit der Tratta gefischt wurde. Die charakteristischen Merkmale dieser Art, *Kuhlia Sterneckii*, sind: 10. Dorsalstachel nur wenig kürzer als der 9.; 8—10 Gliederstrahlen in der Dorsale und 10 in der Anale; 49—50 Schuppen längs der Seitenlinie; 24—25 Rechenzähne am unteren Aste des ersten Kiemenbogens. Caudale mit 5 dunklen Binden.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn August Thalberg »Über Propionaldol.«

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner überreicht eine Arbeit des Herrn Dr. M. Cantor, Assistent am physikalischen Institute der Universität Strassburg »Über die Entladungsform der Elektricität in verdünnter Luft«.

Herr Prof. Dr. Richard Přibram überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Carl Glücksmann ausgeführte Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Czernowitz: »Über den Zusammenhang zwischen Volumänderung und dem specifischen Drehungsvermögen activer Lösungen« (IV. Mittheilung).

Schliesslich überreicht Herr Vicepräsident Prof. E. Suess seine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung: »Über die seitliche Asymmetrie der nördlichen Halbkugel«.

Über die Entladungsform der Elektricität in verdünnter Luft

von

Mathias Cantor, Strassburg i. E.

H. Hertz[1] hat eine Reihe höchst empfindlicher Methoden angegeben, um die Continuität einer Gasentladung zu prüfen, und ist durch seine Untersuchungen zu dem Schlusse gelangt, dass bei Verwendung constanter Batterien von genügend kleinem Widerstand die Entladung der Elektricität in verdünnter Luft auch ohne Discontinuität erfolgen könne.

Indess führen alle von Hertz ausgeführten Versuche nur zu der Alternative, dass die Entladung entweder continuirlich stattfindet oder aus einer sehr grossen Anzahl von Partialentladungen besteht. Hertz entscheidet sich dabei für das erstere. Nun hat Branly[2] in der Änderung des Leitungswiderstandes von Metallpulvern ein ungemein feines Reagens auf elektrische Schwingungen entdeckt.

Mit diesem neuen Hilfsmittel schien es möglich, die Frage nach der Continuität der Gasentladung einer Entscheidung näher zu bringen. In dieser Absicht wurden die folgenden Versuche unternommen. Zur Ausführung derselben hatte Herr C. Weissbecker, welcher im hiesigen Institute mit dem Studium der Gasentladung beschäftigt ist, die Freundlichkeit mir seinen Apparat zu überlassen.

Dieser hat im Wesentlichen folgende Einrichtung:

Eine Batterie von 1000 Accumulatoren ist in einem Kellerraum aufgestellt und durch dicke Kupferdräthe mit dem im

---

[1] Wied. Ann. 19, S. 782, 1882.

[2] Compt. rend. III, p. 785, 1890.

Hochparterre gelegenen Beobachtungszimmer verbunden. Dort befindet sich der Entladungsapparat, ein mit der Luftpumpe verbundenes Glasrohr, in welches Elektroden aus Aluminiumröhren eingeschmolzen sind, die mit der Batterie verbunden werden können.

In den Stromkreis ist ein Flüssigkeitswiderstand zur Regulirung und ein Spiegelgalvanometer zur Messung der Stromstärke eingeschaltet. Nach Angabe von Hertz wurde nun die Kathode des Entladungsrohres durch einen kurzen dicken Drath mit den Blättchen und durch einen Flüssigkeitswiderstand von $1 \cdot 3 . 10^7\ \Omega$ mit dem Metallgehäuse eines Exner'schen Elektroskopes verbunden. Das Elektroskop war isolirt aufgestellt und wurde durch ein Mikroskop mit Ocularmicrometer beobachtet. Es zeigte schon einen merklichen Ausschlag an, wenn zwischen den Blättchen und dem Gehäuse eine Potentialdifferenz von 10 Volt bestand, war also circa 10 mal empfindlicher als das von Hertz benützte.

Als der Strom geschlossen wurde, ergab sich in der That zunächst eine schon mit freiem Auge sichtbare Ablenkung der Blättchen des Elektroskopes. Nachdem jedoch durch weiteres Evacuiren die von Hertz beschriebene Entladungsform hergestellt worden war, trat keine merkliche Divergenz mehr auf, die Entladung war nach dem Hertz'schen Kriterium continuirlich geworden, die Stromstärke betrug dabei 2·4 Milliampère.

Diese Entladungsform wurde nun in folgender Weise auf Emission elektrischer Wellen untersucht:

1. Parallel zur Entladungsröhre wurde ein Cohärer aufgestellt und mit einem Leclanche-Element und einem Braun'schen Milliampèremeter verbunden. Der Cohärer war nach Angabe von V. von Lang[1] mit kleinen eisernen Schrauben gefüllt. Um vor der Wirkung des Schliessungsfunkens geschützt zu sein, wurde der Strom, welcher das Entladungsrohr durchsetzt, im Batterieraum geschlossen.

Sobald dies geschah, zeigte der Ausschlag des Milliampèrmeters an, dass der Cohärer von elektrischen Wellen getroffen wurde.

[1] Wied. Ann. 57, S. 34, 1896.

Als zur Controle statt der Gasstrecke ein Flüssigkeitswiderstand eingeschaltet wurde, konnte im Cohärerkreis nicht die geringste Veränderung bemerkt werden.

2. Der Cohärer wurde sammt Element und Milliampèremeter auf ein mit Stanniol überzogenes Brett gestellt und darüber ein gleichfalls mit Stanniol überzogener Korb gestülpt, welcher leicht und ohne Erschütterung abgenommen werden konnte. Durch Versuche wurde festgestellt, dass das Abheben des Korbes den Cohärer nicht veränderte.

Während der Cohärerkreis von der Metallhülle umschlossen war, wurde die Entladung eingeleitet und das Elektroskop beobachtet; es zeigte sich kein Ausschlag in demselben. Jetzt wurde die Hülle entfernt und dadurch der Cohärer den elektrischen Wellen exponirt.

Der Ausschlag des Milliampèremeters zeigte, dass nunmehr der Cohärer von einem Strom durchflossen wurde.

Aus diesen Versuchen kann geschlossen werden, dass auch bei der von Hertz als continuirlich betrachteten Entladung elektrische Wellen ausgesendet werden, dass auch diese Entladung nicht in Form einer stationären Strömung stattfindet.

Insoferne die von Hertz untersuchte Entladungsform jedenfalls von allen bisher genauer studierten noch am angenähertsten stationär verläuft, darf weiter geschlossen werden. dass die Gasentladung wohl ganz allgemein mit Oscillationen verknüpft ist. Die ältere, namentlich von Wüllner[1] und O. Lehmann[2] vertretene Anschauung erhält durch die Versuche eine experimentelle Begründung.

Weitere Versuche müssen noch entscheiden, ob gleichzeitig mit der oscillatorischen auch noch eine stationäre Entladung stattfindet und ob die Oscillationen nur in der Gasstreke oder in der ganzen Schliessung auftreten. Da gegenwärtig der benützte Apparat seinem ursprünglichen Zwecke gemäss verwendet werden soll, so muss ich die Ausführung der in dieser

[1] Wüllner, Experim. Physik, 4. Aufl., 1886, IV. Bd., S. 1134.

[2] O. Lehmann, Die elektr. Lichterscheinungen. Halle a. S., 1898, S. 152.

Hinsicht geplanten Versuche verschieben, glaube aber das bisher gefundene schon jetzt mittheilen zu sollen.

Herrn C. Weissbecker, welcher, wie erwähnt, so freundlich war mir seinen Apparat zeitweilig zu überlassen und bei Ausführung der Versuche in der gefälligsten Weise mir behilflich war, möchte ich auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank sagen.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. V. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XII. SITZUNG VOM 5. MAI 1898.

Erschienen: Sitzungsberichte: 106. Bd., Abth. I., Heft VIII—X (October bis December 1897).

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben übersendet eine V. Mittheilung der Arbeiten von Prof. Dr. Richard Přibram und Carl Glücksmann aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Czernowitz: »Über den Zusammenhang zwischen Volumänderung und dem specifischen Drehungsvermögen activer Lösungen«.

Das w. M. Herr Prof. Dr. F. Lippich übersendet eine im physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität Prag ausgeführte Arbeit des Privatdocenten Dr. Josef Ritter von Geitler: »Über die Verschiedenheit der physikalischen Natur der Kathodenstrahlen und der Röntgenstrahlen«.

Das c. M. Herr Prof. C. Senhofer übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Universität zu Innsbruck von Dr. K. Hopfgartner, betitelt: »Beitrag zur Kenntniss der Alkaloide von *Macleya cordata* R. Br.«.

Herr Carl Czerny in Wien übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, welches die Aufschrift führt: »(44) Eine neue wissenschaftliche Idee auf dem Gebiete der Kraft und ihrer Gewinnung für praktische Zwecke«.

Das w. M. Herr Prof. G. v. Escherich erstattet einen kurzen Bericht über den Stand der Arbeiten, betreffend die »Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften«. Nach den Mittheilungen der Redaction für dieses Werk sind drei Artikel des ersten Bandes bereits gedruckt, und die sämmtlichen übrigen, für diesen Band bestimmten liegen schon für den Druck bereit.

Über die Verschiedenheit der physikalischen Natur der Kathodenstrahlen und der Röntgenstrahlen

von

Dr. **Josef Ritter von Geitler.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 1 Textfigur.)

Die Meinungen über die physikalische Natur der von W. C. Röntgen[1] entdeckten Strahlen sind seit dem Bekanntwerden dieser merkwürdigen Strahlungsart ziemlich getheilt. In letzter Zeit scheint die Ansicht an Raum zu gewinnen, welche die Röntgenstrahlen als qualitativ mit den Kathodenstrahlen identisch auffasst.[2] Diese Ansicht stützt sich hauptsächlich auf die Thatsache, dass es verschiedene Gattungen von Kathodenstrahlen gibt, welche hinsichtlich des Grades ihrer Ablenkbarkeit durch magnetische und elektrische Kräfte und der Fähigkeit, feste Körper zu durchdringen, sich in eine fortlaufende Reihe ordnen lassen. Den Röntgenstrahlen wird von den Anhängern dieser Anschauung der Platz am äussersten Ende dieser Reihe dort angewiesen, wo die Ablenkbarkeit durch magnetische und elektrische Kräfte gleich Null, die Absorbirbarkeit durch feste und anders aggregirte Körper ein Minimum ist. Die Röntgenstrahlen wiederum bilden in Bezug auf die letztere Eigenschaft

---

[1] W. C. Röntgen, Sitzungsber. der Würzb. Physik.-medic. Gesellsch. 1895, Wied. Ann. 64, S. 1, 1898.

[2] P. Lenard, Wied. Ann. 63, S. 253, 1897; W. C. Röntgen, Wied. Ann. 64, S. 32, 1898.

eine selbständige Reihe. Wenn man nur die genannten Eigenschaften in Betracht zieht, könnte man allerdings mit demselben Rechte, wie die Röntgenstrahlen, die optischen oder die Hertz'schen Strahlen an dasselbe Ende des Kathodenstrahlenspectrums verweisen.

Ich glaube, man wird eine derartige Systematik unannehmbar finden, welche zwei verschiedene Erscheinungsgruppen in dieselbe Classe nur desshalb ordnet, weil in der einen Gruppe eine Eigenschaft gänzlich fehlt, welche in der anderen allerdings auch verloren gehen kann, und eine andere Eigenschaft vorhanden ist, welche auch der anderen Gruppe zukommt, aber allem Anscheine nach anderen Gesetzen gehorcht. Es soll damit nicht behauptet werden, dass die beiden Erscheinungsgruppen nicht dennoch wesensgleich sein könnten. Die Entscheidung darüber muss aber gewiss besonderen Untersuchungen über das Vorhandensein oder Fehlen anderweitiger Ähnlichkeiten oder Verschiedenheiten in dem Verhalten der betrachteten Erscheinungsgruppen vorbehalten bleiben.

Ähnlich wird man sich wohl der Frage gegenüber verhalten müssen, ob den Röntgenstrahlen der Platz mit Recht gebühre, welcher ihnen nach der eingangs erwähnten Ansicht zugewiesen wird. Und da scheint nun eine weitere Eigenschaft der Röntgenstrahlen die Möglichkeit einer Entscheidung — und zwar nach den bisherigen Erfahrungen zu Ungunsten der citirten Anschauungsweise — darzubieten, nämlich die elektrostatische Wirkung der Röntgenstrahlen auf die von ihnen bestrahlten und durchstrahlten Körper. Auch die Kathodenstrahlen haben elektrostatische Wirkungen, wie die Versuche von Perrin,[1] J. J. Thomson,[2] W. Wien,[3] Lenard[4] u. A. zeigen. Der Gegenstand der folgenden Mittheilung soll es sein, den charakteristischen Unterschied der beiden Strahlungsarten, der Kathoden-

[1] Perrin, Compt. rend. 121, p. 1130, 1895.

[2] J. J. Thomson, Phil. Mag. (5), 44, p. 293, 1897.

[3] W. Wien, Verhandl. der physik. Gesellsch. zu Berlin, 16, S. 165, 1897.

[4] P. Lenard, Wied. Ann., 64, S. 279, 1898.

strahlen und der Röntgenstrahlen, hinsichtlich ihrer elektrostatischen Wirkungen klarzulegen. Die beigebrachten Versuche sind zum Theile vielleicht nicht neu. Doch habe ich auch diese in meine Mittheilung mit aufgenommen, soweit mir dieselben zur Entscheidung der aufgeworfenen Frage wichtig schienen, da ich in keiner der zahlreichen Untersuchungen, welche die elektrischen Wirkungen der X-Strahlen behandeln, diese Wirkungen zur Entscheidung der angeregten Frage verwerthet finde.

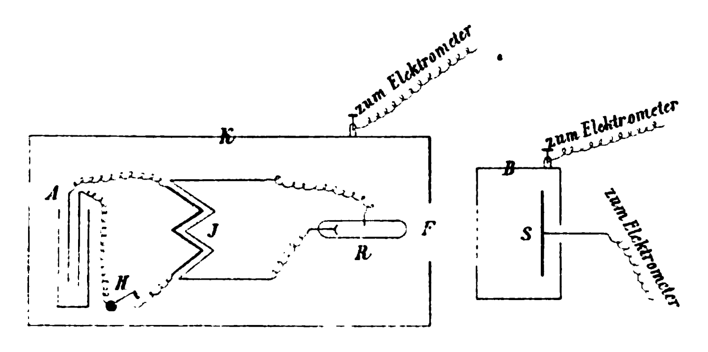
Es sollen nun zuerst die von mir angestellten Versuche beschrieben und dann die sich daraus ergebenden Schlüsse gezogen werden.

Die Röntgenröhre, ein grosses Ruhmkorff'sches Inductorium und die dasselbe treibende tragbare Accumulatorenbatterie befanden sich bei den sämmtlichen Versuchen in einem 45 *cm* hohen, 120 *cm* langen, 75 *cm* breiten Holzkasten *K*, welcher an der Aussenseite ganz mit 0·6 *mm* starkem Bleiblech beschlagen war. Eine Seitenwand des Kastens und der Deckel konnten zum Zwecke des Einbringens der Apparate leicht entfernt werden. Es war durch Umbiegen des Bleches an den Kanten dafür gesorgt, dass keine nur mit Holz gedeckten Öffnungen vorhanden waren, durch welche Röntgenstrahlen aus dem Kasten hätten entweichen können. In den Seitenwänden des Kastens waren überdies Fenster angebracht, welche leicht geöffnet, oder mit Bleiblech oder anderem Materiale geschlossen werden konnten. An der einen Wand war eine Vorrichtung angebracht, mit deren Hilfe man den Strom im Kasten schliessen oder öffnen konnte, ohne den Kasten selbst zu öffnen. Der ganze Bleikasten stand auf isolirenden Porzellanstützen, unter welchen sich Paraffinpapier befand, auf einem Tische. Der Kasten und die anderen leitenden Körper, welche bei den Versuchen in Verwendung kamen, konnten leicht entweder mit einem Edelmann'schen Cylinderquadrantelektrometer oder mit der Erde in Verbindung gesetzt werden. Die X-Strahlen der Röhre *R* fielen auf eines der oben erwähnten Fenster *F* (10×15 *cm*).

War der Bleikasten vollständig metallisch geschlossen, so gab das Elektrometer, wenn das Inductorium in Gang gesetzt

wurde, einen Ausschlag, welcher etwa 2 Volt im Sinne negativer Ladung des Kastens entsprach. Dieser Ausschlag, der auch dann eintrat, wenn statt der Röntgenröhre eine Funkenstrecke eingeschaltet wurde, rührte offenbar von dem Magnete des Ruhmkorff'schen Apparates her, da das Elektrometer magnetische Einstellung besitzt und der Ausschlag verschwand, sobald das Inductorium ausser Thätigkeit gesetzt wurde. Da die Messung der bei den folgenden Versuchen auftretenden Ladungen stets erst nach Abstellen des Inductoriums vorgenommen wurde, so war der erwähnte Ausschlag belanglos.

Das Fenster *F* (vergl. Figur) sei nun geöffnet. Die Röhre *R* ist im Kasten *K* so aufgestellt, dass der von den Kathodenstrahlen erzeugte Fluorescenzfleck gegen *F* gerichtet ist, so



A ...... Accumulatorenbatterie.
H ...... Stromschlüssel.
I ...... Inductorium.
R ...... Röntgenröhre.
F .... Fenster.
K ...... Bleikasten.
B . .... Blechkiste.
S ...... Metallschirm.

dass kräftige X-Strahlen aus *F* ins Freie treten, wovon man sich mit Hilfe eines Fluorescenzschirmes überzeugt; in den Gang der X-Strahlen ist eine isolirte Metallplatte *S* gestellt und zunächst der Bleikasten *K* mit dem Elektrometer verbunden. Wird, nachdem zuvor *K* und *S* zur Erde abgeleitet waren, die Erdleitung abgehoben und das Inductorium durch Drehen des Hebels *H* in Gang gesetzt, so ladet sich *K* so stark negativ,

dass die Scala im Fernrohre verschwindet, was einem Potentiale über 200 Volt entspricht. Verbindet man dagegen den Metallschirm *S* mit dem Elektrometer, nachdem man *S* und *K* auf das Potential der Erde gebracht hat, so zeigt sich beim Ingangsetzen des Inductoriums *S* so stark positiv, dass die Scala abermals aus dem Gesichtfelde verschwindet. Die dem bestrahlten Körper *S* zugewendete Glaswand der Röhre *R* zeigt sich nach dem Versuche stark positiv geladen.[1] Dreht man die Röhre *R* um eine verticale Axe um 180°, und wiederholt die beiden eben beschriebenen Versuche, so zeigt es sich, dass diesmal der Kasten positiv, der Metallschirm aber negativ geladen wird. In diesem Falle erweist sich die dem Schirme *S* zugekehrte Glaswand der Röhre negativ elektrisch. In einer gewissen mittleren Stellung der Röhre *R* dagegen bleiben *K* und *S* beide ungeladen.

Um dem Einwande zu begegnen, dass die Ladungen dadurch entstehen könnten, dass elektrisirte Luft aus dem Fenster gegen *S* hin austritt, verschliesse man dasselbe durch ein Blatt Papier oder eine Glasscheibe. Die Erscheinungen wiederholen sich vollständig in der früher beschriebenen Weise, nur sind die Ladungen schwächer (Potential etwa 25 Volt). Durch fortgesetztes Auflegen mehrerer Lagen Papier oder mehrerer Glasscheiben wird die Stärke der Ladungen, welche aber stets das früher angegebene Zeichen behalten, immer geringer. Die Untersuchung mit dem Fluorescenzschirm zeigt dabei deutlich die Abnahme der Intensität der austretenden X-Strahlen.

Verschliesst man *F* durch ein 0·5 *mm* starkes Aluminiumblech oder ein Drahtnetz von etwa 1 mm^2 Maschengrösse, welche mit *K* metallisch verbunden sind, so zeigt weder *K* noch *S* eine Ladung, trotzdem die austretenden X-Strahlen sehr kräftig sind, wie der Fluorescenzschirm anzeigt. Schliesst

[1] Herr Prof. Jaumann, welchem ich diesen und eine Reihe der im Weiteren beschriebenen Versuche vor zwei Jahren — mit einer etwas unvollkommeneren Aufstellung — zeigte, sprach damals die Vermuthung aus, dass die Röntgenstrahlen keine ladende, sondern eine entladende Wirkung besitzen und dass daher die dem bestrahlten Körper, welcher sich positiv elektrisirte, zugekehrte Wand der Entladungsröhre positiv elektrisch sein müsse. Diese Vermuthung hat sich bestätigt.

man dagegen *F* so, dass das Blech oder Netz durch eine Lage Paraffinpapier von *K* isolirt ist, so treten kräftige Ladungen von *K* und *S* in dem oben mitgetheilten Sinne auf.

Zu den weiteren Versuchen wurde die Platte *S* isolirt in eine isolirt aufgehängte Eisenblechkiste *B* gestellt, welche an der *F* zugewendeten Seite ein Fenster aus Aluminiumblech besass und an ihrer Rückseite durch ein kleines Loch eine Verbindung von *S* mit dem Elektrometer gestattete.

Ist das Fenster geöffnet, so treten die Ladungen von *K* und *S* wie früher auf. Die Kiste *B* zeigt dabei stets eine gleichsinnige Ladung wie *S*. Wird *B* mit *K* leitend verbunden, während aber beide isolirt sind, und *S* mit dem Elektrometer verbunden ist, so zeigt, wenn vorher Alles zur Erde abgeleitet worden war, bei Ingangsetzen des Inductoriums *S* keine Ladung, auch wenn *F* ganz offen gelassen wird.

Hebt man nun die Verbindung von *B* mit *K* wieder auf, und leitet *B* dauernd zur Erde ab, so zeigt weder *K* noch *S* eine Ladung, gleichgiltig ob *F* offen oder in irgend welcher Weise verschlossen ist und unabhängig von der Stellung der Röhre *R* gegen das Fenster.

Legt man, nachdem wieder Alles isolirt ist, an den Bleikasten *K* den $\frac{\text{positiven}}{\text{negativen}}$ Pol einer Accumulatorenbatterie von 60 Volt Klemmspannung, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet ist, so werden *B* und *S* beim Ingangsetzen des Inductoriums entsprechend $\frac{\text{positv}}{\text{negativ}}$ geladen; *S* erhält jedoch keine Ladung, wenn die Kiste *B* zur Erde abgeleitet gehalten wird. Die bei isolirtem *B* auf *S* auftretenden Ladungen sind merklich ebenso stark, als wenn der Batteriepol direct an *S* angelegt worden wäre.

Verbindet man jedoch die Kiste *B* mit dem $\frac{\text{positiven}}{\text{negativen}}$ Pole obiger Batterie, so wird sowohl *K*, als auch *S* entsprechend $\frac{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ geladen, gleichgiltig, ob *F* offen oder mit einem für Röntgenstrahlen durchlässigen Leiter oder Isolator geschlossen ist, sowie unabhängig von der Stellung der Röhre *R* gegen das

Fenster.[1] Das Potential, welches *K* und *S* in diesem Falle erreicht, ist wieder merklich dasselbe, welches man durch directes Anlegen des betreffenden Batteriepoles an *K* und *S* erhält.

Die Versuche mit der Kiste *B* gelingen in ganz ähnlicher Weise, wenn an Stelle von *B* ein isolirt aufgehängtes Stanniolblatt oder Drahtnetz zwischen *F* und *S* gebracht wird.

Die beschriebenen Experimente gelingen ferner in ganz gleicher Weise mit ganz verschieden construirten Röntgenröhren. Ich verwendete eine cylindrische Röhre mit concaver Kathode; die Anode war ein Aluminiumdraht, welcher zwischen der Kathode und dem Ende der Röhre seitlich eingeschmolzen war, ferner eine Röhre nach Zehnder und eine von der »Allgemeinen Elektricitätsgesellschaft« gelieferte Röhre, letztere beiden mit Platinspiegel. Stets waren dann die auf *S* auftretenden Ladungen — bei geöffnetem Fenster *F* — positiv, jene auf *K* negativ, wenn der Fluorescenzfleck, beziehungsweise die vordere Seite des Platinspiegels gegen das Fenster gerichtet waren. Die Stellen der Glaswand, welche in diesem Falle *S* zugekehrt waren, zeigten sich stets positiv geladen. Wurden die Röhren so gewendet, dass auf *S* negative Ladungen auftraten, so waren die *S* zugewendeten Theile der Glaswand negativ elektrisch.[2]

Die Gesammtheit der Versuche lässt sich wohl nur dahin deuten, dass den Röntgenstrahlen die Eigenschaft zukommt, Potentialdifferenzen, welche zwischen den von ihnen durchstrahlten, beziehungsweise bestrahlten Körpern vorhanden sind, auszugleichen, d. h. diese Körper gegen einander zu entladen;[3] die Strahlen wirken sozusagen wie eine zwischen den durchstrahlten Körpern ausgespannte feuchte Schnur. Die Versuche lassen die Auffassung nicht zu, als ob die Strahlen die Ladungen der von ihnen durchstrahlten Körper mitführen und auf die anderen Körper übertragen würden. Denn der Potentialausgleich

[1] Bei zu grossen Dimensionen des offenen Fensters *F* kann die Wirkung der Röhre die Wirkung des Kastens überwiegen. Durch Wahl entsprechender Dimensionen von *F* überzeugt man sich davon leicht.

[2] Vergl. Anm. auf S. 5.

[3] Vergl. Perrin, L'éclairage électr. VII, p. 545, 1896.

findet auch in der entgegengesetzten Richtung der Strahlfortpflanzung statt, wie jener Versuch besonders deutlich zeigt, bei welchem der Kasten *B* dauernd geladen gehalten wurde; sowohl *K* als auch *S* werden ja in diesem Falle auf das Potential von *B* gebracht.

Der Potentialausgleich findet statt ohne Rücksicht darauf, ob die bestrahlten Körper in elektrostatisch geschützten oder ungeschützten Räumen liegen, soferne nur die Hüllen für Röntgenstrahlen durchlässig sind. Eine Bevorzugung einer Elektricitätsart war in keinem der von mir angestellten Versuche erkennbar. Ob die beschriebene Wirkung der Röntgenstrahlen auch dann eintritt, wenn die durchstrahlten Körper durch ein Vacuum getrennt sind, habe ich noch nicht versucht, zu entscheiden. Nach den Versuchen von W. C. Röntgen[1] geht die Entladung dann jedenfalls langsamer vor sich, als bei Anwesenheit von ponderabler Materie von gewöhnlicher Dichte im Zwischenraume zwischen den getroffenen Körpern.

Hält man den Ergebnissen dieser Versuche entgegen einerseits das von Perrin[2] und Anderen, sowie besonders von Lenard[3] gefundene Verhalten der Kathodenstrahlen in elektrostatischer Beziehung — und anderseits die Consequenzen, welche sich aus der Hypothese der Wesensgleichheit der Röntgen'schen und der Kathodenstrahlen, zusammen mit der in letzter Zeit wieder stark im Aufschwung befindlichen Corpuscularhypothese dieser Strahlungsarten ergeben — so muss man, glaube ich, den bündigen Schluss ziehen, dass die Annahme der Wesensgleichheit der beiden Strahlungsarten nicht aufrechtgehalten werden kann.

Denn: Nach diesen Versuchen sollen die Kathodenstrahlen Ströme negativ elektrischer Theilchen sein, welche — nach den Lenard'schen Versuchen — die ihnen anhaftenden Ladungen selbst beim Durchsetzen von zur Erde abgeleiteten Metallen beibehalten und in das Innere metallisch geschlossener Räume auch durch das äusserste erreichbare Vacuum hindurch fortzuführen

[1] Röntgen, Wied. Ann. 64, S. 15, 1898.
[2] Perrin, Compt. rend. 121, p. 1130, 1895.
[3] P. Lenard, Wied. Ann. 64, S. 279, 1898.

vermögen. Die Röntgenstrahlen zeigen ein derartiges Verhalten nicht. Dieselben sind durchaus unfähig, in das Innere von zur Erde abgeleiteten metallisch geschlossenen Gefässen Ladungen, sei es positiven oder negativen Zeichens, zu übertragen, ebensowenig, als sie Ladungen aus dem Innern solcher Räume herauszuschaffen vermögen. Wären nach der im Eingange erwähnten Annahme X-Strahlen und Kathodenstrahlen identisch, so wäre man mit Hilfe ganz derselben Überlegungen, welche zur Erklärung der Nichtablenkbarkeit der X-Strahlen durch den Magneten angestellt werden, zu der Erwartung berechtigt, dass die Röngtenstrahlen kräftige negative Ladungen mit sich führen. Denn um die Nichtablenkbarkeit durch den Magneten zu deuten, ist man vom Standpunkte der Corpuscularhypothese genötigt, den Theilchen, welche die Strahlen bilden sollen, eine sehr viel grössere Geschwindigkeit, als den ablenkbaren Kathodenstrahlpartikeln zuzuschreiben. Damit diese grössere Geschwindigkeit aber zustandekomme, müssen die Theilchen — bei gleicher Masse — offenbar sehr viel stärker geladen sein, als in den Kathodenstrahlen; aber auch, wenn man den X-Strahlenpartikeln geringere Masse zuschreibt, als den Kathodenstrahlentheilchen, müssten die X-Strahlen gleichwohl negative Ladungen von der Grössenordnung jener Ladungen mit sich führen, welche man den Kathodenstrahltheilchen zuschreibt. In jedem dieser Fälle müsste man, sollen anders die beiden Strahlenarten wirklich identische Vorgänge sein, ein ähnliches Verhalten beider in elektrostatischer Beziehung erwarten. Da sie sich nun aber, wie die angeführten Versuche zeigen, in dieser Richtung wesentlich von einander verschieden verhalten, so erscheint der oben ausgesprochene Schluss, dass Röntgenstrahlen und Kathodenstrahlen Vorgänge von verschiedener physikalischer Natur sind, vollauf gerechtfertigt.

XIII. SITZUNG VOM 12. MAI 1898.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. 19, Heft II und III (Februar und März 1898).

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter theilt mit, dass Seine k. u. k. Hoheit der durchlauchtigste Herr Erzherzog Rainer als Curator der kaiserlichen Akademie die diesjährige feierliche Sitzung am 28. Mai mit einer Ansprache zu eröffnen geruhen werde.

Der Vorstand des Centralvereines deutscher Ärzte in Böhmen ladet die kaiserliche Akademie zur Theilnahme an der am 29. Mai d. J. in Bilin tagenden 48. Generalversammlung ein, bei welcher das über Anregung des genannten Centralvereines am Sauerbrunnen errichtete Reuss-Monument enthüllt werden wird.

Das Organisations-Comité des V. internationalen Congresses für Hydrographie, Klimatologie und Geologie in Lüttich ladet die kaiserliche Akademie zur Theilnahme an diesem Congress ein, welcher am 25. September d. J. unter dem Protectorate Sr. königl. Hoheit des Prinzen Albert von Belgien eröffnet werden wird.

Herr Prof. Dr. Ign. Klemenčič in Innsbruck dankt für die ihm zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Constanz permanenter Magnete und über die magnetische Nachwirkung gewährte Subvention.

Das w. M. Herr Prof. Dr. Zd. H. Skraup übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Institut der k. k. Universität Graz von Prof. Dr. Hugo Schrötter, betitelt: »Beiträge zur Kenntniss der Albumosen« (IV. Mittheilung).

Herr Julius Pollak, Professor an der k. k. Staats-Gewerbeschule in Reichenberg, übersendet eine Abhandlung: »Zur Geometrie der Fusspunktscurven eines Kegelschnittes«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof J. Hann überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung: »Über die Temperatur des Obirgipfels und des Sonnblickgipfels«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Dr. Konrad Natterer: »Chemische Untersuchungen in der nördlichen Hälfte des Rothen Meeres« als ein Ergebniss der in den Jahren 1895 und 1896 stattgefundenen Tiefsee-Expedition.

Herr Leopold Kann in Wien überreicht eine Abhandlung: »Die Rotationspolarisation der Äpfelsäure«.

Über die Temperatur des Obirgipfels (2140 m) und des Sonnblickgipfels (3106 m)

von

J. Hann
w. M. k. A.

Die Zusammenstellung der Resultate vierjähriger Temperatur-Registrirungen an der sogenannten »Hannwarte« auf dem Gipfel des Obir wurde mir Veranlassung zu der nachfolgenden Untersuchung der Temperaturverhältnisse des Obirgipfels überhaupt und einer Vergleichung derselben mit den Temperaturverhältnissen auf dem Sonnblickgipfel.

Als ich vor mehreren Jahren den täglichen Wärmegang auf dem Obirgipfel behandelte, lagen erst einjährige Temperatur-Registrirungen von demselben vor und ich konnte desshalb nur ganz provisorische Resultate für die vier Jahreszeiten vorlegen und auch diese wurden auf etwas umständliche Weise durch Reduction auf die mehrjärigen Registrirungen bei dem Berghause Obir, 100 *m* tiefer, abgeleitet.[1] Die Mittel der vier Jahrgänge 1892—1895 inclusive gestatten nun schon, den täglichen Wärmegang auf dem Gipfel des Obir in den einzelnen Monaten mit zureichender Genauigkeit aufzustellen.

Die Tabelle I am Schlusse dieser Abhandlung gibt den täglichen Wärmegang in den einzelnen Monaten in Form von Abweichungen der Stundenmittel vom Tagesmittel.

Über die Aufstellung des Thermographen Richard, dessen Bedienung und die Reduction der Autogramme enthält meine früher citirte Arbeit die nöthigen Auskünfte. Dort ist auch die

[1] Diese Sitzungsber., CII. Bd., Abth. IIa., Juli 1893: »Der tägliche Gang der Temperatur auf dem Obirgipfel«.

Lage der Station näher beschrieben. Sie ist eine wahre Gipfelstation; der Thermograph functionirt auf dem höchsten Punkte des Obir.[1]

Eine Übersicht über den täglichen Wärmegang gestattet die folgende kleine Tabelle.

A. Obirgipfel (Hannwarte), 2140 *m*. Täglicher Wärmegang.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Nov. und December
Mitternacht	—·22°	— ·59°	—1·18°	— ·54°	— ·64°	—·28°
1	—·24	— ·80	—1·35	— ·49	— ·71	—·27
2	—·23	— ·86	—1·44	— ·53	— ·74	—·27
3	—·25	— ·94	—1·54	— ·54	— ·81	—·22
4	—·27	— ·97	—1·62*	— ·54*	— ·84*	—·**19**
5	—·30	—1·02*	—1·55	— ·53	— ·85	—·19
6	—·31*	— ·93	—1·18	— ·53	— ·73	—·23
7	—·31*	— ·67	— ·78	— ·44	— ·55	— 26*
8	—·21	— ·46	— ·45	— ·23	— ·34	—·15
9	—·13	— ·17	— ·03	— ·02	— ·09	—·07
10	·07	·14	·42	·25	·22	·13
11	·25	·52	·91	·55	·56	·30
Mittag	·40	·81	1·41	·77	·85	·46
1	·51	1·05	1·76	·88	1·06	·54
2	**·59**	1·23	1·92	**·99**	1·18	**·61**
3	·57	**1·50**	**2·01**	·91	**1·20**	·51
4	·45	1·27	1·96	·82	1·13	·40
5	·20	1·07	1·59	·56	·86	·13
6	—·05	·75	1·15	·16	·53	—·03
7	—·05	·26	·44	—·06	·14	—·10
8	— 12	·01	— ·16	—·25	— ·13	—·20
9	—·14	— ·20	— ·55	—·34	— ·31	—·22
10	—·17	— ·32	— ·78	—·43	— ·43	— 28
11	—·21	— ·45	— ·97	—·50	— ·54	—·30*
Amplitude	·90	2·52	3·83	1·58	2·05	·91

[1] Man vergleiche meine Abhandlung in der Meteorologischen Zeitschrift, Jahrgang 1893 (Bd. XXVIII), S. 281, wo auch eine Abbildung der Lage der beiden Obirstationen und des Obirgipfels selbst gegeben ist.

Das Maximum der Wärme tritt zwischen 2^h und 3^h Nachmittags ein, das Minimum im Winter zwischen 6^h und 7^h Morgens, im Frühling um 5^h, im Sommer um 4^h, im Herbst nahe um die gleiche Zeit, was recht auffallend ist und durch eigenthümliche Anomalien des nächtlichen Wärmeganges im October und November zu Stande kommt.

Die täglichen Amplituden sind schon recht klein; Winter nur 0°9, Frühling 2°5, Sommer 3°8, Herbst 1°6; sie sind aber jedenfalls immer noch von der Erwärmung des Berggipfels beeinflusst, d. i. vergrössert.

Im Spätherbste zeigt der nächtliche Wärmegang eine sehr bemerkenswerthe Anomalie, die sich schon im October zeigt, aber erst im November und December einen erheblichen Betrag erreicht, wesshalb der tägliche Wärmegang dieser beiden Monate separat auch in die Tabelle *A* aufgenommen worden ist (die unperiodische Änderung ist hier zu eliminiren versucht worden).

Die Temperatur erreicht ihr Minimum schon um 11^h, also vor Mitternacht; sie steigt dann wieder um 0°2—0°3 bis 4^h Morgens, dann sinkt sie wieder etwas und erreicht ein zweites schwächeres Minimum um 7^h vor Sonnenaufgang. Diese Erscheinung ist recht interessant und ist offenbar begründet in der während der Zeit der längsten Nächte und der grössten Luftruhe am häufigsten auftretenden sogenannten verticalen Temperatur-Umkehrung, oder der Wärmezunahme nach oben, die ja in Kärnten im Winter ein ganz normales Phänomen ist. Während dieser Zeit entwickeln sich lebhafte absteigende Luftbewegungen längs der Bergabhänge und Berggipfel, welche wahrscheinlich nach Mitternacht ihre grösste Intensität erreichen. Dieselben führen den Gipfeln und freien Abhängen wärmere Luft von oben zu und bewirken derart eine Wärmezunahme nach Mitternacht.

Auf dem Sonnblickgipfel ist das (in den Mittelwerthen wenigstens) nicht zu bemerken, aber derselbe liegt ausserhalb des Gebietes einer häufigen und intensiven Wärmezunahme nach oben, und seine 1000 *m* grössere Höhe mag auch dazu beitragen, die Erscheinung nicht deutlich aufkommen zu lassen. Dagegen zeigt sie sich an dessen Nordfuss in Kolm Saigurn, worauf

Dr. Trabert aufmerksam gemacht hat.[1] Sehr deutlich tritt die Erscheinung auch beim alten Säntis-Observatorium auf, wo sie Maurer zuerst nachgewiesen hat. In den dreijährigen Mittelwerthen des täglichen Ganges (bei Trabert nach Billwiller) ist aber kaum etwas davon zu bemerken.

Die folgende kleine Tabelle enthält die Constanten der Sinusreihen (Zeit von Mitternacht gezählt), durch welche der tägliche Wärmegang in den Jahreszeiten auf dem Obirgipfel und Sonnblickgipfel ausgedrückt werden kann. Für letzteren sind sie berechnet nach den Zahlen, welche Trabert in der citirten Abhandlung auf S. 196 (S. 20 des Separatabdruckes) publicirt hat.

Die Constanten des täglichen Wärmeganges, dargestellt durch die Reihen:

$$p_1 \cos x + q_1 \sin x + p_2 \cos 2x + q_2 \sin 2x$$

oder

$$a_1 \sin (A_1 + x) + a_2 \sin (A_2 + 2x):$$

	p_1	q_1	p_2	q_2	A_1	A_2	a_1	a_2
	I. Sonnblickgipfel (3106 *m*)							
Winter	—0?27	—0?30	0?09	0?13	222?2	34?9	0?40	0?16
Frühling....	—0·58	—0·61	0·10	0·12	223·6	41·1	0·84	0·16
Sommer	—0·69	—0·72	0·04	0·09	223·1	24·0	0·99	0·10
Herbst	—0·37	—0·40	0·08	0·12	222·8	33·0	0·54	0·14
Jahr	—0·48	—0·51	0·08	0·115	223·3	34·8	0·70	0·14
	II. Obirgipfel (2140 *m*)							
Winter	—0?31	—0?22	0?12	0?14	234?5	40?1	0?37	0?18
Frühling....	—0·76	—0·81	0·09	0·18	223·4	25·9	1·11	0·21
Sommer	—1·37	—1·13	0·09	0·24	230·5	21·4	1·78	0·25
Herbst	—0·63	—0·40	0·14	0·18	237·8	38·3	0·74	0·23
Jahr	—0·77	—0·64	0·11	0·185	230·3	30·7	1·00	0·215

[1] Der tägliche Gang der Temperatur auf dem Sonnblickgipfel. Denkschriften, Bd. LIX (1892), S. 199.

Die Phasenzeiten bleiben, namentlich beim Sonnblick, in allen Jahreszeiten nahe die gleichen (Frühling Obir ausgenommen). Das erste Glied der harmonischen Reihe bestimmt fast ganz den täglichen Temperaturverlauf, nur im Winter erhält auch die halbtägige Wärmewelle einen erheblichen Einfluss. Im Sommer dagegen besteht der tägliche Wärmegang fast nur aus einer einfachen Sinuscurve. Das Verhältniss von $a_1 : a_2$ ist:

Verhältniss der Amplituden, $a_1 : a_2$.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Sonnblick	2·5	5·3	9·9	3·9	5·0
Obir	2·1	5·3	7·1	3·2	4·7

Die Übereinstimmung dieser Verhältniszahlen ist so gross, dass man bei der Kleinheit der Amplituden die Grösse a_2 aus a_1 nach den Mittelwerthen dieser Quotienten mit genügender Annäherung berechnen könnte.

Der Eintritt des täglichen Maximums wird durch den Phasenwinkel A_1 in fast völliger Übereinstimmung mit den Beobachtungen bestimmt; er gibt für Sonnblick ($A_1 = 223°$) das Maximum um 3^h p., für den Obirgipfel (230°) nach $2^1/_2{}^h$ p.; der Eintritt des nächtlichen Minimums aber wird erst durch das zweite Glied mit den Beobachtungen in Übereinstimmung gebracht.

Für den täglichen Wärmegang in der nahe 1000 *m* mächtigen Luftschichte zwischen Obir- und Sonnblickgipfel erhält man für den Sommer die Gleichung

$$1·38 \sin(228·2+x)+0^\circ 17 \sin(23^\circ 6+2x).$$

Sie entspricht aber kaum dem wahren täglichen Gang der Luftwärme in dieser Schichte, denn die Erwärmung der Berggipfel wird durch die Addition der beiden Gleichungen des täglichen Ganges natürlich nicht eliminirt.

Dagegen ist die Differenz derselben von diesem localen Einflusse viel freier und das Resultat kommt den Verhältnissen der wahren Luftwärme desshalb wohl recht nahe; da die Localeinflüsse auf den täglichen Wärmegang auf den beiden Berg-

gipfeln nahe die gleichen sein dürften, so werden sie in den Unterschieden desselben schon grösstentheils elimirt erscheinen. Diese Unterschiede sind aber nichts anders als der Ausdruck für den täglichen Gang der Wärmeabnahme nach oben in der Luftschichte zwischen Obirgipfel und Sonnblickgipfel. Subtrahiren wir die obigen Gleichungen (Obir—Sonnblick) und dividiren dann die Differenzen von p_1, q_1 und p_2, q_2 durch den Höhenunterschied, d. i. 9·66 *hm*, so erhalten wir folgende Gleichungen für den täglichen Gang der Wärmeänderung mit der Höhe:

Gleichungen für den täglichen Gang der Wärmeänderung (pro 100 *m*) mit der Höhe in der Luftschichte zwischen Obir- und Sonnblickgipfel.[1]

Winter . . 0°537 + 0·009 sin (333°4 + x) + 0·003 sin (71°6 + $2x$)
Frühling 0·591 + 0·028 sin (222°0 + x) + 0·006 sin (350·6 + $2x$)
Sommer . 0·674 + 0·079 sin (238·9 + x) + 0·016 sin (18·4 + $2x$)
Herbst . . 0·589 + 0·027 sin (270·0 + x) + 0·009 sin (45°0 + $2x$)

Im Winter verschwindet der tägliche Gang der Wärmeänderung mit der Höhe in der Luftschichte zwischen 2000 und 3000 *m* Seehöhe fast völlig, er ist aber auch im Sommer geringfügig. Die Auswerthung dieser Gleichungen für den Winter, Frühling und Herbst und für den Sommer gibt folgende Zahlen für die tägliche Variation der Wärmeänderung mit der Höhe:

Täglicher Gang der Wärmeänderung mit der Höhe (pro 100 *m*) in der Luftschichte zwischen Obir- und Sonnblickgipfel

Mitt.	2	4	6	8	10	Mittag	2	4	6	8	10
						Winter					
·536	·539	·541	·542	·544	**·546**	·544	·539	·531	·526	·526*	·530

[1] Das erste constante Glied ist mit Hilfe der später folgenden Rechnungen erhalten worden.

Mitt.	2	4	6	8	10	Mittag	2	4	6	8	10
Frühling und Herbst											
·570*	·572	·574	·577	·585	·600	·616	**·622**	·614	·597	·581	·572
Sommer											
·609	·608*	·613	·627	·656	·703	·749	**·772**	·757	·711	·660	·623

Die Amplitude der täglichen Variation der Wärmeänderung mit der Höhe pro 100 *m* beträgt im Winter 0°020, im Frühling und Herbst 0°052, im Sommer 0°164, ist also stets sehr geringfügig.

Die Ableitung des jährlichen Wärmeganges auf dem Obirgipfel und Sonnblickgipfel gestaltet sich schwieriger, weil die mittleren Monatstemperaturen nur aus langjährigen Beobachtungen mit einiger Sicherheit bestimmt werden können. Namentlich gilt dies für hohe Gipfelstationen, da selbe nur eine geringe jährliche Temperaturschwankung, also einen weniger entschiedenen jährlichen Wärmegang haben, und der Monat der niedrigsten Temperatur je nach den Jahrgängen bald der Jänner, bald der Februar sein kann; auch das Maximum der Temperatur fällt bald auf den Juli, bald auf den August, selbst in den mehrjährigen Mitteln.

Langjährige Temperaturbeobachtungen liegen weder vom Obirgipfel noch vom Sonnblickgipfel vor. Die Registrirungen beginnen auf dem Obirgipfel mit Februar 1892, die Beobachtungen auf dem Sonnblick mit October 1886. Man ist demnach auf eine Reduction auf die lange Beobachtungsreihe einer benachbarten Station von ähnlicher Lage angewiesen, also auf die einer Gipfel- oder Gehängstation. Die Thalstationen eignen sich hiezu nicht, wegen der öfteren »Temperatur-Umkehrung« im Winter.

Die kurze Beobachtungsreihe auf dem Obirgipfel (Hannwarte) liesse sich leicht und sicher auf die langjährige Reihe der nur 100 *m* tiefer am Abhange des Obirgipfels liegenden Station (Obir-Berghaus) reduciren, wenn nicht ein fataler

Umstand hinderlich wäre. Die Reduction der Thermographen-Aufzeichnungen auf dem Gipfel liefert zwar sehr verlässliche Werthe für den täglichen Gang der Wärme, aber die absoluten Werthe der Temperatur sind nicht selten unsicher und fehlerhaft, weil die Ablesung an dem Thermometer, das zur Bestimmung des absoluten Temperaturwerthes eines Punktes des Thermogrammes dient, nur von Zeit zu Zeit durch den Beobachter erfolgen kann; bei schlechtem Wetter fallen zuweilen Beobachtungstage aus, und die Beziehung der Ablesung auf einen bestimmten Punkt des Barogrammes bleibt zuweilen zweifelhaft. Ein Ablesefehler kann zudem für einige Tage falsche Temperaturen liefern. Dieser Übelstand, der die relativen Werthe, d. i. den täglichen Gang nicht beeinflusst, konnte bisher nicht behoben werden.

Bei der Bildung der Temperatur-Differenzen Obirgipfel—Obir-Berghaus musste desshalb mit grosser Vorsicht und mit Kritik vorgegangen werden. Ich habe den letzten der reducirten Jahrgänge, d. i. 1896, gar nicht benützt, da die Differenzen mit jenen der vorhergehenden vier Jahrgängen grösstentheils nicht übereinstimmen. Die Jahrgänge 1892—1895 inclusive liefern mit Hinweglassung einiger zweifelhaften Monatsmittel, die folgenden mittleren Werthe:

Mittlere Temperatur-Differenzen Obirgipfel (2140 *m*) —Obirberghaus (2047 *m*).

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
-0·1	-0·4	-0·6	-0·6	-0·2	-0·5	-0·6	-0·8	-0·9	-0·7	-0·5	-0·4	-0·53
Ausgeglichen												
-0·2	-0·4	-0·6	-0·5	-0·4	-0·5	-0·6	-0·8	-0·8	-0·7	-0·5	-0·3	-0·53

Die Abnahme der Temperatur-Differenz im Mai scheint daher zu rühren, dass der Obirgipfel zuweilen (um diese Zeit) früher schneefrei wird, als der Berghang; oben weht der Wind den Schnee weg, der Gipfel wird desshalb bald »aper«, während

beim Hause unten (trotz der südlichen Exposition) noch Schnee liegt und sich noch Eis im Thermometerhäuschen vorfindet.

Bringt man die obigen Differenzen an die vieljährigen Monatsmitel der Temperatur von Obir-Berghaus an, so erhält man die vieljährigen Mittel für den Obirgipfel.

In meiner Abhandlung über die Temperatur-Verhältnisse der österreichischen Alpenländer III. habe ich die Monatsmittel der Temperatur für Obir-Berghaus für die Periode 1851—1880 abgeleitet; die einzelnen Monatsmittel 1851—1885 (mit grösseren Lücken) findet man in den Jahrbüchern der k. k. Centralanstalt für Meteorologie, Jahrgang 1885, S. 252, abgedruckt. Die unvollständige Reihe wurde durch Differenzen gegen Klagenfurt auf die volle Periode 1851—1880 reducirt.

Dass die Ergebnisse der älteren Beobachtungsserie beim Berghaus Obir mit jenen der neueren Reihe nicht homogen sind, lässt sich schon bei Vergleichung der Jahresmittel vermuthen; diese letzteren scheinen in der älteren Reihe erheblich höher zu sein. Es kommt das nicht so unerwartet, denn einerseits war die Art der Aufstellung des Thermometers damals nicht eben günstig, und das ist wohl die Hauptursache, anderseits gab es in den ersteren Jahresreihen viele Lücken, weil die Bergleute Samstag und Sonntag das Berghaus verliessen und die Beobachtungen dadurch eine Unterbrechung erlitten haben. Ich wollte desshalb diese werthvolle Serie von Temperatur-Aufzeichnungen, die längste in ähnlicher Seehöhe im ganzen Gebiet der Ostalpen, auf ihre Homogenität näher prüfen. Das ist aber desshalb schwierig, weil die nächste Station von gleicher Höhe mit langjährigen Temperatur-Aufzeichnungen jene auf dem St. Bernhard ist; man kann höchstens noch Alt-Aussee hie und da zur Controlle zu Hilfe nehmen. Der St. Bernhard liegt aber sehr weit entfernt und zudem erheblich südlicher, gehört deshalb auch schon einem anderen Klimagebiet an. Alt-Aussee liegt mehr als 1000 *m* niedriger und gleichfalls ziemlich weit vom Obir.

Man kann daher diese Stationen nur zur Prüfung der Homogenität der Jahresmittel der Temperatur verwenden.

Dabei erhält man die folgenden bemerkenswerthen Resultate (ich theile hier nur die Differenzen der Lustrenmittel mit,

natürlich wurden die Differenzen der einzelnen Jahresmittel gebildet):

Differenzen der Jahresmittel der Temperatur. Obir-Berghaus—St. Bernhard.

Lustrum ..	1851 bis 1855	1856 bis 1860	1861 bis 1865	1866 bis 1870	1871 bis 1875	1876 bis 1880	1881 bis 1885	1886 bis 1890
Differenz ...	2·78	3·04	2·60	1·74	1·76	1·92	1·50	1·84

Das Mittel der ersten drei Lustren ist 2°81, das Mittel der fünf folgenden Lustren 1°75, der Unterschied überschreitet einen Grad. Dass der Sprung zwischen 1865 und 1866 eingetreten ist, zeigt folgende Zahlenreihe.

Jahr	1861	1862	1863	1864	1865	1866	1867	1868	1869	1870
Differenz	2°7	2°8	2°8	(1·9?)	2 8	1·9	1·6	1·9	1·9	1·4

Auch die Differenzen gegen Alt-Aussee ergaben das gleiche Resultat.

Alt-Aussee—Obir 1851—1865.... 5°2,
» » 1866—1875.... 5°8.

Obir ist demnach in der Periode 1851—1865 um 0°6 wärmer als später.

Die Jahresmittel selbst ergeben: Obir 1851—1865 Mittel 1°0, 1866—1880 Mittel 0°5, St. Bernhard dagegen hat 1851 bis 1865 Mittel —1°8, 1866—1880 Mittel —1°3, also dasselbe Resultat wie oben; nach St. Bernhard ist Obir in der Periode 1851—1865 um 1° wärmer als später. Es sind speciell die Sommermonate, die in der ersten Periode zu warm sind.

Man erhält folgenden Vergleich der 15jährigen Mittel:

Obir-Berghaus. — Temperaturmittel.

	Nov. und Decbr.	Jänner und Febr.	März und April	Mai und Juni	Juli und Aug.	Septbr. und Octob.	Jahr
1851—1865...	—4·6	—6·5	—3·2	5·1	10·0	5·2	1·0
1866—1880...	—4·7	—5·8	—3·1	4·5	8·7	3·6	0·6
Differenz I—II.	0·1	—0·7	—0 1	0·6	1·3	1·6	0·4
Aussee dto....	0·5	—0·8	—0·5	0·3	0·2	0·6	—0·1
Abweichung Obir-Berghaus							
1851—1865...	—0·4	0·1	0·4	0·3	1·1	1·0	0·5

Obir-Berghaus ist demnach in der ersten Periode 1851 bis 1865 im Sommer erheblich zu warm, nur im Frühwinter etwas zu kalt. Die Ursache liegt jedenfalls zumeist in der Art der Thermometeraufstellung, die der Wärmestrahlung (und Ausstrahlung des Bodens) zu grossen Einfluss gestattete.[1]

Der störende Einfluss dieser Aufstellung in den einzelnen Monaten lässt sich aber nicht mit hinlänglicher Genauigkeit constatiren, dass man die einzelnen Monatsmittel daraufhin corrigiren könnte. Ich musste desshalb davon absehen, die Temperaturbeobachtungen von Obir-Berghaus aus der Periode 1851—1865 im Einzelnen zu verwenden. Wegen der Vergleichbarkeit der Temperaturmittel für Obir-Berghaus mit jenen der anderen Stationen der Ostalpen, die ich sämmtlich auf die Periode 1851—1880 bezogen habe, ist es aber doch wichtig, auch für Obir die Wärmemittel auf diese Periode zu beziehen. Ich habe desshalb durch Differenzen der neueren Reihe gegen Alt-Aussee und St. Bernhard (letzteren Resultaten wurde nur das halbe Gewicht gegeben) genäherte Temperaturmittel für

[1] Das Thermometer befand sich an einem Pflocke ganz im Freien, mit einem Schutzdache.

Obir-Berghaus für das Decennium 1851—1860 und für das Lustrum 1861—1865 hergestellt; letztere dienten nur dazu, um mit den beobachteten Temperaturen 1866—1870 das Decenniummittel 1861—1870 ableiten zu können; selbständig haben diese Mittel keine Bedeutung.

In den Gesammtmitteln für 1851—1880 und für die noch längere Periode 1851—1895, die ich berechnet habe, werden die Fehler, welche den drei Lustrenmitteln 1851—1865 etwa noch anhaften mögen, in Folge der Division durch 2 und durch 3 schon hinlänglich unschädlich gemacht worden sein, so dass der jährliche Gang der Temperatur wirklich jenem in den beiden Perioden entspricht.

Die Hinweglassung der drei Lustrenmittel würde dagegen die Vergleichbarkeit wesentlich gestört haben, denn es fallen Monate mit ganz exceptionellen Temperaturabweichungen in die Periode 1851—1865. Das Lustrummittel 1851—1855 enthält das zweitkälteste Februarmittel der ganzen Periode 1851—1895 (—8°3 gegen —6·7 normal, der Februar 1854 mit —12·5 war der kälteste in den Jahren 1851—1897), das Novembermittel des Decenniums 1851—1860 mit —3°8 war das niedrigste in der 47jährigen Periode; drei der kältesten November, 1851 mit —7°7, 1854 mit —7°3 und 1856 mit —8°9 fallen in dieses Decennium, in den 32 Jahren 1866—1897 erreichte der kälteste November nur —6°2; die Maimonate 1861—1865 waren dagegen sehr warm, wie überhaupt dieses ganze Lustrum. Die Monatsmittel der Periode 1851—1865 haben daher einen wesentlichen Einfluss auf den Charakter des jährlichen Wärmeganges in der zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts.

Nach der Ableitung der Lustrenmittel für die Periode 1851 bis 1865 erübrigte aber dann auch noch die Ausfüllung einiger erheblicher Lücken in der Beobachtungsreihe Obir-Berghaus 1866—1895. Es fehlen die Beobachtungen von Februar—September 1871, das Jahr 1872, die Jahre 1876, 1877 und Jänner bis August 1878. Dieselben lassen sich aber glücklicherweise durch die Beobachtungen an benachbarten, ähnlich gelegenen Bergstationen mit grosser Zuverlässigkeit ergänzen. Es ist namentlich die ganz benachbarte Station Petzen-Feistritz, welche den weitaus grössten Theil der fehlenden Beobachtungen

zu ergänzen gestattete; nur einige Monate mussten mit Hilfe der Temperaturaufzeichnungen zu St. Peter am Katschberg ergänzt werden.[1]

Indem ich weitergreifend auch schon vorhandene Temperaturmittel vom Obir-Berghaus durch die mittleren Differenzen gegen diese Stationen ergänzte, konnte ich mich durch die Übereinstimmung der beobachteten und der berechneten Temperaturen von der zureichenden Genauigkeit der letzteren überzeugen. Ich halte nun die ganze Reihe von Temperaturmitteln für Obir-Berghaus von 1866—1897, welche ich in Tabelle II des Anhanges S. 567—568 zusammengestellt habe,[2] für homogen und daher für geeignet zur Reduction kürzerer Beobachtungsreihen auf Berggipfeln und Berghängen in den Ostalpen auf längere Perioden.

Die nachfolgende Tabelle *B* enthält die Lustren- und Decennienmittel der 45 Jahrgänge 1851—1895.

Diese Temperaturmittel sind aus den Beobachtungen um 7^h, 2^h, 9^h abgeleitet nach der Formel (7, 2, 9, 9) : 4, welche nach den stündlichen Aufzeichnungen zu Obir-Berghaus, so wie jenen auf dem Obirgipfel fast genau wahre (24stündige) Mittel liefert (vergl. den täglichen Gang der Temperatur auf dem Obirgipfel, Sitz.-Ber. Juli 1893, S. 721 und die Tabelle I im Anhang hier S. 566).

Die Correctionen sind:

December —0·05, Jänner und Februar —0·1, März bis Juni 0·0, Juli, August, October +0·1, September, November 0·0.

Um den jährlichen Gang mit thunlichster Sicherheit festzustellen, wurden auch Mittel für die 45jährige Periode 1851 bis 1895 abgeleitet. Die Lustrenmittel werden gestatten, nach Abschluss des Jahres 1900 sogleich die 50jährigen Mittel 1851 bis 1900 bequem berechnen zu können.

---

1 Die Lage dieser Stationen ist:

St. Peter	47°1 N,	13·6 E,	1220 *m*,
Petzen-Feistritz	46·5 N,	14·7 E,	1490 *m*,
Obir	46·5 N,	14·5 E,	2047 *m*.

2 Am Fusse dieser Tabelle auf S. 568 finden sich noch die extremsten Mittel der nicht verwendeten Beobachtungsperiode 1851—1865; für diesen Zweck können dieselben schon compariren.

B. Temperaturmittel Berghaus Obir (2047 *m*).

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	October	Nov.	Dec.	Jahr
1866—1870	—7·2	—4·1	—6·2	—1·1	4·2	6·8	9·0	7·3	6·1	0·4	—3·2	—5·4	0·56
1871—1875	—5·6	—7·2	—4·6	1·3	1·6	6·1	9·8	8·5	6·1	1·8	—3·6	—6·2	0·48
1876—1880	—6·5	—4·2	—5·0	—0·7	1·5	6·9	8·6	9·4	5·2	2·0	—3·5	—6·1	0·60
1881—1885	—7·2	—5·3	—4·6	—2·4	2·1	5·5	9·1	8·3	5·4	—0·4	—3·3	—5·9	0·14
1886—1890	—7·2	—9·2	—6·5	—2·6	2·4	6·6	8·6	8·8	5·7	0·5	—2·7	—7·4	—0·26
1891—1895	—9·9	—8·1	—5·9	—1·8	1·7	5·8	8·8	8·8	7·1	1·9	—2·1	—6·5	0·00
	Decennien-Mittel												
1866—1875	—6·4	—5·6	—5·4	—1·2	2·9	6·5	9·4	7·9	6·1	1·1	—3·4	—5·8	0·52
1876—1885	—6·8	—4·8	—4·8	—1·5	1·8	6·2	8·8	8·9	5·3	0·8	—3·4	—6·0	0·37
1886—1895	—8·5	—8·7	—6·2	—2·2	2·0	6·2	8·7	8·8	6·4	1·2	—2·4	—7·0	—0·13

	Decennien-Mittel nach dem internationalen Schema.												
1851—1860	—7·0	—7·8	—6·5	—2·3	2·4	6·4	8·5	8·6	5·3	2·5	—4·0	—5·9	0·02
1861—1870	—6·9	—5·1	—5·3	—1·0	4·3	6·6	9·2	8·4	6·4	1·6	—2·4	—5·3	0·88
1871—1880	—6·0	—5·7	—4·8	—1·0	1·6	6·5	9·2	9·0	5·6	1·9	—3·6	—6·1	0·54
1881—1890	—7·2	—7·2	—5·6	—2·5	2·3	6·0	8·9	8·6	5·5	0·1	—3·0	—6·6	—0·06
	30jährige Mittel												
1851—1880	—6·6	—6·2	—5·5	- 1·4	2·8	6·5	9·0	8·7	5·8	2·0	—3·3	—5·8	0·50
1866—1895	—7·3	—6·3	—5·5	—1·6	2·3	6·3	9·0	8·5	5·9	1·0	—3·1	—6·3	0·25
	40jähriges Mittel												
1851—1890	—6·8	—6·5	—5·5	—1·7	2·6	6·4	8·9	8·7	5·7	1·5	—3·2	—6·0	0·34
	45jähriges Mittel												
1851—1895	—7·2	—6·7	—5·6	—1·8	2·5	6·3	8 9	8·6	5·9	1·7	—3·1	—6·1	0·28

Bringt man an die Mittel 1851—1880 und 1851—1895 die früher abgeleiteten Temperatur-Differenzen Obirgipfel—Obir-Berghaus an, so erhält man die 30- sowie die 45jährigen Mittel für Obirgipfel 2140 *m*. Dieselben finden sich später mit jenen für Sonnblick und St. Bernhard für die gleichen Perioden zusammengestellt (S. 558 und S. 559).

Meine nächste Aufgabe war nun, auch den jährlichen Wärmegang auf dem Sonnblickgipfel genauer zu berechnen, als dies bisher möglich war. Die Beobachtungsperiode 1887 bis 1897, die jetzt vom Sonnblickgipfel vorliegt, zeichnete sich durch einige sehr abnorme Temperaturen aus, wie die Tabelle für Obir-Berghaus (*B* und Anhang II) zeigt. Die mittleren Wintertemperaturen 1886—1895 waren abnorm niedrig, der Februar um 2° zu kalt, auch das Jahresmittel der 11 Jahre ist zu niedrig. Die unmittelbaren Durchschnittstemperaturen 1887—1897 für den Sonnblick repräsentiren desshalb nicht die normalen Verhältnisse, wie sie aus langjährigen Beobachtungen sich ergeben werden. Desshalb musste ein Versuch gemacht werden, dieselben auf die 30jährige Periode 1851—1880 zu reduciren, und sie derart mit den Wärmemitteln, die ich in den »Temperatur-Verhältnissen der österreichischen Alpenländer« aufgestellt habe, direct vergleichbar zu machen, und dann auch noch zur sicheren Ableitung der jährlichen Periode auf den längeren Zeitraum 1851—1895. Ich lasse zunächst in Tabelle *C* die Temperaturmittel (und die Jahresextreme) für den Sonnblick October 1886 bis December 1897 folgen.

Zur Reduction der Temperaturmittel des Sonnblick auf eine lange Beobachtungsreihe kann man wohl nur die Stationen St. Bernhard und Obir-Berghaus verwenden; die Benützung tiefer gelegener Stationen muss als ausgeschlossen betrachtet werden. Die Lage und Entfernung von diesen Stationen (denen ich Alt-Aussee beifüge, weil diese Station früher auch Verwendung fand) sind:

	N-Breite	E-Länge	Höhe
Sonnblick......	47° 3′	12° 57′	3106 *m*
St. Bernhard ...	45 52	7 11	2475
Obir-Berghaus ..	46 30	14 29	2046
(Alt-Aussee	47 39	13 46	945).

C. Mittlere Temperatur auf dem Sonnblickgipfel (7, 2, 9, 9):4.

	1886	1887	1888	1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895	1896	1897	Mittel
Jänner	—	−12·6	−14·6	−13·5	−10·6	−16·3	−13·5	−17·6	−12·3	−17·2	−12·6	−13·7	−14·0
Februar	—	−15·7	−15·4	−17·5	−13·6	−13·5	−13·6	−13·5	−13·0	−18·4	−10·1	−10·4	−14·1
März	—	−10·7	−13·0	−14·2	−11·4	−12·0	−13·7	−12·3	−11·6	−12·9	−10·2	−10·8	−12·1
April	—	−9·6	−9·4	−10·1	−9·1	−11·4	−7·2	−8·3	−6·3	−6·9	−12·0	−8·2	−8·9
Mai	—	−6·7	−4·2	−1·3	−3·2	−3·0	−3·8	−5·5	−3·6	−5·2	−6·5	−6·5	−4·5
Juni	—	−2·0	−0·5	0·9	−3·1	−1·0	−0·9	−1·9	−3·1	−0·8	−0·9	−0·2	−1·2
Juli	—	2·8	−0·9	0·2	0·3	0·3	0·3	0·8	2·2	2·0	1·5	1·2	1·0
August	—	0·4	0·0	0·3	2·0	0·4	2·5	0·7	0·7	0·6	−1·1	1·5	0·7
September	—	−1·6	−0·2	−4·2	−3·3	0·8	−0·4	−1·1	−2·1	1·4	−2·0	−0·9	−1·3
October	−3·4	−9·1	−6·5	−4·7	−7·1	−3·6	−5·6	−3·5	−5·4	−5·5	−4·2	−6·1	−5·4
November	−9·3	−9·2	−7·5	−8·0	−10·8	−9·2	−7·3	−8·1	−6·8	−5·5	−10·3	−7·4	−8·3
December	−13·2	−15·5	−9·0	−12·8	−14·1	−11·3	−13·6	−10·9	−13·7	−12·3	−11·5	−10·4	−12·4
Jahr	—	−7·5	−6·8	−7·1	−7·0	−6·7	−6·4	−6·8	−6·2	−6·8	−6·6	−6·0	−6·7
	Jahresextreme												
Maximum	—	9·0	10·0	10·0	9·4	10·2	11·4	9·8	13·0	8·6	7·4	10·4	9·9
Minimum	—	−33·0	−30·2	−34·0	−34·6	−33·8	−28·0	−29·2	−27·2	−33·8	−29·4	−29·0	−31·1

Die beiläufigen Entfernungen sind:

Sonnblick—Obir	122 *km*
Sonnblick—St. Bernhard ...	460
Obir—St. Bernhard	530
(Obir—Alt-Aussee	140).

Die Entfernung des St. Bernhard vom Sonnblick ist so gross, dass sie schon sehr veränderliche Temperaturdifferenzen erwarten lässt, umsomehr, da der St. Bernhard in den Westalpen, also in einem schon recht differenten Klimagebiet liegt. Man ist daher zumeist auf die Station Obir-Berghaus bei der Reduction angewiesen.

Die Säntis-Station habe ich zur Reduction nicht benützt, erstlich, weil die Beobachtungsreihe nur wenig länger ist, als jene auf dem Sonnblick und deshalb selbst erst durch Differenzen gegen St. Bernhard auf eine längere Periode hätte reducirt werden müssen. Dann zerfällt die Reihe durch die Übersiedlung der Station im October 1887 (die Beobachtungen beim Gasthause, 40 *m* unter dem Gipfel, begannen September 1882) in das neue Observatorium auf dem Gipfel in zwei Theile — der Höhenunterschied kommt dabei weniger in Betracht, als die Verlegung auf den freien Gipfel und die geänderte Aufstellung der Instrumente. Ausserdem scheinen die Temperaturmittel der letzteren Jahre niedriger geworden zu sein, worauf folgende Differenzen der Jahresmittel der Temperatur hinweisen dürften.

Differenzen der Jahresmittel der Temperatur.

	1887	1888	1889	1890	1891	1892	1893
Säntis—St. Bernhard	0·0	—0·2	—0·2	0·0	—0·3	—0·1	—0·3
Säntis—Sonnblick	5·0	4·5	4·4	4·7	4·4	4·6	5·1

	1894	1895	1896	1897
Säntis—St. Bernhard	—1·2	—0·9	—0·9	—1·0
Säntis—Sonnblick	3·9	3·9	3·8	4·2

Der mittlere Temperatur-Unterschied ist demnach:

Säntis—St. Bernhard	1887—1893	—0·16,
	1894—1897	—1·00,
	Differenz	—0·84.

Säntis-Sonnblick 1887—1893 .... 4·62,
dagegen 1894—1897 bloss ...... 3·95,
Differenz .... —0·67,

es ist demnach der Säntis in den Jahren 1894—1897 um circa 0°75 kälter geworden.

Da ich mir nicht die Aufgabe gestellt habe, auch die mittlere Temperatur des Säntis abzuleiten, so habe ich nicht nöthig, der Ursache dieser Erscheinung nachzugehen; sie ist aber einer der Gründe, wesshalb ich diesmal nicht auch die Station auf dem Säntis zur Reduction der 11jährigen Temperaturbeobachtungen auf dem Sonnblick auf eine längere Periode benützt habe.

Die folgende Tabelle *D* (S. 556 und 557) enthält die mittleren Temperaturdifferenzen Sonnblick—St. Bernhard und Sonnblick—Obir-Berghaus, sowie deren mittlere Veränderlichkeit, die, mit der mittleren Veränderlichkeit der Monatsmittel der Temperatur auf dem Sonnblick verglichen, die Vortheile abzuschätzen geeignet ist, welche das Reductionsverfahren gewährt.

Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen.

	Winter	Sommer	Im Mittel
Sonnblick—St. Bernhard	0°81	0°70	0·79
Sonnblick—Obir	0·79	0·43	0·55
Veränderlichkeit der Temperaturmittel des Sonnblick	1·71	0·83	1·70

Die Differenzen gegen den St. Bernhard sind im Sommerhalbjahr viel veränderlicher, als jene gegen Obir-Berghaus, aber doch noch etwas constanter als die Temperaturmittel des Sonnblick selbst. Bemerkenswerth ist die grosse Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen Sonnblick—St. Bernhard im Mai und Juni (1°1).

D. Temperaturdifferenzen und deren Veränderlichkeit.

1887	1888	1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895	1896	1897	Mittel
Jahresmittel. Sonnblick—St. Bernhard											
—5·0	—4·7	—4·6	—4·7	—4·7	—4·7	—5·5	—5·0	—4·9	—4·7	—5·2	4·88
Jahresmittel. Sonnblick—Obir-Berghaus											
—6·9	—6·6	- 6·6	—6·5	—6·6	—6·6	—6·8	—6·4	— 6·4	—6·1	—7·0	6·59

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
Sonnblick—St. Bernhard (October 1886 bis December 1897)												
—4·43	—5·44	—5·03	—5·25	—4·69	—5·40	—5·25	—5·33	—5·13	—4·25	—3·92	—4·22	—4·86
ausgeglichen (sowie ohne März, April, August 1893 und October 1896)												
—4·56	—5·18	—4·91	—4·88	—4·85	—5·26	—5 26	—5·17	—4·98	—4·34	—4·02	—4 21	—4·80
Sonnblick—Obir-Berghaus (October 1886 bis December 1897)												
—5·47	—6·00	—6·45	—6·36	—6·13	—7·53	—7·76	—7·84	—7·45	—6·67	—5·87	—5·57	—6·59

Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen 1887—1897.

Sonnblick—St. Bernhard

0·88	0·90	0·92	0·72	1·12	1·05	0·34	0·72	0·92	0·75	0·57	0·64	0·22

Sonnblick—Obir-Berghaus

0·50	1·02	0·50	0·45	0·51	0·52	0·38	0·40	0·36	0·42	0·68	0·85	0·17

Veränderlichkeit der Temperaturmittel des Sonnblick, 1887—1897

1·72	1·96	1·01	1·44	1·44	0·94	0·88	0·68	1·24	1·26	1·25	1·46	0·31

St. Bernhard. Temperaturmittel.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
1851—1860	—8·8	—9·7	—7·6	—3·8	—0·5	3·7	5·9	6·1	2·9	—0·1	—6·3	—8·5	—2·21
1861—1870	—8·0	—7·1	—7·6	—2·2	2·1	4·2	7·2	6·3	4·4	- 0·6	—4·7	—7·1	—1·11
1871—1880	—8·1	—7·7	—6·1	—3·1	—0·2	4·1	7·3	7·5	4·6	0·1	—5·7	—8·0	—1·28
1881—1890	—7·8	—8·2	—6·8	—4·1	0·[illegible]	3·4	6·1	6·1	3·2	—2·0	—4·5	—7·9	—1·75
1851—1880	—8·3	—8·2	—7·1	—3·0	0·5	4·0	6·8	6·6	4·0	—0·2	—5·6	—7·9	—1·53
1851—1890	—8·2	—8·2	—7·0	—3·4	0·4	3·9	6·6	6·6	3·8	—0·6	—5·3	—7·9	—1·59
1861—1890	—8·0	—7·7	—6·8	- 3·1	0·7	3·9	6·8	6·3	4·1	—0·8	—5·0	—7·7	—1·38
1851—1895	—8·5	—8·2	—7·0	—3·2	0·4	3·8	6·6	6·5	3·9	—0·5	- 5·1	—7·8	—1·59

Indem ich die Temperaturdifferenzen der Tabelle *D* an die 30- und 45jährigen Mittel von Obir-Berghaus und St. Bernhard anbrachte (wobei ersteren Resultaten das doppelte Gewicht gegeben wurde), erhielt ich die folgenden 30- und 45jährigen Mitteltemperaturen der Station auf dem Sonnblickgipfel, denen dann auch jene vom Obirgipfel und jene der Vergleichsstationen beigegeben wurden.

Temperaturmittel 1851—1880.

	Obir-Berghaus	Obirgipfel	St. Bernhard	Sonnblick reducirt nach Obir	Sonnblick reducirt nach Obir und St. Bernhard
Höhe	2047 *m*	2140 *m*	2475 *m*	3106 *m*	
Jänner	—6·6	—6·8	—8·3	—12·1	—12·4
Februar	—6·2	—6·6	—8·2	—12·2	—12·6
März	—5·5	—6·0	—7·1	—12·0	—12·0
April	—1·4	—1·9	—3·0	— 7·8	— 7·8
Mai	2·8	2·4	0·5	— 3·3	— 3·6
Juni	6·5	6·0	4·0	— 1·0	— 1·1
Juli........	9·0	8·4	6·8	1·3	1·4
August.....	8·7	7·9	6·6	0·9	1·0
September ..	5·8	5·0	4·0	— 1·6	— 1·4
October	2·0	1·3	— 0·2	— 4·7	— 4·6
November ..	— 3·3	— 3·8	— 5·6	— 9 2	— 9·3
December ..	— 5·8	— 6·1	— 7·9	—11·4	—11·6
Jahr	0·5	0·0	— 1·5	— 6·1	— 6·2

Temperaturmittel 1851—1895.

	Obir-Berghaus	Obirgipfel	St. Bernhard	Sonnblick reducirt nach	
				Obir	St. Bernhard und Obir
Höhe	2047 *m*	2140 *m*	2475 *m*	3106 *m*	
Jänner	—7·2	—7·4	—8·5	—12·7	—12·8
Februar	—6·7	—7·1	—8·2	—12·7	—12·9
März	—5·6	—6·1	—7·0	—12·0	—12·0
April	—1·8	—2·3	—3·2	— 8·2	— 8·2
Mai	2·5	2·1	0·4	— 3·6	— 3·8
Juni	6·3	5·8	3·8	— 1·2	— 1·3
Juli........	8·9	8·3	6·6	1·1	1·2
August	8·6	7·8	6·5	0·8	1·0
September ..	5·9	5·1	3·9	— 1·5	— 1·4
October	1·7	1·0	— 0·5	— 5·0	— 4·9
November ..	— 3·1	— 3·6	— 5·1	— 9·0	— 9·0
December ..	— 6·1	— 6·4	— 7·8	—11·7	—11·8
Jahr	0·3	— 0·2	— 1·6	— 6·3	— 6·3

Die correspondirenden Jahresextreme der Temperatur (aus den Terminbeobachtungen genommen) sind im Mittel der 11 Jahre 1887 bis 1897:

für Obir-Berghaus .... —21°1 und 20°9,
» Sonnblickgipfel....... —31·1 » 9·9;

die absoluten Extreme waren

für Obir................ —25°8 und 23°0,
» Sonnblick .... —34·6 » 13·0.

Im Mittel der Periode 1851—1895 ist der Winter, namentlich Jänner und Februar, erheblich kälter als im 30jährigen Mittel 1851—1880; die letzten drei Lustren zeichneten sich durch besonders kalte Winter aus, es sind aber fast alle Monate etwas kälter als im 30jährigen Mittel; in den Ostalpen scheint

diese Abkühlung stärker aufgetreten zu sein als in den Westalpen.

Die 45jährigen Mittel, welche sich wohl nur wenig mehr ändern dürften, habe ich zur Ableitung des jährlichen Wärmeganges benützt.

Die Gleichungen, die den jährlichen Wärmegang in erster Annäherung zum Ausdrucke bringen, sind:

Jährlicher Gang der Temperatur. Periode 1851—1895.

Sonnblick	$7^\circ 18 \sin(257\cdot 0+x)+0\cdot 43 \sin(97\cdot 6+2x)$
St. Bernhard	$7\cdot 84 \sin(259\cdot 0+x)+0\cdot 73 \sin(40\cdot 0+2x)$
Obirgipfel	$8\cdot 08 \sin(258\cdot 8+x)+0\cdot 63 \sin(65\cdot 8+2x)$
Obir-Berghaus ..	$8\cdot 29 \sin(258\cdot 3+x)+0\cdot 63 \sin(52\cdot 8+2x)$.

Die Phasenzeit des ersten Gliedes ist für alle vier Stationen die gleiche, die Amplitude nimmt aber mit der Höhe ab. Der geringe Unterschied im jährlichen Gange kommt im zweiten Gliede zum Ausdruck; dasselbe hat auf dem St. Bernhard und auf dem Obir einen etwas grösseren Einfluss und die Phasenzeit desselben ist gegen Sonnblick im Durchschnitt um etwas mehr als 20 Tage verspätet.

Um den jährlichen Wärmegang für Sonnblick und Obirgipfel etwas detaillirter berechnen zu können, habe ich noch zwei weitere Glieder der obigen Gleichungen berechnet mit dem dreifachen und vierfachen Winkel. Dieselben sind:

Sonnblick	$0^\circ 31 \sin(104^\circ 9+3x)+0^\circ 30 \sin(30^\circ 0+4x)$
Obirgipfel	$0\cdot 22 \sin(\ 63\cdot 4+3x)+0\cdot 17 \sin(49\cdot 8+4x)$.

Rechnet man mit diesen vier periodischen Gliedern, so erhält man folgende Temperaturen für rund 15tägige Abschnitte des Jahres. Ich habe dabei keine Verschärfung der Rechnung angewendet (Reduction auf Normalmonate und Reduction der Coëfficienten zur Verbesserung der Amplituden), weil die jährliche Variation gering ist und die Unsicherheit der auf eine lange Periode reducirten Mittel dieselbe doch ziemlich illusorisch machen würde.

Berechneter jährlicher Wärmegang.

Periode 1851—1895.

		Sonnblick	Obirgipfel
Jänner	1......	—12°1	—7°1
	16......	—12·4	—7·4
	31......	—12·7	—7·3
Februar	15......	—13·0	—7·2
März	2......	—12 9	—6·7
	17......	—12·1	—5·8
April	1......	—10·4	—4·3
	16......	— 8·1	—2·2
Mai	1......	— 6·2	— 0·1
	16......	— 3·9	2·0
Juni	1......	— 2·6	4·0
	16......	— 1·2	5·7
Juli	1......	0·0	7·2
	16......	0·9	8·1
August	1......	1·3	8·4
	16......	0·9	7·9
September	1......	— 0·1	6·8
	16......	— 1·7	5·2
October	1......	— 3·3	3·3
	16......	— 5·1	1·1
November	1......	— 6·9	— 1·3
	16......	— 8·7	—3·6
December	1......	—10·3	—5·4
	16......	—11·5	—6·6

Auf dem Sonnblick fällt nach der Rechnung das Minimum der Temperatur über die Mitte des Februar hinaus, auf dem Obirgipfel auf die zweite Hälfte des Jänner. Das Maximum tritt auf dem Sonnblick am 1. August, auf dem Obir etwas früher ein. Die Temperatur hält sich über dem Gefrierpunkt auf dem Sonnblickgipfel vom 1. Juli bis inclusive 31. August, also durch 62 Tage, auf dem Obirgipfel vom 2. Mai bis etwa zum 20. October, d. i. durch 172 Tage, also fast ein halbes Jahr hindurch

Die um 1000 *m* geringere Höhenlage und die um einen halben Breitegrad südlichere und zudem nach Norden hin durch die Centralalpen geschützte Lage bedingen diesen bedeutenden Wärmeunterschied.

Es ist noch von Interesse, den jährlichen Gang der Temperaturänderung mit der Höhe zu berechnen, wozu sich die Temperaturmittel der beiden Gipfelstationen ganz besonders eignen. Die Temperaturdifferenzen Obirgipfel—Sonnblickgipfel sind von den localen Erkaltungen und Erwärmungen unter und über die wahre Lufttemperatur zum grossen Theile befreit, da man annehmen darf, dass dieselben an beiden Stationen ziemlich nahe von gleichem Betrage sind.

Ich habe die Rechnung doppelt geführt, einmal direct mit den beobachteten Temperaturdifferenzen Obirgipfel—Sonnblickgipfel, dann mittelst der obigen Gleichungen für den jährlichen Wärmegang auf den beiden Gipfeln.

Da der Obirgipfel um einen halben Breitegrad südlicher liegt, so müssen die Temperaturmittel desselben vorerst auf die Breite des Sonnblick reducirt werden, was mit Hilfe der in meiner Abhandlung über die Temperaturverhältnisse der österreichischen Alpenländer III. (diese Sitzungsber., Juni 1885, S. 110) für dieses Gebiet festgestellten Wärmeänderung mit der geographischen Breite im Niveau von 2000 *m* geschehen kann. Es folgen hier die corrigirten mittleren Temperaturdifferenzen sowie die entsprechende Wärmeänderung mit der Höhe.

Obirgipfel—Sonnblick. Höhendifferenz 966 *m*.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
Corrigirte Temperaturdifferenzen												
5·1	5·4	5·7	5·7	5·4	6·5	6·7	6·5	6·3	5·7	5·2	5·1	5·78
Wärmeabnahme mit der Höhe pro 100 *m*. Celsius-Grade												
·53	·56	·59	·59	·56	·67	·69	·67	·65	·59	·54	53	·598

Diese Grössen erhält man aber auch auf anderem Wege aus den oben mitgetheilten Gleichungen des jährlichen Wärmeganges auf dem Obirgipfel und auf dem Sonnblickgipfel.

Constanten der harmonischen Reihen für den jährlichen Wärmegang (1851—1895).

	p_0	p_1	q_1	p_2	q_2
Obirgipfel......	—0°23	—7°93	—1°57	+0°58	+0°26
Red. auf 47°N[1]..	—0·32	+0·20	+0·03	—0·04	+0·02
Reducirter Gang.	—0·55	—7·73	—1·54	+0·54	+0·28
Sonnblickgipfel .	—6·33	—7·00	—1·62	+0·43	—0·02
Obir—Sonnblick	+5·78	—0·73	+0·08	+0·11	+0·30

Gleichung der Temperaturdifferenzen:

$$5°78+0°73 \sin(276°3+x)+0°32 \sin(20°1+x).$$

Die Division der Coëfficienten durch den Höhenunterschied, d. i. 9·66 *hm*, ergibt dann:

Gleichung für den Gang der Wärmeänderung mit der Höhe.

$$0°598+0·076 \sin(276°3+x)+0·033 \sin(20°1+2x).$$

Die Auswerthung dieser Gleichung liefert folgende Zahlen für die Wärmeabnahme mit der Höhe:

Wärmeänderung mit der Höhe pro 100 *m*.

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
—·064	—·032	—·016	—·012	·007	·045
·534	·566	·582	·586	·605	·643
Juli	**August**	**September**	**October**	**November**	**December**
·086	·097	·056	—·012	—·071	—·087
·684	·695	·654	·586	·527	·511

[1] Die Correctionsgrössen für die einzelnen Monate, mit Jänner beginnend, sind: ·16, ·16, ·17, ·20, ·33, ·53, ·62, ·52, ·35, ·28, ·27, ·21, Jahr 0·32, sämmtlich negativ.

Diese Werthe für die Wärmeänderung mit der Höhe stimmen fast genau mit den oben direct berechneten Werthen überein, nur verlegt die Rechnung das Maximum auf den August (mit 0°69 gegen 0°67 direct), eigentlich auf Anfang August, während die Beobachtungen dasselbe auf Mitte Juli verlegen (berechnet 0·68, beobachtet 0·69). Die Amplitude der jährlichen Variation der Temperaturänderung mit der Höhe ist gering, sie beträgt nur 0°16 oder 27% des mittleren Betrages. Die obigen Werthe dürften der wahren mittleren Wärmeänderung mit der Höhe in der freien Atmosphäre in dem Niveau zwischen 2000 *m* und 3000 *m* Seehöhe wohl recht nahe kommen. Den mittleren Betrag hätte ich allerdings etwas grösser erwartet als 0°60 pro 100 *m*.

Ganz andere Zahlen erhält man aber, wenn man eine Thalstation mit der Gipfelstation auf dem Obir vergleicht. Dazu eignet sich namentlich die Station Schloss Saager im Drauthal, die im Angesicht des Obirgipfels, demselben ganz nahe, aber 1660 *m* tiefer liegt. Die Lage der Station gegen Obirgipfel ist:

	Breite	Länge	Höhe
Schloss Saager	46° 34′	14° 29′	480 *m*
Obirgipfel	46 31	14 29	2140

Das Schloss Saager liegt am Rande des südlichen Steilabfalles des Höhenzuges der Sattnitz gegen das Drauthal, 80 *m* über dessen Sohle, also sehr günstig. Trotzdem wird es im Winter von den kalten, in der Niederung stagnirenden Luftschichten noch erreicht, und es kommen »Temperatur-Umkehrungen« gegen den Obirgipfel vor. Desshalb ist auch der jährliche Gang der Wärmeänderung mit der Höhe gegen den Obirgipfel sehr stark ausgeprägt.

Die fünf Jahre 1892—1896 geben folgende Werthe für die Temperaturabnahme pro 100 *m*:

Temperaturänderung mit der Höhe. Saager—Obir.

Jänn.	Febr.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
0°20	·31	·54	·68	**·72**	·69	·61	·58	·53	·48	·32	·19	0°49

Die rascheste Wärmeabnahme tritt, wie zwischen Thälern und höheren Berggipfeln in der Regel, im Mai ein, wo oben erst der Schnee schmilzt, während unten die Thäler schon schneefrei sind und sich rasch erwärmen; die kleinste Wärme abnahme hat der December, der Monat der häufigsten »Tem peratur-Umkehrungen«. Die Amplitude der jährlichen Variation der Temperaturänderung mit der Höhe ist 0°53, d. i. fast 108% des mittleren Betrages; sie ist demnach viermal grösser als jene zwischen Obir und Sonnblick.

Die Temperaturdifferenzen gegen Klagenfurt (1700 *m* tiefer) zeigen eine noch grössere jährliche Variation; dieselben sinken im Jänner-Mittel auf 0°6 herab und erheben sich im Juni auf 11°2 (im Jahresmittel betragen sie 7°2). Dies gibt eine Wärmeabnahme von 0°035 im Jänner, 0°65 im Juni als Maximum, und 0°42 im Jahr. Die Amplitude ist demnach 0°61 oder 144% des mittleren Betrages. Selbst im Wintermittel ist die Wärmeabnahme nach oben gegen den Obirgipfel hin bloss 1°9 oder 0°11 pro 100 *m*.

I. Obirgipfel (Hannwarte). Täglicher Gang der Temperatur. 4 Jahre (1892—1895).

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
1ʰ a.	—·30	—·26	—·53	—·89	—·99	—1·34	—1·40	—1·32	—·86	—·30	—·23	—·13	—·71
2	—·25	—·26	—·61	—·91	—1·06	—1·44	—1·47	—1·40	—·91	—·35	—·23	—·15	—·74
3	—·35	—·26	—·71	—·96	—1·14	—1·51	—1·65	—1·47	—1·01	—·42	—·16	—·13	—·81
4	—·38	—·28	—·76	—·96	—1·19	—1·54	—1·72	—1·60	—1·03	—·40	—·11	—·13	—·84
5	—·43	—·33	—·88	—·99	—1·19	—1·41	—1·60	—1·65	—1·06	—·40	—·11	—·15	—·85
6	—·38	—·36	—·86	—·89	—1·04	—·99	—1·25	—1·30	—·96	—·42	—·18	—·18	—·73
7	—·43	—·38	—·66	—·59	—·76	—·66	—·87	—·82	—·61	—·37	—·31	—·13	—·55
8	—·38	—·22	—·51	—·34	—·54	—·39	—·50	—·45	—·21	—·30	—·18	—·03	—·34
9	—·23	—·16	—·23	—·11	—·16	·04	—·02	—·12	·09	—·07	—·08	·00	—·09
10	·02	—·01	·02	·11	·29	·54	·45	·28	·44	·18	·12	·20	·22
11	·27	·19	·27	·54	·74	96	·98	·78	·87	·45	·32	·30	·56
Mittag	·42	·37	·62	·86	·94	1·51	1·43	1·30	1·24	·55	·52	·40	·85
1	·55	·54	·84	1·06	1·24	1·79	1·70	1·78	1·54	·65	·64	·45	1·06
2	·57	·67	1·02	1·26	1·41	1·84	1·90	2·03	1·59	·68	·69	·52	1·18
3	·60	·72	1·17	1·26	1·46	1·81	2·05	2·18	1·49	·63	·62	·37	1·20
4	·45	·64	1·14	1·29	1·39	1·71	2·05	2·13	1·37	·60	·49	·27	1·13
5	·22	·37	·87	1·09	1·26	1·19	1·80	1·78	1·04	·48	·17	·02	·86
6	·10	·14	·49	·76	·99	81	1·40	1·23	·44	·10	—·06	—·08	·53
7	·05	—·01	·17	·19	·41	·39	·63	·30	—·08	—·05	—·08	—·20	·14
8	·00	—·16	·07	—·04	—·01	—·09	—·15	—·25	—·36	—·12	—·31	—·20	—·13
9	·00	—·21	—·11	—·24	—·26	—·49	—·57	—·60	—·51	—·20	—·33	—·23	—·31
10	—·03	—·23	—·16	—·34	—·46	—·71	—·82	—·82	—·66	—·27	—·41	—·28	—·43
11	—·08	—·26	—·28	—·49	—·59	—·86	—1·10	—·95	—·81	—·32	—·43	—·33	—·54
Mitternacht	—·10	—·31	—·41	—·61	—·74	—1·06	—1·30	—1·12	—·93	—·37	—·43	—·30	—·64
Mittel	·28	·31	·56	·70	·84	1·04	1·20	1·15	·84	·36	·30	·22	·64

II. Temperaturmittel. Obir-Berghaus (2047 *m*).

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
1866	— 2·9	— 3·1	—4·2	0·6	0·4	8·3	8·1	6·1	6·6	—0·4	—3·7	—2·6	1·1
67	— 5·5	— 4·0	—4·8	—1·7	3·1	7·2	7·4	8·9	6·7	0·4	—3·2	—9·0	0·5
68	— 8·9	— 3·9	—7·1	—2·0	**6·5**	7·5	8·7	8·6	7·6	2·8	—3·5	**—1·8**	1·2
69	— 8·8	— **1·8**	—7·0	0·3	6·0	4·2	10·6	6·7	6·8	—0·8	—3·5	—6·0	0·6
1870	— 9·7	— 8·1	—7·9	—2·9	4·9	6·7	10·3	6·1	2·9*	—0·1	—1·9	—7·4	—0·6*
71	— 9·3	— 4·5	—3·7	—1·9	0·5	3·0	9·2	7·1	6·0	—1·0	—4·7	—8·4	—0·6*
72	— 6·1	— 5·2	—3·9	0·1	4·0	6·8	9·8	7·8	6·4	3·2	—0·7	—3·6	**1·6**
73	— 3·7	— 7·4	—2·7	—2·8	—0·4	4·9	10·3	10·5	4·6	3·8	—2·5	—3·9	0·9
74	— 4·1	— 7·8	—5·8	0·3	—0·6*	7·6	**11·4**	6·9	8·0	3·0	—5·9	—7·6	0·5
75	— 4·7	—10·9	—6·8	—2·3	4·5	8·4	8·3	10·2	5·4	—0·1	—4·2	—7·5	0·0
76	— 6·0	— 4·5	—4·3	**0·9**	1·1	6·8	9·1	8·9	4·4	**4·7**	—4·5	—2·5	1·2
77	— 4·1	— 4·7	—5·8	—1·8	0·9	**8·9**	8·9	**11·4**	2·9*	—0·1	—1·3	—6·8	0·7
78	— 7·3	— 2·6	—6·1	—1·5	3·8	6·1	7·7	9·4	6·2	2·5	—4·6	—9·1	0·4
79	— 7·2	— 5·4	—5·8	—1·8	—0·5	6·9	6·1*	10·3	6·6	0·8	—6·2*	—9·5	—0·5
1880	— 7·9	— 4·0	—3·1	0·7	2·3	5·7	11·1	7·0	5·9	2·4	—0·9	—2·6	1·4
81	—10·8	— 6·2	—3·7	—2·5	1·6	6·2	11·2	10·3	4·4	—2·5	—0·6	—4·7	0·3
82	— **2·1**	— 4·2	**—1·1**	—2·5	3·5	5·1	8·0	6·9	4·8	2·0	—4·1	—5·5	0·9
83	— 8·0	— 6·3	—9·3*	—3·6	1·8	6·4	8·1	8·6	4·8	0·7	—3·5	—7·8	—0·6*
84	— 5·5	— 5·2	—4·0	—1·5	3·7	2·4*	8·8	8·1	5·8	—1·3	—5·9	—4·6	0·1
85	— 9·5	— 4·4	—5·1	—1·9	0·0	7·5	9·4	7·6	7·0	—0·8	—2·6	—7·0	0·0
86	— 7·1	— 7·6	—7·1	—0·8	2·5	5·1	9·2	8·6	8·1	3·7	—2·2	—6·7	0·5
87	— 7·1	— 8·8	—5·2	—2·5	0·3	6·5	10·5	8·6	6·3	—3·0*	—3·5	—8·7	—0·6*
88	— 9·2	— 9·1	—6·4	—3·3	2·1	7·4	6·7	8·0	7·0	—0·4	—2·2	—3·6	—0·2
89	— 8·2	—10·5	—8·1	—3·6	4·2	8·5	8·3	8·2	3·3	1·9	—1·0	—8·4	—0·5
1890	— 4·3	— 9·9	—5·9	—2·8	2·8	5·4	8·4	10·6	3·9	0·3	—4·6	—9·6*	—0·5

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.	Octob.	Nov.	Decbr.	Jahr
1891	—10·9	— 8·6	— 5·6	—4·9	2·8	6·2	8·7	8·1	7·8	2·6	—3·5	— 4·5	—0·1
92	— 7·8	— 7 9	— 7 6	—1·3	2·2	6·3	7·9	10·8	7·7	0·8	—1·7	— 6 9	0·2
93	—12·8*	— 6·4	— 4·7	—0·6	1·1	5·4	8·9	9·1	6·1	4·3	—3·8	— 5·9	0·1
94	— 7·7	— 6·3	— 5·0	0·1	2 2	5·1	9·5	8·2	4·5	1·0	—1·4	— 8·8	0·1
95	—10·1	—11·5*	— 6·5	—2·3	0·1	5·9	9·0	8·0	**9·2**	1·0	**0·0***	— 6·5	—0·3
96	— 7·9	— 5·9	— 3·7	—5·2*	0·5	5·8	9·0	5·9*	5·0	2·0	—5·0	— 6·9	—0·5
97	— 8·3	— 3·6	— 3·1	—1·8	0·2	7·2	9·6	9·1	7·1	0·5	—0·2	— 5 2	1·0
Tiefste Monatsmittel 1851—1865													
Temperatur	—11·0	—12·5	—8·3	—5·0	—2·0	5·5	6 3	7·4	1·0	—0 1	—8·9	—11·3	—0·5
Jahr	1857	54	52	52	51	53	60	64	51	64	56	55	1851
Höchstes Monatsmittel 1851—1865													
Temperatur	— 3·5	— 2 2	—0·8	3·8	(8·0)	(9·6)	(14·3)	(13·1)	(8·8)	5·8	2·2	— 0·9	(2·1)
Jahr	1852	61	62	65	65	56	59	59	54	56	52	52	1863

Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralcurven

von

J. Sobotka in Wien.

(Mit 13 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Februar 1898.)

I. Construction von Krümmungskreisen der Integralcurve.

1. Ist

$$y = af(x)$$

die Gleichung einer auf ein Parallelcoordinatensystem bezogenen Curve f, und

$$Y = \int f(x)\,dx + c$$

die Gleichung einer Curve F in demselben Coordinatensystem, wobei c eine beliebige, a eine als Constructionseinheit angenommene Constante bedeutet, so nennt man bekanntlich die Curve F eine Integralcurve von f, und umgekehrt ist f die Differentialcurve von F. Irgend zwei Punkte b, B von f, respective F mit gemeinschaftlicher Abscisse heissen correspondirende Punkte der beiden Curven.

Herr Prof. M. d'Ocagne hat im Jahre 1886 in einem an Herrn Prof. Abdank-Abakanowicz gerichteten Schreiben[1] einen Ausdruck entwickelt, der eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes einer Integralcurve für irgend einen

[1] Man sehe: »Die Integraphen von Abdank-Abakanowicz, deutsch bearbeitet von E. Bitterli, Leipzig (Teubner) 1889« auf S. 160. Auf S. 141, 142 daselbst findet man auch genaue Literaturangaben betreffs der graphischen Integration.

Punkt derselben liefert, wobei jedoch ein rechtwinkeliges Coordinatensystem zu Grunde gelegt wird.

Es heisst dort:

»Zwischen der Subtangente μ einer gegebenen Curve und dem Krümmungsradius ρ der entsprechenden Integralcurve besteht die folgende merkwürdige Relation:

$$\mu = \rho \cos^2 \Theta \sin \Theta,$$

wo Θ den Neigungswinkel der Tangente der Integralcurve gegen die Abscissenaxe bezeichnet.«

Es möge zur Orientirung gleich eingangs betont werden, dass die vorliegende Arbeit fast ausschliesslich nur constructiv geometrische Fragen verfolgt.

Darum soll hier zunächst gezeigt werden, wie die aus dieser Relation sich ergebende Construction des Krümmungsmittelpunktes sich in einfacher Weise auf geometrischem Wege in einer Form ableiten lässt, in der sie für Parallelcoordinaten überhaupt besteht.

Ist nämlich F eine Parabel, deren Axe die Richtung der Ordinaten besitzt, dann ist f eine Gerade, was sich rein geometrisch am einfachsten so darlegen lässt, wie es durch Herrn Prof. J. Šolín bereits geschehen ist.

Bezeichnet O — Fig. 1 — den Coordinatenursprung, und nehmen wir auf der x-Axe die Strecke $SO = a$ als Einheit an, so ist S Mittelpunkt des sogenannten Richtstrahlenbüschels, d. h. jedem Punkte B von F ist der zu seiner Tangente an F parallele Strahl im Strahlenbüschel (S) und somit auch der Schnittpunkt $\mathfrak{B}$ desselben mit der y-Axe zugeordnet. Die Parallele zu x durch $\mathfrak{B}$ schneidet die Ordinatenlinie von B in dem correspondirenden Punkte b von f. Es wird somit f durch zwei Parallelstrahlenbüschel beschrieben, nämlich $(Bb), \ldots$ und $(\mathfrak{B}b), \ldots$ Durchläuft nun B eine Parabel, deren Axe zu y parallel ist, dann sind diese Parallelstrahlenbüschel perspectiv, denn der erste von ihnen ist der Schein der Punktreihe $B, \ldots$ auf der Parabel von deren unendlich fernem Punkte, der zweite ist der Schein der zur Punktreihe $B, \ldots$ projectiven Punktreihe $\mathfrak{B}, \ldots$ auf y, und die unendlich ferne Gerade entspricht

in beiden Büscheln sich selbst; das Erzeugniss beider ist somit eine Gerade f.

Legen wir nun durch irgend einen Punkt b eine Anzahl von Curven, die wir als Differentialcurven betrachten und nehmen die sämmtlichen ihnen entsprechenden Integralcurven durch einen dem Punkte b correspondirenden Punkt B gehend an, so werden diese Integralcurven sich im Punkte B berühren; die gemeinschaftliche Tangente ist ja zu dem entsprechenden Richtstrahl ($S\mathfrak{B}$) parallel. Es können sich somit die Bogen-

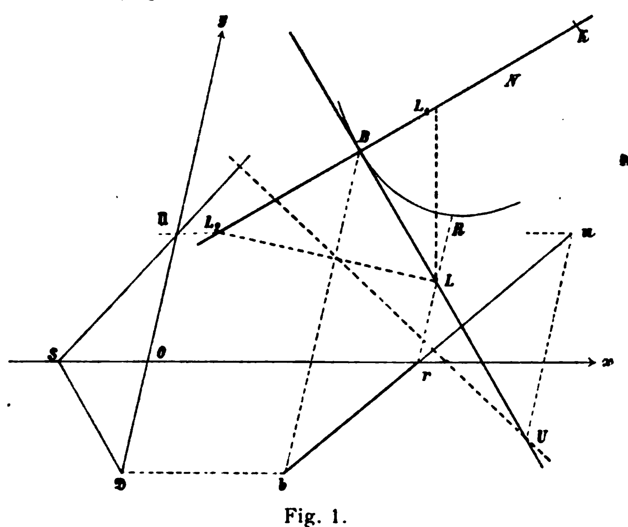


Fig. 1.

elemente in B für die einzelnen Integralcurven höchstens um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung unterscheiden.

Nehmen wir weiter an, dass sich sämmtliche Differentialcurven auch noch in b berühren, dann haben sämmtliche ihnen zugehörige Integralcurven für den Punkt B auch denselben Contingenzwinkel und weisen somit alle dieselbe Krümmung im Punkte B auf.

Daher der Satz:

Der Tangente t der Differentialcurve f in irgend einem Punkte b derselben entspricht als Integralcurve eine Parabel $\mathfrak{F}$, welche die Integralcurve F von f in dem dem Punkte b correspondirenden Punkte B osculirt.

Die Construction des Krümmungkreises der Integralcurve F von f in irgend einem Punkte derselben ist demnach zurückgeführt auf die Construction des Krümmungskreises an eine Parabel $\mathfrak{F}$ in diesem Punkte. Dies geschieht am besten mit Hilfe der sogenannten Steiner'schen Parabel.[1] Die normalconjugirten Strahlen zu den Geraden des Büschels um B in Bezug auf $\mathfrak{F}$ hüllen eine Parabel $\mathfrak{P}$ ein, welche die Normale des Punktes B an F in dem Mittelpunkte K des fraglichen Krümmungskreises berührt. Da nun die Parabel die Tangente T und die Normale N an F für den Punkt B berührt und ihre Leitgerade mit der Ordinatenlinie von B identisch ist, so wird man nur noch eine Tangente derselben zu ermitteln haben, um dann mit Hilfe des Brianchon'schen Sechsseits K zu construiren.

Man sieht leicht ein, dass irgend eine Tangente von $\mathfrak{P}$ folgendermassen erhalten wird. Man zieht — Fig. 1 — irgend einen Strahl $S\mathfrak{U}$ im Richtstrahlenbüschel und durch seinen Schnitt $\mathfrak{U}$ mit y die Parallele zu x, welche die Tangente t der Differentialcurve im Punkte u schneidet. Die Ordinatenlinie von u trifft die Tangente des Punktes B an die Integralcurve in U; alsdann ist die Senkrechte durch U auf $S\mathfrak{U}$ eine Tangente von $\mathfrak{P}$.

Bei Annahme rechtwinkeliger Coordinaten ergibt sich aus unserer Construction ohneweiters die Richtigkeit der durch d'Ocagne gegebenen Construction, sowie der Formel

$$\mu = \rho \cos^2\Theta \sin\Theta;$$

man hat bloss zu beachten, dass dem Schnittpunkte r der Tangente t mit x auf der Parabel $\mathfrak{F}$ derjenige Punkt R entspricht, in welchem die Tangente an dieselbe parallel zu x ist, bei rechtwinkeligen Coordinaten also der Scheitel R der Parabel $\mathfrak{F}$.

2. Die soeben entwickelte Construction ist somit sehr einfach. Wenn ich hier trotzdem noch bei derselben verweile, so geschieht dies, um einige nicht uninteressante Ausdrucksformen für dieselbe zu entwickeln.

---

[1] Cf. C. Pelz, Die Krümmungshalbmesserconstructionen der Kegelschnitte... (Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, 1879).

Die Parabel $\mathfrak{P}$ berührt T, dann N in K, und ihre Axe ist senkrecht zu y. Dies gestattet, wie aus geläufigen Eigenschaften der Parabel oder aus der Figur eines hier sich ergebenden Brianchon'schen Sechsseits mit Leichtigkeit folgt, unserer Construction folgende Fassung zu geben (Fig. 1):

Wir legen durch den Punkt r, in welchem die Tangente t in b an die Differentialcurve die Axe x schneidet, die Parallele zur y-Axe. Dieselbe möge die Tangente T in B an die Integralcurve im Punkte L treffen. Durch L ziehen wir die Senkrechten auf die Coordinatenaxen x, y bis zum Schnitte L_1, respective L_2 mit der Normalen N; alsdann ist die Strecke L_2L_1 der Grösse und dem Sinne nach gleich dem gesuchten Krümmungshalbmesser BK (I).

Alle Parabeln $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$, welche die Geraden T, N, letztere in K berühren, bilden eine Parabelnschaar $[\mathfrak{P}]$. Es soll nun gezeigt werden, wie man irgend eine Parabel $\mathfrak{P}_1$ dieser Schaar, und mit deren Hilfe dann K selbst, einfach construiren kann.

Von jeder Parabel in $[\mathfrak{P}]$ kennen wir die Tangenten T, N; es wird also, damit diese Parabel benützt werden kann, nöthig sein, von ihr noch zwei weitere Tangenten anzugeben. Als solche wählen wir die eine v senkrecht zu x, die andere v' senkrecht zu y. Diese Tangenten mögen beziehungsweise T in den Punkten V, V' und N in den Punkten $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}'$ schneiden.

Um also irgend eine Parabel $\mathfrak{P}_1$ von $[\mathfrak{P}]$ festzulegen, wird es sich lediglich darum handeln, zu irgend einem Punkte V den entsprechenden V' anzugeben oder umgekehrt. Zu dem Ende beachten wir, dass, wenn $\mathfrak{P}_1$ die Schaar $[\mathfrak{P}]$ durchläuft, die Tangente v einen Parallelstrahlenbüschel und die Tangente v' einen zu diesem projectiven Parallelstrahlenbüschel, einer bekannten Eigenschaft der Kegelschnittschaar zufolge, beschreibt. Demgemäss werden auch die Punktreihen (V), (V'), in welchen diese Büschel die Tangente T schneiden, projectiv sein.

Mit Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}$, für die (LL_1) ja auch eine Tangente ist, entspricht dem Punkte L von (V) der unendlich ferne Punkt von (V'), denn hier fällt v' mit der unendlich fernen Geraden zusammen. Der Punkt B ist für beide Punktreihen sich

selbst entsprechend. Projiciren wir somit — Fig. 2 — die Punktreihe (V) in der Richtung von x auf die Ordinatenlinie (Bb) nach der Punktreihe $(V^\times)$, so sind (V'), $(V^\times)$ perspectiv. Ihr Perspectivcentrum D wollen wir nun ermitteln.

Wir ziehen durch den dem Punkte L in (V) entsprechenden Punkt $L^\times$ in $(V^\times)$ die Parallele T' zu T, so muss D auf T' liegen. $\mathfrak{P}$ ist diejenige Parabel in $[\mathfrak{P}]$, deren Axe senkrecht zu v steht;

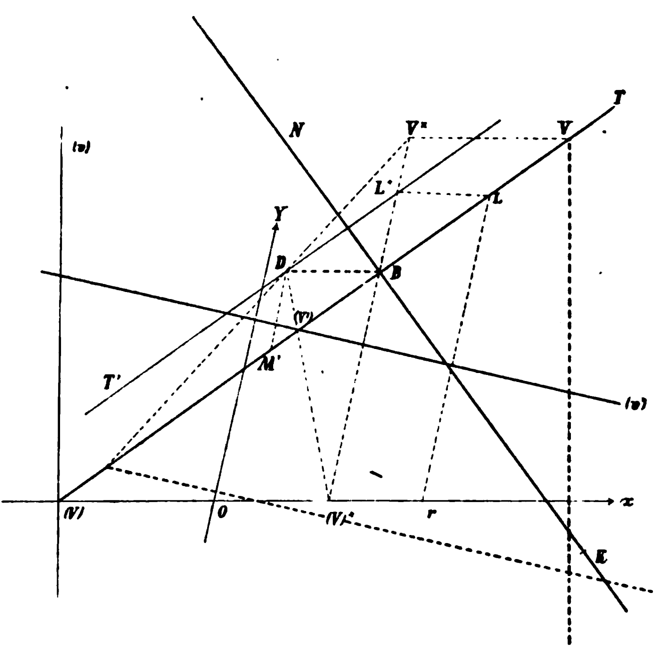


Fig. 2.

wir haben im Satze (I) die auf dieselbe gegründete Construction von K ausgesprochen. Construiren wir jetzt die in $[\mathfrak{P}]$ enthaltene Parabel, deren Axe senkrecht zu x ist, so finden wir in Anwendung des Brianchon'schen Sechsseits, dass für diese Parabel die zu y senkrechte Tangente die Gerade T im Punkte M' derart schneidet, dass $M'B = BL$ wird. Da M und also auch $M^\times$ unendlich fern liegt, so folgt daraus, dass die durch M' parallel zu (Bb) gezogene Gerade gleichfalls durch D geht. Es ist somit D der Schnitt dieser Geraden mit T'.

Daraus geht D in einfacher Weise hervor, denn man hat nur die Strecke BD der Entfernung des Punktes r vom Endpunkte der Abscisse für den Punkt B äquipollent zu machen.

Zieht man nun durch den Punkt D irgend eine Gerade, welche T in V' und (Bb) in $V^{\times}$ schneidet und dann durch $V^{\times}$ die Parallele zu x, bis sie T in V schneidet, so bestimmen T, N, die Senkrechte durch V' zu y und die Senkrechte durch V zu x als Tangenten eine Parabel, welche N in dem gesuchten Krümmungsmittelpunkte K berührt.

Für uns ist aber nur der folgende besondere Fall dieser Ausdrucksform unserer Construction von Interesse.

Errichtet man im Schnittpunkte (V) der Tangente T mit der Abscissenaxe zu dieser die Senkrechte (v) und im Schnittpunkte (V') von T mit der Geraden, welche D mit dem Endpunkt der Abscisse von B verbindet, die Senkrechte (v') zu y, so sind T, N, (v), (v') vier Tangenten einer Parabel, welche N im Punkte K berührt (II).

Weil die Tangenten einer Parabel auf irgend zweien von ihnen ähnliche Punktreihen ausschneiden, so folgt für jede Parabel in [$\mathfrak{P}$] die Proportion

$$\frac{\mathfrak{V}K}{\mathfrak{V}'K} = \frac{VB}{V'B},$$

welche ebenfalls eine Ausdrucksform unserer Construction liefert. Also:

Bringen wir die Geraden (v), (v') des Satzes (II) zum Schnitte in $\mathfrak{V}$, beziehungsweise $\mathfrak{V}'$ mit N, so ergibt sich der gesuchte Krümmungsmittelpunkt K aus der Relation

$$\mathfrak{V}\mathfrak{V}' : \mathfrak{V}K : \mathfrak{V}'K = VV' : VB : V'B. \qquad \text{(III)}$$

3. Schliesst die Tangente der Integralcurve F mit den Axen x, y, beziehungsweise die Winkel α, β ein, ist ω der Winkel dieser Axen, μ wiederum die Subtangente der Differentialcurve f und ρ der fragliche Krümmungsradius, so erhalten wir auf Grund des Satzes (I) leicht den Ausdruck

$$\rho = \frac{\mu \sin^2 \omega}{\sin \alpha \sin^2 \beta}. \qquad (1)$$

Betrachten wir f selbst als Integralcurve, so lässt sich zu ihr nach gleichem Vorgang, etwa auf Grund derselben Constructionseinheit a, die entsprechende Differentialcurve $\mathfrak{f}$ ableiten, so dass jedem Punkte b von f ein Punkt $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{f}$ entspricht.

Die Ordinaten der correspondirenden Punkte B, b, $\mathfrak{b}$ seien beziehungsweise Y, y, η. Alsdann ist — Fig. 1 —

$$\mu = \frac{ay}{\eta},$$

woraus mit Berücksichtigung der Formel (1) sich ergibt

$$\rho = \frac{a^2}{\eta} \cdot \frac{\sin^2 \omega}{\sin^3 \beta}. \tag{1'}$$

Im Dreieck $SO\mathfrak{B}$ ist

$$S\mathfrak{B} = \sqrt{a^2 + y^2 - 2ay \cos \omega}.$$

Somit ist weiter

$$\sin \beta = \frac{a \sin \omega}{\sqrt{a^2 + y^2 - 2ay \cos \omega}}$$

Setzen wir diesen Werth in (1′) ein, so kommt schliesslich

$$\rho = \frac{(a^2 - 2ay \cos \omega + y^2)^{3/2}}{a\eta \sin^2 \omega}. \tag{2}$$

Da nun

$$y = a . \frac{dY}{dx}, \qquad \eta = a^2 \frac{d^2 Y}{da^2},$$

so erhalten wir aus (2) den Ausdruck

$$\rho = \frac{\left[1 - 2 \cos \omega \frac{dY}{dx} + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\sin \omega . \frac{d^2 Y}{dx^2}} \tag{2'}$$

und aus diesem den specielleren Ausdruck für ρ in rechtwinkeligen Coordinaten, wenn wir $\omega = \frac{\pi}{2}$ setzen.

Wir haben hier somit die bekannte Formel für den Krümmungsradius einer Curve auf einem elementar geometrischen Wege aus unserer Construction erhalten; umgekehrt bietet die Einführung die Differentialcurven eine allgemeine und geeignete Form für die Construction des Ausdruckes (2′) für ρ.

II. Integralcurven in Polarcoordinaten und infinitesimale Betrachtungen an denselben.

4. Im Vorangehenden haben wir eine Integralcurve f aus einer gegebenen Differentialcurve f' oder umgekehrt durch Vermittelung von Parallelcoordinaten abgeleitet. Eine Verallgemeinerung der einschlägigen Betrachtungen liegt sehr nahe; man wird das Parallelcoordinatensystem einfach durch irgend ein anderes Coordinatensystem ersetzen, um zu neuen Arten von Integralcurven zu gelangen. Dass man bis jetzt nur die früher erwähnten Integralcurven in der angeführten Weise berücksichtigt hat, liegt in deren eminenten praktischen Verwendbarkeit in den Ingenieurwissenschaften, während andere Integralcurven wohl kaum geeignet sind, eine grosse Verwerthung in dieser Richtung zu erlangen. Für unsere speciellen Betrachtungen dürften sie aber ein gewisses Interesse beanspruchen.

Ist

$$r' = f(\varphi)$$

die Gleichung irgend einer Curve f' in Polcoordinaten, für O als Pol der Coordinatensystems, so kann man zunächst aus dieser Curve eine Curve f ableiten, deren Gleichung in demselben Coordinatensystem

$$r = \int f(\varphi)\,d\varphi + c$$

ist, in der c eine beliebige Constante bedeutet, so dass also umgekehrt die Curve f' aus f als Differentialcurve durch die Beziehung

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} \tag{1}$$

abgeleitet wird.

Nun drückt die Gleichung (1) die Länge der Subnormale der Curve f für irgend einen Punkt derselben aus, wie sonst auch elementargeometrisch dargethan wird. Wenn wir somit f'

in einer um O um einen rechten Winkel im entsprechenden Sinne gedrehten Lage darstellen, so haben wir das Ergebniss:

Beschreibt ein Punkt P eine Curve f, so beschreibt der Endpunkt P' der in Bezug auf irgend einen festen Punkt O als Pol genommenen Subnormale der Curve die polare Differentialcurve f' von f gleichfalls in Bezug auf O als Pol.

In dieser Lage wollen wir auch die Curven f, f' stets betrachten.

Aus der Unbestimmtheit der Constante c folgt, dass, wenn P' die Curve f' beschreibt, jeder Punkt $P, P_1, P_2, \ldots$ auf (OP) eine Integralcurve beschreibt. Wir sagen, dass diese Punkte dem Punkte P' correspondiren und untereinander homolog sind. Ebenso werden die Tangenten u. s. w. dieser Curven in homologen Punkten als homolog bezeichnet. Daher der Satz:

Die homologen Normalen sämmtlicher polaren Integralcurven, welche aus einer Curve f' abgeleitet werden können, schneiden sich im correspondirenden Punkte ihrer gemeinschaftlichen Differentialcurve f'.

Aus diesem Satze entnehmen wir sofort auch die Eigenschaft:

Wenn sich Curven in irgend einem Punkte P' berühren, dann findet im correspondirenden Punkte P zwischen den ihnen entsprechenden Integralcurven Osculation statt.

Man wird desshalb in der Lage sein, den Krümmungsmittelpunkt von f für den Punkt P zu construiren, wenn die Tangente t' an f' in P' gegeben ist und umgekehrt.[1]

Mit dieser Aufgabe wollen wir uns jetzt beschäftigen.

5. Behalten wir die soeben gebrauchten Bezeichnungen bei und es sei — Fig. 3 — weiter $PP' = n$ die Normale, $P\mathfrak{P}' = t$ die Tangente, K der Krümmungsmittelpunkt, $PK = \rho$ der Krümmungsradius, $\sphericalangle OP\mathfrak{P}' = \tau$ der Winkel der Tangente

[1] M. d'Ocagne Cours de géom. descriptive et de géom. infinitésimale (1896), Art. 267; die dort gegebene Lösung lässt sich leicht auch aus unserer Construction ableiten. Cf. Construction géometrique du centre de courbure... von Husquin de Rhéville in den »Nouv. Ann. de mathématiques«, 1891, p. 410 u. f.

mit dem Leitstrahl der Curve f für den Punkt P; t' sei die Tangente von f' in P'.

Handelt sich's zuerst darum, K zu suchen, wenn t' gegeben ist, so können wir, wie leicht einzusehen ist, behufs dieser Construction die Curven f, f' durch die Tangenten t, t' selbst ersetzen. Nachdem nun die Strecke PP' von O unter rechtem Winkel gesehen wird, so umhüllt die Gerade (PP') einen Kegelschnitt k, wenn sich P auf t, P' auf t' bewegt. Dieser Kegel-

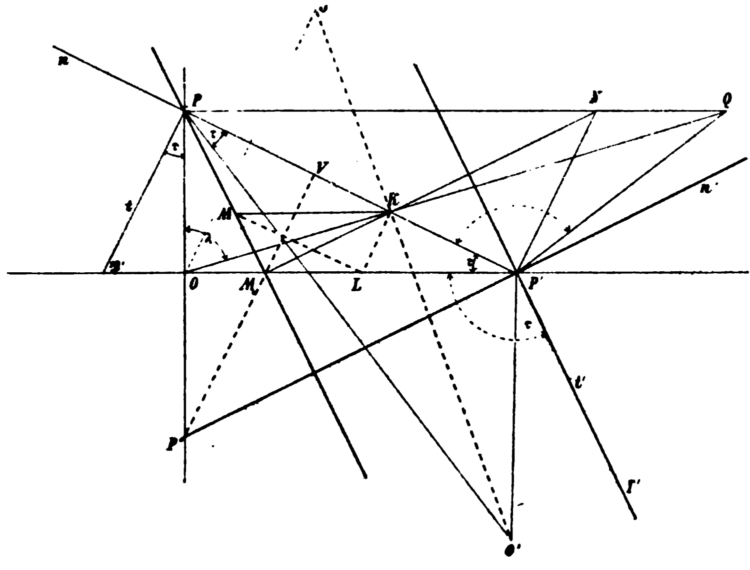


Fig. 3.

schnitt hat einen Brennpunkt in O und berührt die Geraden t, t' (PP'), letztere im Punkte K. Es ist nun klar, dass dieser Kegelschnitt auch die umgekehrte Aufgabe löst, nämlich t' zu finden, wenn K gegeben ist.

Um also etwa t' zu erhalten, hat man folgende elementare Aufgabe zu lösen.

Der Kegelschnitt k ist durch den Brennpunkt O, die Tangenten t, n und den Berührungspunkt K der letzteren gegeben; es ist die durch P' an k gehende zweite Tangente t' zu ermitteln.

Hiezu wollen wir den Satz heranziehen: Verbindet man den Schnittpunkt zweier Tangenten an einen Kegelschnitt mit

den Brennpunkten desselben, so bildet die eine Tangente mit der einen Verbindungslinie denselben Winkel, wie die andere Verbindungslinie mit der anderen Tangente.

Dieser Satz gestattet zunächst, den zweiten Brennpunkt O' von k zu finden. Überträgt man den Winkel τ nach $P'PO'$, so liegt diesem Satze zufolge O' auf (PO'). Verbindet man den zu O in Bezug auf (PP') symmetrisch gelegenen Punkt J mit dem Punkte K, so liegt O' auch auf der Geraden (JK); somit ergibt sich O' als Schnitt der besagten Geraden. Errichtet man in P die Senkrechte (PQ) zum Leitstrahl (OP) und schneidet dieselbe in Q mit (OK), so ist wegen $\sphericalangle QPP' = \tau$ der Schnittpunkt Q symmetrisch zu O' bezüglich (PP').

Zieht man durch P' die Gerade t' derart, dass

$$\sphericalangle (t', P'O') = \tau,$$

so gestaltet sich schliesslich die Construction von t' folgendermassen:

In P errichtet man die Senkrechte zu (OP) und bringt sie in Q mit (OK) zum Schnitt; hierauf zieht man durch P' die Gerade $P'T'$ so, dass $\sphericalangle OP'T' = \sphericalangle QP'P$. Alsdann ist $t' \equiv P'T'$ die gesuchte Tangente von f'.

6. Weil wir späterhin häufiger die Normale n' der Curve f' in P' benützen werden als die Tangente t' selbst, so können wir uns hier damit begnügen, eine Gerade zu suchen, die parallel zu t' ist, wenn man eine solche Gerade etwa noch durch eine bequemere Construction zu ermitteln im Stande ist. Dies ist aber der Fall.

Errichtet man in K die Senkrechte zu n bis zum Schnitte L mit (OP') und zieht man durch L die Parallele zu n, durch K die Parallele zu (OP'), so schneiden sich beide in M und die Gerade (PM) gibt bereits die Richtung von t'; also die durch P' zu ihr gefällte Senkrechte ist die Normale n' von f'.

Um dies zu erkennen, setzen wir $\sphericalangle POK = \lambda$, dann geht aus dem Dreiecke POK die Proportion

$$r : \rho = \cos(\lambda - \tau) : \sin\lambda$$

hervor.

Aus dem Dreiecke KOP' ergibt sich die Proportion

$$KP' : r' = \cos\lambda : \cos(\lambda - \tau).$$

Aus beiden Proportionen kommt

$$KP' : r' = \rho : r \operatorname{tg}\lambda,$$

woraus, da

$$\triangle LKP' \sim POP',$$

folgt

$$LP' : PP' = \rho : PQ$$

oder

$$MK : PK = PP' : PQ.$$

Somit sind die Dreiecke PMK, $QP'P$ ähnlich, demgemäss $\measuredangle KMP = \measuredangle PP'Q$ und in Folge dessen $\measuredangle OP'T' = KMP$, so dass thatsächlich $(MP) \| t'$ ist.

Errichtet man in P' die Senkrechte zu n, welche (PQ) in N schneiden möge, so liegen die Dreiecke MKL, PNP' ähnlich für den Schnitt von (MP) mit (OP') als Ähnlichkeitscentrum. Daraus entnehmen wir:

Die Senkrechten durch P zu r und durch P' zu n schneiden sich in einem Punkte N, dessen Verbindungsgerade mit K die Gerade (OP') bereits in einem Punkte M_0 von (PM) trifft.

Die Normale n' an f' in P' schneide (OP) im Punkte P''; es ist klar, dass P'' die Differentialcurve f'' von f', also die zweite Differentialcurve von f beschreibt. Wir setzen demgemäss $OP'' = r''$ und es ist

$$r'' = \frac{dr'}{d\varphi} = \frac{d^2 r}{d\varphi^2}.$$

Die eben entwickelten Constructionen des Punktes P'' aus K sind alle umkehrbar. Um also K zu construiren, wenn P'' oder t' gegeben ist, wird man beispielsweise den Punkt N als Schnitt der in P zu r und in P' zu n errichteten Senkrechten und dann den Schnitt M_0 der von P auf n' gefällten Senkrechten mit r' ermitteln; alsdann schneidet die Gerade (M_0N) die Normale n im gesuchten Punkte K.

7. Aus der entwickelten Construction ergeben sich sofort die Proportionen

$$(M_0O+r'):PN = (n-\rho):\rho,$$
$$PN:n = n:r',$$

wobei schon auf den Richtungssinn der Strecken Bedacht genommen worden ist. Aus diesen Proportionen folgt weiter

$$(M_0O+r'):n = n(n-\rho):r'\rho.$$

Die ähnlichen Dreiecke PM_0O, $P'P''O$ liefern

$$OP'':OM_0 = r':r$$

oder

$$M_0O = -\frac{rr''}{r'}.$$

Setzen wir diesen Werth für M_0O in die vorletzte Proportion ein, so kommt nach einfacher Umformung

$$\rho = \frac{n^3}{n^2+r'^2-rr''}$$

oder, da $n^2 = r^2+r'^2$,

$$\rho = \frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{r^2+2r'^2-rr''}. \tag{2}$$

Ersetzt man hierin r' durch $\frac{dr}{d\varphi}$, r'' durch $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$, so gewinnen wir dadurch auf unserem constructiven Wege die bekannte Formel

$$\rho = \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}. \tag{2'}$$

Aus $\rho = n^3:(n^2+r'^2-rr'')$ folgt

$$\rho\sin^3\tau = \frac{r^3}{r^2+2r'^2-rr''}.$$

Dies gibt zur Berechnung von r'' entweder die Gleichung

$$-r''+r+2r\cot^2\tau = \frac{r^2}{\rho\sin^3\tau}$$

oder die Gleichung

$$r'' + r = \frac{r}{\rho \sin^3 \tau}(2\rho \sin \tau - r) \tag{3}$$

oder schliesslich die Gleichung

$$r'' + r = \frac{2r}{\sin^2 \tau} - \frac{r^2}{\rho \sin^3 \tau}. \tag{4}$$

8. Die in diesem Abschnitt erläuterten Constructionen lassen sich noch etwas vereinfachen und mit Constructionen, die sich auf ein bewegliches, unveränderliches System in der Ebene beziehen, in Einklang bringen.

Für unsere Zwecke handelt es sich hauptsächlich um den Punkt P'', wenn K vorliegt. Dieser Punkt kann auf Grund der aus dem Dreieck $PP'N$ abgeleiteten Construction direct ermittelt werden. M_0 ist nämlich — Fig. 3 — der Höhenschnittpunkt des Dreieckes $PP'P''$, woraus folgt:

Führt man durch P die Senkrechte zu r, durch P' zu n und verbindet den Schnitt N dieser Senkrechten mit K, so erhält man auf r' den Punkt M_0; die Senkrechte von M_0 auf n trifft r im Punkte P''.

Wenn nun diese Senkrechte ($P''M_0$) die Normale n in V schneidet, so liegen die Dreiecke M_0VP', $NP'P$ ähnlich; K ist das Ähnlichkeitscentrum, KP', KP und KV, KP' sind Paare sich entsprechender Strecken; somit ist

$$KP' : KP = KV : KP' \tag{5}$$

oder

$$\overline{KP'}^2 = KV.KP. \tag{6}$$

Die letztangeführte Construction lässt sich auch folgendermassen abändern — Fig. 4 —:

Man bringt (OK) mit der durch P' zu r parallel gezogenen Geraden in E zum Schnitt; die Senkrechte durch E zu (OP) liefert auf n den Punkt V; die Senkrechte durch V zu n trifft r in P''.

Die Richtigkeit dieser Construction erhellt daraus, dass K wiederum das Ähnlichkeitscentrum der ähnlich liegenden Dreiecke POP', $P'EV$ ist, aus denen wieder die Proportion (5) hervorgeht.

Verlängert man (EV) bis zum Schnitt V_0 mit (OP), so ist $V_0 E = OP'$, also

$$V_0 E : PN = \cos^2 \tau$$

und da auch

$$P'' V_0 : P'' P = \cos^2 \tau,$$

so geht die Gerade (NE) durch P''.

Bringt man somit die zu (OP) parallele Gerade $(P'E)$ mit (OK) in E zum Schnitte, verbindet E mit dem Schnittpunkte N der Senkrechten (PN), $(P'N)$ zu (OP) respective (PP'), so trifft die Verbindungsgerade (NE) den Leitstrahl (OP) im Punkte P''.

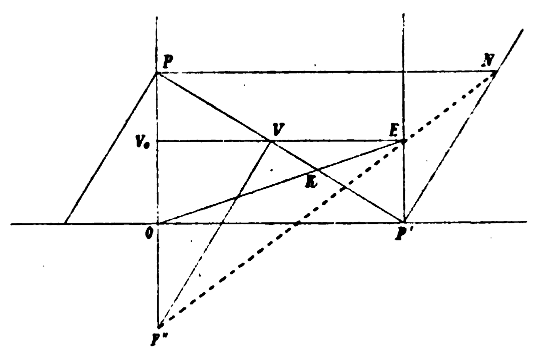


Fig. 4.

Die hier ausgesprochenen Constructionen sind alle umkehrbar; sie lassen also auch K finden, wenn P'' gegeben ist.

Dieselben hängen unmittelbar mit Constructionen zusammen, denen wir bei der Bewegung eines ebenen unveränderlichen Systems begegnen. Wir können auch thatsächlich zum Zwecke der Ableitung des Punktes P'' aus K oder umgekehrt annehmen, dass sich auf (OP) eine unveränderliche Punktreihe bewegt, so zwar, dass ihr Träger r beständig durch O geht und dass P eine Curve beschreibt, deren momentaner Krümmungsmittelpunkt in K liegt. Alsdann ist P' momentaner Drehungspol, in dem sich auch in der That die homologen Normalen sämmtlicher der Curve f' gehöriger Integralcurven schneiden. $(P'P'')$ ist die Normale in P' an die Polcurve und in der, den Bewegungsmoment charakterisirenden quadratischen Verwandtschaft bilden P, K ein Paar entsprechender Punkte.

Wir wollen nun auf Grund dieser Verwandtschaft auf dem Strahle (PP') den Wendepunkt der umgekehrten Bewegung construiren. Wenden wir hiefür eine bekannte, von Grübler herrührende Construction geeignet an, so gelangen wir zu der im vorletzten Satz ausgesprochenen Construction zunächst des mit V bezeichneten Punktes als des fraglichen Wendepols. Nun enthält der zugehörige Wendekreis den Punkt O, weil (OP) beständig durch O geht, weiter den Punkt P' und berührt die Tangente t' in P' an die Polcurve; somit ist $P'P''$ ein Durchmesser desselben; es muss daher $\sphericalangle P'VP''$ ein rechter Winkel sein. Diese Überlegung liefert also genau die vollständige Construction des erwähnten Satzes, sowie die aus der Geometrie der Bewegung gleichfalls bekannte Relation (6) von Neuem.[1]

Auf die Bewegung des unveränderlichen ebenen Systems führt uns schon die Definitionsgleichung

$$r = \int f(\varphi)\,d\varphi + c$$

selbst direct und zu unseren Constructionen hätten wir auch dadurch gelangen können, dass wir behufs Ermittelung von K die Differentialcurve f' durch einen Kreis k' ersetzen dürfen, welcher sie in P' berührt und durch den Pol O geht. Man sieht sofort ein, wenn wir den Kreis k' als Integralcurve betrachten, dass seine Differentialcurve mit ihm identisch ist und dass somit sämmtliche Integralcurven von k' Pascal'sche Schneckenlinien sein werden.

Aus unserer kinematisch geometrischen Betrachtung erhellt unmittelbar, dass die homologen Krümmungsmittelpunkte sämmtlicher polaren Integralcurven, welche einer Differentialcurve entsprechen, auf einem Kegelschnitte u liegen, welcher den über $P'P''$ als Durchmesser beschriebenen Kreis v in P' osculirt, durch den Mittelpunkt desselben, sowie durch den Mittelpunkt der Strecke OP' und endlich durch die Doppelpunkte der Involution, in welcher (OP) von der Rechtwinkelinvolution um P' geschnitten wird, geht.

---

[1] Die Construction von Grübler wurde in Schlömilch's Zeitschrift für Math. und Phys., Bd. 29, S. 310, veröffentlicht; dieselbe findet sich auch in Schönflies' Geometrie der Bewegung, S. 31, Fig. 12.

Ist nun $P'P''$ gegeben, so ist der Kegelschnitt u desshalb sofort bestimmt. Denn u und v liegen centrisch collinear für P' als Centrum der Collineation. Nachdem für diese Lage den absoluten Punkten von v die Schnittpunkte auf OP ihrer Verbindungsstrahlen mit P' entsprechen, so ist (OP) die Gegenaxe im System des Kegelschnittes u, und die Parallele durch P' zu (OP) ist somit die Axe unserer Collineation. In dieser entspricht beispielsweise der im System des Kreises v gelegenen Geraden (VE) die Gerade (OE); und da die erste den Punkt V von v enthält, so geht die zweite durch den Punkt K von u. Durch die centrische Collineation wird also neuerdings die Grübler'sche Construction erwiesen. Umgekehrt findet man den Kegelschnitt u aus dem Kreis v durch die Grübler'sche Construction. Da wir diese zuerst unabhängig von kinematisch geometrischen Betrachtungen erhalten haben, so sehen wir nun auch, wie man ebenfalls, ohne derartige Betrachtungen zu Rathe ziehen zu müssen, zum Kegelschnitt u selbst hätte gelangen können.

III. Analoge Betrachtungen für inverse Integralcurven.

9. Die Differentialcurve f' des vorigen Abschnittes für irgend eine gegebene Curve F wurde von den Endpunkten der Subnormalen dieser Curve in Bezug auf einen als Pol angenommenen Punkt O beschrieben. Ziehen wir nun die Curve $\mathfrak{f}'$ in Betracht, die der Endpunkt $\mathfrak{P}'$ der Subtangente in Bezug auf O beschreibt, wenn ein Punkt P die gegebene Curve F durchläuft. Ist $\mathfrak{r}' = O\mathfrak{P}'$ die Länge des Leitstrahles für irgend einen Punkt von $\mathfrak{f}'$, so folgt aus dem rechtwinkeligen Dreiecke $\mathfrak{P}'PP'$ die Beziehung

$$\mathfrak{r}'r' = -r^2$$

oder

$$\frac{1}{\mathfrak{r}'} = -\frac{r'}{r^2},$$

welche Relation sich auch schreiben lässt

$$\frac{1}{\mathfrak{r}'} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}. \qquad (1)$$

Dies ist die Gleichung, durch welche die Curve $\mathfrak{f}'$ aus F abgeleitet wird. Wir wollen desshalb $\mathfrak{f}'$ die inverse Differentialcurve von F und umgekehrt die Curve F eine inverse Integralcurve von $\mathfrak{f}'$ nennen.

Wäre also

$$\mathfrak{r}' = f(\varphi)$$

die Gleichung von $\mathfrak{f}'$, so würde die Gleichung der sämmtlichen zugehörigen inversen Integralcurven lauten:

$$\frac{1}{r} = \int \frac{d\varphi}{f(\varphi)} + c. \tag{2}$$

Daraus folgt zunächst sogleich:

Die homologen Tangenten sämmtlicher inverser Integralcurven einer gegebenen Curve schneiden sich in dem correspondirenden Punkte derselben.

Handelt es sich wiederum um die Ableitung der Tangente $\mathfrak{t}'$ von $\mathfrak{f}'$, wenn der Krümmungsmittelpunkt K von F in P gegeben ist oder umgekehrt, so kann man F durch einen Kegelschnitt k ersetzt denken, welcher F in P osculirt und in O einen Brennpunkt hat; alsdann ist $\mathfrak{t}'$ die dem Brennpunkte O zugehörige Leitgerade dieses Kegelschnittes. Die Senkrechte a zu $\mathfrak{t}'$ durch O ist die Hauptaxe von k. Um also K zu construiren, wenn $\mathfrak{t}'$ gegeben ist, führt man — Fig. 5 — vom Schnittpunkte M der Axe a mit der Normalen n von F in P die Senkrechte zu n, bis sie (OP) in L trifft; die Senkrechte in L zum Leitstrahl (OP) bestimmt dann auf n den fraglichen Punkt K. Die Umkehrung dieser Construction liefert $\mathfrak{t}'$, wenn K gegeben ist.

Die Tangente $\mathfrak{t}'$ möge (OP) im Punkte $\mathfrak{P}''$ schneiden; alsdann beschreibt $\mathfrak{P}''$ die zweite inverse Differentialcurve $\mathfrak{f}''$ von F; $O\mathfrak{P}'' = \mathfrak{r}''$ ist der Leitstrahl von $\mathfrak{P}''$ u. s. f.

10. Um eine metrische Relation für die gegebene Construction zu erhalten, bezeichnen wir noch mit U den Fusspunkt der Senkrechten von M auf (OP), so ist

$$UM = UP \cot \tau = \frac{r}{\mathfrak{r}'} . UP \tag{3}$$

und

$$UP = \rho \sin^3 \tau.$$

Da

$$\triangle O\mathfrak{P}''\mathfrak{P}' \backsim \triangle UMO,$$

so folgt daraus die Proportion

$$\mathfrak{r}' : \mathfrak{r}'' = (OP+PU) : UM,$$

wenn man auch schon auf das Vorzeichen der Strecken ent-

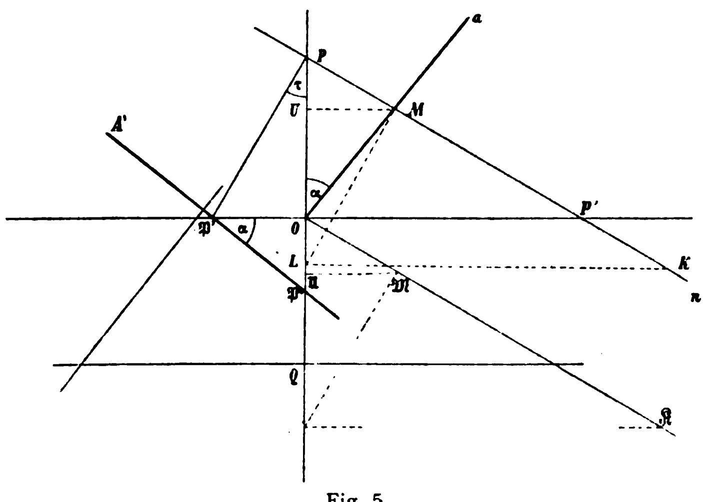


Fig. 5.

sprechend Rücksicht nimmt und daran festhält, dass die positive Richtung von $\mathfrak{r}''$ entgegengesetzt der von r ist.

Unsere Proportion gibt also

$$\mathfrak{r}' : \mathfrak{r}'' = (r - \rho \sin^3 \tau) : \frac{r}{\mathfrak{r}'} \rho \sin^3 \tau,$$

woraus durch einfache Umformung die Relation hervorgeht

$$\frac{1}{\mathfrak{r}''} = \frac{1}{\rho \sin^3 \tau} - \frac{1}{r} \tag{4}$$

oder

$$\frac{1}{\rho \sin^3 \tau} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\mathfrak{r}''}. \tag{4'}$$

Nehmen wir dabei die Richtung von O nach P stets als positiv an, so ist $\rho \sin \tau$ und also auch $\rho \sin^3 \tau$ gleichfalls als

eine positive Grösse anzusehen, wenn K mit O auf derselben Seite von t liegt; andernfalls ist $\rho \sin^3 \tau$ negativ, wie aus unserer Ableitung hervorgeht. Diese Bemerkung gilt offenbar auch bezüglich der Formeln (3) und (4) des vorigen Abschnittes und es soll auch für die Folge ihr Rechnung getragen werden.

Herr Prof. Mannheim beschäftigte sich in eingehender Weise und wiederholt, wenn auch aus anderem Anlasse, mit der vorliegenden Construction.[1] Er stellt sich nämlich folgende Aufgabe.

Ein rechtwinkeliges Dreieck aoa', welches beweglich und veränderlich ist, habe den Scheitel seines rechten Winkels im festen Punkte o, seine Hypothenuse berühre im Eckpunkte a eine Curve (a); es ist die Tangente in a' an die durch diesen Punkt beschriebene Curve (a') zu construiren.

Hierin gelangt er in anderer Weise auch zu einer Formel, welche sich von (4) nur in den Vorzeichen unterscheidet. Wir hätten uns hier auf die Formel und Construction, wie sie Herr A. Mannheim entwickelt hat, wohl auch nur berufen können; der Vollständigkeit unserer Entwickelung halber ist es jedoch nicht geschehen. Es muss hier bemerkt werden, dass die im Vorliegenden gegebene Ableitung sich übrigens aus den Betrachtungen des soeben citirten Werkes auf S. 488 und 493 sofort ergibt und dass, wenn die Formel (4) für die Construction verwerthet werden soll, auf das Vorzeichen der einzelnen Glieder mit Vorsicht Bedacht genommen werden muss.

Da nun

$$\sin \tau = \frac{\mathfrak{r}'}{\sqrt{r^2+\mathfrak{r}'^2}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\mathfrak{r}'^2}}},$$

so folgt aus (4'), dass

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\mathfrak{r}''}\right)\rho = \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\mathfrak{r}'^2}\right)^{3/2} : \frac{1}{r^3}. \tag{5}$$

Setzen wir in der Polargleichung einer Curve $r = \frac{1}{u}$, so ist nach (1)

[1] Principes et développements de géometrie cinématique. Paris (Gauthier-Villars), 1894, p. 53 und 484.

$$\frac{1}{\mathfrak{r}'} = \frac{du}{d\varphi},$$

und analog ist

$$\frac{1}{\mathfrak{r}''} = \frac{d^2u}{d\varphi^2}.$$

Mit Rücksicht auf diese Transformation geht aus (5) folgender bekannter Werth für ρ hervor

$$\rho = \frac{\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{u^3\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)}. \tag{6}$$

Macht man weiter — Fig. 5 — die Strecke $O\mathfrak{K}$ äquipollent der Strecke PK und leitet aus $\mathfrak{K}$ den Punkt $\mathfrak{U}$ auf (OP) nach gleichem Vorgange, wie U aus K ermittelt worden ist, ab, so ist

$$O\mathfrak{U} = -\rho \sin^3\tau.$$

Nehmen wir auf der Geraden (OP) die Richtung von O nach P als positiv an, so nimmt dann die Gleichung (4') folgende Form an

$$-\frac{1}{O\mathfrak{U}} = \frac{1}{OP} - \frac{1}{O\mathfrak{P}''}$$

oder

$$\frac{2}{2.O\mathfrak{P}''} = \frac{1}{OP} + \frac{1}{O\mathfrak{U}}. \tag{7}$$

Diese Gleichung besagt, dass, wenn man $OQ = 2.O\mathfrak{P}''$ macht, die Punkte $P, \mathfrak{U}$ harmonisch getrennt sind von den Punkten O, Q.

Verlegt man nun die homologen Krümmungshalbmesser $PK, \ldots$ sämmtlicher Integralcurven, welche der Differentialcurve $\mathfrak{f}'$ correspondiren, äquipollent nach $O\mathfrak{K}, \ldots$, so wird dadurch eine Transformation vorgenommen, in der zunächst den homologen Punkten M, welche die Gerade a beschreiben, Punkte $\mathfrak{M}$ entsprechen, welche eine Hyperbel $\mathfrak{a}$ beschreiben, wie sich aus der hier auftretenden projectiven Beziehung des

Strahlenbüschels um O mit dem Büschel der zu $(O\mathfrak{P}')$ parallelen Strahlen leicht ergibt. Diese Hyperbel wird in O von (OP) berührt, hat die durch Q zu $(O\mathfrak{P}')$ gelegte Parallele zu einer Asymptote, während die zweite senkrecht zu $(\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'')$ ist.

Durch die erwähnte Transformation entspricht weiter der durch K beschriebenen Curve k eine Curve $\mathfrak{k}$, welche durch $\mathfrak{K}$ beschrieben wird, wenn P den Leitstrahl (OP) durchläuft. Da die Senkrechte in $\mathfrak{M}$ zu $(O\mathfrak{M})$ eine unicursale Curve dritter Classe einhüllt, wenn $\mathfrak{M}$ die Hyperbel $\mathfrak{a}$ beschreibt, so folgt daraus, dass die Curve $\mathfrak{k}$ durch zwei Büschel von Strahlen, von denen der eine durch O geht, während die Strahlen des anderen zu $(O\mathfrak{P}')$ parallel sind, erzeugt wird, die in einer (1, 3) deutigen Beziehung stehen.

Somit ist die transformirte $\mathfrak{k}$ der Krümmungsmittelpunktscurve k eine Curve 4. Ordnung.

Die Curve k selbst ist eine Curve 5. Ordnung. Sie wird erzeugt durch einen zu $(O\mathfrak{P}')$ parallelen Strahlenbüschel und den Tangentenbüschel einer Parabel, welche $\mathfrak{P}'$ zum Brennpunkt und (OP) zur Scheiteltangente hat. Beide sind nämlich gleichfalls in einer (3, 1) deutigen Beziehung und es entsteht durch sie auf irgend einer Geraden, wie leicht einzusehen, eine (3, 2) deutige Beziehung ihrer Schnittpunkte.

Bezeichnen wir den Winkel, welchen a mit OP einschliesst, mit α, so lässt sich aus der Beziehung

$$MP : KP = \sin^2\tau$$

leicht der Ausdruck finden

$$\mathfrak{r}' \cot^3\tau = x \cot\alpha - y,$$

worin x, y die Coordinaten des Punktes K in Bezug auf $(\mathfrak{P}'O)$ und (OP) als Coordinatenaxen bedeuten.

Aus den ähnlichen Dreiecken $\mathfrak{P}'OP$, KLP folgt die Gleichung

$$\mathfrak{r}' \cot^2\tau - y \cot\tau = x.$$

Setzen wir den aus derselben gewonnenen Ausdruck für $\mathfrak{r}' \cot^2\tau$ in die vorige Gleichung ein, so kommt

$$y \cot^2\tau + x \cot\tau = x \cot\alpha - y.$$

Lösen wir nun die letzten zwei Gleichungen nach $\cot^2 \tau$ und $\cot \tau$ auf, so erhalten wir

$$\cot^2 \tau = \frac{x^2 + xy \cot \alpha - y^2}{\mathfrak{r}' x + y^2},$$

$$\cot \tau = \frac{\mathfrak{r}' x \cot \alpha - \mathfrak{r}' y - xy}{\mathfrak{r}' x + y^2},$$

woraus schliesslich die Gleichung unserer Curve k in folgender Form hervorgeht

$$(\mathfrak{r}' x + y^2)^2 (x \cot \alpha - y) = \mathfrak{r}' (x^2 - y^2 + xy \cot \alpha)(\mathfrak{r}' x \cot \alpha - \mathfrak{r}' y - xy). \quad (8)$$

11. Setzen wir

$$R = \frac{a^2}{r},$$

wobei a eine Constante bedeutet, so folgt aus der Gleichung (1)

$$R' = \frac{a^2}{\mathfrak{r}'}$$

und allgemein

$$R^{(\mu)} = \frac{a^2}{\mathfrak{r}^{(\mu)}},$$

worin die Bedeutung von $R', \ldots R^{(\mu)}, \ldots$ aus Früherem evident ist. Dadurch gewinnen wir den Satz:

Bildet man eine Curve f mit ihren in Bezug auf einen gegebenen Punkt O als Pol construirten Differentialcurven $f', f'', \ldots$ nach F, respective $\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \ldots$ so invers ab, dass O gleich schon Mittelpunkt der Inversion ist, so sind die Curven $\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \ldots$ die aufeinanderfolgenden inversen Differentialcurven von F, und umgekehrt, bildet man eine Curve F mit ihren inversen Differentialcurven $\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \ldots$ in gleicher Weise nach f, respective $f', f'', \ldots$ ab, so sind $f', f'' \ldots$ die aufeinanderfolgenden Differentialcurven von f in Bezug auf O als Pol.

Es seien $P, \mathfrak{P}$ zwei entsprechende, also auf demselben Leitstrahl (OP) gelegene Punkte der inversen Curven f, F. Jeder Kreis, der durch $P, \mathfrak{P}$ zugleich geht, entspricht in der Inversion

sich selbst und es werden somit die Curven f, F in den entsprechenden Punkten $P, \mathfrak{P}$ von einem sich selbst entsprechenden Kreise berührt. Demgemäss ist die Tangente $\mathfrak{t}$, sowie die Normale $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{P}$ an F parallel zu der Geraden, welche symmetrisch liegt in Bezug auf (OP) zu der Tangente t, beziehungsweise Normale n in P an f. Ebenso ist klar, dass dem Krümmungskreise k von f in P invers der Krümmungskreis $\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{P}$ correspondirt. Die Gerade (OK), welche den Mittelpunkt K von k mit O verbindet, schneidet somit $\mathfrak{n}$ im Mittelpunkte $\mathfrak{K}$ von F.

Ist E der zweite Schnittpunkt von (OP) mit k, so ist $\triangle OKE \backsim \triangle O\mathfrak{K}\mathfrak{P}$, woraus folgt, wenn $O\mathfrak{P} = \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{K} = \rho'$ gesetzt wird,

$$\rho' = \frac{\rho \mathfrak{r}}{r - 2\rho \sin\tau}$$

oder

$$\rho' = \frac{a^2 \rho}{r(r - 2\rho \sin\tau)} \tag{9'}$$

und analog

$$\rho = \frac{a^2 \rho'}{r'(r' - 2\rho' \sin\tau')}. \tag{9''}$$

Diese so gewonnenen zwei Gleichungen lassen sich leicht auf die gemeinschaftliche Form

$$\frac{r}{\rho} - \frac{\mathfrak{r}}{\rho'} = \sin\tau - \sin\tau' \tag{9}$$

bringen, worin

$$\tau + \tau' = 0. \tag{10}$$

Durch die Beziehung

$$r\mathfrak{r} = r'\mathfrak{r}' = r''\mathfrak{r}'' = \ldots = a^2$$

und durch die Ausdrücke (9) und (10) geht auch die Gleichung (4) des vorhergehenden Abschnittes sofort über in die Geichung (4') dieses Abschnittes und umgekehrt.

12. Wenn $f, f^\times$ zwei inverse Curven für O als Mittelpunkt der Inversion und $P, P^\times$ zwei entsprechende Punkte derselben sind, so ist zunächst das von Leitstrahl, Tangente und Subtangente der Curve f für den Punkt P gebildete Dreieck ähnlich

dem Dreiecke, welches von Subnormale, Leitstrahl und Tangente der Curve $f^\times$ für $P^\times$ gebildet wird, woraus sofort die Richtigkeit der Gleichung (1) sich elementar geometrisch ergibt. Von dieser Ableitung hätten wir hier naturgemäss auch ausgehen können.

Die Construction der Tangente $\mathfrak{t}'$ in $\mathfrak{P}'$ an die inverse Differentialcurve $\mathfrak{f}'$ von f, wenn der Krümmungsmittelpunkt K' dieser Curve gegeben ist oder umgekehrt, lässt sich auf Grund unserer Inversion gleichfalls gewinnen.

Wir betrachten zu dem Behufe — Fig. 6 — eine Inversion, für welche der Halbmesser des Grundkreises gleich ist

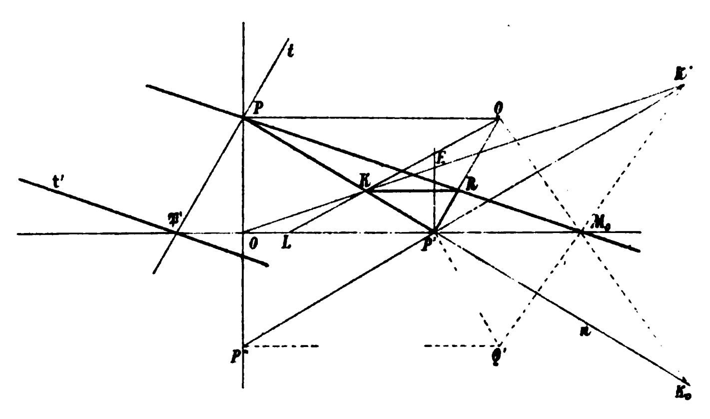


Fig. 6.

$OP.\sqrt{-1}$. Es sei dann wieder $f^\times$ die inverse Curve von f: f' sei die Differentialcurve von f in Bezug auf O als Pol. Unser letzter Satz besagt alsdann, dass auch f' und $\mathfrak{f}'$ invers sind, dass daher die Tangente $\mathfrak{t}'$ in $\mathfrak{P}'$ an $\mathfrak{f}'$ und die Tangente t' im entsprechenden Punkte P' von f' an diese Curve in Bezug auf (OP) antiparallel sind. Macht man $OP^\times$ äquipollent zu PO. so ist $P^\times$ der dem Punkte P entsprechende Punkt unserer Inversion, während die Punkte $\mathfrak{P}'$, P', in denen die Tangente t und Normale n von f in P die Senkrechte durch O zu (OP) schneiden, sich gegenseitig entsprechen. Es ist somit $(P^\times P')$ die Normale in $P^\times$ an $f^\times$; dieselbe wird von (OK) im Krümmungsmittelpunkte $K^\times$ von $f^\times$ für den Punkt $P^\times$ geschnitten.

Um nun die Tangente t' an f' zu erhalten, ziehen wir etwa die im ersten Satz des Artikels 8 enthaltene Construction zu Rathe.

Darnach ist der Schnittpunkt Q' der Senkrechten in $P^{\times}$ und P' zu (OP) respective $(P^{\times}P')$ mit $K^{\times}$ zu verbinden. Wird (OP') von der Verbindungsgeraden in M_0 geschnitten, so gibt $(P^{\times}M_0)$ die Richtung von t', mithin (PM_0) die Richtung von t' an.

Wir können aber auch zu der soeben dargestellten Figur die in Bezug auf $(O\mathfrak{P}')$ symmetrische Figur zeichnen und bekommen dadurch gleichfalls M_0. Errichten wir also in P und P' die Senkrechten zu (OP), respective (PP'), die sich in Q schneiden mögen, und verbinden den zu $K^{\times}$ in Bezug auf $(O\mathfrak{P}')$ symmetrischen, auf (PP') gelegenen Punkt K_0 mit Q, so erhalten wir dadurch auf $(O\mathfrak{P}')$ ebenfalls den Punkt M_0.

Ziehen wir noch durch P' die Parallele zu (OP), welche (OK) in E schneiden möge. Zunächst ist hier der Vierstrahl P' $(P, P^{\times}, O, E)$ harmonisch. Es bilden desshalb auch die Punkte $K, K^{\times}, O, E$ eine harmonische Gruppe und in Folge dessen ebenso die Punkte K, K_0, P, P'. Nun projiciren wir die zuletzt erwähnte Gruppe von Q auf $(O\mathfrak{P}')$. Ist L die Projection von K, so erkennt man, dass $LP' = P'M_0$. Daraus folgt mit Bezug auf die harmonischen Eigenschaften eines Vierecks, dass die Gerade, welche K mit dem Schnittpunkte R der Geraden (PM_0), (QP') verbindet, zu $(O\mathfrak{P}')$ parallel ist. Daraus ergibt sich folgende Construction:

Bringt man die Senkrechten in K zu (OP), in P' zu (PP') im Punkte R zum Schnitte, so ist $t' \parallel (PR)$.

Diese Construction gestattet, t' zu finden, wenn K gegeben ist und umgekehrt. Sie ist mindestens ebenso einfach wie die früher abgeleitete, und die zuvor entwickelten Formeln (4') und (8) lassen sich aus ihr bequem von Neuem finden.

13. In den soeben gegebenen Erörterungen ist auch die Lösung folgender Aufgabe enthalten — Fig. 7 —

»Gegeben sind die Strecken, welche $\frac{dr}{d\varphi}$, $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$ darstellen; es sollen aus ihnen und aus r die die Ausdrücke

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}, \quad \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}$$

darstellenden Strecken construirt werden«.

Bezüglich der Construction von $\frac{1}{O\mathfrak{P}'} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}$ aus $OP' = \frac{dr}{d\varphi}$ ist hier nichts weiter zu bemerken. Ist dann in Bezug auf den zweiten Theil unserer Aufgabe auf (OP) die Strecke $OP'' = \frac{d^2 r}{d\varphi^2}$, so führt man etwa durch P die Senkrechte zu $(P'P'')$ bis zum Schnitt M_0 mit (OP') und macht $P'\mathfrak{M}$

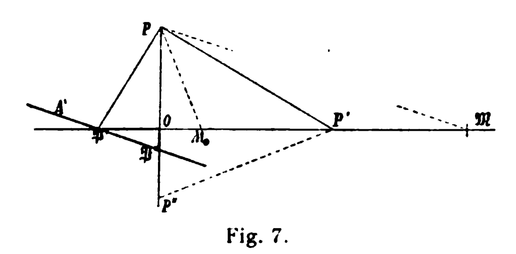


Fig. 7.

äquipollent M_0P'; die Parallele durch $\mathfrak{P}'$ zu $(P\mathfrak{M})$ trifft (OP) im Punkte $\mathfrak{P}''$ und es ist $\frac{1}{O\mathfrak{P}''} = \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}$.

VI. Über zwei besondere Arten von Polarintegralcurven.

14. Eine Integralcurve in Parallelcoordinaten hat die fundamentale Eigenschaft, dass die Ordinatendifferenz für irgend zwei Punkte derselben die Fläche misst, welche von der entsprechenden Differentialcurve, den Ordinatenlinien der zwei Punkte und der Abscissenaxe begrenzt wird. Diese Fläche ist nämlich gleich dem Rechtecke, welches die Constructionseinheit a zur Grundlinie und die erwähnte Differenz zur Höhe hat.

Die analoge Curve in Polcoordinaten hat somit die Eigenschaft, dass die Differenz der Leitstrahlen irgend zweier Punkte derselben die auf die Constructionseinheit a reducirte Fläche

misst, die von diesen Leitstrahlen und der zugehörigen Differentialcurve eingeschlossen wird.

Ist somit die Gleichung der Differentialcurve f

$$r = f(\varphi),$$

so ist die Gleichung der Integralcurve F

$$R = \frac{1}{2a}\int f^2(\varphi)\,d\varphi + C.$$

Es ist also

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{r^2}{2a} = R',$$

wenn R' wiederum die Subnormale der Integralcurve bedeutet.

Einer Differentialcurve f entsprechen wieder unzählig viele Integralcurven, da ja die Constante C beliebig gewählt werden darf. Für homologe Punkte aller dieser Integralcurven hat aber $\frac{dR}{d\varphi}$, d. h. die Subnormale denselben Werth $\frac{r^2}{2a}$, genau so wie früher.[1] Ebenso ist auch einleuchtend, wenn verschiedene Differentialcurven einander in einem Punkte berühren, dass dann die durch einen correspondirenden Punkt gehenden, auf die nunmehrige Weise abgeleiteten Integralcurven einander in diesem Punkte osculiren.

Wir haben uns auch hier mit der Aufgabe zu beschäftigen:

Gegeben ist die Tangente t der Differentialcurve f in einem Punkte P'; es ist der Krümmungsmittelpunkt K von F im correspondirenden Punkte P zu construiren oder umgekehrt.

Tragen wir — Fig. 8 — auf die Senkrechte in O zu (OP) die Strecke $SO = 2a$ auf; die Senkrechte in P' zu SP' schneidet also die Gerade (SO) im Punkte N, durch den die Normalen sämmtlicher Integralcurven in den auf (OP) gelegenen homologen Punkten gehen.

---

[1] Cf. E. Bitterli a. a. O., S. 172 (Bemerkungen bezüglich eines Polarintegraphen).

Bringen wir nun das Dreieck $SP'N$ in die unmittelbar benachbarte Lage $S_1P_1'N_1$, so wird der Punkt S auf der durch ihn zum Leitstrahl (OP') gezogenen Parallelen s, der Punkt P' auf der Tangente t und der Punkt N auf einer zu ermittelnden Geraden v in seine neue Lage übergehen. Es wird demgemäss v die Tangente und die in N zu ihr errichtete Senkrechte w die Normale an die von N beschriebene Bahn sein.

Wir haben im Abschnitt II kennen gelernt, wie man den Krümmungsmittelpunkt einer in Polarcoordinaten gegebenen

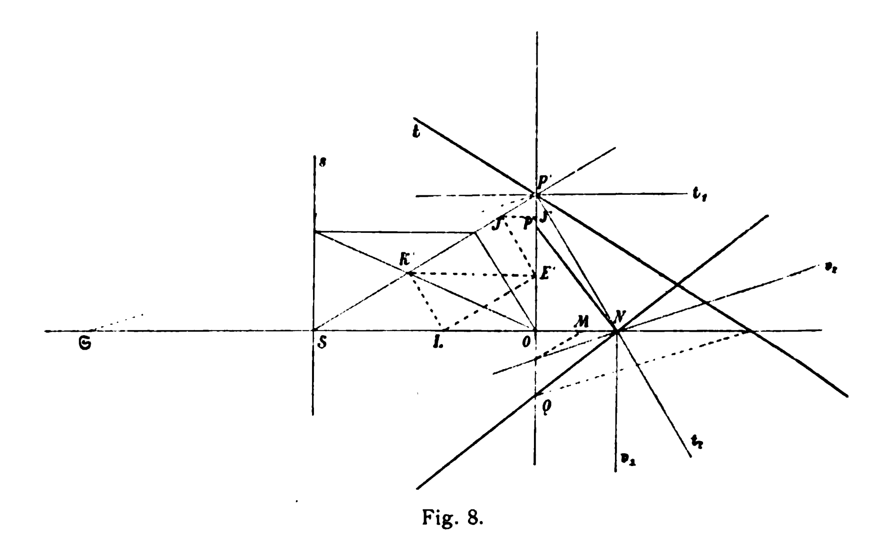


Fig. 8.

Curve F für irgend einen Punkt derselben sucht, wenn die entsprechende Normale an die von dem Endpunkte ihrer Subnormale beschriebene Bahncurve gegeben ist und umgekehrt; weiter haben wir daselbst erkannt, dass die Krümmungsmittelpunkte sämmtlicher Curven in den Punkten eines Leitstrahles, für welche sowohl N als auch w gemeinschaftlich sind, auf einem Kegelschnitte liegen. Daher auch hier der Satz:

»Die Krümmungsmittelpunkte sämmtlicher Integralcurven

$$R = \frac{1}{2a}\int f^2(\varphi)\,d\varphi + C$$

in homologen Punkten bilden einen Kegelschnitt«.

Von diesem Kegelschnitt wissen wir, dass er durch N, durch den Mittelpunkt M von ON und durch diejenigen zwei Punkte auf den Leitstrahl (OP), in welchen derselbe von den durch N nach den absoluten Kreispunkten gehenden Geraden getroffen wird, geht. In N wird dieser Kegelschnitt von v berührt.

Für sämmtliche durch P' gehende Differentialcurven bilden die Tangenten t einen Strahlenbüschel und, wie leicht einzusehen, die entsprechenden Tangenten v, sowie auch die zugehörigen Kegelschnitte einen zu demselben projectiven Strahlen- respective Kegelschnittbüschel.

Wir wollen uns jetzt vornehmen, die Projectivität zwischen diesen zwei Strahlenbüscheln (t) und (v) durch drei Paare zugeordneter Strahlen herzustellen.

Dem zu SO parallelen Strahle t_1 in (t) entspricht der zu (OP') parallele Strahl v_1 in (v), denn ersetzt man die Tangente t_1 durch den sie in P' berührenden Kreis vom Mittelpunkte O, so sind t_1, v_1 Tangenten an zwei in Bezug auf diesen Kreis gebildete inverse Curven in entsprechenden Punkten, und da $s \perp (OS)$ ist, so muss auch $v_1 \perp (OS)$ sein. Ferner ist leicht einzusehen, dass dem Strahle (OP') in (t) der Strahl (ON) in (v) entspricht.

Wir wollen jetzt noch zu dem Strahle $t_2 = (P'N)$ in (t) den entsprechenden Strahl v_2 construiren, weil die Construction in den Erörterungen des Abschnittes II als Specialfall mit enthalten ist.

Die Gerade $(P'S)$ wird hier von ihrer benachbarten Lage $(P'_1 S_1)$ in einem Punkte K' geschnitten, der darnach als Krümmungsmittelpunkt für den Punkt P' einer durch P' gehenden Hilfscurve aufgefasst werden kann, wenn s die Tangente, also (SO) die Normale an die von dem Endpunkte der Subnormale dieser Curve beschriebene Differentialcurve ist.

Da hier $r'' = 0$ ist, so erhält man K' etwa nach der der Grübler'schen analogen Construction des erwähnten Abschnittes, wenn man von O die Senkrechte auf (SP') fällt, von ihrem Fusspunkte die Parallele zu (OS) bis zum Schnitte mit s zieht und den so erhaltenen Schnittpunkt mit O verbindet. Die Verbindungsgerade schneidet $(P'S)$ in K'.

Der zu N benachbarte Punkt N_1 liegt alsdann auf der zu $(K'P'_1)$ in P'_1 errichteten Senkrechten; es kann somit ON als die Subtangente des Punktes P' und ON_1 als die Subtangente des Punktes P'_1 für unsere Hilfscurve betrachtet werden. Die Gerade $v_2 = (NN_1)$ wird sohin aus K' nach einer Construction des vorhergehenden Abschnittes III erhalten. Wir benützen etwa die erste von ihnen.

Man hat somit von K' die Senkrechte auf (OP') und von ihrem Fusspunkte E' die Senkrechte auf (SP') zu fällen; ist J der Fusspunkt dieser Senkrechten, so ist schliesslich $v_2 \perp (OJ)$.

Nach dem ersten Satze des Artikel 6 müsste man umgekehrt, wenn K' bereits vorliegt, zu der Richtung von s gelangen, wenn man die Senkrechte $(K'L)$ zu (SP') legen, durch ihren Schnitt L auf (OS) die Parallele zu (SP'), durch K' die Parallele zu (OS) ziehen und den Schnittpunkt E dieser Parallelen ermitteln würde. Da dann $(P'E) \| s$ sein müsste, so ergibt sich daraus, dass E auf (OP') fällt, also mit E' identisch ist, und es folgt weiter, dass $OE = EJ'$ ist, wenn J' den Fusspunkt der Senkrechten von J auf (OP') bezeichnet.

Schneidet nun v_2 die Gerade (OP') in Q_2, so ist

$$\triangle ONQ_2 \sim \triangle J'OJ.$$

Verbindet man desshalb den Mittelpunkt M von ON mit Q_2, so ist die Verbindungsgerade senkrecht zu (JE) oder parallel zu (SP').

Macht man demgemäss die Strecke $S\mathfrak{S}$ äquipollent der Strecke OS, so ist der dem Strahle t_2 von (t) entsprechende Strahl v_2 in (v) parallel zu $(P'\mathfrak{S})$.

Dadurch ist die Projectivität der besagten Strahlenbüschel hergestellt.

Denken wir uns den Büschel (t) durch (OS), den Büschel (v) durch (OP') geschnitten, so erhalten wir dadurch zwei perspective Punktreihen, für welche die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zu $(P'\mathfrak{S})$ parallel sind. Daher schliesslich das folgende Resultat:

Um zu der Tangente t irgend einer Differentialcurve jetziger Art die entsprechende Gerade v zu erhalten, haben wir durch den Schnitt von t mit (ON)

die Parallele zu $(P'\mathfrak{S})$ zu legen, bis sie (OP') in Q schneidet; alsdann ist $v \equiv (QN)$.

Die Normale w schneidet (OP') in einem Punkte, den wir früher mit P'' zu bezeichnen pflegten und aus dem in bekannter Weise (Abschnitt II) der Krümmungsmittelpunkt irgend einer Integralcurve unserer jetzigen Art für den P' correspondirenden Punkt P bequem erhalten wird.

15. Der Vollständigkeit halber sind noch analoge Betrachtungen über die aus einer Curve f

$$r = f(\varphi)$$

abgeleitete Integralcurve F

$$\frac{1}{R} = \frac{a}{2}\int \frac{d\varphi}{f^2(\varphi)} + C,$$

die sich in Anbetracht der Definitionsgleichungen für die drei erledigten Arten von Polarintegralcurven nothwendig mit ergibt und gleichfalls nicht ohne Interesse ist, anzustellen.

Aus dieser letzten Definitionsgleichung von F folgt, dass

$$\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{d\varphi} = \frac{a}{2r^2} = \frac{1}{\mathfrak{R}},$$

wobei mit $\mathfrak{R}$ die Länge der Subtangente OT der Integralcurve F bezeichnet wird.

Die sämmtlichen Integralcurven

$$\frac{1}{R} = \frac{a}{2}\int \frac{d\varphi}{f^2(\varphi)} + C$$

haben somit für ihre homologen Punkte eine gemeinschaftliche Subtangente, oder mit anderen Worten: Die homologen Tangenten unserer Integralcurven schneiden sich in einem Punkte T auf der zu (OP) in O errichteten Senkrechten.

Macht man auf dieser Senkrechten $\mathfrak{S}O = \frac{a}{2}$, wenn wieder $SO = a$ die Constructionseinheit bedeutet, so erhält man den Punkt T als die dritte Ecke des bei P' rechtwinkeligen

Dreieckes $\mathfrak{S}P'T$, vorausgesetzt, dass P' wieder der correspondirende Punkt der Differentialcurve ist.

Bezüglich der Construction von Krümmungsmittelpunkten unserer Integralcurven können wir uns auf das Vorangehende berufen.

Bei der infinitesimalen Veränderung des Dreieckes $\mathfrak{S}P'T$ bewegt sich der Punkt $\mathfrak{S}$ auf der zu (OP) parallelen Geraden $\mathfrak{s}$, der Punkt P' auf der Tangente t der Differentialcurve f und der Punkt T auf einer erst abzuleitenden Geraden v. Beschreibt nun t den Strahlenbüschel (t) um P', so beschreibt v einen zu ihm projectiven Strahlenbüschel (v) um T. Dieser Zusammenhang liefert dann für jede Tangente t die Construction des entsprechenden Strahles v.

Man hat bloss, dem Vorigen entsprechend, durch den Schnittpunkt von t mit (OT) die Parallele zu $(P'S)$, wofern wieder $SO = a$, zu legen und sie in $\mathfrak{P}''$ mit (OP) zum Schnitte zu bringen; v ist alsdann die Verbindungsgerade der Punkte $\mathfrak{P}''$ und T.

Wenn der Punkt $\mathfrak{P}''$ gefunden worden ist, so wird der Krümmungsmittelpunkt von F in P nach den im Abschnitte III entwickelten und durch die Formel (4) dortselbst zum Ausdrucke gebrachten Constructionen leicht ermittelt; darnach schneidet beispielsweise die Senkrechte durch O zu v auf der Normale von F in P die Strecke $\rho \sin^2 \tau$ ab, aus der der Krümmungshalbmesser ρ ohneweiters hervorgeht.

Die nun behandelte Curve gehört somit zu den inversen Integralcurven. Transformiren wir dieselbe mit ihrer Differentialcurve invers für O als Centrum und a^2 als Potenz der Inversion, so gelangen wir genau zu den Beziehungen des Artikel 14.[1]

V. Integralcurven in Bezug auf eine gegebene Curve.

16. Die Definition der polaren Integralcurven ist einer weiteren Verallgemeinerung in der Richtung fähig, dass wir den Pol O durch eine Curve o ersetzen und die Leitstrahlen einer

---

[1] Die Herstellung der zugehörigen Figur unterliegt nach dem Gesagten keinen Schwierigkeiten.

Curve f auf den Tangenten der Curve o vom Berührungspunkte B aus messen.

Zwecks unserer Erörterungen können wir, wenn es sich bloss um die Bestimmung von Normalen der Curve f handelt, die Curve o selbst durch den Punkt B vertreten lassen, während für die Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes es zulässig ist, die Curve o durch ihren Krümmungskreis b für den Punkt B zu ersetzen.

Der vorliegende Fall einer Integralcurve f lässt sich leicht aus dem Specielleren des Abschnittes II entwickeln.

Es sei — Fig. 9 — $BP = r$ der Leitstrahl der Curve f für den Punkt P, dann (PP') die Normale derselben in P, ferner P'

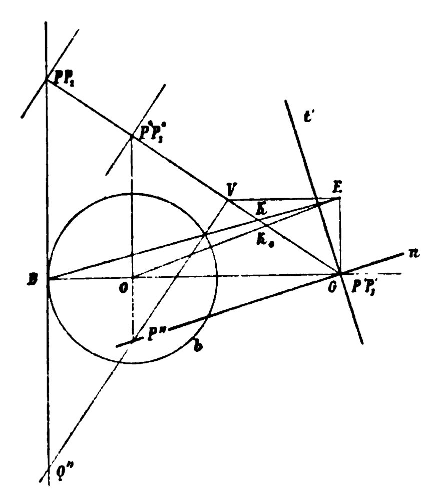


Fig. 9.

der Schnitt derselben mit der Normalen von o in B. $(BP') \equiv r'$ soll wieder die Subnormale der Curve f für den Punkt P heissen, so dass wieder

$$\frac{dr}{d\varphi} = r'$$

ist. Der Punkt P' beschreibt demnach die erste Differentialcurve f' von f.

Unsere Aufgabe wird zunächst darin bestehen, die Tangente t' in P' an diese Differentialcurve zu suchen.

Ist nun P_1 der zu P benachbarte Punkt von f und P_1' der zu P' benachbarte Punkt von f', so ist die Gerade (P_1P_1') die zu (PP') benachbarte Normale von f; sie schneidet desshalb (PP') in dem Krümmungsmittelpunkt K von f für den Punkt P.

Denken wir uns weiter zu dem Leitstrahle (BP) die Parallele durch den Mittelpunkt O von b bis zum Schnitt P^0 mit der Normale (PP') gezogen und legen durch P^0 eine Curve f_0 derart, dass ihre erste in Bezug auf O als Pol abgeleitete Differentialcurve die Curve f' in P' berührt, mit ihr also noch den Punkt P_1' gemeinschaftlich hat. Ist P_1^0 der zu P^0 benachbarte Punkt von f_0, so ist, da beide Curven die Normale (PP^0P') gemeinschaftlich haben, $(PP_1) \parallel (P^0P_1^0)$, und es ist desshalb

$$\triangle OP^0P_1^0 \backsim \triangle BPP_1,$$

da ja $\sphericalangle P^0OP_1^0 = \sphericalangle PBP_1$ bei dem Übergang in die benachbarte Lage angenommen wird.

Bezeichnen wir das Bogenelement PP_1 mit σ, das Bogenelement $P^0P_1^0$ mit σ_0 und den Leitstrahl OP^0 mit r_0, so folgt aus dieser Ähnlichkeit die Proportion

$$\sigma : \sigma_0 = r : r_0.$$

Da die Gerade $(P_1^0P_1')$ die zu (P^0P') benachbarte Normale von f_0 ist, so schneidet sie dieselbe in dem Krümmungsmittelpunkte K_0 von f_0 für den Punkt P_0. Die Senkrechte durch P' zu (PP') schneidet (P_1P_1') und $(P_1^0P_1')$ in zwei Punkten, deren Entfernung unendlich klein, höchstens von der zweiten Ordnung ist, die man sich also für den vorliegenden Zweck in einen Punkt G zusammenfallend denken kann. Setzt man also $PK = \rho$, $P^0K^0 = \rho_0$, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PP_1K, $P'GK$ die Proportion

$$\sigma : \rho = P'G : (PP' - \rho)$$

und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $P^0P_1^0K_0$, $P'GK_0$ die Proportion

$$\sigma_0 : \rho_0 = P'G : (P^0P' - \rho_0).$$

Scheiden wir aus den drei Gleichungen, die wir soeben erhalten haben, die Bogenelemente σ, σ_0 aus, so kommt nach

einfacher Reduction

$$\frac{r}{\rho}.PP' - \frac{r_0}{\rho_0}.P^0P' = r - r_0 \qquad (1)$$

oder

$$\frac{r^2}{\rho} - \frac{r_0^2}{\rho_0} = r\sin\tau - r_0\sin\tau_0, \qquad (2)$$

worin aber $\tau = \tau_0$ ist, oder schliesslich

$$\frac{r}{\rho}.KP' = \frac{r_0}{\rho_0}.K_0P'. \qquad (3)$$

Diese letzte Relation findet darin ihren geometrischen Ausdruck, dass die Geraden (BK) und (OK_0) sich in einem Punkte E auf der durch P' zu (OP') errichteten Senkrechten schneiden. Diese Construction gestattet somit in sehr einfacher Weise ρ_0 zu construiren, wenn ρ gegeben ist und umgekehrt.

Das gewonnene Resultat löst sehr einfach die Aufgabe:

Es ist die Tangente t' in P' an die Differentialcurve f' zu suchen, wenn der zu P gehörige Krümmungsmittelpunkt K der Integralcurve f gegeben ist und umgekehrt.

Im ersten Falle bringt man BK mit dem in P' zu (BP') errichteten Perpendikel in E zum Schnitt. Nachdem dieser Punkt auch auf (OK_0) liegt, so hat man durch E die Parallele zu (BP') zu ziehen und von ihrem Schnittpunkte V mit (PP') die Senkrechte zu (PP') zu führen, bis sie (OP^0) in P'' schneidet. Alsdann ist $(P''P')$ die Normale und die durch P' senkrecht zu ihr errichtete Gerade t' die Tangente von f'.

Wenden wir diese Construction in umgekehrter Reihenfolge an, so liefert sie uns K, wenn t' gegeben ist.

Diese Construction stimmt mit der früher für den specielleren Fall erläuterten, auf Grübler zurückgeführten, vollständig überein. Dies erklärt sich einfach dadurch, dass sich unser Resultat auch aus der Betrachtung der Bewegung eines ebenen starren Systems ergibt.

Bei dieser Bewegung ist für die betrachtete Systemlage der Punkt O Krümmungsmittelpunkt der Hüllbahncurve von (BP); der Punkt P' ist der momentane Drehungspol und t' ist

die Tangente in P' an die Polbahn. Nun geht der Wendekreis der umgekehrten Bewegung durch O und P' und berührt im letzteren Punkte die Gerade t'. Dieser Kreis schneidet die Normale PP' im Wendepunkte V, aus dem dann der zu P gehörige Punkt K in bekannter Weise — bequem durch die herangezogene Grübler'sche Construction — erhalten wird, ebenso, wie man umgekehrt aus K den Punkt V, dann auch den Wendepol P'' nach derselben Construction erhalten kann.

Wir heben noch hervor, dass hier die Punkte P', $P'_1, \ldots$ der ersten Differentialcurve f' von f auf den Normalen der Curve o, die P'', $P''_1 \ldots$ der zweiten Differentialcurve f'' von f auf den Normalen ihrer ersten Evolute u. s. w. festgelegt werden.

Für die hier entwickelte Construction lässt sich nun auch leicht eine metrische Relation finden.

Zu dem Zwecke wenden wir die Formel (3) des Abschnittes II auf unsere Hilfscurve f_0 an. Es ist da

$$r_0 + r''_0 = \frac{2 r_0}{\sin^2 \tau_0} - \frac{r_0^2}{\rho_0 \sin^3 \tau_0}.$$

Von f_0 können wir auf f selbst ohneweiters übergehen. Es ist

$$r''_0 = r'', \quad \tau_0 = \tau, \quad r_0 = r - a \operatorname{tg} \tau,$$

wenn a den Halbmesser des Krümmungskreises b bezeichnet, wobei wir ihn mit dem Vorzeichen $+$ versehen, wenn BO denselben Sinn mit BP' hat, anderenfalls er negativ zu nehmen ist Ferner ist aus der vor Kurzem entwickelten Formel (2)

$$\frac{r_0^2}{\rho_0} = \frac{r^2}{\rho} - a \operatorname{tg} \tau \sin \tau.$$

Führen wir diese Werthe in die herangezogene Gleichung (3) des Abschnittes II ein, so kommt nach einfacher Reduction

$$r + r'' + a \cot \tau = \frac{2r}{\sin^2 \tau} - \frac{r^2}{\rho \sin^3 \tau}. \qquad (4)$$

Dabei darf nicht vergessen werden, dass, unserer Ableitung von f'' gemäss, die positive Richtung von r'' der von r entgegengesetzt ist.

Schneidet die Gerade (VP'') den Leitstrahl (BP) im Punkte Q'' und setzen wir $BQ'' = R''$, so lässt sich unsere letzte Beziehung auch in der Form

$$r+R'' = \frac{2r}{\sin^2\tau} - \frac{r^2}{\rho \sin^3\tau} \tag{5}$$

schreiben, wodurch sie mit der obigen Formel (3) vollständig übereinstimmt.

Es kann somit der Punkt Q'' statt P'' in unsere Betrachtungen einbezogen werden, wie es auch aus den vorangehenden Constructionen sich direct ergibt, denn auch diese Constructionen lehren, dass K gefunden wird als der Krümmungsmittelpunkt für eine in einfachen Polarcoordinaten mit O als Pol gegebene Integralcurve F, wenn $(P'Q'')$ die Normale in P' an die zugehörige Differentialcurve F' ist.

Auf Grund dieser Bemerkung wären wir dann unmittelbar aus der Formel (3) des Abschnittes II zu der Relation (5), die wir soeben abgeleitet haben, gelangt.

Daraus folgt auch sogleich, dass die Krümmungsmittelpunkte für homologe Punkte sämmtlicher Integralcurven, welche auf die vorliegende Weise aus f' abgeleitet werden können, auf einem Kegelschnitte liegen.

17. Wir wollen nun auch die über inverse Integral-, respective Differentialcurven f, respective $f', f'', \ldots$ gewonnenen Resultate dadurch verallgemeinern, dass wir den Pol O wieder durch eine Curve o ersetzen.

Handelt es sich bloss um die Tangentenbestimmung von f, so kann man auch hier die Curve o durch ihren Berührungspunkt B mit dem Leitstrahle (BP) vertreten lassen, während bei der Krümmungsmittelpunktsbestimmung man die Curve o durch ihren Krümmungskreis in B ersetzen wird. Auch hier werden die Punkte $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}'_1, \ldots$ der ersten Differentialcurve auf den Normalen von o und die Punkte $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}''_1, \ldots$ der zweiten Differentialcurve auf den Normalen ihrer Evolute u. s. f. festgelegt.

Wir setzen wieder $B\mathfrak{P}' = \mathfrak{r}'$, $O\mathfrak{P}'' = \mathfrak{r}''$ und behalten auch im Übrigen die im vorangehenden Artikel benützten Bezeich-

nungen bei; ferner möge der Schnittpunkt der Geraden $(O\mathfrak{P}'')$ mit der Tangente t an f in P mit $\mathfrak{P}^0$ bezeichnet werden.

Nun denken wir uns — Fig. 10 — eine Curve F_0 in Polarcoordinaten für O als Pol von der Beschaffenheit, dass ihre inverse Differentialcurve F_0' die Curve f' in $\mathfrak{P}'$ berührt, also auf ihr ausser $\mathfrak{P}'$ noch den ihm auf t' benachbarten Punkt $\mathfrak{P}_1'$ gemeinschaftlich hat. Dann bestimmt $t = (P\mathfrak{P}')$ mit $(P_1\mathfrak{P}_1')$ den Contingenzwinkel ε von f in P und mit $(\mathfrak{P}_1^0\mathfrak{P}_1')$ den Contingenzwinkel ε_0 von F_0 in $\mathfrak{P}^0$. Die Längenunterschiede zwischen der

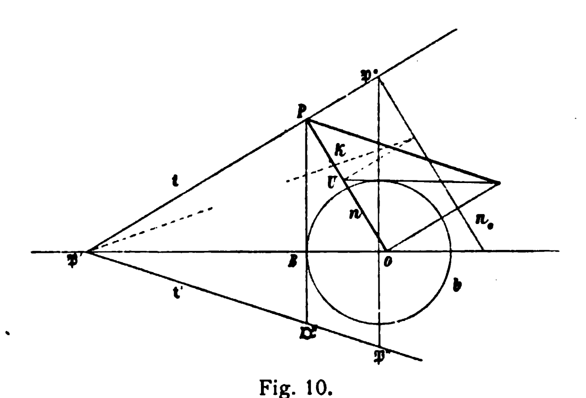


Fig. 10.

Strecke $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_1'$ einerseits und den zu den Winkeln ε, ε_0 als Centriwinkeln gehörigen, durch $\mathfrak{P}'$ gehenden Bogenelementen anderseits sind unendlich klein, mindestens von der zweiten Ordnung. so dass gesetzt werden darf

$$P\mathfrak{P}'.\varepsilon = \mathfrak{P}^0\mathfrak{P}'.\varepsilon_0,$$

woraus folgt, dass

$$r\varepsilon = r_0\varepsilon_0.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BPP_1, $O\mathfrak{P}^0\mathfrak{P}_1^0$ folgt wenn wir mit σ, σ_0 beziehungsweise die Bogenelement der Curven f, F_0 in P, respective $\mathfrak{P}^0$ bezeichnen

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{r_0}{\sigma_0}.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit der vorangehenden so gelangen wir zu der einfachen Relation

$$\frac{r^2}{\rho} = \frac{r_0^2}{\rho_0}. \tag{6}$$

Der Relation (4′) des Abschnittes III,

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{\mathfrak{r}_0''} = \frac{1}{\rho_0^3 \sin^3 \tau_0},$$

welche für die Curve F_0 gilt, entspricht nun eine andere Relation, die wir erhalten, wenn wir

$$\tau_0 = \tau, \quad r_0 = r + a \cot \tau, \quad \mathfrak{r}_0'' \equiv \mathfrak{r}'', \quad \frac{r_0^2}{\rho_0} = \frac{r^2}{\rho}$$

setzen, wobei a positiv ist, wenn (BO) gleichen Sinnes mit $(B\mathfrak{P}')$ ist.

Dadurch erhalten wir die Beziehung

$$\frac{1}{r + a \cot \tau} + \frac{1}{\mathfrak{r}''} = \frac{r^2}{(r + a \cot \tau)^2} \cdot \frac{1}{\rho \sin^3 \tau}. \tag{7}$$

Schneidet ferner der Leitstrahl (BP) die Tangente $\mathfrak{t}'$ von f' im Punkte $\mathfrak{Q}''$ und setzen wir $B\mathfrak{Q}'' = \mathfrak{R}''$, so kommt mit Benützung der Relation

$$\mathfrak{r}'' : \mathfrak{R}'' = r_0 : r = (r + a \cot \tau) : r$$

folgender Ausdruck zum Vorschein

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\mathfrak{R}''} = \frac{r}{r + a \cot \tau} \cdot \frac{1}{\rho \sin^3 \tau} \tag{8}$$

oder

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\mathfrak{R}''} = \frac{\mathfrak{r}'}{a + \mathfrak{r}'} \cdot \frac{1}{\rho \sin^3 \tau}. \tag{8'}$$

Die Relationen (6) bis (8′) sind alle zur Construction bequem geeignet.

Um beispielsweise nach der letzten von ihnen den Krümmungsmittelpunkt K von f für den Punkt P zu finden, wird man zunächst so verfahren, als wenn man gewöhnliche Polarcoordinaten mit B als Pol vor sich hätte. Man wird durch P die Senkrechte n zu t errichten, durch ihren Schnittpunkt mit (BO) alsdann die Parallele zu t und durch P die Parallele zu $\mathfrak{t}'$ führen;

die Senkrechte zu (BP) durch den Schnitt der zwei zuletzt gezogenen Geraden treffe die Normale n im Punkte U. Alsdann hat man noch die Parallele durch U zu t mit der durch $\mathfrak{P}^0$ zu n gezogenen Parallelen n^0 zu schneiden und den Schnittpunkt mit $\mathfrak{P}'$ zu verbinden, so bestimmt die Verbindungsgerade auf n den fraglichen Krümmungsmittelpunkt.

Denn nach der herangezogenen Formel (4′) des Abschnittes III ist

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\mathfrak{R}''} = \frac{1}{PU \cdot \sin^3 \tau};$$

vergleicht man dies mit (8′), so folgt die Proportion

$$PU : \rho = (a + \mathfrak{r}') : \mathfrak{r}'$$

oder

$$PU : \rho = r_0 : r,$$

aus welcher Relation die Richtigkeit der soeben angeführten Construction sich sofort ergibt.

Dass diese Construction umkehrbar ist, also $\mathfrak{t}'$ aus K finden lässt, sieht man sofort.

18. Aus der Formel (4) des 16. Artikels findet man leicht einen Ausdruck für ρ; es ist

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - ar' - rr''}$$

und somit

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\frac{dr}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi} - a\right) - r\frac{d^2 r}{d\varphi^2}}.$$

Diese Formeln enthalten die Formeln (2) und (2′) des Abschnittes II als besondere Fälle für $a = 0$ in sich.

Ebenso findet man aus der vor Kurzem aufgestellten Relation (7) die Beziehung

$$\left(1 + \frac{a}{\mathfrak{r}'}\right)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\mathfrak{r}''} + \frac{a}{\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''}\right)\rho = \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\mathfrak{r}'^2}\right)^{3/2} : \frac{1}{r^3},$$

aus welcher die Formel

$$\rho = \frac{\left[u^2 - \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{u^3\left(1+a\frac{du}{d\varphi}\right)\left[u+\left(1+a\frac{du}{d\varphi}\right)\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right]}$$

hervorgeht, in welcher die Bedeutung von u von früher her bekannt ist und welche für $a = 0$ in die Formel (6) des Abschnittes III übergeht.

VI. Reciproke Curven in Parallelcoordinaten.

19. Wir wollen nun die Betrachtungen, die wir bezüglich der inversen polaren Differentialcurven durchgeführt haben, auch auf den specielleren Fall der Parallelcoordinaten übertragen. Wir werden da zunächst zu zwei Curven f, f_1 in Parallelcoordinaten geführt, für deren correspondirende Punkte die Beziehung besteht

$$x = x_1, \quad yy_1 = a^2,$$

worin a eine Constante bedeutet.

Zwei solche Curven wollen wir reciprok in den Ordinaten nennen.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Tangente t und den Krümmungsmittelpunkt K der Curve f für P zu ermitteln, wenn die Tangente t_1 und der Krümmungsmittelpunkt K_1 der Curve f_1 für P_1 gegeben sind.

Wir suchen zunächst die Lösung auf Grund des Abschnittes I.

Aus der Gleichung

$$yy_1 = a^2 \tag{1}$$

folgt durch Differention

$$y_1 y' + y y_1' = 0, \tag{2}$$

worin y', y_1' die correspondirenden Ordinaten der hier auf Grund derselben Constructionseinheit abgeleiteten Differentialcurven f', f_1' von f, respective f_1 sind.

Schneidet — Fig. 11 — die Tangente t_1 die x-Axe in R_1 und nehmen wir $R_1P_0 = e$, falls P_0 der Endpunkt der gemeinschaftlichen Abscisse von P und P_1 ist, als Constructionseinheit

für f_1', f' an, so ist für diese Annahme $y_1' \equiv y_1$ und mithin nach (2)

$$P_0P' = -P_0P.$$

Da t zu R_1P' parallel ist, so folgt:

Bei in den Ordinaten reciproken Curven sind die Subtangenten für correspondirende Punkte gleich, aber entgegengesetzt gerichtet.

Aus dem Krümmungsmittelpunkte K_1 wird die Tangente $t_1' \equiv (P_1R_1')$ an die Differentialcurve f_1' für den Punkt $P_1' \equiv P$ in

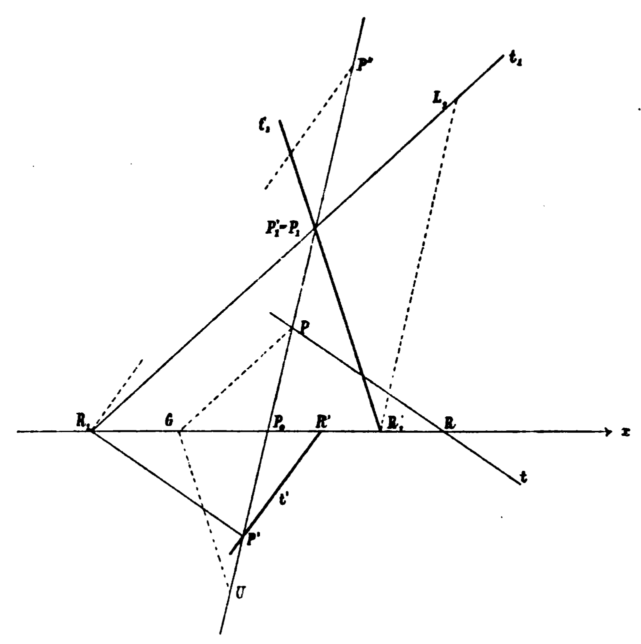


Fig. 11.

gewohnter Weise abgeleitet. Man errichtet in P_1 und K_1 die Senkrechten zu (P_1P_0) respective x und durch ihren Schnitt die Senkrechte auf t_1, durch deren Fusspunkt L_1 man die Parallele zu (P_1P_0) legt, die auf x den Punkt R_1' von t_1' bestimmt.

Um dann K zu finden, wird man aus t_1' die Tangente t' in P' an die Differentialcurve f' zu ermitteln trachten.

Differentiren wir die Gleichung (2) nochmals, so erhalten wir

$$2y'y_1'+yy_1''+y_1y''=0. \tag{3}$$

Setzen wir in diese Gleichung die besonderen Werthe für die Ordinaten auf (P_0P) ein, so ergibt sich leicht

$$P_0P''=2.P_0P-\frac{P_0P\times P_0P_1''}{P_0P_1}.$$

Ziehen wir nun $(PG)\|t_1$ bis zum Schnitt G mit x und $(GU)\|t_1'$ bis zum Schnitte U mit (P_0P), so ist

$$P_0U=\frac{P_0P\times P_0P_1''}{P_0P_1}.$$

Tragen wir weiter auf (P_0P) die Strecke UP von P aus auf, so gelangen wir dadurch zu dem Punkte P'' der zweiten Differentialcurve von f; denn man überzeugt sich leicht, dass

$$P_0P''=2.P_0P-P_0U.$$

Zieht man schliesslich durch P' die Parallele zu $(P''R_1)$ bis sie x im Punkte R' schneidet, so kann man aus R' den Punkt K durch die öfters schon benützte Construction, durch welche R' mit K ebenso zusammenhängt, wie R_1' mit K_1, leicht finden.

20. Im Vorigen haben wir den Ausdruck $yy_1=a^2$ zweimal nacheinander differentiren müssen, um dann die Construction weiter geometrisch entwickeln zu können. Wir können aber in diesem Falle leicht den Punkt R' aus R_1' auf rein geometrischem Wege ableiten.

Vermöge der Gleichung (2) besteht die Proportion

$$y':y_1'=-y:y_1,$$

derzufolge wir zur Tangente t' in P' an f' auch auf dem nachstehend bezeichneten Wege gelangen können — Fig. 12.

Wir verschieben die Ordinatenlinie (P_0P) parallel zu sich selbst; die Punktreihe auf ihr soll sich dabei so bewegen, dass P_0 die x-Axe, P_1 die Gerade t_1 und P_1' die Gerade t_1' beschreibt.

Unter steter Festhaltung daran, dass gemäss der Proportion (4) für alle Lagen der veränderlichen Ordinatenlinie die Beziehungen

$$P_0P_1 \times P_0P = a^2, \qquad P_0P_1' : P_0P' = -P_0P_1 : P_0P$$

bestehen bleiben, wird der Punkt P' eine Curve q' beschreiben, deren Tangente in P' mit t' identisch ist.

Machen wir jedesmal $P_0\mathfrak{P} = P'P_0$, so beschreibt $\mathfrak{P}$ eine zu q' symmetrische Curve q für x als Axe und y als Richtung der Symmetrie. Diese Curve q geht alsdann durch den Punkt P

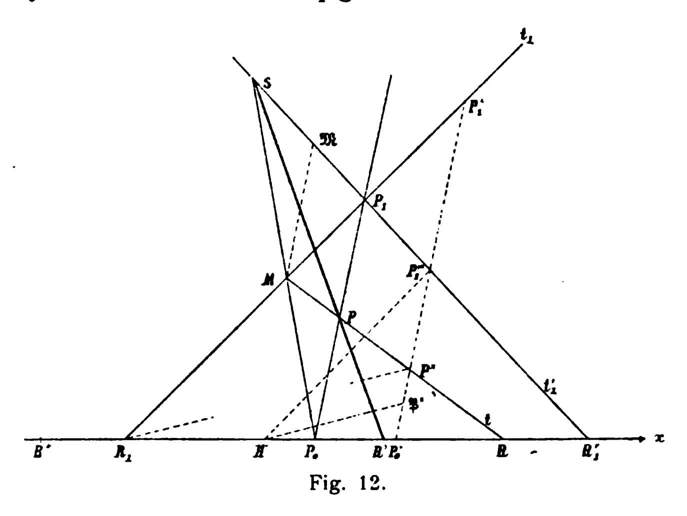


Fig. 12.

und ihre Tangente in P schneidet t' auf x, liefert also selbst auch den fraglichen Punkt R'.

Um auf irgend einer Ordinatenlinie nach der gegebenen Ausführung aus den Lagen $P^\times$, $P_1^\times$, $P_1'^\times$ der Punkte P, P_1, P_1' den entsprechenden Punkt $\mathfrak{P}^\times$ zu erhalten, kann man zunächst durch $P_1'^\times$ die Parallele zu t_1 durch deren Schnitt H mit x die Parallele zu $(R_1P^\times)$ legen, welche alsdann auf $(P_0P^\times)$ den Punkt $\mathfrak{P}^\times$ festlegt.

Nun beschreibt bei der angeführten Bewegung der Strahl (R_1P) einen Strahlenbüschel um R_1, welcher zur Reihe der Punkte $P, P^\times, \ldots$ auf t perspectiv, sonach zur Reihe der Punkte $P_1', P_1'^\times, \ldots$ auf t_1' und schliesslich auch zur Reihe $[H]$ der Punkte $R_1, H\ldots$ auf x projectiv ist. Desshalb ist auch die

letzterwähnte Reihe $[H]\dots$ projectiv zu dem Schnitte des besagten Strahlenbüschels mit der unendlich fernen Geraden, und es hüllen demgemäss die Geraden $(H\mathfrak{P}^{\times}),\dots$, welche die Punkte der Punktreihe $[H]$ mit den entsprechenden Punkten der zu ihr projectiven, auf der unendlich fernen Geraden der Ebene erzeugten Punktreihe verbinden, eine Parabel p ein, welche x berührt.

Da $[H]$, also auch der Tangentenbüschel $[(H\mathfrak{P}^{\times})]$ der Parabel p zu dem Parallelstrahlenbüschel $(P_0^{\times}\mathfrak{P}^{\times}),\dots$ projectiv ist, so ergibt sich die Curve q als das Erzeugniss eines Strahlenbüschels erster Ordnung mit einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Weil ferner durch diese Projectivität die unendlich ferne Gerade sich selbst entspricht, so ist diese ein Theil des Erzeugnisses und der übrige Theil q ist ein Kegelschnitt.

Für die Ordinatenlinie durch R ist das Verhältniss $y:y_1$ gleich Null; somit fällt hier $\mathfrak{P}$ mit R zusammen. Für die Ordinatenlinie durch R_1' hat das erwähnte Verhältniss einen endlichen Werth, wesshalb hier $\mathfrak{P}$ mit R_1' zusammenfällt. Für die Ordinatenlinie durch R_1 besitzt das Verhältniss den Werth ∞, somit fällt da $\mathfrak{P}$ ins Unendliche. Für den Schnitt M der Tangenten t, t_1 ist $y:y_1 = 1$; also ist der entsprechende Punkt $\mathfrak{M}$ von q der Schnittpunkt der durch M gehenden Ordinatenlinie mit t_1'.

Auf diese Weise haben wir bereits fünf Punkte von q ermittelt; wir können somit die Tangente in P an diesen Kegelschnitt construiren. Zu dem Behufe bezeichnen wir den unendlich fernen Punkt von y mit Y_∞ und den benachbarten Punkt von P auf q mit Q, so ergibt sich diese Tangente (PQ) aus dem Pascal'schen Sechseck $Y_\infty\mathfrak{M}R_1'RPQ$ einfach dadurch, dass man den Schnittpunkt S der Geraden t_1', (P_0M) mit P verbindet. (PS) schneidet also x in dem gesuchten Punkte R'.

Schneiden wir das hier entstehende vollständige Viereck PP_1MS mit x, so sieht man, dass RR_1', R_1R' zwei Paare einer Involution sind, für die P_0 ein Doppelpunkt ist. Wir haben somit das Ergebniss:

Der Punkt R' ist der dem Punkte R_1 zugeordnete Punkt in der auf x durch P_0 als Doppelpunkt und $R_1'R$ als ein Punktepaar bestimmten Involution.

21. Für das hier behandelte Problem liegt eine aus der Definitionsgleichung $yy_1 = a^2$ direct hervorgehende Lösung auf der Hand. Dieselbe soll nun besprochen werden.

Tragen wir auf (P_0P) die Strecke a nach P_0A_1 und A_2P_0 auf, so bilden die Punkte P, P_1 ein Paar einer Involution auf (P_0P), für die P_0 der Centralpunkt und A_1A_2 die Doppelpunkte sind.

Nehmen wir in der Ebene einen festen Kegelschnitt (a) und einen Strahlenbüschel vom Mittelpunkte U an, so ist durch dieselben eine einfache quadratische Punkttransformation festgelegt, in der je zwei einander entsprechende Punkte auf einem Strahl des Büschels U liegen und in Bezug auf (a) conjugirt sind. Der Punkt U und die Schnittpunkte V, W seiner Polare in Bezug auf (a) mit (a) selbst sind die Hauptpunkte dieser Transformation.

Die durch unsere Gleichung $yy_1 = a^2$ gegebene Transformation, welche f_1 in f überführt, ist eine Transformation dieser Art, für welche der Kegelschnitt in die durch die Gleichung $y^2 = a^2$ ausgedrückten Geraden a_1, a_2 zerfällt und der Punkt U im Unendlichen auf y liegt. Die Axe x ist die Polare von U, auf welcher die unendlich fernen Punkte V, W zusammenfallen.

In der erwähnten quadratischen Transtormation entspricht jeder Geraden ein Kegelschnitt durch U, V, W; in unserem speciellen Falle entspricht somit jeder Geraden t_1 eine Hyperbel für welche x eine, und die durch den Schnittpunkt R_1 von t_1 mit x zu y parallel gelegte Gerade die zweite Asymptote ist. Ist t_1 Tangente in P_1 an f_1, so ist t Tangente in P an die entsprechende Hyperbel; es gilt also thatsächlich für den Schnittpunkt R von t mit x die früher erwiesene Beziehung

$$RP_0 = P_0R_1.$$

Um K zu erhalten, legen wir durch zwei der Hauptpunkte U, V, W einen Kegelschnitt, der durch den Punkt P_1 geht und für ihn K_1 zum Krümmungsmittelpunkte hat: also entweder eine Hyperbel h_1, deren Asymptoten parallel zu den Coordinatenaxen sind oder eine Hyperbel h_2, für welche x eine Asymptote ist.

Einem solchen Kegelschnitt entspricht als eigentliche Curve wieder ein Kegelschnitt, im ersten Falle eine Hyperbel $h_1^\times$, deren Asymptoten zu x, y parallel sind, im zweiten Fall eine Hyperbel $h_2^\times$, für die gleichfalls x eine Asymptote ist und die mit h_2 concentrisch liegt. Die Krümmungsmittelpunkte dieser Hyperbeln sind mit K identisch.

22. Aus dem Ganzen ersehen wir, dass die Construction nach der Angabe des Satzes in Artikel 20 wohl die interessanteste ist. Dieselbe liefert auch am raschesten die hier auftretenden metrischen Relationen.

Heisst $\mathfrak{P}_0$ der zweite Doppelpunkt der darin ausgesprochenen Involution, so ist bekanntlich, da die Doppelpunkte jedes Paar harmonisch trennen,

$$\frac{2}{P_0\mathfrak{P}_0} = \frac{1}{P_0R} + \frac{1}{P_0R_1'}, \tag{5}$$

$$\frac{2}{P_0\mathfrak{P}_0} = \frac{1}{P_0R_1} + \frac{1}{P_0R'}. \tag{6}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{1}{P_0R'} - \frac{1}{P_0R_1'} = \frac{1}{P_0R} - \frac{1}{P_0R_1} \tag{7}$$

oder

$$\frac{1}{P_0R'} = \frac{1}{P_0R_1'} - \frac{2}{P_0R_1}. \tag{7'}$$

Dies führt also zu folgendem Satze (Fig. 12):

Macht man $P_0R^\times = R_1'P_0$, so ist der gesuchte Punkt R' zu $R^\times$ harmonisch conjugirt in Bezug auf die Punkte P_0, R.

Es ist selbstverständlich, dass wir statt der nun gewonnenen harmonischen Punktgruppe auf x auch diejenige construiren könnten, in der die Ordinatenlinien der ersteren die Tangente t schneiden, wodurch die Construction sich um eine Linie verkürzt.

Wir bemerken noch, dass unsere Relationen von a unabhängig sind.

Setzen wir $P_0R = s$, $P_0R_1 = s_1$, so dass $s + s_1 = 0$ ist und behalten wir im Übrigen die Bezeichnungen des Artikels 3 bei, so ist $OR' = \mu$, $OR_1' = \mu'$ und somit in Folge der Gleichung (7')

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} - \frac{2}{s_1}. \tag{7''}$$

Da nun aus der Gleichung (1) des Artikels 3 folgt

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\sin^2 w}{\rho \sin \alpha \sin^2 \beta},$$

so bekommen wir hier die Relation

$$\frac{1}{\rho \sin \alpha \sin^2 \beta} = \frac{1}{\rho_1 \sin \alpha_1 \sin^2 \beta_1} - \frac{2}{s_1 \sin^2 w}. \tag{8}$$

Diese Relation könnten wir auf mannigfache Weise noch umgestalten, was sich empfehlen würde, wenn man nach ihr die Construction von ρ thatsächlich durchführen wollte. Durch Elimination von α kommt beispielsweise

$$\frac{1}{\rho y \sin^3 \beta} + \frac{1}{\rho_1 y_1 \sin^3 \beta_1} = \frac{2}{s_1^2 \sin^2 w}. \tag{8'}$$

Bezeichnen wir noch die Länge RP der Tangente an f mit t, die Länge R_1P_1 der Tangente an f_1 mit t_1, so erhalten wir die Relation

$$\frac{t^2}{\rho y \sin \beta} + \frac{t_1^2}{\rho_1 y_1 \sin \beta_1} = 2, \tag{9}$$

welche von dem Winkel w des Coordinatensystems unabhängig ist; dieselbe eignet sich auch für unsere Construction.

Man wird darnach auch die Normalen n in P an f und n_1 in P_1 an f_1 ziehen und den Punkt P_0 auf dieselben orthogonal projiciren nach L, respective L_1; zu LR fällt man dann die Senkrechte durch R und bringt sie mit n im Punkte M zum Schnitte; desgleichen bringt man n_1 mit der durch R_1 zu (L_1R_1) errichteten Senkrechten in M_1 zum Schnitt; setzt man $PM = w$, $P_1M_1 = w_1$, so wird aus der Gleichung (9) die folgende:

$$\frac{w}{\rho} + \frac{w_1}{\rho_1} = 2,$$ [1] (10)

die zum Zwecke der Construction auch in der Form

$$\frac{w-\rho}{\rho} + \frac{w_1-\rho_1}{\rho_1} = 0 \qquad (10')$$

oder

$$\frac{MK}{PK} = -\frac{M_1K_1}{P_1K_1}$$

geschrieben werden kann.

23. Unsere Ergebnisse lassen sich noch weiter mit dem im Abschnitte II Erläuterten in Einklang bringen. Ist nämlich f eine auf ein Parallelcoordinatensystem bezogene Curve, so werden wir aus ihr eine neue Curve f' derart ableiten, dass die correspondirenden Punkte P, P' dieser Curven gleiche Abscissen besitzen und dass zwischen den Ordinate Y von f und η von f' die Beziehung

$$\frac{1}{a\eta} = \frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{dx}$$

besteht, wofern wieder a eine als Constructionseinheit angenommene Constante bedeutet.

Wir nennen in diesem Falle f' eine inverse Differentialcurve von f in Bezug auf die x-Axe.

Nehmen wir die positive Richtung der y-Axe für f' entgegengesetzt der von f an, dann ergibt sich folgende Construction von P aus P'.

Durch P lege man die Parallele zu x bis zum Schnitt $\mathfrak{P}$ mit y und ziehe durch den Schnitt der Tangente an f in P mit der x-Axe die Parallele zu dem Richtstrahl $(S\mathfrak{P})$, welcher die Ordinate von P in P' trifft; dabei hat S die frühere Bedeutung.

---

[1] Für den Krümmungshalbmesser einer auf die Asymptoten bezogenen Hyperbel beispielsweise folgt daraus $\rho = \frac{m}{2}$.

Da hier der Satz des Artikels 11 sinngemässe Anwendung findet, so sieht man daraus, dass der Schnittpunkt der Tangente t' in P' an f' mit x der im vorigen Artikel mit $R^\times$ bezeichnete Punkt ist, so dass man den zuletzt abgeleiteten Satz auch wie folgt zum Ausdrucke bringen kann.

»Ist R' der Punkt auf x, welcher durch die Tangenten $t, t^\times$ unserer Curven in zwei correspondirenden Punkten vom Endpunkte ihrer gemeinschaftlichen Abscisse harmonisch getrennt wird, so erfolgt die Construction des Krümmungsmittelpunktes K von f aus R' auf Grund des Satzes (I) im I. Abschnitte«.

24. Macht man f reciprok in den Ordinaten zu f_1, und f_2 reciprok in den Abscissen zu f, so können wir f_1, f_2 als zwei Curven reciproker Coordinaten bezeichnen.

Der Zusammenhang der Curven f_1, f_2 ergibt sich wohl auch direct.

Die Probleme, mit denen wir uns hier beschäftigen, werden dem Artikel 21 analog gelöst. Denn, wenn für zwei correspondirende Punkte dieser Curven die Relationen $x_1 x_2 = a^2$, $y_1 y_2 = b^2$ gelten, so sind diese Punkte einander involutorisch entsprechend in der quadratischen Verwandschaft doppeltconjungirter Elemente in Bezug auf das Punktequadrupel mit den Coordinaten a, b; $a, -b$; $-a, b$; $-a, -b$; das Hauptdreieck der Transformation ist durch den Coordinatenursprung und die unendlich fernen Punkte der Coordinatenaxen festgelegt.[1]

Aber auch die Benützung der hier auf Grund von Betrachtungen der Integralcurven gewonnenen Resultate führt uns zum mindesten ebenso bequem zum Ziele.

Ist — Fig. 13 — A_1 ein Punkt von f_1, und A_2 der correspondirende Punkt von f_2, so gibt der Schnitt der Ordinatenlinie von A_1 mit der Abscissenlinie von A_2 den Punkt A für die Curve f, welche zu f_1 in den Ordinaten, zu f_2 in den Abscissen reciprok ist. Ist P_0 der Endpunkt der Abscisse x_1, Q_0 der Endpunkt der Ordinate y_2 auf y, so wird man $R_1 P_0$ auf x nach $P_0 R$ übertragen, die Gerade $t = (AR)$ mit y im Punkte S schneiden

[1] Cf. Salmon-Fiedler, Analytische Geom. der Kegelschnitte (5. Aufl.), S. 761.

und $Q_0 S_2$ äquipollent zu SQ_0 machen; alsdann ist $t_2 = (S_2 A_2)$ die Tangente in A_2 an f_2.

Bezeichnen wir die Subtangenten auf x mit dem Buchstaben s, auf y mit den Buchstaben u, so ist

$$s_1 : s_2 = x_1 : x_2 \tag{11}$$

und

$$u_1 : u_2 = y_1 : y_2. \tag{12}$$

Die soeben ermittelte Tangentenconstruction vereinfacht sich, wenn man beachtet, dass die vier Strahlen A (P_0, Q_0, R_1, R) harmonisch sind, demzufolge AR_1 schon durch S_2 geht.

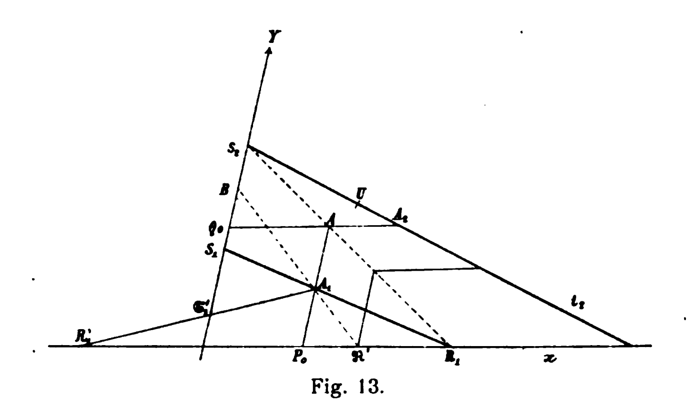


Fig. 13.

Um darnach t_2 zu construiren, wenn t_1 gegeben ist, verbindet man $R_1 \equiv (t_1 x)$ mit A und bringt diese Gerade in S_2 mit y zum Schnitte; alsdann ist $t_2 \equiv (S_2 A_2)$.

Oder man zieht durch den Schnitt $S_1 \equiv (t_1 y)$ und durch den Schnitt der Abscissenlinie von A_1 mit der Ordinatenlinie von A_2 eine Gerade, bis sie x im Punkte R_2 trifft; alsdann ist $t_2 \equiv (R_2 A_2)$.

Ebenso lässt sich der Krümmungsmittelpunkt K_2 von f_2 für den Punkt A_2 leicht finden, wenn der Krümmungsmittelpunkt K_1 von f_1 in A_1 gegeben ist. Man wird da zunächst aus K_1 den Punkt R_1' auf x nach dem schon öfters benützten Vorgange (Satz I, Abschnitt I) ermitteln. Ist $\mathfrak{R}'$ der zu R_1' in Bezug auf P_0, R_1 harmonisch conjugirte Punkt, so hat man einem Satze

oder der Formel (7″) des vorigen Artikels zufolge, P_0R' äquipollent zu $\mathfrak{R}'P_0$ zu machen, um den Punkt R' zu erhalten, welcher mit dem Krümmungsmittelpunkte K von f in A ebenso verknüpft ist, wie R_1' mit K_1.

Die weiteren Constructionen vollziehen sich nun auf der y-Axe.

Es ist der Punkt K für die Curve f gegeben; man soll den Schnittpunkt S' der Tangente an eine in Bezug auf die Basislinie y aus f gebildete Differentialcurve in dem dem Punkte A correspondirenden Punkte derselben ermitteln. Aus der herangezogenen Construction des Satzes I im Abschnitt I geht unmittelbar hervor, dass, wenn man durch $\mathfrak{R}'$ die Parallele zu y bis zum Schnittpunkte mit t und von hier die Parallele zu x zieht, diese zuletzt gezogene Gerade die Axe y in dem Punkte S' trifft. Macht man dann $Q_0S^{\times}$ äquipollent zu $S'Q_0$ und sucht wiederum den zu $S^{\times}$ harmonisch conjugirten Punkt S_2' in Bezug auf Q_0, S_0, so besteht in Folge von (7″) des vorigen Artikels zwischen diesem Punkte S_2' und dem fraglichen Punkte K_2 wieder die früher erwähnte Beziehung aus dem Abschnitt I.

Nun werden die Abschnitte zwischen t und (R_1S_2) auf den zu y parallelen Geraden durch (Q_0A_2) halbirt. Daraus folgt, dass man den Punkt $S^{\times}$ direct ohne Benützung der Tangente t ermitteln kann, indem man durch $\mathfrak{R}'$ die Parallele zu y legt und durch den Schnittpunkt derselben mit (R_1S_2) die Parallele zu x zieht, welche auf y gleichfalls den Punkt $S^{\times}$ festlegt.

Fassen wir Alles zusammen, so resultirt beiläufig nachstehende Construction — Fig. 13.

Um K_2 zu finden, wird man den Punkt R_1' aus K_1 ableiten und den Schnittpunkt $\mathfrak{S}_1'$ von $(R_1'A_1)$ mit y festlegen. Hierauf trägt man $S_1B = \mathfrak{S}_1'S_1$ auf y auf und verbindet B mit A_1. Durch den Schnittpunkt $\mathfrak{R}'$ dieser Verbindungsgeraden mit x zieht man die Parallele zu y bis zur Geraden (R_1S_2), von hier die Parallele zu x. Zu dem Schnittpunkt dieser Parallelen mit t_2 sucht man den harmonischen Punkt U in Bezug auf A_2, S_2. Die Senkrechten zu x, respective y durch U treffen die Normale n_2 von f_2 in A_2 in zwei Punkten, deren Entfernung gleich der Strecke A_2K_2 ist.

Aus dieser Construction ergibt sich sofort eine analoge zweite, wenn wir umgekehrt unsere Curven zuerst auf die y-Axe beziehen und dann auf die x-Axe übergehen.

Eine metrische Relation zwischen den correspondirenden Krümmungsgeraden ρ_1, ρ_2 für die Curven f_1, f_2 ergibt sich auch sehr leicht, etwa aus der Formel (8) des Artikels 22. Nach derselben herrscht zwischen dem Radius ρ von f und ρ_1 die Beziehung

$$\frac{1}{\rho \sin\alpha \sin^2\beta} = \frac{1}{\rho_1 \sin\alpha_1 \sin^2\beta_1} - \frac{2}{s_1 \sin^2 w}.$$

Darnach besteht zwischen ρ und ρ_2 analog die Beziehung

$$\frac{1}{\rho \sin\alpha \sin^2\beta} = \frac{1}{\rho_2 \sin^2\alpha_2 \sin\beta_2} - \frac{2}{u_2 \sin^2 w}.$$

Da nun

$$y_2 : s_1 = \sin\alpha : \sin\beta,$$

so folgt aus diesen Gleichungen

$$\frac{s_1}{\rho_1 \sin\alpha_1 \sin^2\beta_1} = \frac{y_2}{\rho_2 \sin^2\alpha_2 \sin\beta_2} + \frac{2}{\sin^2 w}\left(1 - \frac{y_2}{u_2}\right)$$

oder mit Rücksicht auf (12)

$$\frac{y_2}{\rho_2 \sin^2\alpha_2 \sin\beta_2} = \frac{s_1}{\rho_1 \sin\alpha_1 \sin^2\beta_1} + \frac{2}{\sin^2 w}\left(\frac{y_1}{u_1} - 1\right), \qquad (13)$$

oder, da auch

$$u_2 : x_1 = \sin\alpha : \sin\beta,$$

die Gleichung

$$\frac{u_2}{\rho_2 \sin^2\alpha_2 \sin\beta_2} = \frac{x_1}{\rho_1 \sin\alpha_1 \sin^2\beta_1} + \frac{2}{\sin^2 w}\left(1 - \frac{x_1}{s_1}\right).$$

Über algebraische und numerische Berechnung der Mikroskopobjective geringer Apertur

von

Dr. **H. Harting** in Jena.

(Mit 10 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 31. März 1898.)

§. 1.

Es soll im Folgenden der Versuch gemacht werden, die Mikroskopobjective einfachster Form und entsprechend geringer numerischer Apertur in den Kreis mathematischer Betrachtung zu ziehen. Diese Systeme bestehen aus zwei mit einander verkitteten Linsen und sind bis zu Brennweiten von 25 *mm* in Gebrauch; die Apertur lässt sich bis auf ungefähr 0·12 steigern. Die Kleinheit dieses Grundfactors mikroskopischer Abbildung macht es nun möglich, die mathematischen Betrachtungen, wie sie seit langer Zeit für die Theorie der zweitheiligen Fernrohrobjective benutzt werden, bei der Discussion jenes einfachsten Typus eines für einen endlichen Objectabstand corrigirten Linsensystems in Anwendung zu bringen, da auch hier das erste Glied der chromatischen und sphärischen Abweichung die Glieder höherer Ordnung derartig übertrifft, dass man für eine, übrigens schon ziemlich grosse Annäherung diese Glieder gegenüber dem ersten vernachlässigen kann. Letztere Annahme ist allerdings nur bei diesem einfachsten Typus erlaubt; geht man zu den aus vier Linsen, von denen je zwei verkittet sind, bestehenden Objectiven über, deren Apertur sich bis ungefähr 0·30 erstreckt, so reicht wahrscheinlich nicht einmal die Verbindung des ersten mit dem zweiten Gliede der Aberrationen

zu einer angenäherten Darstellung aus. Umsomehr ist bei den stärkeren Mikroskopobjectiven eine mathematische Behandlung illusorisch, und selbst, falls sich algebraische Formeln für die Radien der Systeme angeben liessen, würde es sich wohl empfehlen, der rein rechnerischen Behandlung mittelst trigonometrischer Durchrechnung den Vorzug zu geben, die in diesen Fällen sicherlich schneller zum Ziele führt.

Die folgenden Ableitungen gelten also unter der Voraussetzung, dass die Aberrationen durch ihre ersten Glieder dargestellt werden, entsprechend der algebraischen Behandlung der Fernrohrobjective. Das Mikroskopobjectiv soll aus drei brechenden Flächen bestehen, deren Abstand von einander in erster Annäherung als klein gegenüber den Dimensionen vernachlässigt werden soll; es lässt sich jedoch leicht zeigen, in welcher Weise die Einführung der Dicken in die algebraische Rechnung zu bewerkstelligen ist. Der Allgemeinheit wegen nehme ich das vor der ersten Fläche befindliche Medium, in dem sich das Object befindet, als von Luft verschieden an, wie z. B. bei einer Wasserimmersion.

Die Bedingungen, denen das System zu genügen hat, sind folgende:

1. Einhaltung einer gewissen Brennweite oder eines gegebenen Arbeitsabstandes bei vorgeschriebener Entfernung des Bildpunktes von der Linse.

2. Achromasie für zwei Stellen des Spectrums.

3. Aufhebung der sphärischen Aberration für eine Farbe.

4. Die Erfüllung der Sinusbedingung, identisch mit der Aufhebung der sphärischen Aberration in zur Axe schwach geneigten Büscheln.

Um diese vier Bedingungen zu gleicher Zeit zu erfüllen, ist man gezwungen, da nur drei Radien zur Verfügung stehen und eine Variation der Dicken hier ohne Belang ist, die Glassorten so auszuwählen, dass, wenn auch nur annähernd, der vierten Bedingung genügt wird.

Es sollen im Folgenden nachstehende Bezeichnungen gebraucht werden: s_k sei der Abstand des Schnittpunktes des an der $k-1^{\text{ten}}$ Fläche gebrochenen Strahles mit der Axe vom

Scheitel der k^{ten} Fläche, entsprechend s'_k die Schnittweite des an der k^{ten} Fläche gebrochenen Strahles, σ_k und σ'_k die Reciproken dieser Grössen. r_k sei der Radius der k^{ten} Fläche, ρ_k sein reciproker Werth, n_k der Brechungsexponent des Mediums zwischen der k^{ten} und $k+1^{\text{ten}}$ Fläche gegen Luft. Die Längen sollen in der Richtung der Bewegung des Lichtes als positiv gezählt werden, mithin convexe Flächen einen positiven, concave einen negativen Radius erhalten.

Die von Abbe eingeführten optischen Invarianten sind folgendermassen definirt:

$$Q_k = n_{k-1}(\rho_k - \sigma_k) = n_k(\rho_k - \sigma'_k).$$

Wir erhalten dann für die ersten Glieder der Aberrationen gemäss der Abbe'schen Herleitungsweise für ein System von m brechenden Flächen folgende Ausdrücke unter Hinweglassung eines constanten Factors:

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 Q_k \left(\frac{dn_k}{n_k} - \frac{dn_{k-1}}{n_{k-1}}\right)$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^3 Q_k \left(\frac{\sigma'_k}{n_k} - \frac{\sigma_k}{n_{k-1}}\right)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{k=m} \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \left(\frac{\sigma'_k}{n_k} - \frac{\sigma_k}{n_{k-1}}\right),$$

wo

$$\frac{h_k}{h_1} = \frac{s_k}{s'_{k-1}} \cdot \frac{s_{k-1}}{s'_{k-2}} \cdots \frac{s_2}{s'_1} = \frac{\sigma'_{k-1}}{\sigma_k} \cdot \frac{\sigma'_{k-2}}{\sigma_{k-1}} \cdots \frac{\sigma'_1}{\sigma_2}$$

ist.

Γ ist das erste Glied der chromatischen Aberration, entsprechend S_2 der sphärischen und S_1 der Bedingung für Einhaltung des Sinusverhältnisses. Die Summation erstreckt sich auf die m Flächen des Systems, also in unserem Falle auf 3. Die Grössen dn sind die Dispersionen, mithin für ein visuell corrigirtes System die Differenzen $n_F - n_C$. Das Medium hinter der k^{ten} Fläche sei Luft.

§. 2.

In erster Annäherung soll nun ein System unendlich dünner Linsen untersucht werden. Werden die Dicken d_k des Mediums n_k Null, so wird, da $s_k = s'_{k-1} - d_k$ ist,

$$\frac{h_k}{h_1} = 1,$$

$$\sigma'_{k-1} = \sigma_k.$$

Ich setze

$$f_1 = \frac{\sigma_2}{n_1} - \frac{\sigma_1}{n_0}$$

$$f_2 = \frac{\sigma_3}{n_2} - \frac{\sigma_2}{n_1}$$

$$f_3 = \sigma'_3 - \frac{\sigma_3}{n_2},$$

mithin:

$$S_1 = Q_1 f_1 + Q_2 f_2 + Q_3 f_3$$

$$S_2 = Q_1^2 f_1 + Q_2^2 f_2 + Q_3^2 f_3.$$

Als Variable sollen nicht wie gewöhnlich die Radien, sondern die optischen Invarianten selbst eingeführt werden. Dann wird

$$\sigma_3 = \sigma'_3 + \frac{n_2 - 1}{n_2} Q_3$$

$$\sigma_2 = \sigma'_3 + \frac{n_2 - 1}{n_2} Q_3 + \frac{n_1 - n_2}{n_1 n_2} Q_2$$

$$\sigma_1 = \sigma'_3 + \frac{n_2 - 1}{n_2} Q_3 + \frac{n_1 - n_2}{n_1 n_2} Q_2 + \frac{n_0 - n_1}{n_0 n_1} Q_1.$$

Die letzte dieser Gleichungen enthält die Beziehung zwischen dem Reciproken des Arbeitsabstandes σ_1 und der Entfernung des Bildpunktes σ'_3, die direct gegeben sind oder aus der Brennweite sich ermitteln lassen.

Ferner wird:

$$f_3 = \frac{n_2-1}{n_2}\left(\sigma_3' - \frac{Q_3}{n_2}\right)$$

$$f_2 = \frac{n_1-n_2}{n_1 n_2}\left(\sigma_3' + \frac{n_2-1}{n_2} Q_3 - \frac{Q_2}{n_1}\right)$$

$$f_1 = \frac{n_0-n_1}{n_0 n_1}\left(\sigma_3' + \frac{n_2-1}{n_2} Q_3 + \frac{n_1-n_2}{n_1 n_2} Q_2 - \frac{Q_1}{n_0}\right).$$

Dies eingesetzt ergibt S_1 und S_2 als Functionen von Q_1, Q_2, Q_3. Die Bedingung dafür, dass das System ein achromatisches wird, ist:

$$\Gamma = Q_1\left(\frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn_0}{n_0}\right) + Q_2\left(\frac{dn_2}{n_2} - \frac{dn_1}{n_1}\right) + Q_3\left(-\frac{dn_2}{n_2}\right) = 0.$$

Ferner wollen wir annehmen, dass die Abstände des Object- und des Bildpunktes von den Linsen gegeben seien. Dann haben wir, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn_0}{n_0} = N_1, \quad \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_0} = L_1$$

$$\frac{dn_2}{n_2} - \frac{dn_1}{n_1} = N_2, \quad \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} = L_2$$

$$-\frac{dn_2}{n_2} = N_3, \quad 1 - \frac{1}{n_2} = L_3,$$

die beiden Gleichungen:

$$Q_1 N_1 + Q_2 N_2 + Q_3 N_3 = 0$$

$$Q_1 L_1 + Q_2 L_2 + Q_3 L_3 = \sigma_1 - \sigma_3'.$$

Hieraus folgt, wenn $\sigma_1 - \sigma_3' = \varepsilon$ gesetzt wird:

$$Q_1 = +\varepsilon \frac{N_2}{N_2 L_1 - N_1 L_2} + Q_3 \frac{N_3 L_2 - N_2 L_3}{N_2 L_1 - N_1 L_2}$$

$$Q_2 = -\varepsilon \frac{N_1}{N_2 L_1 - N_1 L_2} + Q_3 \frac{N_1 L_3 - N_3 L_1}{N_2 L_1 - N_1 L_2}.$$

Tragen wir diese Werthe in f_1 und f_2 ein und setzen.

$$a_1 = +\varepsilon \frac{N_3}{N_2L_1-N_1L_2}, \quad b_1 = \frac{N_3L_2-N_2L_3}{N_2L_1-N_1L_2}.$$

$$a_2 = -\varepsilon \frac{N_1}{N_2L_1-N_1L_2}, \quad b_2 = \frac{N_1L_3-N_3L_1}{N_2L_1-N_1L_2},$$

so wird:

$$f_1 = L_1\left(\sigma_3'+L_2a_2-\frac{a_1}{n_0}\right)+L_1\left(L_3+L_2b_2-\frac{b_1}{n_0}\right)Q_3$$

$$f_2 = L_2\left(\sigma_3'-\frac{a_2}{n_1}\right)+L_2\left(L_3-\frac{b_2}{n_1}\right)Q_3.$$

Wir führen ein:

$$h_1 = L_1\left(\sigma_3'+L_2a_2-\frac{a_1}{n_0}\right), \quad k_1 = L_1\left(L_3+L_2b_2-\frac{b_1}{n_0}\right)$$

$$h_2 = L_2\left(\sigma_3'-\frac{a_2}{n_1}\right), \quad k_2 = L_2\left(L_3-\frac{b_2}{n_1}\right)$$

$$h_3 = L_3\sigma_3' \quad k_3 = -\frac{L_3}{n_2}$$

und es wird die Bedingung für die Erfüllung des Sinusverhältnisses:

$$S_1 = 0 = (a_1+b_1Q_3)(h_1+k_1Q_3)+(a_2+b_2Q_3)(h_2+k_2Q_3) + Q_3(h_3+k_3Q_3)$$

oder

$$S_1 = 0 = AQ_3^2+BQ_3+C,$$

wo:

$$A = b_1k_1+b_2k_2+b_3k_3$$
$$B = b_1h_1+b_2h_2+h_3+a_1k_1+a_2k_2$$
$$C = a_1h_1+a_2h_2.$$

Diese Gleichung gibt den Werth für Q_3 im Falle der Erfüllung der Sinusbedingung.

Entsprechend wird die Aufhebung der sphärischen Abweichung dargestellt durch die Gleichung:

$$S_2 = 0 = (a_1+b_1Q_3)^2(h_1+k_1Q_3)+(a_2+b_2Q_3)^2(h_2+k_2Q_3) + Q_3^2(h_3+k_3Q_3)$$

oder

$$S_2 = 0 = \mathfrak{A}Q_3^3 + \mathfrak{B}Q_3^2 + \mathfrak{C}Q_3 + \mathfrak{D},$$

wo

$$\mathfrak{A} = b_1^2 k_1 + b_2^2 k_2 + k_3$$
$$\mathfrak{B} = b_1^2 h_1 + b_2^2 h_2 + h_3 + 2a_1 b_1 k_1 + 2a_2 b_2 k_2$$
$$\mathfrak{C} = a_1^2 k_1 + a_2^2 k_2 + 2a_1 b_1 h_1 + 2a_2 b_2 h_2.$$
$$\mathfrak{D} = a_1^2 h_1 + a_2^2 h_2.$$

Mittelst der Substitution:

$$Q_3 = x - \frac{\mathfrak{B}}{3\mathfrak{A}}$$

gelangt man zu der Gleichung:

$$x^3 + x\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} - \frac{\mathfrak{B}^2}{3\mathfrak{A}^2}\right) + \frac{2\mathfrak{B}^3}{27\mathfrak{A}^3} - \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{3\mathfrak{A}^2} + \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} = 0,$$

deren Auflösung uns einen Werth von Q_3 ergibt, aus dem die übrigen Invarianten sich berechnen lassen, die zusammen ein System ergeben, das frei von sphärischer Aberration ist.

Mit dem aus der Gleichung für S_1 oder S_2 errechneten Q_3 bildet man nun die Ausdrücke:

$$Q_1 = a_1 + b_1 Q_3$$
$$Q_2 = a_2 + b_2 Q_3$$
$$f_1 = h_1 + k_1 Q_3$$
$$f_2 = h_2 + k_2 Q_3$$
$$f_3 = h_3 + k_3 Q_3$$
$$S_1 = \Sigma Q_k f_k, \quad S_2 = \Sigma Q_k^2 f_k$$

und findet entweder S_1 oder S_2 annullirt.

Aus den Invarianten ergeben sich die reciproken Radien nach folgenden Gleichungen:

$$\rho_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{Q_1}{n_0} + \sigma_1$$

$$\rho_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{Q_2}{n_1} + \sigma_2$$

$$\rho_3 = \frac{1}{r_3} = \frac{Q_3}{n_2} + \sigma_3.$$

Durch Summation der drei Gleichungen für die Factoren f erhält man:

$$f_1+f_2+f_3 = \sigma_3' - \frac{\sigma_1}{n_0}$$
$$= h_1+h_2+h_3+Q_3(k_1+k_2+k_3).$$

Da $\sigma_3' - \frac{\sigma_1}{n_0}$ ein gegebener Werth ist, muss sein:

$$h_1+h_2+h_3 = \sigma_3' - \frac{\sigma_1}{n_0}$$
$$k_1+k_2+k_3 = 0.$$

Diese Gleichungen dienen zur Controlle bei der numerischen Rechnung. Eine wesentliche Vereinfachung erhalten wir, wenn wir $n_0 = 1$ setzen, also die Rechnung für ein Trockensystem durchführen.

Dann wird.

$$N_1+N_2+N_3 = 0$$
$$L_1+L_2+L_3 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} N_1L_3-N_3L_1 \\ N_2L_1-N_1L_2 \\ N_3L_2-N_2L_3 \end{matrix}\right\} = \frac{dn_2-dn_1}{n_1n_2} + \frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn_2}{n_2},$$

folglich:

$$b_1 = b_2 = +1.$$

Die Coëfficienten der cubischen Gleichung für S_2 werden:

$$\mathfrak{A} = 0$$
$$\mathfrak{B} = \sigma_3' - \sigma_1 + 2a_1k_1 + 2a_2k_2$$
$$\mathfrak{C} = a_1^2k_1 + a_2^2k_2 + 2a_1h_1 + 2a_2h_2$$
$$\mathfrak{D} = a_1^2h_1 + a_2^2h_2$$

und entsprechend die der quadratischen Gleichung für S_1:

$$A = 0$$
$$B = \sigma_3' - \sigma_1 + a_1k_1 + a_2k_2$$
$$C = a_1h_1 + a_2h_2.$$

Im Falle eines Trockensystems bekommt man also für Q_3 zwei Werthe, welche die sphärische Aberration aufheben, und

einen Werth, der die Sinusbedingung erfüllt. Die Berechnung der Invarianten und Radien geschieht in der vorher angegebenen Art und Weise.

Für die reciproke Brennweite φ eines Trockensystems finden wir:

$$\varphi = \frac{n_1-1}{n_1}(Q_1-Q_2)+\frac{n_2-1}{n_2}(Q_2-Q_3).$$

§. 3.

Die abgeleiteten Formeln ermöglichen eine schnelle Berechnung der Radien aus den Brechungsquotienten der gegebenen Glassorten und Abständen des Object- und Bildpunktes von dem System. Da man bei beliebig gewählten Gläsern von vorneherein nicht darauf rechnen kann, S_1 und S_2 gleichzeitig annullirt zu erhalten, ist man gezwungen, um diesem Optimum möglichst nahe zu kommen, die Glassorten zu variiren. Man wird z. B. bei einem Trockensystem die quadratische Gleichung für Q_3 auflösen und so ein Werthepaar erhalten, das S_2 zu Null macht, und dann nach S_1 mittelst Veränderung des einen Glases interpoliren. Schliesslich gelangt man zu einer Combination, bei der S_2 streng, S_1 ungefähr Null wird.

Während nun bei dem zweitheiligen Fernrohrobjectiv für die gewöhnlichen Öffnungsverhältnisse, die bei mittleren Brennweiten $^1/_{10}$ in der Regel nicht übersteigen, eine erste Annäherung, bei der die Dicken vernachlässigt sind, dem besten Correctionszustande des Systems schon sehr nahe kommt, zeigen sich selbst bei den hier behandelten einfachen Mikroskopobjectiven in Folge der Einführung der Flächenabstände ziemlich starke Abweichungen von den geforderten Bedingungen. Da man in der technischen Ausführung der Linsen nicht unter ein gewisses Mass der Dicke, etwa 1 *mm* für die Zerstreuungslinse des verkitteten Systems und 1·5 *mm* für die Sammellinse, heruntergehen kann und man anderseits bei Brennweiten von 30 *mm* schon auf Kittradien von ungefähr 6—7 *mm* geführt wird, lässt selbst die Einführung der ersten Potenzen des Quotienten: Dicke durch Schnittweite, noch einige Abweichungen zurück. Diese lassen sich jedoch leicht mittelst trigonometrischer Durchrechnung aufheben, die sich, wie sich

später zeigen wird, zwecks besserer Vertheilung der Aberrationsreste meistens nicht vermeiden lässt.

Es sollen nun die Veränderungen der Grössen σ_3', Γ, S_1 und S_2 berechnet werden, die durch Einführung der Dicken d_1 und d_2 unter Beibehaltung der berechneten Q entstehen. Soweit die in erster Näherung ermittelten Variabeln vorkommen, sollen sie überstrichen werden. In Folge der Gleichungen:

$$s_2 = s_1' - d_1$$
$$s_3 = s_2' - d_2$$

wird:

$$\sigma_2 = \sigma_1' + d_1 \sigma_1'^2$$
$$\sigma_3 = \sigma_2' + d_2 \sigma_2'^2.$$

Unter Berücksichtigung dieser Relationen erhält man, wenn man unter Vernachlässigung höherer Glieder für den Factor von d_1 und d_2 σ_2^2, beziehungsweise σ_3^2 setzt:

$$Q_2 = \bar{Q}_2 - n_1 d_1 \sigma_2^2$$
$$Q_3 = \bar{Q}_3 - n_1 d_1 \sigma_2^2 - n_2 d_2 \sigma_2^2$$
$$f_2 = \bar{f}_2 - \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1 n_2^2} d_1 \sigma_2^2$$
$$f_3 = \bar{f}_3 - n_1 \frac{1 - n_2^2}{n_2} d_1 \sigma_2^2 - \frac{1 - n_2^2}{n_2} d_2 \sigma_3^2$$
$$\frac{h_2}{h_1} = 1 - d_1 \sigma_2, \quad \frac{h_3}{h_1} = (1 - d_1 \sigma_2)(1 - d_2 \sigma_3).$$

Bilden wir mit diesen Werthen die ersten Glieder der Aberrationen und die Bildweite, so wird:

$$\sigma_3' = \bar{\sigma}_3' + n_1 d_1 \sigma_2^2 + n_2 d_2 \sigma_3^2$$
$$\Gamma = \bar{Q}_1 N_1 + (\bar{Q}_2 - n_1 d_1 \sigma_2^2) N_2 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + (\bar{Q}_3 - n_1 d_1 \sigma_2^2 - n_2 d_2 \sigma_2^2) N_3 \left(\frac{h_3}{h_1}\right)^2$$
$$S_1 = \bar{Q}_1 \bar{f}_1 + (\bar{Q}_2 - n_1 d_1 \sigma_2^2) \left(\bar{f}_2 - \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1 n_2^2} d_1 \sigma_2^2\right) \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3$$
$$+ (\bar{Q}_3 - n_1 d_1 \sigma_2^2 - n_2 d_2 \sigma_3^2) \left(\bar{f}_3 - n_1 \frac{1 - n_2^2}{n_2} d_1 \sigma_2^2 - \frac{1 - n_2^2}{n_2} d_2 \sigma_3^2\right) \left(\frac{h_3}{h_1}\right)^3$$

$$S_2 = \bar{Q}_1^2 f_1 + (\bar{Q}_2 - n_1 d_1 \sigma_2^2)^2 \left(\bar{f}_2 - \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1 n_2^2} d_1 \sigma_2^2\right)\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^4$$

$$+ (\bar{Q}_3 - n_1 d_1 \sigma_2^2 - n_2 d_2 \sigma_3^2)^2 \left(\bar{f}_3 - n_1 \frac{1-n_2^2}{n_2} d_1 \sigma_2^2 - \frac{1-n_2^2}{n_2} d_2 \sigma_3^2\right)\left(\frac{h_3}{h_1}\right)^4.$$

Für den praktischen Gebrauch dürfte die directe Berechnung mittelst einer Durchrechnung des paraxialen Strahles bei den ermittelten Radien und angenommenen Dicken ebenso schnell zum Ziele führen, wie die Anwendung der obigen Formeln.

Aus den berechneten Abweichungen $\sigma_3' - \bar{\sigma}_3'$, $\Gamma - \bar{\Gamma}$, $S_2 - \bar{S}_2$ lassen sich nun Correctionen der drei Invarianten $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$ berechnen, welche drei neue Q ergeben, so dass die Aberrationen aufgehoben werden und der Bildabstand dem ursprünglich gegebenen gleich wird. Wir wollen hierbei S_1 ausser Acht lassen, da die Erfüllung der Sinusbedingung in erster Annäherung ausreicht.

Beschränken wir uns auf die ersten Potenzen der Differentiale der Grössen Q, so wird:

$$\sigma_3' = \bar{\sigma}_3' + \Delta Q_1 \frac{\partial \sigma_3'}{\partial Q_1} + \Delta Q_2 \frac{\partial \sigma_3'}{\partial Q_2} + \Delta Q_3 \frac{\partial \sigma_3'}{\partial Q_3}$$

$$\Gamma = \bar{\Gamma} + \Delta Q_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial Q_1} + \Delta Q_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial Q_2} + \Delta Q_3 \frac{\partial \Gamma}{\partial Q_3}$$

$$S_2 = \bar{S}_2 + \Delta Q_1 \frac{\partial S_2}{\partial Q_1} + \Delta Q_2 \frac{\partial S_2}{\partial Q_2} + \Delta Q_3 \frac{\partial S_2}{\partial Q_3}.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich die drei Unbekannten $\Delta Q_1, \Delta Q_2, \Delta Q_3$ berechnen, die zu $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3$ addirt, die definitiven Werthe ergeben. Wir haben zunächst die partiellen Differentialquotienten der links stehenden Grössen nach den drei Variabeln zu bilden.

Aus der Gleichung:

$$\sigma_3' = Q_1\left(\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1}\right) + Q_2\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_0}\right) +$$

$$+ Q_3\left(\frac{1}{n_2} - 1\right) + \sigma_1 + d_1 \sigma_1'^2 + d_2 \sigma_2'^2$$

folgt:

$$\frac{\partial \sigma_3'}{\partial Q_1} = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1} + 2 d_1 \sigma_1' \frac{\partial \sigma_1'}{\partial Q_1} + 2 d_2 \sigma_2' \frac{\partial \sigma_2'}{\partial Q_1}$$

$$\frac{\partial \sigma_3'}{\partial Q_2} = \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_0} + 2 d_2 \sigma_2' \frac{\partial \sigma_2'}{\partial Q_2}$$

$$\frac{\partial \sigma_3'}{\partial Q_3} = \frac{1}{n_2} - 1$$

und da:

$$\frac{\partial \sigma_1'}{\partial Q_1} = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1}, \quad \frac{\partial \sigma_2'}{\partial Q_1} = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1}, \quad \frac{\partial \sigma_2'}{\partial Q_2} = \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}$$

bis auf Glieder höherer Ordnung ist,

$$\frac{\partial \sigma_3'}{\partial Q_1} = \left(\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1}\right)(1 + 2 d_1 \sigma_2 + 2 d_2 \sigma_3)$$

$$\frac{\partial \sigma_3'}{\partial Q_2} = \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right)(1 + 2 d_2 \sigma_3).$$

Es sind hier noch die Factoren der d differenzirt worden, um den Anschluss des zu errechnenden σ_3' an den gegebenen Bildabstand möglichst genau herbeizuführen, obgleich es für die Mikroskopobjective geringer Apertur nicht so sehr von Belang ist, ob ihre Tubuslänge um eine Anzahl Millimeter geändert wird.

Die Differentiation der Gleichung für die chromatische Aberration:

$$\Gamma = Q_1 N_1 + Q_2 N_2 (1 - 2 d_1 \sigma_2) + Q_3 N_3 (1 - 2 d_1 \sigma_2 - 2 d_2 \sigma_3)$$

ergibt:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial Q_1} = N_1 - 2[d_1 Q_2 N_2 + (d_1 + d_2) Q_3 N_3]\left(\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1}\right)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial Q_2} = N_2 (1 - 2 d_1 \sigma_2) - 2 d_2 Q_3 N_3 \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial Q_3} = N_3 (1 - 2 d_1 \sigma_2 - 2 d_2 \sigma_3).$$

In den meisten Fällen wird man übrigens hier die mit d_1 und d_2 multiplicirten Glieder, welche die relativ kleinen Grössen σ und Q enthalten, vernachlässigen können.

Die Gleichung für die sphärische Aberration wird, wenn man von dem Arbeitsabstand $1/\sigma_1$ ausgeht:

$$S_2 = Q_1^2\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_1}\right)\left(\frac{Q_1}{n_1}-\sigma_1\right)+$$
$$+Q_2^2\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)\left(\frac{Q_2}{n_2}-Q_1\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_1}\right)-\sigma_1-d_1\sigma_1'^2\right)(1-4d_1\sigma_1')$$
$$+Q_3^2\left(\frac{1}{n_2}-1\right)\left(Q_3-Q_2\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)-Q_1\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_1}\right)-\right.$$
$$\left.-\sigma_1-d_1\sigma_1'^2-d_2\sigma_2'^2\right)(1-4\,d_1\sigma_1'-4\,d_2\sigma_2').$$

Dies partiell nach den drei Invarianten differenzirt, gibt:

$$\frac{\partial S_2}{\partial Q_1}=\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_1}\right)\left\{3\,\frac{Q_1^2}{n_1}-2Q_1\sigma_1-Q_2^2\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)-\right.$$
$$-Q_3^2\left(\frac{1}{n_2}-1\right)+8d_1\sigma_2Q_2^2\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)$$
$$+4\,d_1\sigma_2Q_3^2\left(\frac{1}{n_2}-1\right)+8\,d_2\sigma_3Q_3^2\left(\frac{1}{n_2}-1\right)-4\,d_1\,\frac{Q_2^3}{n_2}\left(\frac{1}{n_2}-\frac{1}{n_2}\right)$$
$$\left.-4\,(d_1+d_2)\left(\frac{1}{n_2}-1\right)Q_3^3+4\left(\frac{1}{n_2}-1\right)\sigma_3Q_3^2\right\}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial Q_2}=\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)\left\{\left[2\,\frac{Q_2^2}{n_2}-2Q_2Q_1\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_1}\right)-2Q_2\sigma_1+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{Q_2^2}{n_2}-Q_3^2\left(\frac{1}{n_2}-1\right)\right](1-4\,d_1\sigma_2)$$
$$\left.+8\,d_2\sigma_3Q_3^2\left(\frac{1}{n_2}-1\right)-4\,d_2Q_3^3\left(\frac{1}{n_2}-1\right)\right\}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial Q_3}=\left(\frac{1}{n_2}-1\right)\left\{3Q_3-Q_2\left(\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)-\right.$$
$$\left.-Q_1\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_1}\right)-\sigma_1\right\}Q_3(1-4\,d_1\sigma_2-4\,d_2\sigma_3).$$

Eine bedeutende Vereinfachung tritt ein, wenn man sich auf die Glieder beschränkt, die von d_1 und d_2 unabhängig sind. Dann wird:

$$\frac{\partial S_2}{\partial Q_1} = \left(\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1}\right) \left\{ 3 \frac{Q_1^2}{n_1} - 2Q_1\sigma_1 - Q_3^2\left(\frac{1}{n_2} - 1\right) - \right.$$

$$\left. - Q_2^2\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right) \right\}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial Q_2} = \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right) \left\{ 3 \frac{Q_2^2}{n_2} - 2Q_2\sigma_2 - Q_3^2\left(\frac{1}{n_2} - 1\right) \right\}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial Q_3} = \left(\frac{1}{n_2} - 1\right) \left\{ 3Q_3^2 - 2Q_3\sigma_3 \right\}.$$

Zur Verwerthung dieser Ausdrücke hat man entweder mit den aus der Rechnung für unendlich dünne Linsen gefundenen Radien und den angenommenen Dicken die neuen Invarianten und reciproken Schnittweiten zu berechnen oder den Unterschied zwischen diesen und den zuerst gefundenen aus den im Anfang dieses Paragraphen abgeleiteten Formeln zu ermitteln. Die neuen Werthe trägt man in die Ausdrücke für die partiellen Differentialquotienten ein; S_2 und Γ sind Null, σ_3' dem Reciproken des gegebenen Bildabstandes gleich zu setzen, $\overline{S_2}, \overline{\Gamma}, \overline{\sigma_3'}$ sind ähnlich wie die Invarianten zu ermitteln.

§. 4.

Die bisher abgeleiteten Formeln sollen nun auf zwei Beispiele Anwendung finden. Zuerst soll ein System mit Wasserimmersion ermittelt werden, wie es praktisch für biologische und zoologische Untersuchungen zu verwerthen ist, die sich auf grössere Infusorien u. s. w. beziehen, und bei denen Vergrösserungen von etwa 60 bis 70 ausreichend sind.

Das vor der ersten brechenden Fläche befindliche Medium soll also Wasser sein, für welches ich folgende Brechungsexponenten nach Fraunhofer annehme:

$$n_0^C = 1{\cdot}33171$$
$$n_0^D = 1{\cdot}33358 \qquad dn_0 = +0{\cdot}00609$$
$$n_0^F = 1{\cdot}33782$$

Diese Zahlen gelten für eine mittlere Temperatur von ungefähr 18° Celsius. Sämmtliche numerische Rechnungen beziehen sich auf die *D*-Linie.

Als erstes Medium ist für dieses System ein Borosilicat-Crown vom Typus O. 802 der Jenaer Gläser angenommen, das

sich durch seinen niedrigen Brechungsexponenten auszeichnet. Die genauen Werthe sind:

O. 2011 $n_1^C = 1\cdot49462$
$n_1^D = 1\cdot49692$ $dn_1 = +0\cdot00763$
$n_1^F = 1\cdot50225$

Als zweites Medium ist nun ein Glas so auszuwählen, dass die Abweichung von der Sinusbedingung möglichst klein wird. Ich wählte ein leichtes Silicat-Flint vom Typus O. 184 mit den Brechungsexponenten:

O. 1766 $n_2^C = 1\cdot58607$
$n_2^D = 1\cdot59025$ $dn_2 = +0\cdot01459$
$n_2^F = 1\cdot60066$

Für einen Bildabstand von 180 *mm* und einen Arbeitsabstand von 40 *mm* ergab sich als Gleichung für die Aufhebung der sphärischen Abweichung erster Ordnung:

$$+2\cdot608Q_3^3+0\cdot9074Q_3^2+0\cdot1023Q_3+0\cdot003773 = 0$$

bezüglich:

$$x^3-0\cdot001120x+0\cdot0000170 = 0.$$

Diese Gleichung hat nur eine reelle Wurzel:

$$x = -0\cdot0394,$$

woraus folgt:

$$Q_3 = -0\cdot1554$$
$$Q_2 = -0\cdot3268$$
$$Q_1 = -0\cdot1746$$
$$S_1 = -0\cdot00251, \qquad S_2 = 0$$

Als zweiten Versuch nahm ich für die zweite Linse einen Baryt-Leichtflint vom Typus O. 522 mit den Exponenten:

O. 522 $n_2^C = 1\cdot55202$
$n_2^D = 1\cdot55537$ $dn_2 = +0\cdot01154$
$n_2^F = 1\cdot56356$

Hier ergab sich folgende Gleichung für Q_3:

$$+2\cdot576 Q_3^3 + 0\cdot8786 Q_3^2 + 0\cdot1032 Q_3 + 0\cdot003857 = 0$$

und

$$x^3 + 0\cdot0001298 x - 0\cdot001201 = 0.$$

Die eine reelle Wurzel ist:

$$Q_3 = -0\cdot0730$$
$$Q_2 = -0\cdot2642$$
$$Q_1 = +0\cdot1360$$
$$S_1 = +0\cdot000956 \qquad S_2 = 0$$

Derjenige Werth von n_2 und dn_2, der $S_1 = 0$ macht, liegt also in den durch diese beiden Glassorten ermittelten Grenzen. Als passendes Glas wäre etwa ein Leichtflint mit etwa 1·57 Brechungsexponent und einer Dispersion von etwa +0·0130 zu wählen. Da jedoch gerade an dieser Stelle eine Lücke in der Reihenfolge der Gläser vorhanden ist, die sich von 0·0127 bis 0·0133 in der Dispersion erstreckt, habe ich für die zweite Linse ein Baryt-Leichtflint vom Typus O. 578 genommen mit den Brechungsexponenten:

O. 1898 $\quad n_2^C = 1\cdot58036$

$n_2^D = 1\cdot58404 \qquad dn_2 = +0\cdot01264$

$n_2^F = 1\cdot59300$

Um die starke Krümmung des Kittradius zu vermeiden, habe ich die Rechnung für den Arbeitsabstand 50 *mm* durchgeführt und gefunden:

$$N_1 = +0\cdot000530 \qquad \log L_1 = 8\cdot9129_n$$
$$N_2 = +0\cdot002882 \qquad \log L_2 = 8\cdot5651_n$$
$$N_3 = -0\cdot007978 \qquad \log L_3 = 9\cdot5666$$

$$\log a_1 = 9\cdot5319 \qquad \log b_1 = 0\cdot5510$$
$$\log a_2 = 8\cdot7964_n \qquad \log b_2 = 0\cdot3251$$

$$h_1 = +0\cdot02024 \qquad k_1 = +0\cdot1944$$
$$h_2 = -0\cdot00174 \qquad k_2 = +0\cdot0383$$
$$h_3 = +0\cdot00205 \qquad k_3 = -0\cdot2327$$

$$+2\cdot397 Q_3^3 + 0\cdot7107 Q_3^2 + 0\cdot07213 Q_3 + 0\cdot002338 = 0$$
$$x^3 + 0\cdot000787 x - 0\cdot0000684 = 0$$

$$Q_3 = -0\cdot06428$$
$$Q_2 = -0\cdot1985$$
$$Q_1 = +0\cdot1117$$

$$S_1 = +0\cdot00061 \qquad S_2 = 0 \qquad \Gamma = 0$$

$$\rho_1 = +0\cdot06381 \qquad r_1 = +15\cdot69$$
$$\rho_2 = -0\cdot1434 \qquad r_2 = -\ \ 6\cdot971$$
$$\rho_3 = -0\cdot05872 \qquad r_3 = -17\cdot01$$

Mit den so ermittelten Radien wurden nun einige Strahlen fünfstellig trigonometrisch, bezüglich nach der Formel für axennahe Strahlen durchgerechnet, und zwar die drei Axenstrahlen für *C*, *D*, *F*, dann drei Strahlen für *D*, die unter 2°, 4°, 6° gegen die Axe geneigt vom Objectpunkt ausgehen. Zugleich wurde das Convergenzverhältniss — Sinus des Neigungswinkels vor der ersten Brechung durch Sinus des Neigungswinkels gegen die Axe nach der letzten Brechung — gebildet. In der folgenden Zusammenstellung sind die Schnittweiten auf der Axe und die Logarithmen der Sinusverhältnisse angegeben.

Strahl	Schnitt-weite	log Sinus-verhältniss
C-Axe	179·71	0·5556
F-Axe	179·68	0·5555
D-Axe	179·46	0·5550
D 2°	179·57	0·5548
D 4°	184·75	0·5655
D 6°	223·56	0·6434

Hieraus ergibt sich, dass das System nur für Strahlen von etwa 3° Neigung genügend sphärisch auscorrigirt wäre; die kleine Zone im Verlauf des Convergenzverhältnisses rührt von dem Fehlerrest in S_1 her. Für den weiteren Verlauf der Rechnung habe ich den Dicken folgende Werthe beigelegt:

$$d_1 = +1\cdot5, \qquad d_2 = +1\cdot0$$

und erhalte mit diesen Werthen und den oben gefundenen Radien

$$\sigma' = +0\cdot0063367, \qquad s_3' = +157\cdot81.$$

In guter Übereinstimmung mit der directen Rechnung ergab die Benützung der Näherungsformeln:

$$\overline{\sigma_3'} = +0\cdot006359, \qquad \overline{\Gamma} = +0\cdot0000228$$

$$\overline{S}_2 = +0\cdot00000323$$

$$\log \overline{Q}_1 = 9\cdot0480 \qquad \log \overline{Q}_2 = 9\cdot2983_n \qquad \log \overline{Q}_3 = 8\cdot8137_n.$$

Hieraus folgen nachstehende Werthe für die Logarithmen der partiellen Differentialquotienten:

$$\log \frac{\partial S_2}{\partial Q_1} = 7\cdot3904 \quad \log \frac{\partial S_2}{\partial Q_2} = 7\cdot4482 \quad \log \frac{\partial S_2}{\partial Q_3} = 7\cdot6292n$$

$$\log \frac{\partial \Gamma}{\partial Q_1} = 6\cdot6631 \quad \log \frac{\partial \Gamma}{\partial Q_2} = 7\cdot4680 \quad \log \frac{\partial \Gamma}{\partial Q_3} = 7\cdot9309n$$

$$\log \frac{\partial \sigma_3'}{\partial Q_1} = 8\cdot8818 \quad \log \frac{\partial \sigma_3'}{\partial Q_2} = 8\cdot5490 \quad \log \frac{\partial \sigma_3'}{\partial Q_3} = 9\cdot5666n$$

Die Bestimmungsgleichungen für die drei Correctionen werden:

$$7\cdot3904\,\Delta Q_1 + 7\cdot4482\,\Delta Q_2 + 7\cdot6292_n\,\Delta Q_3 = 4\cdot5092_n$$

$$6\cdot6631\,\Delta Q_1 + 7\cdot4680\,\Delta Q_2 + 7\cdot9309_n\,\Delta Q_3 = 5\cdot3579_n$$

$$8\cdot8818\,\Delta Q_1 + 8\cdot5490\,\Delta Q_2 + 9\cdot5666_n\,\Delta Q_3 = 6\cdot9047_n$$

deren Auflösung ergibt:

$$\Delta Q_1 = +0\cdot00354$$

$$\Delta Q_2 = +0\cdot00018$$

$$\Delta Q_3 = +0\cdot002925$$

Hieraus leite ich die definitiven Invarianten und Radien ab:

$$Q_1 = +0\cdot11522$$

$$Q_2 = -0\cdot19855$$

$$Q_3 = -0\cdot062194$$

$$\rho_1 = +0\cdot06640 \qquad r_1 = +15\cdot060$$

$$\rho_2 = -0\cdot14305 \qquad r_2 = -\ 6\cdot991$$

$$\rho_3 = -0\cdot05666 \qquad r_3 = -17\cdot65$$

Die Bestimmung der übrigbleibenden Fehler ergibt:

$$S_2 = +0\cdot0000010, \qquad \Gamma = +0\cdot000006.$$

Mit diesen neuen Radien sind nun dieselben Strahlen durch das System gerechnet worden, wie für die unendlich dünne Linse; ganz entsprechend werden die Schnittweiten auf der Axe und die Logarithmen des Convergenzverhältnisses:

Strahl	Schnitt-weite	log Sinus-verhältniss
C-Axe	180·84	0·5439
F-Axe	180·84	0·5438
D-Axe	180·63	0·5434
D 2°	180·84	0·5434
D 4°	186·26	0·5545
D 6°	240·27	0·6590
C 4°	186·12	0·5542
F 4°	188·33	0·5594

Wollte man dies System ohne jede weitere trigonometrische Ausgleichung in Gebrauch nehmen, so müsste man sich auf eine Apertur von etwa $^1/_{16}$ beschränken. Wesentlich weiter kommt man jedoch, wenn man die Fehlerreste gegen einander ausgleicht; nach meinen Angaben ist in der optischen Werkstätte von Carl Zeiss ein derartiges Objectiv[1] ausgeführt worden, das bei einer Apertur von 0·11 einen fast apochromatischen Correctionszustand besitzt und entsprechend sehr gute Resultate, selbst ohne eine den Gang der schiefen Büschel in Bezug auf Wölbung und Astigmatismus regulirenden Vorderblende, ergibt. In der Regel dürfte eine Veränderung des algebraisch errechneten Kittradius schon eine wesentliche Verbesserung herbeiführen.

Die Zusammenstellung der Schnittweiten zeigt, dass die chromatische Differenz der sphärischen Aberration, ebenso wie die chromatische Vergrösserungsdifferenz, in mässigen Grenzen gehalten ist, entsprechend den partiellen Dispersionen

[1] Eine ausführlichere Beschreibung dieses Objectives, welches unter dem Namen Planctonsucher von der optischen Werkstätte von Carl Zeiss fortlaufend hergestellt wird, findet sich in der Zeitschrift für wissenschaftliche Mikroskopie und mikroskopische Technik, Bd. XV, Heft 1.

der einzelnen Medien. Wir erhalten nämlich für den Quotienten $\frac{n_F - n_D}{n_F - n_C}$ bei den einzelnen Substanzen folgende Werthe:

Wasser: 0·693, O. 2011: 0·698, O. 1898: 0·710.

§. 5.

Eine zweite Anwendung sollen die Formeln des §. 2 und 3 auf ein Trockensystem finden, wie es ausschliesslich bei schwachen Vergrösserungen angewendet wird. Die Brennweite soll 30 *mm* betragen, der Bildabstand 180 *mm*, ungefähr dem Zeiss'schen Mikroskopobjectiv a_3 entsprechend; der Objectabstand wird mithin 36 *mm*. Man hat nun wohl bei diesen einfachen Objectiven bisher alte Gläser verwendet, etwa ein Crown von 1·51 und ein Flint von 1·63 Brechungsexponent. Hier soll statt des Crown mit dem gewöhnlichen niedrigen Index ein neues Jenaer Glas eingeführt werden, und zwar das schwere Barium-Silicatcrown vom Typus O. 211, dessen Anwendung sich in den verschiedensten Zweigen der praktischen Optik, vorzüglich bei der Construction der neueren anastigmatischen photographischen Objective, als äusserst nutzbringend erwiesen hat. Als zweites Glas soll ein Silicat-Flint genommen werden. Je nach der Stellung der beiden Gläser zu einander haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, die hier getrennt und gleichwerthig behandelt werden sollen.

1. Crown voraus.

Als erstes Glas nehme ich an das schwere Barium-Silicat-Crown:

O. 1356 $n_1^C = 1 \cdot 57039$

$n_1^D = 1 \cdot 57332 \qquad dn_1 = +0 \cdot 00998$

$n_1^F = 1 \cdot 58037$

Der erste Versuch einer Combination mit dem schweren Silicat-Flint

O. 2328 $n_2^C = 1 \cdot 70269$

$n_2^D = 1 \cdot 70940 \qquad dn_2 = +0 \cdot 02376$

$n_2^F = 1 \cdot 72645$

ergab für die Wurzeln der quadratischen Gleichung für Q_3, die auf $S_2 = 0$ führen, imaginäre Werthe, während die Bedingung $S_1 = 0$ natürlich durch einen Werth von Q_3 dargestellt werden konnte.

Für die folgende Rechnung habe ich schliesslich als zweites Glas eingeführt:

$$\text{O. 1815} \qquad n_2^C = 1\cdot61572$$
$$n_2^D = 1\cdot62059 \qquad dn_2 = +0\ 01714$$
$$n_2^F = 1\cdot63286$$

ein gewöhnliches gutes Silicat-Flint, dem dense Flint von Chance Bros. genau entsprechend. Trotz des nicht grossen Unterschiedes im Brechungsexponenten beträgt die ν-Differenz doch 21.

Aus den zu Grunde gelegten Dimensionen folgt:

$$\sigma_1 = -0\cdot027778, \qquad \sigma_3' = +0\cdot005556$$

und die Formeln ergeben wie im vorigen Paragraphen:

$$\log N_1 = 7\cdot8023 \qquad \log L_1 = 9\cdot5616_n$$
$$\log N_2 = 7\cdot6265 \qquad \log L_2 = 8\cdot2681_n$$
$$\log N_3 = 8\cdot0243 \qquad \log L_3 = 9\cdot5831$$

$$h_1 = +0\cdot03307 \qquad k_1 = +0\cdot2319$$
$$h_2 = -0\cdot00185 \qquad k_2 = +0\cdot0047$$
$$h_3 = +0\cdot00213 \qquad k_3 = -0\cdot2366$$

$$a_1 = +0\cdot09904 \qquad b_1 = +1$$
$$a_2 = -0\cdot1485 \qquad b_2 = +1$$

Für die Bedingung $S_1 = 0$ wird:

$$+0\cdot05561\,Q_3 + 0\cdot003550 = 0$$

$$Q_3 = -0\cdot06383$$
$$Q_2 = -0\cdot2123$$
$$Q_1 = +0\cdot03521$$

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = -0\cdot0000043$$

Aus $S_2 = 0$ hingegen folgt:

$$+0\cdot07788\,Q_3^2 + 0\cdot009479\,Q_3 + 0\cdot0002835 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind beide reell, wir bekommen also zwei von einander verschiedene Systeme, die den gestellten Bedingungen genügen.

I. $Q_3 = -0\cdot05293$
$Q_2 = -0\cdot2014$
$Q_1 = +0\cdot04611$

$\rho_1 = +0\cdot01833 \qquad r_1 = +54\cdot56$
$\rho_2 = -0\cdot1390 \qquad r_2 = -\ \ 7\cdot195$
$\rho_3 = -0\cdot04737 \qquad r_3 = -21\cdot11$

$S_1 = +0\cdot0006072, \qquad S_2 = 0.$

II. $Q_3 = -0\cdot06878$
$Q_2 = -0\cdot2172$
$Q_1 = +0\cdot03026$

$\rho_1 = +0\cdot002485 \qquad r_1 = +402\cdot4$
$\rho_2 = -0\cdot1548 \qquad r_2 = -\ \ 6\cdot459$
$\rho_3 = -0\cdot06322 \qquad r_3 = -15\cdot82$

$S_1 = -0\cdot0002734 \qquad S_2 = 0$

Für beide Systeme ist dieselbe Reihe von Strahlen trigonometrisch durchgerechnet worden, wie für die im vorigen Paragraphen besprochene Wasserimmersion. Ich fand für die Schnittweiten und Logarithmen der Convergenzverhältnisse folgende Werthe:

Strahl	I Schnittweite	II Schnittweite	I Sinusverhältniss	II Sinusverhältniss
C-Axe	180·37	180·35	0·6999	0·6998
F-Axe	180·34	180·34	0·6998	0·6998
D-Axe	179·88	179·95	0·6987	0·6988
D 2°	180·14	180·22	0·6980	0·6998
D 4°	180·31	180·95	0·6988	0·7014
D 6°	184·19	185·75	0·7069	0·7132
C 6°	183·78	185·10	0·7059	0·7117
F 6°	187·55	189·92	0·7145	0·7226

Die Zusammenstellung zeigt deutlich, dass die Rechnungsmethode für das System I ein bedeutend besseres Resultat

ergibt; bei kleinerer ν-Differenz der beiden Gläser würde man zu ähnlichen Erscheinungen kommen, wie sie in der Theorie des zweitheiligen Fernrohrobjectives bekannt sind, das sich für eine bestimmte Reihenfolge der Glasarten in zwei Modificationen berechnen lässt.

Da die Glieder höherer Ordnung für S_1 negativ sind, bewirkt der positive Rest in S_1 bei System I eine kleine Zone im Gange des Convergenzverhältnisses, die eine wesentlich bessere Übereinstimmung herbeiführt. Man würde, auch bei der Darstellung der sphärischen Aberration, sicher zu noch besseren Resultaten kommen, wenn man S_2 nicht Null, sondern einem kleinen positiven Werth gleich setzt, der auch hier eine Zone herbeiführt und eine schliessliche trigonometrische Ausgleichung ganz entbehrlich macht. Was die chromatische Abweichung betrifft, so ist die hier auftretende nicht wesentlich von Belang; es ergibt sich für F Übercorrection, die ohne Schädigung der Beobachtung viel reichlicher bemessen sein darf als eine Untercorrection.

Auf System I habe ich nun weiter die Formeln des §. 3 angewandt. Ich habe wiederum angenommen:

$$d_1 = +1\cdot5 \qquad d_2 = +1\cdot0.$$

Mit diesen Werthen und den Radien I bekam ich:

$$s_1' = +161\cdot91 \qquad \sigma_3' = +0\cdot0061761$$

$$\Gamma = +0\cdot00001279$$

$$S_2 = +0\cdot000001416$$

und die folgenden Correctionsgleichungen für die Invarianten:

$$7\cdot4042\,\Delta Q_1 + 7\cdot1257\,\Delta Q_2 + 7\cdot4325_n\,\Delta Q_3 = 4\cdot1511_n$$
$$7\cdot7721\,\Delta Q_1 + 7\cdot6383\,\Delta Q_2 + 8\cdot0500_n\,\Delta Q_3 = 5\cdot1069_n$$
$$9\cdot5343\,\Delta Q_1 + 8\cdot2555\,\Delta Q_2 + 9\cdot5832_n\,\Delta Q_3 = 6\cdot7928_n$$

Hieraus:

$$\Delta Q_1 = +0\cdot000893$$
$$\Delta Q_2 = +0\cdot00237$$
$$\Delta Q_3 = +0\cdot002529$$

und die neuen Invarianten und Radien:

$$Q_1 = +0\cdot 046999$$
$$Q_2 = -0\cdot 19931$$
$$Q_3 = -0\cdot 051021$$

$$\rho_1 = +0\cdot 019221 \qquad r_1 = +52\cdot 028$$
$$\rho_2 = -0\cdot 13716 \qquad r_2 = -\ 7\cdot 291$$
$$\rho_3 = -0\cdot 045464 \qquad r_3 = -21\cdot 995$$

$$S_2 = -0\cdot 000000254$$
$$\Gamma = +0\cdot 00000029$$

Die weiteren Resultate sollen mit den aus der Combination Flint-Crown sich ergebenden zusammen besprochen werden.

2. Flint voraus.

Ich habe auch hier die Rechnung mit den Gläsern O. 1356 und O. 1815 durchgeführt und erhielt folgende Werthe:

$$\log N_1 = 8\cdot 0243 \qquad \log L_1 = 9\cdot 5831_n$$
$$\log N_2 = 7\cdot 6265_n \qquad \log L_2 = 8\cdot 2681$$
$$\log N_3 = 7\cdot 8023_n \qquad \log L_3 = 9\cdot 5616$$

$$h_1 = +0\cdot 03404 \qquad k_1 = +0\cdot 2363$$
$$h_2 = -0\cdot 00273 \qquad k_2 = -0\cdot 0047$$
$$h_3 = +0\cdot 00202 \qquad k_3 = -0\cdot 2116$$

$$a_1 = +0\cdot 09904 \qquad b_1 = +1$$
$$a_2 = +0\cdot 2475 \qquad b_2 = +1$$

Aus der Bedingung $S_2 = 0$ folgt die Gleichung:

$$+0\cdot 07781\, Q_3^2 + 0\cdot 007422\, Q_3 + 0\cdot 0001668 = 0,$$

deren Wurzeln wieder zwei Systeme ergeben, und zwar:

$$\text{III.} \qquad Q_3 = -0\cdot 05913$$
$$Q_2 = +0\cdot 1884$$
$$Q_1 = +0\cdot 03991$$

$$\rho_1 = +0\cdot 01213 \qquad r_1 = +82\cdot 41$$
$$\rho_2 = +0\cdot 1037 \qquad r_2 = +\ 9\cdot 639$$
$$\rho_3 = -0\cdot 05357 \qquad r_3 = -18\cdot 65$$

$$S_1 = -0\cdot 0005902, \quad S_2 = 0.$$

$$\text{IV.} \quad Q_3 = -0\cdot03625$$
$$Q_2 = +0\cdot2113$$
$$Q_1 = +0\cdot06279$$

$$\rho_1 = +0\cdot03502 \qquad r_1 = +28\cdot56$$
$$\rho_2 = +0\cdot1266 \qquad r_2 = +\ 7\cdot897$$
$$\rho_3 = -0\cdot03069 \qquad r_3 = -32\cdot59$$

$$S_1 = +0\cdot0006775 \qquad S_2 = 0$$

Die trigonometrische Durchrechnung ergab hier folgende Werthe:

Strahl	III Schnittweite	IV Schnittweite	III Sinusverhältniss	IV Sinusverhältniss
C-Axe	180·36	180·35	0·6998	0·6998
F-Axe	180·35	180·32	0·6998	0·6998
D-Axe	179·87	179·86	0·6987	0·6986
D 2°	179·81	179·69	0·6987	0·6980
D 4°	180·69	180·90	0·7015	0·7003
D 6°	183·70	186·2	0·7099	0·7119
C 6°	182·97	185·30	0·7081	0·7097
F 6°	187·00	190·49	0·7177	0·7219

Auch hier zeigt das System mit stärker gekrümmtem Kittradius grössere sphärische Aberrationen.

Bei der weiteren Berechnung des Systems III wurde angenommen:

$$d_1 = +1\cdot0 \qquad d_2 = +1\cdot5,$$

und ich bekam:

$$s'_3 = +156\cdot58 \qquad \sigma'_3 = +0\cdot0063864$$
$$\Gamma = +0\cdot00001445$$
$$S_2 = +0\cdot00000829$$

und die Correctionsgleichungen:

$$7\cdot4363\,\Delta Q_1 + 7\cdot1340_n\,\Delta Q_2 + 7\cdot5125_n\,\Delta Q_3 = 4\cdot9187_n$$
$$8\cdot0194\,\Delta Q_1 + 7\cdot6351_n\,\Delta Q_2 + 7\cdot8321_n\,\Delta Q_3 = 5\cdot1599_n$$
$$9\cdot5511\,\Delta Q_1 + 8\cdot2474_n\,\Delta Q_2 + 9\cdot5616_n\,\Delta Q_3 = 6\cdot9196_n$$

Hieraus:

$$\Delta Q_1 = +0\cdot000740$$
$$\Delta Q_2 = +0\cdot000450$$
$$\Delta Q_3 = +0\cdot002981$$

und die neuen Invarianten und Radien:

$$Q_1 = +0\cdot040652$$
$$Q_2 = +0\cdot18857$$
$$Q_3 = -0\cdot056972$$

$$\rho_1 = +0\cdot012874 \qquad r_1 = +77\cdot675$$
$$\rho_2 = +0\cdot10430 \qquad r_2 = +\ 9\cdot588$$
$$\rho_3 = -0\cdot051415 \qquad r_3 = -19\cdot450$$

$$S_2 = -0\cdot000000976$$
$$\Gamma = -0\cdot00000007$$

Vergleichung der Systeme I und III.

Die trigonometrische Durchrechnung ergab für die beiden verbesserten Systeme folgende Schnittweiten und Logarithmen der Sinusverhältnisse:

Strahl	I Schnittweite	III Schnittweite	I Sinusverhältniss	III Sinusverhältniss
C-Axe	180·39	180·47	0·6869	0·6848
F-Axe	180·37	180·45	0·6868	0·6847
D-Axe	179·93	180·00	0·6858	0·6837
D 2°	179·98	179·90	0·6857	0·6836
D 4°	180·67	180·85	0·6867	0·6866
D 6°	184·17	183·97	0·6936	0·6951
C 6°	183·72	183·50	0·6926	0·6939
F 6°	187·38	187·29	0·7009	0·7029

In Bezug auf die sphärische Correction dürften beide Systeme gleichwerthig, hinsichtlich der Erfüllung der Sinusbedingung System I dem System III etwas überlegen sein.

Eine zweite Vergleichung beider Systeme habe ich noch in Bezug auf das Verhalten schiefer Büschel ausgeführt, dessen Discussion für jede, selbst die einfachste optische Rechnung absolut nothwendig ist. Zunächst ist einleuchtend, dass der

die Mitte der Eintrittspupille durchsetzende Hauptstrahl als Repräsentant des ganzen Büschels gewählt werden kann, da die den Büscheln anhaftende Coma, deren Beseitigung in erster Näherung schon durch die Erfüllung der Sinusbedingung garantirt ist, bei der geringen Neigung der aus dem System austretenden Strahlen ohne jeden Einfluss auf die Discussion der Lage der ausseraxialen Bildpunkte sein muss. Da die Spitzen aller in Frage kommenden Büschel in einer im Objectpunkt zur optischen Axe senkrechten Ebene liegen sollen, ist mithin nur die Lage der Schnittpunkte des Hauptstrahles mit den ihm unendlich benachbarten, von demselben Punkte der Objectebene ausgehenden und in den beiden aufeinander senkrechten Ebenen, der meridionalen und äquatorealen, gelegenen Strahlen zu suchen. Diese Bestimmung der astigmatischen Bildpunkte lässt sich nach bekannten Formeln leicht im Anschluss an die trigonometrische Durchrechnung eines Hauptstrahles vornehmen; die Rechnung ist fast dieselbe wie für paraxiale Strahlen, nur dass z. B. statt der Dicken die Weglängen des gebrochenen Strahles innerhalb des Glases und statt der Brechungsexponenten Combinationen dieser mit den Einfallswinkeln auftreten.

Ähnlich wie bei den photographischen Objectiven gibt es auch hier eine bestimmte Stellung der die Eintrittspupille repräsentirenden Vorderblende, für welche die Lage der so definirten astigmatischen Brennflächen ein Optimum wird. Dementsprechend ist jede Rechnung für verschiedene Blendenabstände durchgeführt worden. Für jeden Abstand Δ wurden vier Hauptstrahlen durchgerechnet, welche eine im Scheitel der ersten Linsenfläche auf der Axe senkrechte Ebene in den folgenden Höhen über der Axe schnitten: 0, $3\cdot75\sqrt{\frac{1}{3}}$, $3\cdot75\sqrt{\frac{2}{3}}$, $3\cdot75$ *mm*. Δ wurde angenommen bei System I zu 18, 26 und 28 *mm*, bei System III zu 14, 18, 22 und 26 *mm*. Bezeichnen wir mit $\xi\eta$ die Coordinaten einer der astigmatischen Bildpunkte, bezogen auf die optische Axe als ξ-Axe, wo ξ gerechnet wird vom Schnittpunkte der paraxialen D-Strahlen mit der Axe, und zwar negativ in der Richtung auf das Objectiv

zu, und η die Höhe über der optischen Axe bedeutet, so ergab die für die Strahlen mit dem Brechungsexponenten D durchgeführte Rechnung folgende Werthe der Coordinaten der Bildpunkte im meridionalen und äquatorealen Schnitt ξ_{mer}, η_{mer}, beziehungsweise ξ_{aequ}, η_{aequ}:

$\Delta = 18$

ξ_{mer}	η_{mer}	ξ_{aequ}	η_{aequ}
0	0	0	0
— 4·92	10·16	—11·61	9·86
— 8·75	13·96	—19·05	13·32
—11·93	16·68	—24·08	15·77

$\Delta = 26$

ξ_{mer}	η_{mer}	ξ_{aequ}	η_{aequ}
0	0	0	0
— 0·78	4·01	— 2·16	3·99
— 1·02	5·14	+ 0·23	5·65
0·00	6·91	+ 8·27	7·05

$\Delta = 28$

ξ_{mer}	η_{mer}	ξ_{aequ}	η_{aequ}
0	0	0	0
— 0·64	2·98	— 0·94	2·98
— 0·14	4·21	+ 2·78	4·22

Unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die beiden Bildflächen die Ebene $\xi = 0$ im Punkte $\eta = 0$ berühren, habe ich die $\xi\eta$ graphisch dargestellt und die entsprechenden Curven für $\Delta = 25$ und 27 interpolirt. Die Zusammenstellung gibt für η von 0 bis 6 die Werthe der ξ in *mm* für verschiedene Δ:

	$\Delta = 18$		$\Delta = 25$		$\Delta = 26$		$\Delta = 27$		$\Delta = 28$	
η	ξ_{mer}	ξ_{aequ}	ξ_{mer}	ξ_{aequ}	ξ_{mer}	ξ_{aequ}	ξ_{mer}	ξ_{aequ}	ξ_{mer}	ξ_{aequ}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	—0·1	—0 1	—0·2	—0·1	—0·2	—0·1	—0·2	—0·1	—0·2
2	—0·1	—0·3	—0·2	—0·5	—0·2	—0·5	—0·3	—0·5	—0 3	—0·5
3	—0·3	—0·9	—0·4	—1·3	—0·4	—1·3	—0·5	—1·2	—0·6	—0·9
4	—0·6	—1·7	—0·8	—2·3	—0·8	—2·2	—0·7	—1·5	—0·4	+0·8
5	—1·0	—2·8	—1·1	—2·3	—1·1	—1·4	—0·5	0	+0·4	+9
6	—1·6	—4·2	—1·2	+0·2	—0·8	+1·5	+0·5	+4	+3	

Die günstigste Lage scheint mir die Blendenstellung mit einem Abstand von 21 bis 25 *mm* von der ersten Linsenfläche zu gewähren. Innerhalb einer Bildausdehnung von 12 *mm*, die

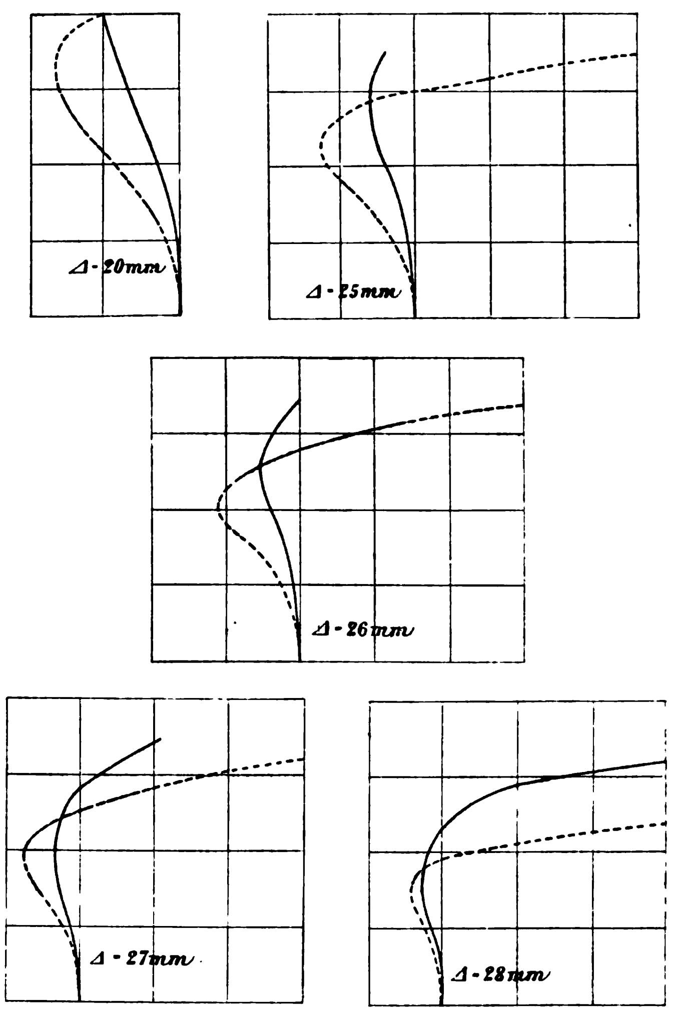


Fig. 1. Crown voraus.

bei der fünffachen Eigenvergrösserung des Objectives einem Objectdurchmesser von 2·4 *mm* entspricht, ist die Wölbung und astigmatische Differenz eine erträgliche, der anastigmatische Punkt, für den der Beobachter durch eventuelles neues

Einstellen ein scharfes Bild bekommen kann, liegt nicht weit der Ebene $\xi = 0$; zudem gestalten sich in der Praxis die Verhältnisse noch etwas günstiger, da durch die Einstellung von selbst ein Ausgleich zwischen den Fehlerresten getroffen wird.

Fig. 1 enthält die Curven der Bildlinien (die im äquatorealen Schnitt gestrichelt) für die fünf verschiedenen Blendenstellungen $\Delta = 20, 25, 26, 27, 28$ *mm* in fünffacher Grösse gezeichnet. Für grösser werdenden Blendenabstand wandern die Bildlinien vom negativen Theil des Raumes in den positiven, und zwar die äquatorealen mit grösserer Geschwindigkeit als die meridionalen.

System III. Flint voraus.

$\Delta = 14$

ξ_{mer}	η_{mer}	ξ_{aequ}	η_{aequ}
0	0	0	0
−2·62	16·10	− 0·26	16·29
−3·29	22·58	+11·20	24·16
−1·51	27·81	+47·24	34·28

$\Delta = 18$

ξ_{mer}	η_{mer}	ξ_{aequ}	η_{aequ}
0	0	0	0
−0·11	10·42	+ 3·80	10·60
+1·18	14·80	+16·94	15·81
+4·83	18·45	+49·96	21·97

$\Delta = 22$

ξ_{mer}	η_{mer}	ξ_{aequ}	η_{aequ}
0	0	0	0
+1·03	6·68	+ 4·69	6·76
+2·55	9·52	+17·83	10·04
+6·38	11·89	+44·71	13·53

$\Delta = 26$

ξ_{mer}	η_{mer}	ξ_{aequ}	η_{aequ}
0	0	0	0
+1·02	4·04	+ 4·56	4·07
+2·54	5·76	+14·49	5·93
+6·07	7·19	+37·57	7·75

Ausser für die hier angegebenen Strahlen habe ich noch in solchen Fällen die Lage der Bildpunkte bestimmt, in denen die Interpolation nicht ganz sicher war. Ich fand schliesslich die Werthe der ξ für fünf verschiedene Blendenstellungen nach η geordnet, wo η jetzt bis 10 *mm* sich erstreckt.

	$\Delta = 14$		$\Delta = 16$		$\Delta = 18$		$\Delta = 22$		$\Delta = 26$	
η	ξ_{mer}	ξ_{aequ}	ξ_{mer}	ξ_{aequ}	ξ_{mer}	ξ_{aequ}	ξ_{mer}	ξ_{aequ}	ξ_{mer}	ξ_{aequ}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	—0·1	0	0	0	0	+0·1	+ 0·2	+0·1	+ 0·3
2	—0·1	—0·2	—0·1	—0·1	0	0	+0·2	+ 0·4	+0·3	+ 1·0
3	—0·2	—0·3	—0·1	—0·2	—0·1	+0·1	+0·3	+ 0·7	+0·6	+ 2·4
4	—0·3	—0·4	—0·2	—0·2	—0·1	+0·2	+0·4	+ 1·2	+1·0	+ 4·4
5	—0·4	—0·5	—0·3	—0·2	—0·2	+0·3	+0·6	+ 2·1	+1·7	+ 8·2
6	—0·5	—0·7	—0·4	—0·3	—0·3	+0·5	+0·8	+ 3·3	+2·8	+14·9
7	—0·6	—1·0	—0·5	—0·4	—0·3	+0·7	+1·1	+ 5·5	+5·0	+25·0
8	—0·8	—1·3	—0·6	—0·5	—0·3	+1·2	+1·6	+ 8·3		
9	—1·2	—1·5	—0·7	—0·6	—0·3	+1·7	+2·2	+11·7		
10	—1·4	—1·5	—0·9	—0·7	—0·2	+2·9	+3·1	+17·5		

Fig. 2 gibt die Curven der Bildlinien (die im äquatorealen Schnitt gestrichelt) in fünffacher Grösse gezeichnet. Eine Vergleichung mit den Curven des Systems I zeigt deutlich, dass die astigmatische Correction und Ebenheit des Gesichtsfeldes hier, Flint voraus, eine ausgezeichnete ist. Für einen Blendenabstand von 16 *mm* ungefähr ist ein bildseitiges Gesichtsfeld von 20 *mm* fast frei von Astigmatismus und Wölbung, dessen letzte Reste in der Praxis ohne jeden Einfluss sind. Während ferner bei System I für kleinen Blendenabstand die Bildflächen sich mit grösser werdendem η in den negativen Theil des Raumes erstreckten und schon vor der besten Blendenstellung in das positive Gebiet hinüberschwenkten, tritt hier das Umgekehrte ein: die Bildflächen des Systems III liegen bis auf grosse Entfernungen der Blende von der Linse zum grössten Theil im Positiven. Nur eine kleine Zone überschreitet noch die Ebene $\xi = 0$, dergestalt, dass für das kleine Gesichtsfeld, wie es bei den Mikroskopobjectiven in Frage kommt, sich eine wesentlich bessere astigmatische Correction als für System I, Crown voraus, erzielen lässt.

Das verschiedene Verhalten der Bildflächen zu einer Stellungsänderung der Blende legt die Vermuthung nahe, auch

bei complicirteren mikroskopischen Constructionen, speciell bei den aus zwei verkitteten Linsensystemen bestehenden, eine anastigmatische Ebenung, ähnlich der bei photographischen Objectiven mittelst des für die photographische Optik fundamentalen Rudolph'schen Princips erreichten, ohne Anwendung

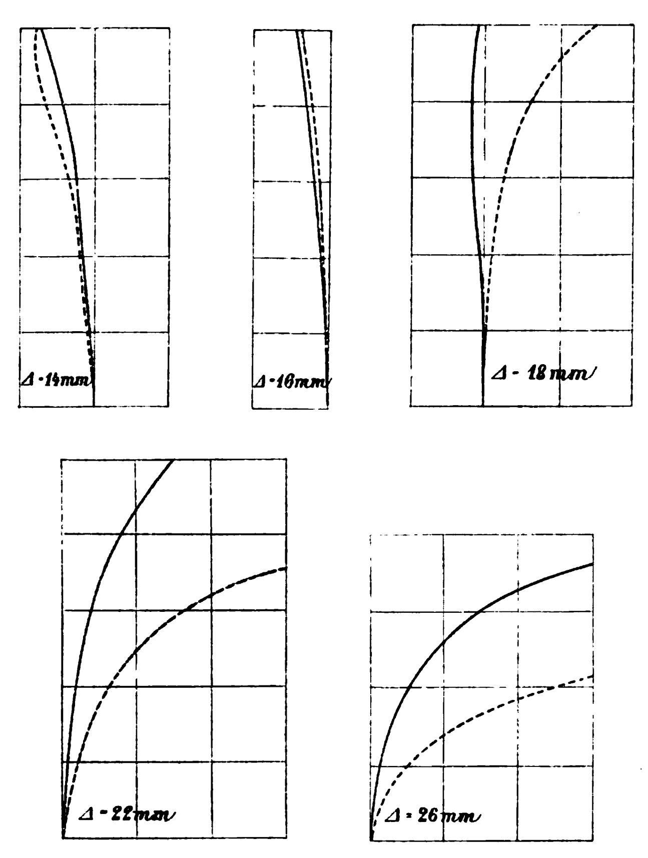


Fig. 2. Flint voraus.

anormaler Glaspaare bewerkstelligen zu können. Bei den einfachsten Mikroskopobjectiven ist es jedenfalls das richtige, die Combination Flint voraus zu wählen; man kommt dann auf einen ähnlichen Strahlengang wie bei der Landschaftslinse, der die zuerst von Wollaston angegebene Meniskenform mit nach dem Object zu hohlem Kittradius eigenthümlich ist.

Auch das Objectiv System III ist nach einer kleinen trigonometrischen Ausgleichung in der optischen Werkstätte von Carl Zeiss ausgeführt worden; das Bild zeigt dieselbe Qualität, wie die gewöhnlichen Objective aus alten Gläsern, nur ist die numerische Apertur auf 0·13 gestiegen, während sie bisher nur 0·08 erreichte. Die Lichtstärke lässt sich also bei Anwendung neuer Gläser bis auf das $2^1/_2$ fache steigern.

Beobachtungen über scheinbare Gleichströme im Wechselstromlichtbogen zwischen verschiedenartigen Elektroden

von

Friedrich Eichberg und **Ludwig Kallir.**

Aus dem elektrotechnischen Institute der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Mit 8 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 31. März 1898.)

A. Lichtbogen zwischen einer Metall- und einer Kohlenelektrode.

1. Bildet man zwischen einem Metallstabe einerseits und einem Kohlenstabe anderseits einen Wechselstromlichtbogen, so zeigt, wie Sahulka[1] speciell für einen Eisen-, v. Lang[2] für einen Aluminiumlichtbogen nachgewiesen hat, eine in den Lichtbogenstromkreis eingeschaltete Tangentenboussole einen Gleichstrom in der Richtung Metall—Kohle (im Lichtbogen), ein an die Elektroden angelegtes Torsionsgalvanometer eine gleichgerichtete Spannungsdifferenz in der Richtung Kohle—Metall an.

Diese Erscheinungen treten dann auf, wenn sich an der Metallelektrode ein Tropfen geschmolzenen Metalles gebildet hat, von dem der Lichtbogen ruhig, ohne zu sprühen, mit einem dumpfen Ton zur Kohle brennt. Die Bildung eines derartigen Bogens ist dann wesentlich leichter, wenn an der Metallelektrode

---

[1] Sahulka, diese Sitzungsber., Bd. CIII, 1894, 925.

[2] v. Lang, Wied. Ann., Bd. 63, 1897, Nr. 13, S. 191.

vom vorhergehenden Versuche ein erstarrter Metalltropfen sich vorfindet.

Ist dies nicht der Fall, sondern das Metall entweder im ursprünglichen Zustand, d. h. noch nicht geschmolzen oder aber an der Oberfläche durch Oxyde verunreinigt, so bildet sich anfangs, bei geringer Elektrodenentfernung, ein Lichtbogen, der zischt, unruhig brennt und die Erscheinungen des oben charakterisirten Bogens nicht bietet. Bei allen folgenden Versuchen wurden als Kohlenelektroden Dochtkohlen verwendet, bei welchen der Lichtbogen in den sich leicht bildenden Krater brannte und durch längere Zeit stationär erhalten werden konnte. Bei Benützung von Homogenkohlen gelang es nie, den Lichtbogen dauernd zu erhalten.

2. Die angeführten Erscheinungen (Gleichstrom und Gleichspannung) wurden, wenn Eisen, Aluminium, Kupfer und Nickelin als Elektroden fungirten, beobachtet.[1] Am schwierigsten waren die Beobachtungen am Aluminiumbogen, weil sich der Zustand nur sehr kurze Zeit erhielt. Für die oben angegebenen vier verschiedenen Metallelektroden ergaben sich Werthe, von welchen einige, in denselben Bereich fallende, ausgewählt und in Tabelle I zusammengestellt wurden.

Gemessen wurde: Die totale Stromstärke (J) mit einem Hitzdrahtampèremeter, die totale Spannung am Lichtbogen (Δ) mit einem Hitzdrahtvoltmeter, die im Lichtbogen verbrauchten Watt (W) mit einem Wattmeter von Ganz & Co., der im Stromkreis auftretende scheinbare Gleichstrom (C) mit einer Tangentenboussole, die am Lichtbogen auftretende scheinbare Gleichspannung (V) mit einem Torsionsgalvanometer von 1 Ω Widerstand mit 999 Ω Vorschaltwiderstand. Der Wechselstrom wurde einem an das Strassennetz der »Internationalen Elektricitäts-Gesellschaft« in Wien angeschlossenen Transformator (18 : 1) entnommen. Der Lichtbogen lag mit einem regulirbaren Vorschaltwiderstand von 5—9 Ω an circa 105 Volt und wurde von Hand aus gebildet und eventuell regulirt.

[1] Nach persönlichen Mittheilungen des Herrn Dr. J. Sahulka hat er nach der Veröffentlichung der citirten Abhandlung auch Versuche mit einem Kupfer-, respective Quecksilber-Kohle-Lichtbogen angestellt.

Tabelle I.

Eisenstab: 4·5*mm* dick. — Dochtkohle S. & H., Marke *A*, 8*mm*.

J	Δ	*C*	*V*	*W*
6·1	80·5	3·45	26·0	139
6·5	80·5	3·4	24·3	156
7·3	80·5	4·5	25·0	162
8·0	77·0	4·7	27·5	170
9·5	76·0	5·25	30·6	186

Aluminiumstab: 4 *mm* dick. — Dochtkohle S. & H., Marke *A*, 8 *mm*.

J	Δ	*C*	*V*	*W*
8·3	77·5	4·1	29·4	108
8·9	78·0	4·1	32·5	118
9·0	77·0	4·1	31·7	108

Kupferstab: 3·5*mm* dick. — Dochtkohle S. & H., Marke *A*, 6*mm*.

J	Δ	*C*	*V*	*W*
6·05	82·0	2·65	21·6	101
6·5	79·0	3·2	25·6	111·5
7·5	80·0	3·7	24·5	136
9·0	81·0	4·9	26·3	171
9·5	81·0	5·25	29·5	167

Nickelinstab: 4*mm* dick. — Dochtkohle S. & H., Marke *A*, 8*mm*.

J	Δ	*C*	*V*	*W*
6·0	80·5	3·15	25·6	129
6·6	80·0	3·65	27·4	139
6·9	79·3	3·7	27·0	143
8·0	75·5	4·4	30·0	155
9·1	76·5	5·25	29·4	167

Gewisse Unregelmässigkeiten, welche die Tabelle zeigt, mögen dadurch erklärt sein, dass es schwer war, alle Instrumente gleichzeitig abzulesen, und auch die Lichtbogenlänge nicht bei allen Messungen genau die gleiche war.

Unzweideutig lässt sich jedoch aus diesen Zahlen erkennen, dass bei all' diesen Metallen der auftretende scheinbare Gleichstrom und die scheinbare Gleichspannung nahezu dieselben Werthe haben.

3. Die Existenz dieses Gleichstromes und dieser Gleichspannung wurde von Arons[1] und V. v. Lang[2] in Zusammenhang gebracht mit der Thatsache, dass an einem Gleichstromlichtbogen, dann, wenn er vom Metall zur Kohle brennt, eine kleinere Spannung auftritt als wenn die Stromrichtung Kohle—Metall ist. Die Differenz der Spannungen für die beiden Stromrichtungen ist aber für die einzelnen Metalle eine verschiedene. Am grössten ist sie nach Arons am Aluminiumbogen, wesentlich kleiner am Kupfer- und Eisenbogen. Will man also diese Erscheinungen zur Erklärung des Verhaltens des Wechselstromlichtbogens heranziehen, so stellt sich die Schwierigkeit entgegen, das ungleiche Verhalten der einzelnen Metalle im Gleichstromlichtbogen und ihr gleiches Verhalten im Wechselstromlichtbogen in Einklang zu bringen.

4. Die Angaben der Tangentenboussole und des Torsionsgalvanometers lassen erkennen, dass die Strom- und Spannungscurven am Lichtbogen neben dem, auch bei Kohle—Kohle-Lichtbogen sich zeigenden, unregelmässigen, nicht sinusförmigen Verlauf, Ungleichheiten der auf den beiden Seiten der Abscissenaxe liegenden Flächen aufweisen müssen.

Um einen Einblick in die in jedem Momente herrschenden Zustände zu bekommen, wurden Strom- und Spannungscurven am Wechselstromlichtbogen aufgenommen.

Als Stromerzeuger diente eine achtpolige Wechselstrommaschine von Siemens & Halske mit circa 750 Touren pro Minute, was einer Periodenzahl von circa 50 Perioden pro Secunde entspricht.

---

[1] L. Arons, Wied. Ann. Bd. 57, 1896, S. 185.

[2] V. v. Lang, siehe l. c.

Die Maschine wurde durch eine kleine Serienmaschine S auf die bei den einzelnen Versuchsreihen angegebenen Spannungen erregt. Der Lichtbogenstromkreis war, wie aus Fig. 1 ersichtlich ist, gebildet aus einer Tangentenboussole TB, einem Hitzdraht-Ampèremeter HA, dem Lichtbogen L, bestehend aus einer Eisenelektrode E und einer Kohlenelektrode K, einem

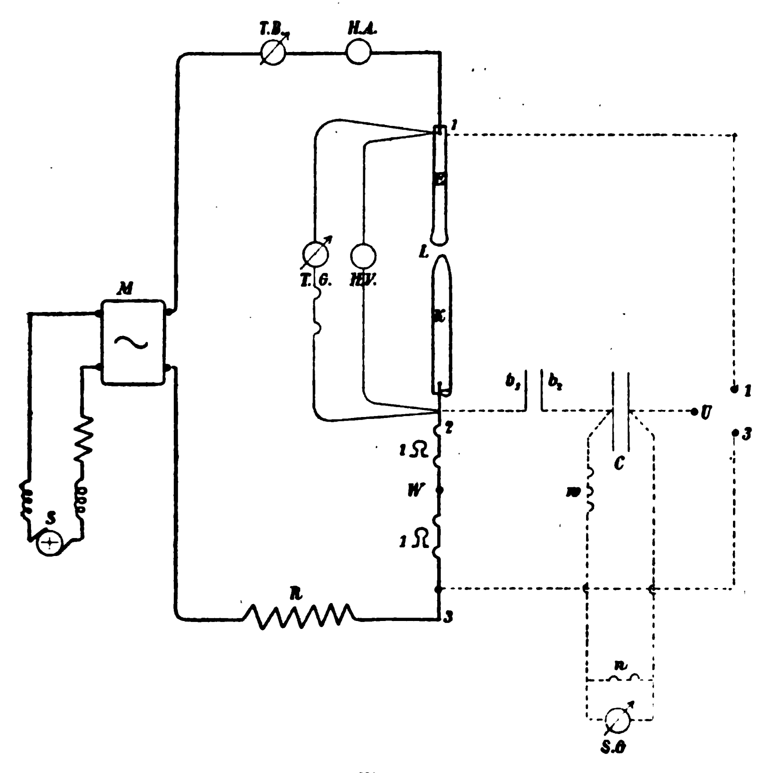


Fig. 1.

inductionslosen Abzweigwiderstande W von 2 Ω und einem Regulirwiderstand R; am Lichtbogen lag ausser dem Hitzdrahtvoltmeter HV noch ein Torsionsgalvanometer von 1 Ω Widerstand mit 2 × 999 Ω Vorschaltwiderstand. Auf der Axe der Wechselstrommaschine M sass eine Joubert'sche Scheibe, auf welcher zwei federnde Bürsten b_1 und b_2 bei jeder Umdrehung einmal Contact gaben. Dieselben wurden nach einer auf einem Kreise aufgetragenen Theilung verstellt. Die eine Bürste b_1 war

verbunden mit Punkt 2, dem Zusammenstosspunkt der Kohle *K* und des Abzweigwiderstandes *W'*; b_2 war mit der einen Klemme eines Condensators *C* von 1 μf verbunden, dessen andere Klemme mittelst Umschalters *u* entweder mit Punkt 1, d. i. mit der Eisenelektrode oder mit Punkt 3, d. i. dem noch freien Ende des Abzweigwiderstandes *W* verbunden werden konnte. Die erstere Stellung ergab eine Spannungsmessung, die zweite eine Strommessung. Am Condensator lag, mit einem Vorschaltwiderstand *w* von $3 \cdot 5 . 10^6 \Omega$ ein aperiodisches Spiegelgalvanometer *SG* mit Nebenschlusswiderstand. Für sämmtliche Schwachstromleitungen wurden Bleikabel verwendet und die einzelnen eingeschalteten Apparate entsprechend isolirt aufgestellt. Die Ablesungen des Spiegelgalvanometers wurden dadurch geaicht, dass bei normal rotirender Joubert'scher Scheibe eine constante gleichgerichtete Spannung an 1 und 2 angelegt wurde, deren Grösse mit einem Torsionsgalvanometer bestimmt wurde. Die Aichungen wurden vor und nach jeder Curvenaufnahme wiederholt; dabei stellten sich manchmal Differenzen heraus, welche darin ihre Erklärung fanden, dass die Bürsten während der doch beträchtlichen Zeit einer Strom- und Spannungscurvenaufnahme sich abschliffen und dadurch eine Veränderung des Contactes herbeiführten. In solchen Fällen wurde die zu jedem Punkte gehörige Aichung durch Interpolation gefunden.

Eine zweite Schwierigkeit bot der Lichtbogen, der ziemlich schwer im gleichen Zustande erhalten werden konnte.

Um auch die Spannung controliren zu können, blieb das Hitzdrahtvoltmeter *HV* stets eingeschaltet; das hat zur Folge, dass in allen Momenten der aufgenommene Stromwerth die Summe aus dem den Lichtbogen durchfliessenden Strom und dem Voltmeterstrom war. Um die Aufnahmezeit thunlichst zu verkürzen, wurden an jedem Lichtbogen bloss 16 Strom- und 16 Spannungspunkte aufgenommen, und zwar die ein und derselben Contactstellung zugehörigen beiden Punkte unmittelbar hintereinander.

Die Fig. 2, 3 und 4 zeigen in *i* und δ die Strom-, beziehungsweise Spannungscurven einiger Eisen—Kohlen-Lichtbogen; *e* in Fig. 2 ist die Klemmenspannungscurve bei offenem

Stromkreis der Maschine bei einem gemessenen Effectivwerthe von $E = 189$ Volt. Für die einzelnen Lichtbogen gelten folgende Daten.

Für Fig. 2:

Eisenstab 4·5 *mm* — Dochtkohle S. & H., Marke *A*, 6 *mm*

$E = 189$ Volt, $J = 4 \cdot 95$ Ampère,
$\Delta = 104$ Volt, $C = 2 \cdot 8$ Ampère,
$V = 31 \cdot 5$ Volt.

Für Fig. 3:

Eisenstab 4·5 *mm* — Dochtkohle S. & H., Marke *A*, 10 *mm*

$E = 188$ Volt, $J = 5 \cdot 25$ Ampère,
$\Delta = 100$ Volt, $C = 3 \cdot 5$ Ampère,
$V = 27 \cdot 5$ Volt.

Für Fig. 4:

Eisenstab 4·5 *mm* — Dochtkohle einer Gramme-Lampe, 10 *mm*

$E = 190$ Volt, $J = 5 \cdot 1$ Ampère,
$\Delta = 107$ Volt, $C = 3 \cdot 3$ Ampère,
$V = 31 \cdot 0$ Volt.

5. Charakteristische Eigenschaften der Curven. Vorausgeschickt sei, dass, während die E. M. K.-Curve nahe bei 8 und 16 die Abscissenaxe schneidet, die Spannung an den Enden eines an die Stelle des Lichtbogens gesetzten inductionslosen Widerstandes bei einer Stromstärke von 4·6 Ampère bei Punkt 10·3 und 2·3 durch die Null geht. Die oberen Hälften der Curven entsprechen jenen Periodenhälften, in welchen die Kohle positiv ist.

Die Spannungscurve geht bei 0[16] mit der E. M. K.-Curve durch die Null; sie erreicht, rasch ansteigend, ein Maximum (um 40 Volt), worauf ein mässiger Abfall eintritt, der daher kommt, dass der Lichtbogen vom Eisen zur Kohle sich bildet. Die Spannung erhält sich dann auf einem Werthe von 30 bis 35 Volt. Ihr zweiter Schnittpunkt mit der Abscissenaxe ist vom ersten um mehr als eine halbe Periode entfernt. Dieser zweite

Nullpunkt liegt ungefähr an der Stelle 10·3, wo auch die Spannung an den Enden des inductionslosen Widerstandes Null ist.

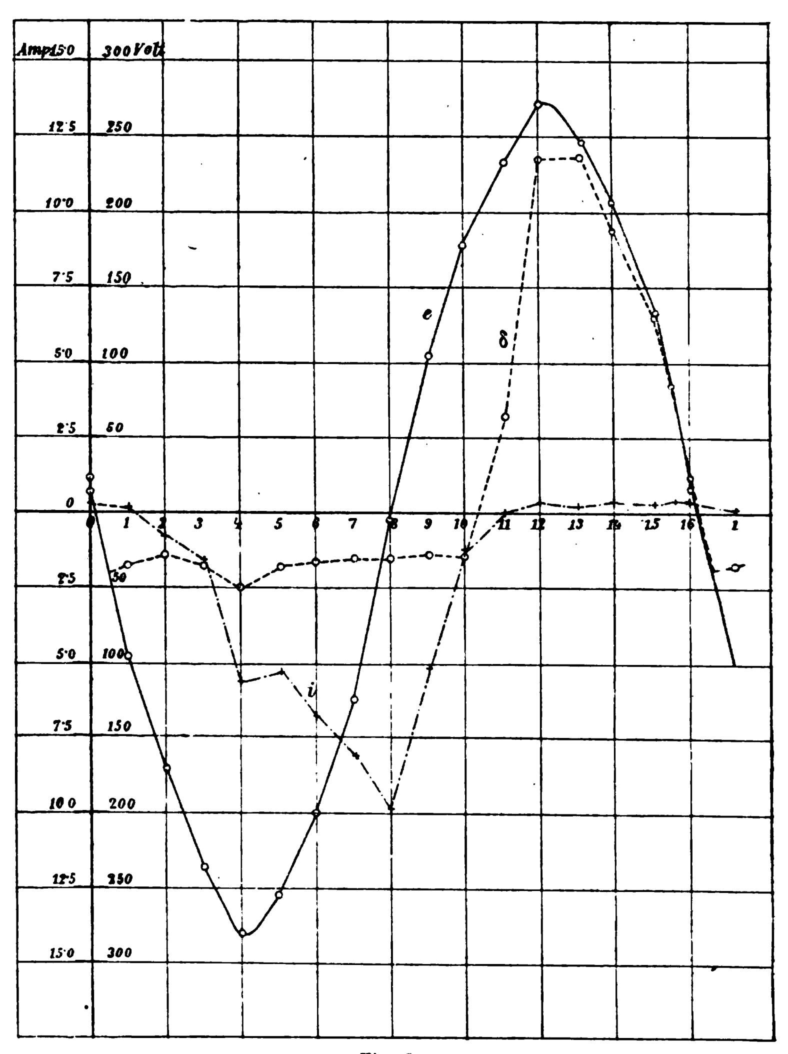


Fig. 2.

Die erhaltenen Punkte sind bloss durch gerade Linien verbunden; daher kommen manche Durchgänge durch die Null nicht dort zustande, wo die wirkliche Curve sie ergeben würde. Emporschnellend erreicht sodann die Spannung einen Maximal-

werth, nahe der E. M. K., der sie auch im folgenden Verlauf bis zum Durchschnitt mit der Abscissenaxe folgt.

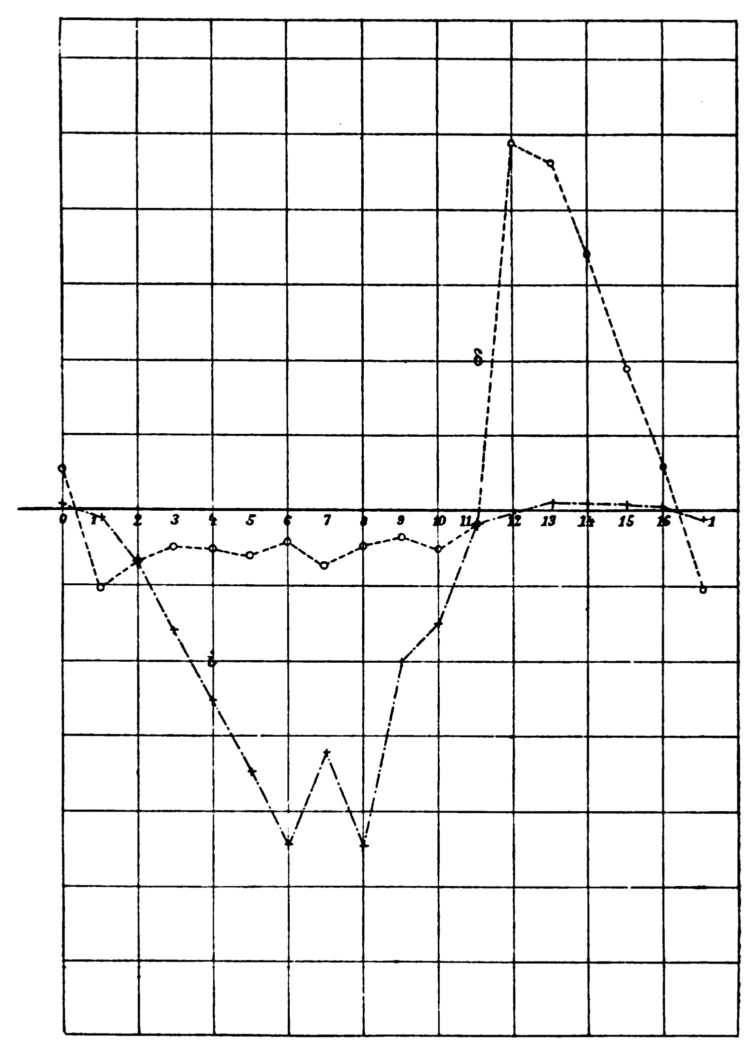


Fig. 3.

Die Stromcurven zeigen, dass vom Eisen zur Kohle beträchtliche Ströme fliessen, von der Kohle zum Eisen hingegen nur verschwindend kleine; denn von den in den Curven erscheinenden Momentanwerthen ist stets der, durch Division des

zugehörigen Spannungswerthes durch den Widerstand des Voltmeters (1250 Ω) erhaltene, Voltmeterstrom abzuziehen.

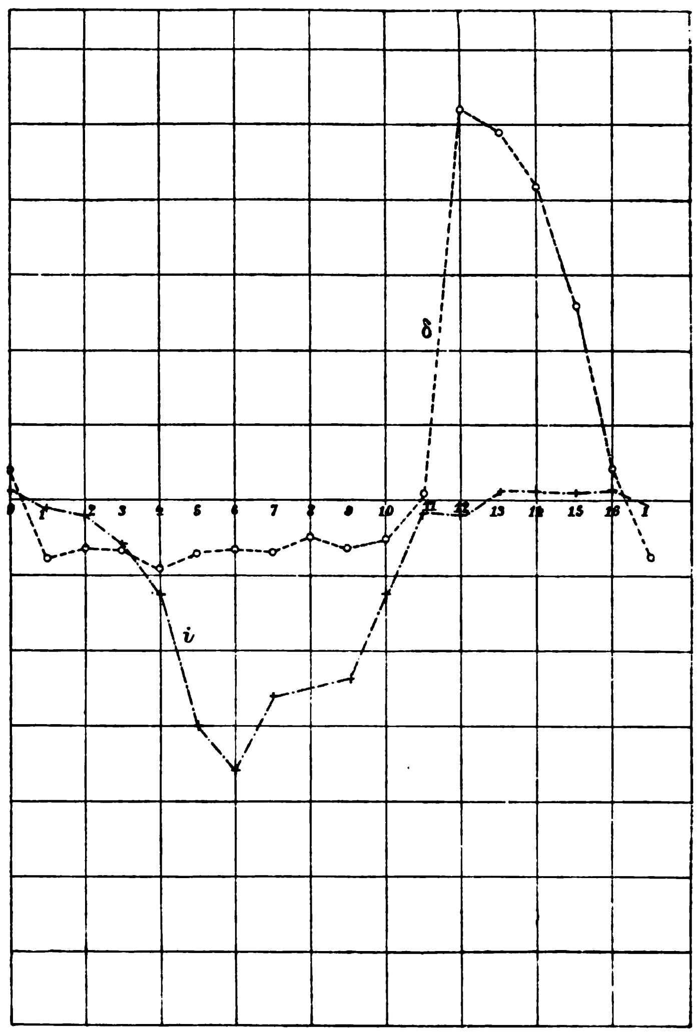


Fig. 4.

Nimmt man nach Blondel[1] an, dass der Elektricitätsübergang von einer Elektrode des Lichtbogens zur anderen aus einem

[1] Blondel, Lumière électrique, Bd. 49, 1893, p. 501, 557, 608.

Gasleitungs- und einem Convectionsstrom besteht, so liegt die Annahme nahe, dass für die Spannungsrichtung Kohle—Eisen nur der Gasleitungsstrom zur Ausbildung gelangt. Nur wenn der Lichtbogen nicht normal brannte, was sich vor Allem darin äusserte, dass der von der Tangentenboussole angezeigte scheinbare Gleichstrom fiel, zeigten sich in der Gegend von 12 bis 16 grössere Strom- und entsprechend kleinere Spannungswerthe. Es scheint dann auch in der Richtung Kohle—Eisen ein Convectionsstrom vorhanden gewesen zu sein.

Die aus den Curven sich ergebenden Mittelwerthe des Stromes und der Spannung, so genau sie sich eben bilden liessen, also die Ausdrücke

$$\int \frac{i.dt}{T} \quad \text{und} \quad \int \frac{\delta.dt}{T},$$

wobei T die Dauer einer Periode ist, stimmen mit den von der Tangentenboussole, beziehungsweise dem Torsionsgalvanometer abgelesenen Werthen immer innerhalb der Fehlergrenze; ebenso stimmen die gerechneten Mittelwerthe der Quadrate der Strom- und Spannungswerthe mit den Angaben der Hitzdrahtinstrumente; z. B. ergeben sich für den Lichtbogen, dessen Strom- und Spannungscurve in Fig. 3 dargestellt sind, bei alleiniger Benützung der gemessenen Punkte, durch Rechnung folgende Werthe:

$$C = \int \frac{i.dt}{T} = 3 \cdot 67 \text{ Amp.}, \qquad V = \int \frac{\delta.dt}{T} = 29 \cdot 2 \text{ Volt},$$

$$J = \sqrt{\int \frac{i^2.dt}{T}} = 5 \cdot 47 \text{ Amp.}, \quad \Delta = \sqrt{\int \frac{\delta^2.dt}{T}} = 99 \cdot 6 \text{ Volt}.$$

Aus den Curven ersieht man auch, dass die Richtung des scheinbaren Gleichstromes die von der Tangentenboussole angezeigte, d. i. die Richtung Eisen—Kohle im Bogen ist und dass die Kohle dem Eisen gegenüber positiv erscheinen muss.

Der Verlauf der Curven zeigt, dass der Ausbildung des Lichtbogens Kohle—Eisen sich ein sehr grosser Widerstand entgegensetzt. Über die Natur desselben, ob es ein Ohm'scher Widerstand oder eine Gegen-E. M. K. ist, ist allerdings nichts zu ersehen. Möglicherweise ist die Bildung eines schlechtleitenden

Metalloxydes seine Ursache. Dieser grosse Widerstand erklärt die fast völlige Stromunterbrechung in der Richtung Kohle—Eisen und die in Folge dessen am Lichtbogen auftretende E. M. K. der Maschine; während der anderen Periodenhälfte, für welche der Widerstand nicht mehr vorhanden zu sein scheint, fliesst Strom, daher tritt die auch an einem Gleichstromlichtbogen (Eisen—Kohle) in analogen Verhältnissen constatirte Spannung von 30—40 Volt und die dem Strom entsprechende Phasenverschiebung gegen die E. M. K. der Maschine auf.

Diese Phasenverschiebung ist wegen der grossen Selbstinduction der Maschine eine beträchtliche. Die Spannungscurve des Lichtbogens geht einmal mit der E. M. K., das zweite Mal mit der dem fliessenden Strom entsprechenden, gegen die E. M. K. phasenverschobenen, Spannungscurve durch die Null; daher die bemerkenswerthe längere Dauer der einen Halbperiode.

6. Die Thatsache, dass der Lichtbogen von der Kohle zum Eisen sich nicht bildet, wurde durch photographische Aufnahme des Bogens in den verschiedenen Momenten einer Periode erhärtet.[1]

Hiezu wurde auf der Axe eines vierpoligen Synchronmotors, der ebenso wie der Lichtbogen vom Netze der Internationalen Elektricitätsgesellschaft gespeist wurde, eine Eisenblechscheibe von 560 *mm* Durchmesser aufgesetzt, die im Radius von 225 *mm* zwei diametral gegenüberstehende kreisrunde Löcher von 50 *mm* Durchmesser besass. Auf der einen Seite dieser Scheibe war der Lichtbogen, auf der anderen der photographische Apparat aufgestellt.

Je nach der relativen Stellung der Scheibenlöcher zum mitrotirenden Magnetsystems, die verändert werden konnte, fiel das Licht des Bogens in verschiedenen Momenten der Periode in den photographischen Apparat. Der Apparat war mit einem einstellbaren Momentverschluss ausgestattet. Die in Fig. 5 (*a* bis *f*) wiedergegebenen Photographien stellen den Lichtbogen in sechs um 60° auseinanderliegenden Phasen dar. *a* und *b* zeigen den Lichtbogen; *e* und *f* lassen erkennen, dass

[1] Bei der photographischen Aufnahme hat uns Herr Ingenieur Wilhelm Strauss werkthätig unterstützt, wofür ihm an dieser Stelle der beste Dank ausgesprochen sei.

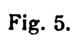


Fig. 5.

a *b*

c *d*

e *f*

in diesen Phasen kein Lichtbogen besteht; *c* und *d* sind Übergangsstadien. Details sind wegen der Kleinheit der Photographien nicht zu ersehen. Deutlicher zeigte ein mit einer Linse entworfenes Projectionsbild: In den Phasen entsprechend *a* und *b* brennt der Lichtbogen in Form eines blauen Kegels, dessen Spitze in dem auch auf den Photographien ersichtlichen hellen Punkt auf der Eisenkugel gelegen ist. Der Kegel ist von einer gelblichen Aureole umgeben. Zuerst verschwindet der blaue Kegel, dann auch die Aureole; in Phasen, entsprechend *d*, zeigt sich nur mehr eine über der Kohle liegende gelbliche Wolke. Im Maasse, als der Bogen verschwindet, sieht man an der Eisenkugel eine Schichtung concentrisch um den vorerwähnten hellsten Punkt. In den Phasen, entsprechend *e* und *f*, sieht man im Bilde, wie in den Photographien, nur die beiden Elektroden.

Beobachtet man den Lichtbogen, wenn er durch Auseinanderziehen der sich berührenden Elektroden neu gebildet wird, so sieht man, dass der Lichtbogen in beiden Richtungen brennt.

Wurde der Motor abgestellt, so dass er seine Geschwindigkeit allmälig verringerte, so konnte das Übergehen aller Phasen ineinander gesehen werden. Bei Verwendung eines Motors mit einer von der des Synchronmotors nur wenig abweichenden Tourenzahl kann man das Entstehen und Verschwinden des Lichtbogens in allen Phasen continuirlich verfolgen.

7. Nach dem Verlauf der Curven war zu erwarten, dass die gemessenen scheinbaren Gleichstrom- und Gleichspannungswerthe wesentlich beeinflusst werden durch die im Stromkreise wirkende Wechsel-E. M. K. einerseits, durch die vorhandene Phasenverschiebung anderseits. Eine Vergrösserung, respective Verkleinerung der E. M. K. wird als unmittelbare Folge eine gleichsinnige Veränderung des oberen Theiles der Spannungscurve, dagegen wenn auf gleiche Stromstärke und Lichtbogenlänge einregulirt ist, eine unwesentliche Veränderung des unteren Theiles der Lichtbogenspannungscurve hervorrufen, daher eine Vergrösserung, respective Verkleinerung der Angabe des Torsionsgalvanometers. Die Angaben der Tangentenboussole werden dadurch nicht wesentlich beeinflusst. Eine Veränderung der Phasenverschiebung beeinflusst das Verhältniss

der Dauer der beiden Halbperioden und hiedurch Strom und Spannung.

Diese Beeinflussungen wurden an einem Lichtbogen zwischen einer Eisenelektrode (6 *mm*) und einer Dochtkohle (S. & H., Marke *A*, 6 *mm*) thatsächlich constatirt.

Um den Lichtbogen bei verschiedenen Spannungen zu beobachten, wurde die Spannung der »Internationalen Elektricitäts-Gesellschaft« in Wien von circa 105 Volt mit Hilfe eines Kerntransformators (1 : 2) von Ganz & Co. auf circa 210 Volt hinauftransformirt; anderseits wurde die ebenfalls zur Verfügung stehende Spannung von circa 50 Volt benützt. Die Werthe für *J*, Δ, *C*, *V*, welche sich hiebei ergaben, sind theilweise in der folgenden Tabelle II wiedergegeben.

Tabelle II.

50 Volt				107 Volt				207 Volt			
J	Δ	*C*	*V*	*J*	Δ	*C*	*V*	*J*	Δ	*C*	*V*
5·0	42·5	2·75	10·6	6·5	79	3·45	27·1	5	145	2·65	68
7·2	42·5	3·70	9·45	7·0	77	3·8	31·5	5·9	147	3·2	66·5
8·0	44	3·95	9·3	8·0	78·5	4·25	29·0	7·05	145	4·1	69·1
9·0	40	4·9	12·8	9·0	79·5	4·9	31·3	8·1	145	4·7	66·8
10·8	40	6·1	12·6	10·1	79·0	5·7	31·7	9·1	147	5·25	67·3
				10·8	77·0	6·2	31·7	10·15	147	5·85	65

Man ersieht aus diesen Zahlen ganz unzweideutig, dass die beobachtete Gleichspannung von der Wechsel-E.M.K., an welcher der Lichtbogen anliegt, abhängig ist.

Kleine Schwankungen in der Bogenlänge, die nicht umgangen werden konnten, verursachten das scheinbar nicht ganz gesetzmässige Verhalten von *J* und Δ; bei constantem Strom wächst Δ nur mässig mit der Länge des Bogens, während *V* gleichzeitig fällt, was den Verhältnissen, wie sie sich aus den aufgenommenen Curven ergeben, entspricht.

Der Einfluss der Selbstinduction erhellt aus den folgenden Messungsresultaten, die erhalten wurden, wenn 1. in den Licht-

bogenstromkreis eine Spule eingeschaltet wurde, deren Selbstinductionscoëfficient $L_1 = 0\cdot00385\ H$ war; 2. wenn in diese Spule ein Eisenkern gegeben wurde, so dass der Selbstinductionscoëfficient $L_2 = 0\cdot0252$ war.

Tabelle III.

1. $L_1 = 0\cdot00385\ H$				2. $L_2 = 0\cdot0252\ H$			
J	Δ	C	V	J	Δ	C	V
5·9	81·5	2·75	23·6	6·1	79	3·6	20·1
7·0	80·0	3·7	26·6	7·0	74·5	4·4	22·6
8·2	80·5	4·5	25·8	8·1	74·5	4·87	22·6
9·2	78·0	5·55	30·2	9·05	75·5	5·55	22·6
10·8	78·0	6·35	30·2	9·7	73	6·1	23·9

Vergleicht man die in dieser Tabelle und die für 107 Volt in Tabelle II angegebenen Werthe miteinander, so zeigt sich mit wachsender Selbstinduction ein Abnehmen der zu gleichen totalen Stromwerthen (J) gehörigen Gleichspannungen (V), erklärbar durch eine immer weitergehende Verschmälerung des über der Abscissenaxe liegenden Theiles der Spannungscurve des Lichtbogens. Gleichzeitig wächst der scheinbare Gleichstrom (C) mässig an, was auf eine Veränderung der Form der Stromcurve, insbesondere eine Verflachung derselben zurückzuführen ist.

8. Die beinahe vollständige Stromunterbrechung in der Richtung Kohle—Eisen bewirkt merkwürdige Erscheinungen, wenn man zwei Lichtbogen Eisen—Kohle und Kohle—Eisen hintereinander, beziehungsweise parallel schaltet. Bezüglich der Hintereinanderschaltung bemerkte schon Sahulka, dass sich zwei solche Bogen in einem labilen Zustand befinden. Es ist dies dadurch zu erklären, dass für den Gleichstromzustand jeder der Bogen den Strom in einer anderen Richtung unterbricht.

Wenn einer der Bogen in den schon erwähnten, besonders bei geringer Elektrodenentfernung auftretenden zischenden Zustand gerieth, in welchem er in beiden Richtungen leitend zu sein scheint, dann kann der andere Bogen das Übergewicht erlangen und sich einen normalen Gleichstromzustand schaffen.

In einem solchen Falle muss dann, nach dem Vorhergehenden, bei 200 Volt totaler E.M.K., an diesem Lichtbogen eine scheinbare Gleichspannung von circa 65 Volt auftreten, wie sie auch Sahulka erwähnt.

Für die Parallelschaltung wurden folgende Beobachtungen gemacht. Die Schaltung war die in Fig. 6 angegebene. Es bedeuten: L_1 und L_2 die beiden Lichtbogen, R_1 und R_2 ihre Vorschaltwiderstände, A_1 und TB ein Hitzdraht-Ampèremeter, beziehungsweise eine Tangentenboussole zur Messung des durch einen Lichtbogen fliessenden Stromes, A ein Hitzdraht-Ampèremeter zur Messung des totalen Stromes, HV und TG ein Hitzdraht-Voltmeter, beziehungsweise ein Torsionsgalvanometer. Bei m und n befanden sich Quecksilbernäpfe, die durch einen Kupferbügel b rasch verbunden werden konnten. Die beiden Lichtbogen wurden bei entferntem Kupferbügel b gebildet; erst wenn beide gleich brannten wurde durch b bei m und n verbunden. Diese Anordnung war deshalb nothwendig, weil bei Anwendung eines gemeinschaftlichen Vorschaltwiderstandes weder die aufeinanderfolgende, noch die gleichzeitige Bildung der Lichtbogen möglich war.

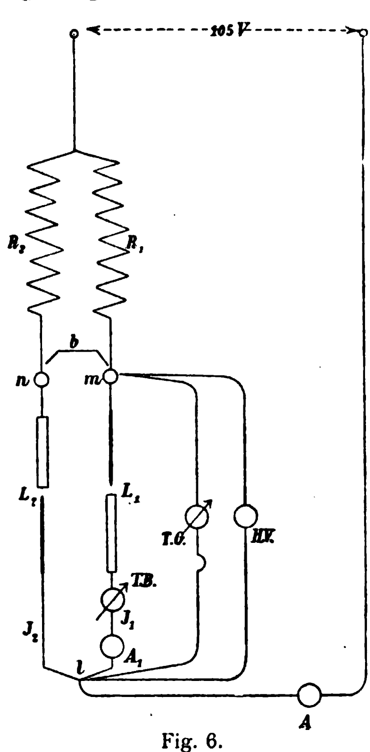


Fig. 6.

Es wurden in einem Falle folgende Werthe abgelesen, und zwar an:

$$\overset{TB}{C_1 = 8\cdot 35 \text{ Ampère}}, \quad \overset{A_1}{J_1 = 15\cdot 5 \text{ Ampère}}, \quad \overset{A}{J = 21 \text{ Ampère}},$$

$$\overset{HV}{\Delta = 24 \text{ Volt}}, \quad \overset{TG}{V = {}^1/_2 \text{ Volt}}.$$

Das Verhältniss von C_1 und J_1 steht mit den früher beobachteten Grössen im Einklang; das Verhältniss von J_1 und J, welch letzteres die Resultirende von J_1 und J_2 vorstellt, ist dadurch bedingt, dass in jenen Periodenhälften, in welchen J_1 nahezu Null ist, J_2 die grossen Werthe erreicht und umgekehrt. Wenn i, i_1, i_2 die Momentanwerthe von J, J_1, J_2 bedeuten, dann ist

$$J = \sqrt{M(i^2)}$$

$$i = i_1 + i_2;$$

da nun für jeden Moment entweder i_1 oder i_2 nahezu Null ist, so ist in jedem Momente das Product

$$i_1 . i_2 = 0.$$

Aus

$$i^2 = i_1^2 + i_2^2 + 2 i_1 i_2$$

wird also angenähert

$$i^2 = i_1^2 + i_2^2.$$

$$\Sigma(i^2) = \Sigma(i_1^2) + \Sigma(i_2^2) = 2\Sigma(i_1^2),$$

wenn die beiden Bogen gleich brennen.

$$M(i^2) = 2M(i_1^2),$$

$$J = \sqrt{M(i^2)} = \sqrt{2}\sqrt{M(i_1^2)} = \sqrt{2}.J_1;$$

das entspricht den abgelesenen Werthen.

Was die Ablesungen der Voltmeter betrifft, so ist zu erwägen, dass der Strom in jeder Richtung einen Weg hat, daher an den Klemmen der Lichtbogen niemals die volle Spannung des Transformators auftreten kann; die Spannungscurve verläuft in beiden Periodenhälften symmetrisch zur Abscissenaxe, wie es die unteren Hälften der früher angegebenen Spannungscurven darstellen.

9. Es erübrigt noch einige von Sahulka[1] zuerst constatirte Erscheinungen am Eisen—Kohle-Bogen mit den gewonnenen

---

[1] Sahulka, l. c.

Erkenntnissen in Einklang zu bringen. Im Folgenden bezeichnet *E* die Eisen-, *K* die Kohlenelektrode, *L* den Lichtbogen respective das in ihn eingeführte Prüfstäbchen; die Spannungen in der Richtung Kohle—Eisen sind mit +, die in der Richtung Eisen—Kohle mit — charakterisirt; T.G. steht für Torsionsgalvanometer, S.G. für Spiegelgalvanometer.

Während ein T. G., welches an die beiden Elektroden angelegt ist, oder zwei hintereinandergeschaltete T. G., deren freie Klemmen mit *K* und *E*, und deren gemeinsame Klemme mit einem in den Lichtbogen eingeführten Mittelstäbchen verbunden sind, Spannungen in der Richtung *K*—*E* angeben, zeigen T. G., welche zwischen eine der Elektroden und das Mittelstäbchen geschaltet werden, Spannungen in der entgegengesetzten Richtung, also von *E* zu *K*. Das kommt daher, dass während einer beträchtlichen Zeit, und zwar gerade dann, wenn die hohen Potentialdifferenzen *K*—*E* auftreten, der Lichtbogen unterbrochen, die mit dem Prüfstäbchen verbundene Klemme des T. G. währenddessen gleichsam abgeschaltet ist, und die vom T. G. angezeigte Spannung wesentlich den während der Lichtbogenbildung *E*—*K* auftretenden, von *E* zu *K* gerichteten Potentialdifferenzen entspricht.

Die Erscheinungen, welche Sahulka mit dem aperiodischen Spiegelgalvanometer (S. G.), dem ein Widerstand von $10^7\,\Omega$ vorgeschaltet war, beobachtet hat, lassen sich erklären, wenn man den Hauptsitz des grossen Widerstandes für die Stromrichtung *K*—*E* an die Eisenelektrode verlegt. Das an die beiden Elektroden angelegte S. G. zeigte die auch am T. G. erscheinenden +28 Volt. War es an *L* und *K* angeschaltet, so zeigt es einen dem T. G. sich nähernden Werth; man muss desshalb die Annahme machen, dass der Widerstand von *L* (Ort des Prüfstäbchens) bis *E* während der Periode *K*—*E* so gross ist, dass er die Ausbildung eines das S. G. wesentlich beeinflussenden Stromes verhindert. Schaltet man S. G. an *L* und *E*, so zeigt es die Spannung +32 Volt, also eine etwas grössere als die zwischen *K* und *E* beobachtete; dies kommt daher, dass die Spannungen, welche während der Lichtbogenbildung *E*—*K* von oben nach unten zwischen *E* und dem Prüfstäbchen (*L*) auftreten, kleiner sind als die zwischen *E* und *K* auftretenden;

dagegen für die Spannungsrichtung *K—E* nun zwischen Prüfstäbchen und *K* die sonst zwischen *E* und *K* sich zeigenden grossen Potentialdifferenzen sich einstellen; diese scheinen im Stande zu sein, durch den unteren Theil des ausgelöschten Lichtbogens einen das S.G. ablenkenden Strom durchzusenden. Vielleicht steht dies mit der früher erwähnten Wolke über der Kohle im Zusammenhang.

War an das Prüfstäbchen (*L*) und *E* gleichzeitig ein T.G. und das S.G. gelegt, so zeigten beide —6 bis —8 Volt an. Das T.G. zeigte diesfalls dieselbe Spannung, als wenn es allein eingeschaltet wäre. Die zu ihm parallel liegenden $10^7\,\Omega$ kamen nicht in Betracht; anderseits konnten die während der Periodenhälfte *K—E* auftretenden hohen Spannungen durch den grossen Widerstand zwischen Prüfstäbchen und Kohle das T.G. nur schwach beeinflussende Ströme schicken. Für das S.G. spielt das T.G. die Rolle eines Nebenschlusses von $\frac{1}{10^4}$ kleinerem Widerstand. Von den Strömen, welche die erwähnten hohen Spannungen durch das S.G. schicken würden, wenn das T.G. nicht angeschaltet ist, und welche die von *K* zu *E* gerichtete Spannung ergeben, geht jetzt nur ein verschwindender Theil durch das S.G.; die Ablenkung desselben ist daher wesentlich nur von den während der Lichtbogenbildung *E—K* zwischen *E* und dem Prüfstäbchen (*L*) sich einstellenden Spannungen abhängig.

War schliesslich an das Prüfstäbchen (*L*) und *E* ein T.G., an das Prüfstäbchen (*L*) und *K* das S.G. gelegt, so war der grosse Widerstand an der Eisenelektrode durch T.G. überbrückt, die in der Periodenhälfte *K—E* auftretenden Spannungen kamen voll zur Wirkung; das S.G. zeigte einen Ausschlag von +35 Volt. Wurde T.G. abgeschaltet, so zeigte S.G. die sonst beobachteten —3 bis —4 Volt.

10. Um die im unmittelbar Vorhergehenden gegebenen Erklärungen zu festigen, wäre es wünschenswerth, die Ursache der Stromunterbrechung, respective die Natur des grossen Widerstandes zu kennen. Es wurde schon erwähnt, dass man in Analogie zu der von Arons[1] vorgebrachten Hypothese, dass

[1] Arons, l. c.

der Wechselstromlichtbogen zwischen zwei Metallen in Folge Oxydbildung sich nicht erhalten kann, auch beim Kohle—Metallbogen annehmen könnte, dass durch eine Oxydbildung die Entstehung des Bogens in der Richtung Kohle—Eisen verhindert wird. Es wurden Versuche gemacht, den Lichtbogen in einer durch Quecksilber abgeschlossenen Glasglocke brennen zu lassen. Des mangelnden Sauerstoffes halber war eine fortdauernde Oxydbildung unmöglich. Es ergab sich das negative Resultat, dass eine Abnahme des von der Boussole angegebenen scheinbaren Gleichstromes nicht eintrat. Wahrscheinlich genügte der anfänglich in der Glocke befindliche Sauerstoff zur Bildung der nöthigen Oxydmengen. Weitere Versuche in dieser Richtung konnten noch nicht angestellt werden.

11. Der Metall—Kohle-Lichtbogen spielt sonach für den Wechselstrom die Rolle eines einseitig wirkenden Ventiles, das

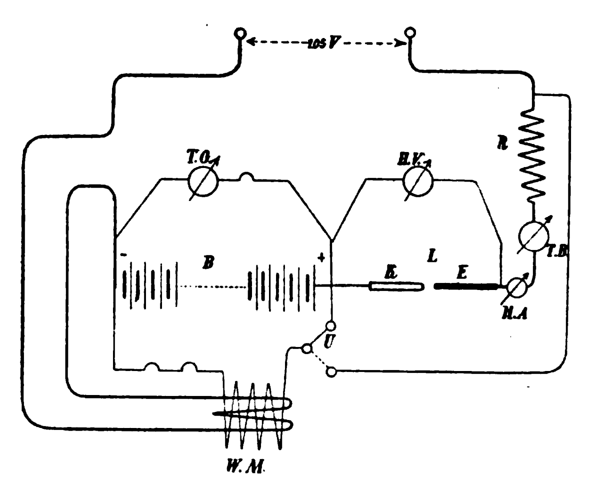


Fig. 7.

nur die nach einer Richtung fliessenden Ströme durchlässt. Er hat daher die Fähigkeit, Wechselstrom in einen Strom zu verwandeln, der nur aus gleichgerichteten Stromimpulsen besteht. Schaltet man daher in den Stromkreis eines solchen Lichtbogens Accumulatoren derart, dass der +Pol der Batterie an die Kohlenelektrode zu liegen kommt, so zeigt die Batterie Ladespannung. Fig. 7 stellt die Schaltung dar, welche gemacht

wurde, um den Nutzeffect einer solchen Ladung von Accumulatoren mittelst Wechselstrom zu bestimmen.

B ist die Accumulatorenbatterie, *L* der Lichtbogen und *R* ein Regulirwiderstand. Das Hitzdrahtampèremeter *HA* misst den totalen Strom *J*, die Tangentenboussole *TB* den scheinbaren Gleichstrom *C*, das Wattmeter *WM*, je nach Stellung des Umschalters *u*, die auf die Batterie entfallenden Watt *w* oder die im ganzen Stromkreis verbrauchten Watt *W*; das Torsionsgalvanometer *TG* gibt die Spannung der Accumulatorenbatterie *v*, das Hitzdrahtvoltmeter *HV* die Lichtbogenspannung an. Folgende Zahlen gelten für einen Versuch, bei welchem die Wechselspannung circa 105 Volt war und die Accumulatorenbatterie aus 16 Zellen bestand

$J_{\text{Amp.}}$	W_{Watt}	w_{Watt}	v_{Volt}	$\eta = \frac{w}{W}$	Spannung pro Zelle Volt
7·5	522	153	—	0·294	—
6·2	403	122	36·5	0·303	2·285
4·8	313	104·5	37·6	0·33	2·355

Wenn man durch Verkleinern des Regulirwiderstandes *R* die auf die Accumulatoren entfallende Arbeit vergrössern wollte, so zeigte sich ebenso wie dann, wenn die Spannung der Accumulatorenbatterie durch Zuschaltung von Zellen vergrössert wurde, dass der Lichtbogen den Gleichstromzustand aufgab. Die totale Stromstärke *J* stieg, der scheinbare Gleichstrom *C* und die Accumulatorenspannung *v* fielen. Der oben sich ergebende Nutzeffect η von circa 30% wurde auch für den Fall höherer Wechselspannung und dadurch ermöglichter grösserer Zahl von Accumulatorenzellen nicht überschritten.

B. Lichtbogen zwischen zwei Kohlenelektroden verschiedener Beschaffenheit.

1. Bildet man einen Wechselstromlichtbogen zwischen zwei Kohlenelektroden von wesentlich verschiedener Beschaffenheit, beispielsweise einer Docht- und einer Homogenkohle, so zeigen eine in den Kreis in derselben Weise wie früher eingeschaltete Tangentenboussole und ein an die Elektroden angelegtes Torsionsgalvanometer Gleichstrom, beziehungsweise

Gleichspannung an. Das findet statt, sowohl wenn die Dochtkohle oben und die Homogenkohle unten ist, als auch, wenn die Homogenkohle die obere und die Dochtkohle die untere Elektrode bildet; endlich zeigt auch ein horizontal angeordneter Lichtbogen die angeführten Erscheinungen.

Diese drei Fälle unterscheiden sich quantitativ insoferne, als die grössten Gleichstromwerthe dann auftreten, wenn die Dochtkohle die obere der beiden vertical gestellten Elektroden ist, und der Bogen in den an ihr sich ausbildenden Krater brennt. Die Richtung des Gleichstromes ist in allen drei Fällen im Bogen von der Docht- zur Homogenkohle, und die letztere erweist sich als positiv gegenüber der ersteren.

Beispielsweise wurde für eine Wechselspannung von 105 Volt gefunden:

Tabelle IV.

Kohlen von Schiff, Jordan & Co. Dochtkohle 13·5 *mm* dick. Homogenkohle 10 *mm*.

J	Δ	C	V
	a) Dochtkohle oben		
9·1	28	0·7	6·4
8·2	35	0·65	6·1
7·5	36·5	1·00	8·5
7·2	36·5	1·00	7·9
6·2	54·0	0·7	5·8
	b) Lichtbogen horizontal		
9·0	28	0·45	5·3
8·2	33·5	0·3	3·45
7·5	36·0	0·32	4·25
	c) Dochtkohle unten		
9·0	28	0·2	1·3
8·2	34	0·1	1·6
7·5	35·5	0·2	1·85
7·2	36·5	0·3	2·55
6·2	52·0	0·45	4·25

2. Diese Gleichströme, die also von der gegenseitigen Lage der Kohlen abhängen, scheinen die Resultirenden zweier componentaler Gleichströme zu sein, von welchen der eine durch die Lage, der andere durch die Beschaffenheit der Kohlen bedingt ist. Auch an zwei gleichartigen Kohlen kann man nach

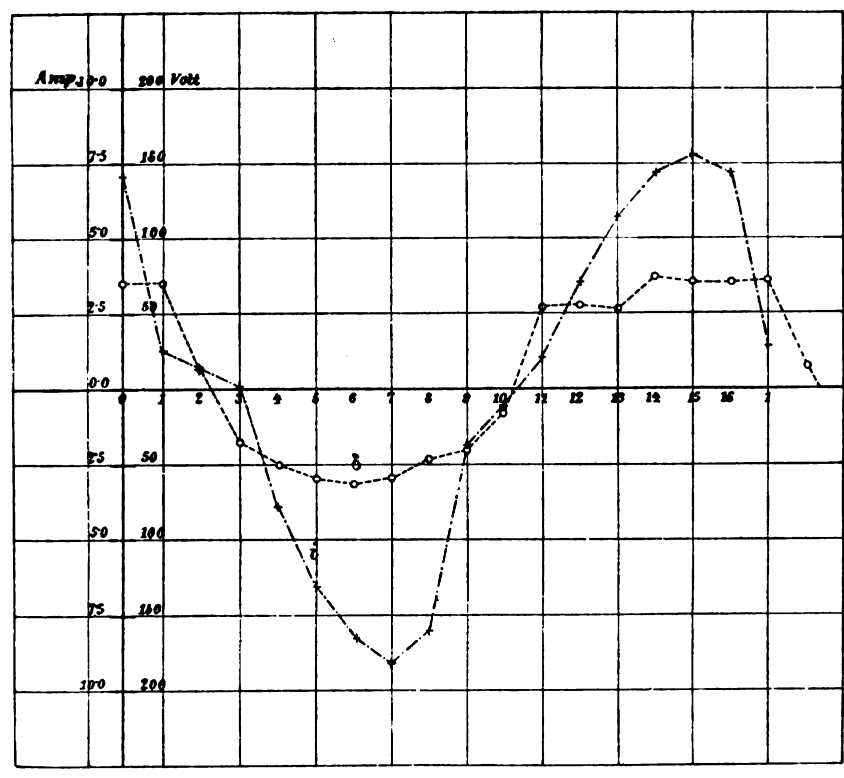


Fig. 8.

Sahulka[1] beobachten, dass die untere Kohle positiv gegen die obere ist. Am horizontalen Bogen zwischen gleichartigen Elektroden zeigt sich keine Gleichspannung. Es tritt also zu dem durch die Verschiedenheit der Kohlen bedingten, von der Docht- zur Homogenkohle gerichteten Gleichstrome, der sich für alle Lagen des Lichtbogens zeigen muss, im Falle, wo die Docht-

[1] Sahulka, l. c.

kohle oben ist, der von Sahulka beobachtete Strom additiv, im Falle, wo sie unten ist, subtractiv hinzu.

3. Die aufgenommenen Strom- und Spannungscurven, von welchen zwei zusammengehörige in Fig. 8 beigegeben sind, haben qualitativ mit den an den Instrumenten abgelesenen Werthen übereingestimmt, d. h. der über der Abscissenaxe liegende Theil der Spannungscurve, welcher der Stromrichtung Homogenkohle—Dochtkohle entspricht und der der entgegengesetzten Stromrichtung entsprechende Theil der Stromcurve sind der Fläche nach grösser als die anderen Theile der bezüglichen Curven. Diese Ungleichheiten stehen in Zusammenhang mit der schon von Blondel[1] hervorgehobenen verschiedenen Bildungsart des Lichtbogens von einer Homogen-, beziehungsweise Dochtkohle aus. Auch hat Mrs. Ayrton[2] beobachtet, dass die Spannung eines Gleichstromlichtbogens in der Richtung Dochtkohle—Homogenkohle kleiner ist als in der entgegengesetzten. Diese beiden Umstände dürften für die Gleichspannung und den Gleichstrom am Lichtbogen massgebend sein, welche in Folge der verschiedenen Beschaffenheit der Kohlenelektroden auftreten.

Unserem verehrten Vorstande, Herrn Hofrath Prof. A. v. Waltenhofen, sei für das rege Interesse, mit welchem er unseren Untersuchungen folgte, und die Liebenswürdigkeit, mit welcher er uns die nothwendigen Apparate zur Verfügung stellte, der wärmste Dank ausgesprochen.

---

[1] Blondel, l. c.

[2] Mrs. Ayrton, Electrician XXXIX, p. 572. 1897.

Die Rotationspolarisation der Äpfelsäure

von

Leopold Kann.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 5 Textfiguren.)

Als ich mich mit der Frage nach dem Einflusse des Lösungsmittels und der Temperatur beschäftigte, stiess ich bei den die Polarisation betreffenden Untersuchungen bei der Äpfelsäure auf ganz merkwürdige Erscheinungen, denen ich nachzugehen beschloss.

Die bisherigen Ergebnisse will ich nun in dieser Arbeit mittheilen.

Der Apparat, dessen ich mich zu meinen Messungen bediente, war ein Lippich'sches Halbschattenpolarimeter[1] mit dreitheiligem Gesichtsfeld in der Ausführung, die Landolt angegeben hat. Bezüglich der genaueren Beschreibung verweise ich auf Landolt (Das optische Drehungsvermögen, 2. Aufl., Braunschweig, 1898).

Für gewöhnliche Messungen — bei Zimmertemperatur — sind dem Apparat zwei Flüssigkeitsröhren (von 1 *dm* und 2 *dm* Länge) beigegeben, die in eine hiezu dienende Rinne eingelegt werden, welche auf die verschiebbaren Träger des Apparates gestellt wird. Für andere Temperaturen dient ein prismatischer Kasten aus Messingblech, durch den eine inwendig vergoldete Messingröhre geht, deren herausragende Enden sich durch

---

[1] Lippich, Zeitschr. für Instr., 2, 167 (1882); 14, 326 (1894). — Diese Sitzungsber., II, 91, 1081 (1885); II, 105, 317 (1896).

gläserne Deckplatten und Überwurfsschrauben verschliessen lassen. In eine obere Öffnung der Röhre ist ein enges Röhrchen eingepasst, welches durch den abnehmbaren Deckel des Kastens hindurchgeht und die Ausdehnung oder Zusammenziehung der eingefüllten activen Substanz erlaubt. Ausserdem hat der Deckel zwei Öffnungen für Thermometer und Rührer. Der Kasten wird mit einer als Bad geeigneten Flüssigkeit gefüllt und kann sodann mittelst untergestellter Lampe erhitzt werden. Aussen ist der ganze Kasten noch mit Asbestpapier umhüllt.

Die Temperatur soll nun an dem ins Bad gesenkten Thermometer abgelesen werden. Das ist aber aus mehreren Gründen unzweckmässig und unzuverlässig. Um daher direct die Temperatur der Substanz in der Röhre ablesen zu können, verfuhr ich folgendermassen: Ein kurzes, ziemlich weites Glasrohr wurde an beiden Enden mit einem durchbohrten Korke versehen; der eine kam über das obere Ende des engen Röhrchens, durch den anderen wurde ein dünnes Thermometer gesteckt, das auch durch das enge Röhrchen ging. So diente das Glasrohr gleichzeitig zur Fixirung des Thermometers und zur Aufnahme der durch das Thermometer verdrängten Flüssigkeit, die bei einer Zusammenziehung so wieder in die Röhre treten konnte und das Entstehen einer Luftblase verhütete.

Um wenigstens eine genau definirte homogene Lichtquelle zu haben, wendete ich die Natriumflamme an, die durch eine concentrirte Lösung von Kaliumdichromat gereinigt wurde. Am besten erwies sich eine kreisförmig ausgeschnittene Asbestplatte, die mit Kochsalz bestreut und über die Flamme eines Terquem-Brenners gestülpt wurde. Diese Flamme war hinlänglich intensiv und andauernd.

Bei den ersten orientirenden Versuchen, die mir eben jene Eigenthümlichkeiten der Äpfelsäure verriethen, benützte ich als weitere Lichtquelle nur noch das Roth, das ein Auerlicht lieferte, welches durch eine rothe Glasplatte ging, die nur ziemlich homogenes Licht durchliess. Später wendete ich auch noch Blau an, indem ich das Licht des Auerbrenners durch eine Lösung von Kupfervitriol gehen liess.

Die genannten Lösungen, welche als Strahlenfilter dienten, wurden in Tröge gefüllt, die mit Kork verschlossen wurden.

Diese Tröge und die rothe Glasplatte wurden auf einem Schlitten montirt, der am Polarisator vorbeigezogen werden konnte. Die Lichtquelle selbst wurde so aufgestellt, dass die Linse vor dem Polarisator ein scharfes Bild derselben auf dem Diaphragma des Analysators zeichnete.

Um einer eventuellen Drehung durch die Gläser Rechnung zu tragen, wurde die Bestimmung des Nullpunktes bei eingelegter leerer Röhre ausgeführt.

Der Halbschattenwinkel betrug durchwegs circa $4^1/_4{}^\circ$.

Von den ersten — schon oben als bloss orientirenden bezeichneten — Messungen will ich bloss jene Daten hieher setzen, welche das charakteristische Verhalten der Äpfelsäure zeigen.

In einer engen Mensur wurde zu 4·0685 *g* Äpfelsäure Wasser zugesetzt, das Volumen der Lösung betrug bei $25^1/_4{}^\circ$ C. 24·89 cm^3.

Aus den Ablesungen: 356·135, 356·135, 356·13, 356·14, 356·14, 356·13 ergibt sich als Mittelwerth für den Nullpunkt 356·135.

Bekanntlich gibt es verschiedene Einstellungsmethoden; ich befolgte die von Lippich angegebene: Man dreht den Analysator erst rascher, dann immer langsamer und schrittweise in demselben Sinne, um die Gleichheit der Felder zu erreichen; glaubt man diese überschritten zu haben, so wird zurückgedreht und die Einstellung von Neuem begonnen. Auch wird das Auge, wenn man der Gleichheit schon nahe gekommen ist, nach jedem Schritt nur für kurze Zeit geöffnet. Man erreicht nach dieser Methode natürlich nicht diejenige Stellung des Analysators, bei welcher die Felder objectiv gleiche Helligkeit haben, sondern eine Stellung, die von der ersteren um einen gewissen kleinen Winkel abweicht, der von der Grösse der Unterschiedsempfindlichkeit (etwa 1 Procent) abhängt; man bleibt eben dort stehen, wo das Auge keinen Helligkeitsunterschied mehr zu empfinden vermag. Um also die Gleichheitsstellung des Analysators zu bestimmen, muss man abwechselnd Einstellungen von beiden Seiten her machen und aus allen das Mittel nehmen.

In der Tabelle I sind die Werthe der Gleichheitsstellung für die oben angegebene Lösung gegeben, und zwar in der ersten Rubrik die thatsächlichen Ablesungen für Roth, in der zweiten die entsprechenden Mittelwerthe, in der dritten und vierten analog für Gelb.

Die Tabelle II enthält die Beträge in Graden, um welche die Polarisationsebene des rothen, respective gelben Lichtes durch eine 1 *dm* dicke Schicht der Substanz gedreht wird.

Tabelle I.

Roth				Gelb			
° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°
17·5	355·92	17·5	355·920	17·5	355·95	17·5	355·950
	·92				·96		
	·915				·94		
	·925				·95		
25	355·86	25	355·858	26	355·88	26	355·880
	·855				·89		
	·86				·87		
	·855				·88		
31	355·84	31	355·840	29·5	355·84	29·5	355·843
	·845				·845		
	·835				·84		
	·84				·85		
49·2	355·755	49·2	355·758	49	355·745	49	355·740
	·76				·735		
	·75				·74		
	·76				·74		
92	355·545	92	355·551	92	355·47	92	355·460
	·555				·45		
	·555				·46		
	·550				·46		

Tabelle II.

Roth		Gelb	
° C.	∢ °	° C.	∢ °
17·5	—0·215	17·5	—0·185
25·0	—0·277	26·0	—0·255
31·0	—0·295	29·5	—0·292
49·2	—0·377	49·0	—0·395
92·0	—0·582	92·0	—0·675
95·0	—0·604	95·0	—0·695

Es zeigt sich also nebst einer beträchtlichen Vermehrung des Drehungsvermögens durch Temperaturerhöhung anomale Dispersion, die jedoch bei höheren Temperaturen (in unserem Falle ober 30°) wieder verschwindet.

Nun wurde eine alkoholische Lösung untersucht (99·7% Alkohol).

Das Volumen der Lösung betrug bei 20·75° C. 24·7 cm^3, in der Lösung waren 3·9251 *g* Äpfelsäure.

Tabelle III und IV sind analog den Tabellen I und II angelegt. Nullpunkt: 356·135.

Tabelle III.

Roth				Gelb			
° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °
15	355·440			15·5	355·340		
	·445	15	355·441		·360	15·5	355·348
	·440				·340		
	·440				·350		
38	355·315			37	355·195		
	·320	38	355·316		·210	37	355·203
	·315				·200		
	·315				·205		

Roth				Gelb			
° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°
45	355·26	45	355·260	50·5	355·12	50·5	355·124
	·25				·12		
	·27				·13		
	·26				·125		
				61	355·070	61	355·065
					·060		
					·075		
					·055		
71	355·140	71	355·140				
	·140						
	·150						
	·130						

Tabelle IV.

Roth		Gelb	
° C.	∢°	° C.	∢°
15	—0·694	15·5	—0·787
38	—0·819	37	—0·932
45	—0·875		
		50·5	—1·011
		61	—1·070
71	—0·995		

In alkoholischer Lösung geringer Concentration finden wir also zwar einen fast gleichen Temperaturcoëfficienten, aber bedeutend grösseres Drehungsvermögen und keine anomale Dispersion.

Nun will ich an die Mittheilung der eigentlichen Messungen gehen.

Sowohl von der wässerigen, als auch von der alkoholischen Lösung soll eine ziemlich grosser und eine geringerer Concentration untersucht werden.

I. Die wässerigen Lösungen.

a) Grössere Concentration.

In einem Mischkolben wurden 46·5189 *g* Äpfelsäure gewogen, dazu kamen bei 10·3° C. 50 cm^3 destillirtes Wasser (specifisches Gewicht des Wassers bei dieser Temperatur 0·999705), also 49·98525 *g* Wasser, so dass in 100 *g* Lösung 48·20404 *g* Äpfelsäure enthalten waren.

Leider blieb die Lösung trotz Schüttelns und wiederholten Erwärmens trüb und musste filtrirt werden, was sonst nach Thunlichkeit zu vermeiden ist. Es wäre also am Procentgehalt eine Correctur anzubringen, deren Mass sich nach den Angaben Landolt's durch folgende Erwägung ungefähr bestimmen liesse: Nimmt man die Verdunstung unabhängig vom Procentgehalt der Lösung an und ferner proportional der filtrirten Flüssigkeitsmenge — was jedoch beides nur ungefähr richtig ist — so lässt sich aus eigens zu dem Zweck angestellten Versuchen schätzen, dass bei wässerigen Lösungen nach der Filtration der Gehalt für je 10% Substanz etwa um 0·005 und bei alkoholischen um 0·03 bis 0·05 zugenommen hat.

Das specifische Gewicht der filtrirten Lösung — mittelst der Mohr'schen Wage bestimmt — betrug $d_4^{15} = 1{\cdot}20938$.

Mit dieser Lösung wurde die Röhre im Messingkasten — die eine Länge von 1 *dm* hatte — gefüllt und dann die Drehung für Roth, Gelb und Blau bei verschiedenen Temperaturen bestimmt. Die Ablesungen der jeweiligen Gleichheitsstellung, respective ihren Mittelwerth enthält die Tabelle V, die thatsächlichen Drehungen in Graden die Tabelle VI.

Der Mittelwerth aus den Bestimmungen des Nullpunktes war 356·138.

Tabelle V.

Roth				Gelb				Blau			
° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°
10·5	356·970			11·5	357·210			12	357·96		
10·6	·980	10·6	+ 356·980		·210	11·6	+ 357·206		·96	12	+ 357·950
10·6	·990			11·6	·205				·93		
10·7	·980			11·7	·200				·95		
28	356·36			28·2	356·52			28·2	357·035		
28·2	·36	28·3	356·356		·53	28·2	356·525		·06	28·2	357·048
28·5	·35			28·1	·52			28·1	·04		
28·4	·355				·53				·055		
42·7	355·90			44	355·95			42·5	356·36		
42·6	·905	42·6	355·903		·95	44	355 950	42·6	·34	42·5	356·353
	·905								·35		
	·900								·36		

59·2	355·43	59·2	355·426	59	355·47	58·8	355·47	60·2	355·555	60·1	355·543
59 2	·425			58·5	·47			60	355·53		
	·435			58·8	·46						
	·420				·48						
71·2	355·105	71·6	355·108								
	·11										
72	·105										
	·11										
79·2	354·955	79·1	354·958	78·2	354·87	78·1	354·868	79	354·80	79	354·760
79 1	·96			78·2	·865				·75		
				78	·87				·75		
					·867				·75		
92·2	354·60	92·2	354·600	91·2	354·465	91·2	354·46	92	354·215	92·1	354·209
92·2	·60			91·1	·45			92·2	·200		
	·60			91·1	·465			92	·220		
	·60			91·2	·46			92·3	·200		

Tabelle VI.

Roth		Gelb		Blau	
° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°
10·6	+0·842	11·6	+1·068	12	+1·812
28·3	+0·218	28·15	+0·387	28·15	+0·910
42·65	—0·235	44	—0·188	42·55	+0·215
59·2	—0·712	58·8	—0·668	60·1	—0·595
71·6	—1·030				
79·15	—1·180	78·1	—1·270	79	—1·378
92·2	—1·538	91·2	—1·678	92·1	—1·929

Diese Tabelle zeigt uns vor Allem einen enorm hohen Temperaturcoëfficienten, besonders für Blau. Anfangs ist die Lösung für alle drei Farben rechtsdrehend mit normaler Dispersion; bei je einer bestimmten höheren Temperatur ist für eine Farbe das Drehungsvermögen Null, um bei noch höherer Temperatur negativ zu werden. Ober 47° C. ist die Substanz für alle Farben linksdrehend mit anomaler Dispersion; es wird nämlich Roth am stärksten, Blau am schwächsten (allerdings im negativen Sinne) gedreht. Ungefähr zwischen 65 und 70° ist die Drehung für Gelb am grössten. Ober 72° C. ist wieder normale Dispersion.

Die Fig. 1 auf der folgenden Seite bietet uns ein übersichtliches Bild dieser Verhältnisse.

Als Abscissen sind die Temperaturen aufgetragen, und zwar entsprechen 2 *mm* einem Grad. Die Ordinaten sind die Drehungswinkel. Zwei Hundertstel eines Grades sind durch 1 *mm* dargestellt. (Die Curve für Roth ist mit I, die für Gelb mit II und die für Blau mit III bezeichnet.)

b) Geringere Concentration.

Von der concentrirteren Lösung (I, *a*) wurden in einem Kolben 10·3028 *g* abgewogen, somit 4·96635 *g* Äpfelsäure. Dazu wurde Wasser gesetzt. Das Gewicht der Lösung betrug nun 24·7578 *g*. Also waren 20·0598 *g* Äpfelsäure in 100 *g* Lösung.

Das specifische Gewicht — mittelst Pyknometers bestimmt — $d_4^{14} = 1\cdot07918$.

Tabelle VII auf der folgenden Seite ist analog der Tabelle V angelegt; ebenso die Tabelle VIII der Tabelle VI. Ferner entspricht die Fig. 2 der Fig. 1, nur mit dem Unterschiede, dass

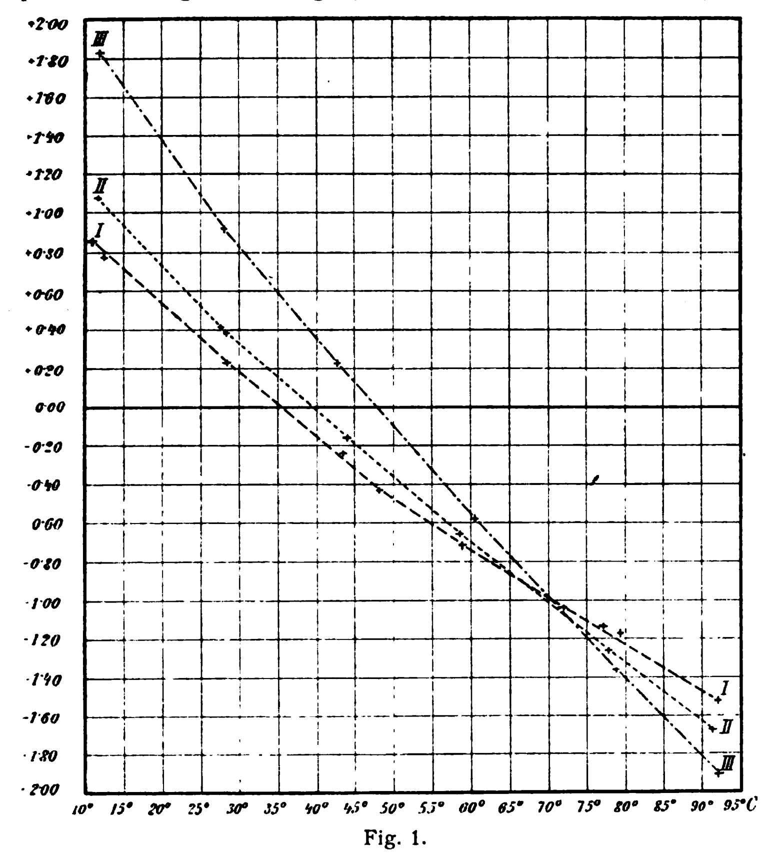


Fig. 1.

wegen des kleineren Temperaturcoëfficienten diesmal ein Hundertstel eines Grades 1 *mm* äquivalent ist.

Zur Probe wurden mit dieser Lösung am folgenden Tage noch einige Messungen gemacht, und zwar die Ausgangspunkte der drei Curven und der Punkt der gelben Curve für $72^1/_4$° C. Die Werthe enthält Tabelle IX und X.

Diese Werthe liessen sich in die bereits gezeichneten Curven der Fig. 2 tadellos einzeichnen.

Tabelle VII.

Roth				Gelb				Blau			
° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °
13·4	355·960			12	355·965			14·1	356·08		
13	·925	13·3	355 941	12·5	·980	12·6	355·984	14·5	·075	14·3	356·074
13·5	·955			12·8	356·000				·08		
	·925			13	355·990				·06		
25	355·83			25·6	355·87			23·5	355·97		
24·9	·82	24·9	355·824	25·7	·85	25·7	355·859	24	·95	24·3	355·940
	·82				·86			24·8	·925		
	·825				·855			24·9	·915		
38·6	355·73			37·5	355·72			38·5	355·775		
38·5	·735	38·35	355·734	38·5	·735	38	355·732		·79	38·5	355·779
38·3	·735			38	·735				·79		
38	·735			38	·73				·76		
44	355·690			43·2	355·675			43·8	355·670		
44	·675	43·8	355·680	43	·685	43	355·680	44	·655	44	355·666
43·5	·68			43	·685			44·2	·68		
	·675			43	·675			44	·66		

54·2	355·625	54·1	355·627	53·5	355·60	53·8	355·600	52·5	355·58	51·8	355·593
54	·615							52	·58		
54·3	·635			54	·60			51	·62		
54	·635								59		
65·6	355·55	65·4	355·553	66·9	355·465	66·7	355·468	65·2	355·465	65·1	355·453
65	·56			66·7	·470			65	·44		
65·5	·55										
65·5	·55										
77·2	355·49	76·6	355·500	77·2	355·485	76·6	355·495	76	355·315	75·9	355·309
76	·51			76	·49			75·8	·310		
					·51			76	·31		
								75·8	·29		
				70·5	355·44	70·5	355·440				
					·44						
					·45						
					·43						
93·2	355·38	93	355·370	94	355·285	94	355·285	92·8	355·14	92·8	355·138
92	·37				·285				·12		
93·2	·38			94·1	·280				·14		
93·3	·35				·290				·15		

Tabelle VIII.

Roth		Gelb		Blau	
° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °
13·3	— 0·197	12·6	— 0·154	14·3	— 0·064
25·	— 0·314	25·7	— 0·279	24·3	— 0·198
38·35	— 0·404	38	— 0·406	38·5	— 0·359
43·8	— 0·458	43	— 0·458	44	— 0·472
54·1	— 0·511	53·75	— 0·538	51·8	— 0·545
65·4	— 0·585	66·7	— 0·67	65·1	— 0·685
		70·5	— 0·698		
76·6	— 0·638			75·9	— 0·829
93	— 0·768	94	— 0·853	92·8	— 1·000

Tabelle IX.

Roth				Gelb				Blau			
° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °
13·8	355·945	13·9	355·948	14·2	355·96	14·3	355·959	14·2	356·055	14·3	356·076
13·9	·95			14·2	·955			14·2	·075		
14	·945			14·4	·965			14·3	·085		
	·95				·955			14·5	·08		
				72·25	355·44	72·25	355·45				
				72·25	·46						
				72·25	·45						
				72·25	·45						

Tabelle X.

Roth		Gelb		Blau	
° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°
13·9	—0·190	14·3	—0·179	14·3	—0·062
		72·25	—0·688		

Wir sehen also bei dieser Concentration nur Linksdrehung, **einen** bedeutend kleineren Temperaturcoëfficienten und ano-

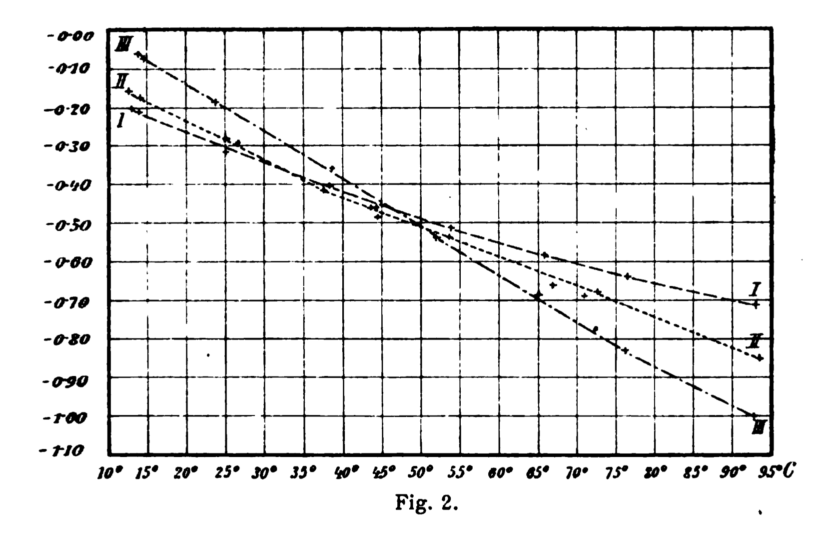


Fig. 2.

male Dispersion. Zwischen 35° und 47° ist wieder die Drehung **für** Gelb am stärksten. Ober 47° wird die Dispersion wieder **normal**.

Wir wollen jetzt die alkoholischen Lösungen untersuchen.

Tabelle XI.

Roth				Gelb				Blau			
° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °
11	355·665	11	355·661	11·5	355·71	11·6	355·690	12	355·92	12	355·920
	·66			·6	·69				·92		
	·66			·65	·70				·92		
	·66			·8	·66				·915		
13·2	355·575	13·2	355·568	12·5	355·65	12·6	355·649	13·3	355·87	13·3	355·875
	·56			12·6	·64				·88		
				12·7	·65				·87		
					·65				·885		
22·4	355·28	22·4	355·275	22·6	355·275	22·5	355·275	22·8	355·40	22·7	355·400
	·27				·27			22·6	·39		
	·28			22·5	·28			22·6	·40		
	·27				·275				·41		

34·8	354·97	34·7	354·970	34·4	354·895	34·5	354·885	34·5	354·845	34·6	354·843
34·6	354·97			·5	·865			·5	·84		
	·98			·6	·885			·6	·84		
	·96			·6	·875			·7	·845		
42·8	354·715	42·9	354·715	43·9	354·565	43·9	354·565	42·5	354·50	42·5	354·500
43·	·715				·565			42·5	·50		
					·56						
					·57						
61·2	354·30	61·2	354·305	62	354·04	62	354·04	61·5	353·77	61·6	353·773
	·31				·04			·6	·77		
	·295							·6	·775		
	·315							·6	·775		
73·3	354·005	73·4	353·998	73	353·70	72·9	353·700	72·7	353·34	72·85	353·323
	353·99				·70				·32		
73·4	354·005			72·8	·70			72·9	·33		
	353·99				·70			73	·32		

II. Alkoholische Lösungen.

a) Grössere Concentration.

Im Mischkolben wurden 10·2615 *g* Äpfelsäure abgewogen, dazu wurde absoluter Alkohol (99·7%) gesetzt. Die Lösung wog 24·1865 *g*. Es waren also in 100 *g* Lösung 42·4266 *g* Äpfelsäure. Leider ergab sich auch hier die Nothwendigkeit des Filtrirens. (Bezüglich einer eventuell deswegen anzubringenden Correctur vergleiche das bei Lösung I. *a)* Gesagte.) Das mittelst Pyknometers bestimmte specifische Gewicht ergab $d_4^{16} = 1·01373$.

Der Nullpunkt war wieder 356·138.

Die Tabellen XI und XII enthalten so wie die früheren die Ablesungen und die thatsächlichen Drehungswinkel.

Der Massstab der Fig. 3 ist der der Fig. 1.

Auch bei dieser relativ hohen Concentration tritt hier nur Linksdrehung auf. Bezüglich der anomalen Dispersion, der Maximaldrehung für das Gelb und der schliesslichen normalen Dispersion zeigt diese Lösung viel Ähnlichkeit mit der concentrirteren wässerigen Lösung (I. *a*). (Vergleiche Fig. 3 mit dem Theil der Fig. 1, der unter der Nulllinie liegt.)

Die Temperaturcoëfficienten sind ebenfalls fast gleich. Besonders tritt die fast völlige Gleichheit des Temperaturcoëfficienten bei den blauen Curven (Fig. 1 und Fig. 3) hervor.

Tabelle XII.

Roth		Gelb		Blau	
° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °
11	— 0·477	11·6	— 0·448	12	— 0·218
13·2	— 0·570	12·6	— 0·489	13·3	— 0·263
22·4	— 0·863	22·5	— 0·863	22·7	— 0·738
34·7	— 1·168	34·5	— 1·255	34·6	— 1·295
42·95	— 1·423	43·9	— 1·573	42·5	— 1·638
61·2	— 1·833	62	— 2·095	61·6	— 2·365
73·35	— 2·140	72·9	— 2·438	72·85	— 2·815

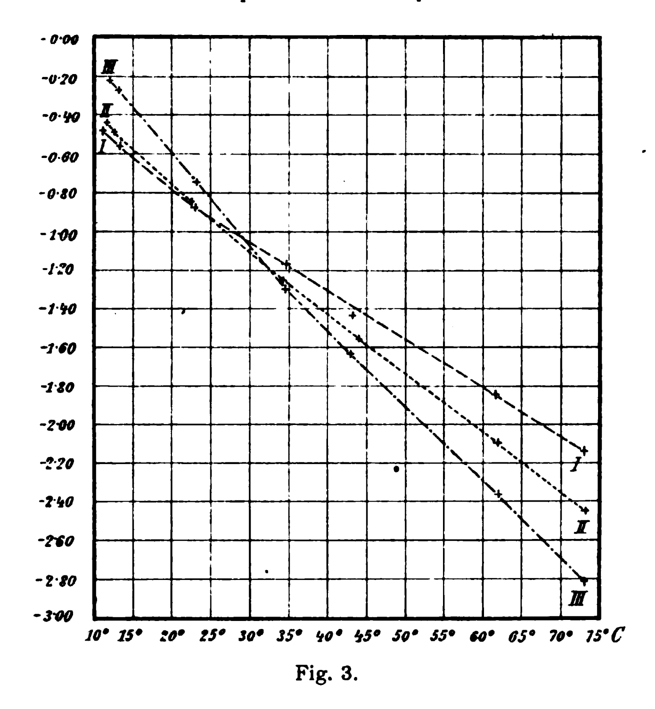


Fig. 3.

b) Geringere Concentration.

Zu 14·3528 *g* der Lösung II. *a)* (also 6·0894 *g* Äpfelsäure) kamen bei 15° C. 20 cm^3 absoluter Alkohol ($d_4^{15} = 0·79457$) oder 15·8914 *g* absoluter Alkohol. Auf 100 *g* Lösung kommen demnach 20·134 *g* Äpfelsäure. Mittelst Pyknometers fand ich $d_4^{16·8} = 0·88827$.

Hieher gehören Tabelle XIII und XIV, sowie Fig. 4, welche wieder denselben Massstab hat wie Fig. 2.

Tabelle XIII.

Roth				Gelb				Blau			
° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°	° C.	∢°
12·8	353·215	12·8	355·217	13·5	355·115	13·5	355·115	11·8	354·97	11·95	354·982
12·7	·22				·115			11·9	·985		
12·9	·215				·11			12	·985		
	·217				·12			12	·985		
28·8	355·14	28·7	355·130	28	355·015	28	355·015	29·5	354·815	29·4	354·814
28·5	·12				·015				·81		
	·13							29·3	·815		
	·135								·815		
45·5	355·045	45·5	355·045	45·4	354·92	45·2	354·914	45 7	354·675	45·7	354·671
	·045			45·2	·90				·66		
	·04			45	·925				·68		
	·055			45	·91				·67		
								57·4	354·575	57·5	354·568
								·5	·56		
								·5	·565		
								·5	·57		

Tabelle XIV.

Roth		Gelb		Blau	
° C.	∢ °	° C.	∢ °	° C.	∢ °
12·8	—0·921	13·5	—1·023	11·95	—1·156
28·7	—1·008	28	—1·123	29·4	—1·324
45·5	—1·093	45·15	—1·224	45·7	—1·467
				57·5	—1·570

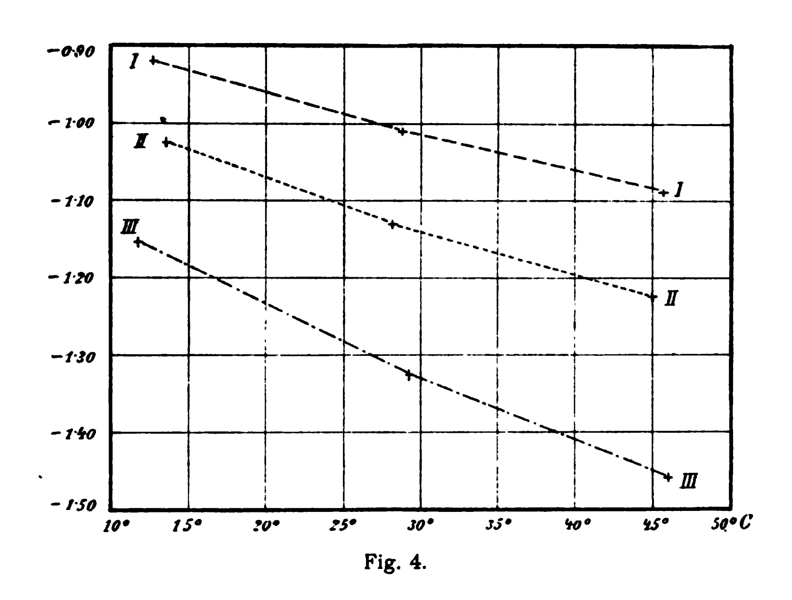


Fig. 4.

Da nicht alle Figuren denselben Massstab haben, stellte ich zur grösseren Übersichtlichkeit die gelben Curven aus allen vier Figuren in Fig. 5 zusammen.

Ihr Massstab ist der der Figuren 1 und 3. Die Curven für die wässerigen Lösungen I_w und II_w, die für die alkoholischen 1_a und 2_a. Überdies ist in beiden Fällen die Curve der concentrirteren Lösung ganz ausgezogen, die der anderen strichlirt.

Die Äpfelsäure wurde zuerst von Pasteur untersucht (Ann. chim. phys., 31, 81) in wässeriger Lösung und linksdrehend befunden.

Die Versuche von Schneider (L. A., 207, 261) ergaben jedoch später, dass mit wachsender Concentration die Linksdrehung abnimmt, bei dem Gehalte $p = 34 \cdot 24$ Inactivität eintritt und sodann steigende Rechtsdrehung erfolgt.

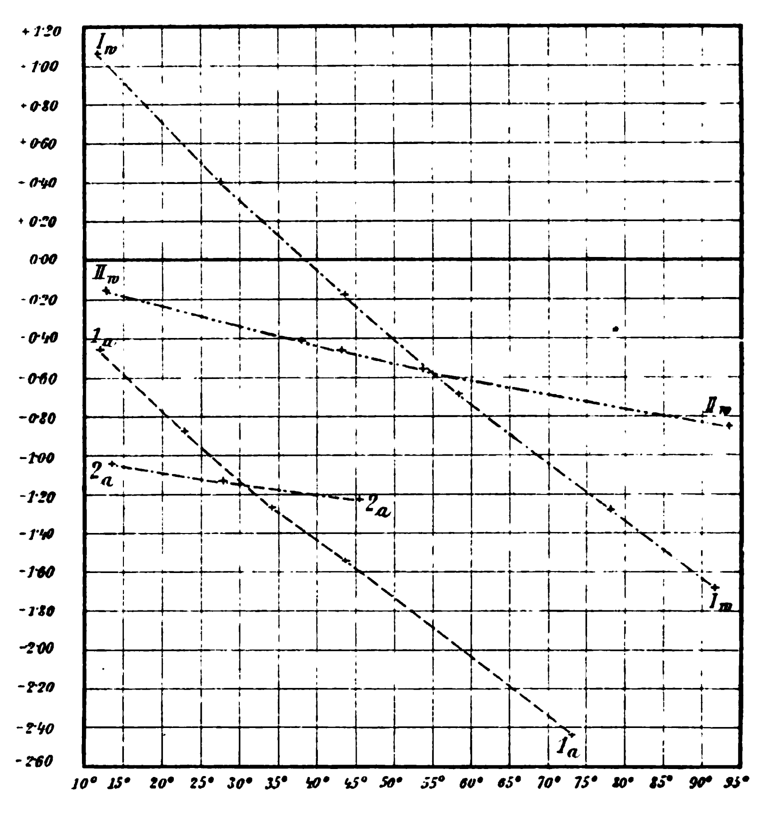


Fig. 5.

Die Abhängigkeit der specifischen Rotation $[\alpha] = \frac{100 . \alpha}{l . c} =$ $= \frac{100 . \alpha}{l . p . d}$, wo c die Concentration, p der Procentgehalt, d die Dichte der Lösung und l die Dicke der Schichte in Decimetern ist, von dem Procentgehalte der Lösungen an Wasser q gibt die Formel wieder:

$$[\alpha]_D^{20} = 5 \cdot 891 - 0 \cdot 08959\, q \quad (q = 30 \text{ bis } 92).$$

Nach dieser Formel wäre die wasserfreie Äpfelsäure rechtsdrehend und für dieselbe $[\alpha]_D = +5 \cdot 89$.[1]

Der Einfluss der Temperatur (auf $[\alpha]_D$ allein) wurde innerhalb sehr enger Grenzen von Th. Thomsen untersucht; so fand er z. B. für $p = 28 \cdot 67$ die Werthe:

	$t = 10°$	$t = 20°$	$t = 30°$
$[\alpha]_D =$	$+0 \cdot 33$	$-0 \cdot 35$	$-0 \cdot 83$

Was die Abhängigkeit des Drehungsvermögens vom Lösungsmittel betrifft, so liegen bloss folgende Resultate von Walden vor (B. 29, 137):

Aceton: $c = 13 \cdot 3$, $[\alpha]_D = -5 \cdot 0$ bis $-5 \cdot 34$.

Methylalkohol: $c = 30$, $[\alpha]_D = -2 \cdot 78$.

Nachdem ich die anomale Dispersion früher schon (bei der Äpfelsäure) selbst gefunden hatte, ersah ich erst später aus der inzwischen erschienenen 2. Auflage von Landolt's »Drehungsvermögen«, dass auch auf dem Gebiete bereits einige Beobachtungen vorliegen, die aber nur den Einfluss der Concentration, jedoch nicht den der Temperatur berücksichtigen und miteinander nicht in Übereinstimmung stehen.[2]

Und gerade der Temperaturstand ist hier das Entscheidende, da bei grösseren Concentrationen, die sonst keine anomale Dispersion zeigen, dieselbe bei steigender Temperatur eintritt, um bei noch höheren Temperaturen wieder zu verschwinden, während bei den kleineren Concentrationen die auftretende anomale Dispersion bei wachsender Temperatur verschwindet. (Weinsäure zeigt ein ähnliches Verhalten.)

Zur Erklärung dieser eigenthümlichen Erscheinungen werden nun die Krystallmoleküle herangezogen: Es erscheint nämlich nicht verständlich, wie durch Association von nur zwei oder wenigen Molekülen deren ursprüngliches Drehungs-

---

[1] Ein Schluss, der bei der Weinsäure (allerdings im umgekehrten Sinne) von Biot experimentell bestätigt wurde (Ann. chim. phys., 59, 206, § 11 [1860]).

[2] Aus der Arbeit B. A. Woringer's über diesen Punkt scheinen allerdings nur einige Daten gegeben zu sein, denn Landolt bezeichnet sie als »eine in seinem Laboratorium ausgeführte, noch nicht veröffentlichte Untersuchung«.

vermögen sich ändern soll. Das muss jedoch geschehen, wenn eine grosse Anzahl von activen Einzelmolekülen sich zu einem Krystallelement vereinigen, welches natürlich wieder asymmetrischen Bau besitzen muss. Es wurde auch schon nachgewiesen, dass Körper, welche im gelösten und krystallisirten Zustande activ sind, in der letzteren Form einen Drehwerth besitzen, der sich aus der Wirkung der Einzelmoleküle und der Krystallmoleküle zusammensetzt.

Es sollen nun die linksdrehenden Einzelmoleküle der Äpfelsäure bei wachsender Concentration der Lösung sich immer mehr zu rechtsactiven Aggregaten zusammenlagern, bis endlich im wasserfreien Zustande (die *d*-Weinsäure-Drehung) die *l*-Äpfelsäure+Drehung besitzt.

Dass dieses Verhalten wirklich auftreten kann, wenn feste Krystallelemente sich abscheiden, hat sich beim weinsauren Rubidium gezeigt, indem das in Lösung rechtsdrehende Salz Krystalle liefert, welche als solche Linksdrehung besitzen und umgekehrt.

Diese Annahme würde nach Landolt erklären:

1. Die anomale Rotationsdispersion.

2. Die im gleichen Sinne verlaufende Änderung des Drehungsvermögens bei zunehmender Verdünnung und bei steigender Temperatur (da man von beiden Einflüssen einen fortschreitenden Zerfall der Aggregate voraussetzen darf).

3. Die Erscheinung, dass Lösungen von *d*-Weinsäure in Wasser $[\alpha]_D^{20} = +14\cdot40°$, in Alkohol aber $+3\cdot79°$ haben, indem der letzteren Flüssigkeit bekanntlich das Vermögen zukommt, die Bildung von Molekülassociationen zu begünstigen.

Dieses »Drittens« aber stimmt bei der Äpfelsäure nicht, indem die alkoholische Lösung geringer Concentration, welche weniger stark nach links drehen sollte, als die entsprechende wässerige, stärker nach links dreht, während die alkoholische grösserer Concentration, statt nach rechts zu drehen, nach links dreht (siehe Tabelle II und IV, VI und XII; XIV und VIII).

Vielleicht muss man in dem Falle doch wieder zur Erklärung durch Hydrate und Alkoholate greifen, wie das schon Bremer gethan hat für die wässerige Äpfelsäure und Rayman für das Rhamnosehydrat.

Zu dem Zwecke will ich später auch das Verhalten noch concentrirterer und noch verdünnterer Lösungen untersuchen.

Ich betrachte meine Arbeit nämlich noch nicht als abgeschlossen und beabsichtige, mit einem grösseren Apparat und mehreren genau definirten Farben (nach dem Broch'schen Verfahren) die Beobachtungen zu wiederholen und zu erweitern, um die zweifellos vorhandenen Gesetzmässigkeiten — auf einige habe ich bereits in der Arbeit hingewiesen — klarer zu erkennen.

Zur Probe der Genauigkeit meiner Messungen will ich nun noch die Berechnung einer specifischen Drehung $\left([\alpha] = \frac{100\alpha}{l.p.d}\right)$ ausführen und mit einem bereits vorhandenen Werth vergleichen, und zwar $[\alpha]_D^{20}$ für die verdünnte wässerige Lösung (I. *b*).

Für diese war $d_4^{14} = 1{\cdot}07918$, dann ist — wenn ich als Ausdehnungscoëfficienten der Lösung in erster Annäherung den des Wassers nehme — $d_4^{20} = 1{\cdot}0791 \frac{1{\cdot}000701}{1{\cdot}001744} = 1{\cdot}078$. Den Werth für das der Temperatur 20° C. entsprechende α finde ich durch Interpolation, respective durch Ablesen des Curvenwerthes aus der Fig. 2. Daselbst hat auf der gelben Curve der Punkt mit der Abscisse 20 die Ordinate $-0{\cdot}231$ oder $-0{\cdot}232$, also ist für 20° C.: $\alpha = \alpha_D^{20} = -0{\cdot}232$ und $[\alpha]_D^{20} = \frac{100.(-0{\cdot}232)}{1.20{\cdot}0598.1{\cdot}078} = -\mathbf{1{\cdot}08}$, während der entsprechende Werth nach Woringer etwas über $-\mathbf{1{\cdot}09}$ beträgt — eine Übereinstimmung, die mit Rücksicht auf die zwei Interpolationen, die kleinen Differenzen bei der Herstellung der Lösung u. s. w. eine ausgezeichnete zu nennen ist.

Zum Schlusse ist es mir eine angenehme Pflicht, meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Franz Exner, für Anregung und Unterstützung bei der Arbeit meinen besten Dank zu sagen.

XIV. SITZUNG VOM 20. MAI 1898.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. III., Heft VIII — X (October bis December 1897), womit nun der Druck dieses Bandes in allen Abtheilungen abgeschlossen ist.

Se. Excellenz der Herr Minister für Cultus und Unterricht übermittelt ein Exemplar der Regierungsvorlage des Staatsvoranschlages für das Jahr 1898, Capitel IX, »Ministerium für Cultus und Unterricht« A. B. C. mit dem Bemerken, dass die nachträglich eintretenden Veränderungen seinerzeit bekannt gegeben werden.

Das Präsidium der böhmischen Kaiser Franz Josef-Akademie für Wissenschaften, Literatur und Kunst theilt mit, dass diese Akademie gemeinsam mit der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, der böhmischen Karl Ferdinands-Universität und der Gesellschaft des Museums des Königreiches Böhmen am 18. Juni l. J. um 11 Uhr vormittags im Pantheon des Museums des Königreiches Böhmen eine Festversammlung zur Feier des hundertsten Geburtstages des Historiographen Franz Palacký veranstalten wird, und ladet die kaiserliche Akademie der Wissenschaften zu dieser Feier höflichst ein.

Herr Prof. Dr. Alois Walter in Graz dankt für die ihm zur Drucklegung seiner Publication »Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung« gewährte Subvention.

Herr Heinrich Mache in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über Volumänderungen der Gase unter dem Einflusse starker elektromotorischer Kräfte«.

Herr Dr. St. Bernheimer in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Experimentelle Untersuchungen über die Bahnen der Pupillarreaction«.

Herr Dr. Wilhelm Figdor, Assistent am pflanzenphysiologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine im botanischen Garten zu Buitenzorg auf Java ausgeführte Arbeit, betitelt: »Untersuchungen über die Erscheinung des Blutungsdruckes in den Tropen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Breuer A., Elementar entwickelte Theorie und Praxis der Functionen einer complexen Variablen in organischer Verbindung mit der Geometrie. Wien, 1898; 8°.

Dedekind A., Ein Beitrag zur Purpurkunde. Berlin, 1898; 8°.

Grant Conklin E., The Embryologie of Crepidula. (A Contribution to the Cell Lineage and Early Developments of some Marine Gasteropods.) Boston, 1897; 8°.

Perner J., Études sur les Graptolites des Bohêmes. (IIIième partie; Monographie des Graptolites de l'Étage *E*). Prague, 1897; 4°.

Schaffers S. J. v., Essai sur la théorie des machines électriques a influence. Paris, 1898; 8°.

Serrano Fatigati D. E., Sentimento de la naturaleza en los relieves medioevales españoles. Madrid, 1898; 8°.

Über Volumenänderungen von Gasen unter dem Einflusse starker elektromotorischer Kräfte

von

Heinrich Mache.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

Die Existenz von Spannungen im Dielektricum des elektrischen Feldes ist die grundlegende Hypothese der Theorie Maxwell's. Kann wohl auch die auf der Fernwirkung basirende Anschauung für diese Spannungen aufkommen, so kommt doch der Nachweis ihrer Existenz der ersteren mehr zugute als der letzteren, wie denn überhaupt das Dielektricum in der Theorie Maxwell's mit der ponderomotorischen Kraft der Elektricität in einem innigeren, weil causalem Zusammenhange steht.

Die Existenz von solchen Spannungen hat nun nothwendigerweise eine Formveränderung des Dielektricums zufolge und es ist begreiflich, dass diese schon viel früher durch das Experiment gesicherte Thatsache zu Gunsten der Theorie Maxwell's gedeutet wurde.[1]

Gleichwohl führten die bisherigen Versuche über Volumenänderungen im elektrostatischen Felde nur bei festen und flüssigen Isolatoren zu übereinstimmenden Resultaten. Für die Gase hingegen finden sich nur wenige, einander zum Theil widersprechende Angaben vor.

[1] Vergl. Poincaré, Electricité et Optique, I, p. 285, Paris (1890).

So hört Lord Kelvin[1] beim gelegentlichen Laden und Entladen eines Luftcondensators von 0·18 *mm* Tiefe auf eine Potentialdifferenz von 800 Daniells ein knisterndes Geräusch und schliesst, dass »es hiedurch vollkommen erwiesen sei, dass eine Platte Luft töne, sobald man sie plötzlich dem Einflusse einer elektrischen Kraft aussetzt«. Lord Kelvin acceptirt als Erklärung dieser Erscheinung eine plötzliche Volumenänderung des Gases durch Elektrostriction und hält dieselbe in Anbetracht der beobachteten akustischen Wirkung für bedeutend genug, um in ihr eine Erklärung der Funkengeräusche zu finden.

Eine andere, äusserst bemerkenswerthe Thatsache theilen Warren de la Rue und H. W. Müller[2] in den Berichten über die mit ihrer 11000gliedrigen Chlorsilberkette durchgeführten Beobachtungen mit; sie bemerken nämlich bei Entladungen ihrer Kette durch verdünnte Luft eine plötzliche Drucksteigerung in dem die Elektroden umgebenden Gase, welche mit dem Aufhören des Entladungsstromes momentan zurückgeht. So stieg in einem Experimente mit Luft von 17°5 C. der Druck im Augenblicke, wo die Entladungen begannen, von 56 *mm* auf 71·8 *mm*. Sie sehen den Grund dieser Erscheinung in einer plötzlichen Expansion und nicht in einer Temperaturerhöhung des Gases, da diese dann mehr als 16000° C. betragen haben müsste.

Endlich hat Herr G. Quincke[3] bei seinen umfangreichen Versuchen über elektrische Ausdehnung auch die Gase in den Bereich seiner Untersuchung gezogen. Die Gase wurden in eine Faraday'sche Luftflasche von 123 *mm* Durchmesser gebracht, deren innere Kugel einen Radius von nicht ganz 37 *mm* hatte. Die eine Kugel wurde mit der inneren, die andere mit der äusseren Belegung einer Leydener Batterie verbunden. Die allenfalls auftretende Volumenänderung konnte an einem mit Alkohol gefüllten Horizontalmanometer abgelesen werden. Bei der Verbindung der Luftflasche mit den Belegungen der Batterie

[1] Papers on El. and Magn, § 302, London (1872).
[2] C. R. 89, p. 637 (1879).
[3] Wied. Ann. 10, S. 513 ff. (1880).

konnte Herr Quincke keine Volumenänderung bemerken. Seine Versuche erstreckten sich auf Luft, Leuchtgas und Kohlensäure.

Auch die theoretischen Arbeiten über Elektrostriction, wie die von J. D. Korteweg, L. Boltzmann, H. v. Helmholtz, H. Lorberg und G. Kirchhoff geben an sich keinen principiellen Aufschluss, da sie Constante enthalten, die erst durch das Experiment bestimmt werden müssen. Zwar hat man aus den bekannten Versuchen des Herrn L. Boltzmann[1] auf das Verhalten der Gase im Zustande elektrischer Polarisation Schlüsse gezogen, doch sind auch hier die Ansichten getheilt. Während die Einen auf Grund dieser Versuche für Gase die Existenz einer jeden Elektrostriction in Abrede stellen, berechnet Lippmann[2] aus eben diesen Versuchen ihren Absolutwerth. Derselbe erweist sich allerdings als klein, dürfte aber immerhin der Beobachtung zugänglich sein.

Welcher der beiden Auffassungen man aber auch den Vorzug geben mag, so geht es doch jedenfalls nicht an, das Boltzmann'sche Resultat der Constanz des Quotienten aus elektrischer Susceptibilität und Druck ohneweiters auf elektrische Felder auszudehnen, welche wesentlich von demjenigen verschieden sind, für welches diese Constanz verificirt wurde.

§ 1. Die Anschauung, welche man sich vom Standpunkte der Atomistik aus bilden wird, ist leicht gegeben. Hier setzen wir in Übereinstimmung mit der Hypothese Mosotti's über die Constitution der Dielektrica die Molekel des Gases als leitende Kugeln voraus.

Befindet sich dann ein elektrisirter Leiter — etwa eine Metallkugel — im Gase, so werden die Molekel des Gases merklich gegen den Leiter zu verschoben werden, sobald der Durchmesser der Gasmolekel gegen den Radius der leitenden Kugel nicht mehr zu vernachlässigen ist. Diese Verschiebung bewirkt eine Anhäufung der Molekel um den Leiter und in weiterer Linie eine Abnahme des Gesammtvolumens des Gases.

---

1 Diese Sitzungsber., 69, S. 795 (1874).

2 Ann. de chim. et de phys. (5), 24, p. 45.

Wird nun dem Leiter noch weiter Elektricität zugeführt und hat hiedurch die elektromotorische Kraft in einem Theile des Leiters einen gewissen Grenzwerth erreicht, so gibt das Isolationsvermögen des Gases nach und es findet, je nach der Form dieses Theiles des Leiters, eine Glimm- oder Büschelentladung in das umgebende Gas statt.

Hiedurch wird nachweisbar[1] ein kleiner Theil des Gases elektrisirt und somit zu einem Theile des elektrischen Systems. Die potentielle Energie dieses Systems strebt einem Minimum zu. Es sind nun aber die Molekel des Gases sowohl gegen den festen Leiter, wie auch gegeneinander beweglich. Hieraus resultirt eine molare und eine moleculare Bewegung des Gases. Die molare Bewegung rührt von der Abstossung der Molekel vom Leiter her und äussert sich als elektrischer Wind — die moleculare Bewegung entsteht durch die gegenseitige Abstossung zwischen den elektrisirten Gasmolekeln und äussert sich als eine Erhöhung des Druckes, unter welchem das Gas steht oder, falls dieser constant gehalten wird, als Zunahme des Gesammtvolumens des Gases.

Es gelang, beide Volumenänderungen nachzuweisen. Freilich sind sie nur an Leitern von sehr grosser elektrischer Flächendichte zu erwarten und zu constatiren.

Es gelang weiters auch den Nachweis zu liefern, dass beim Durchschlagen von Gasen unter normalem Druck mittelst des Funkens einer Elektrisirmaschine oder einer Ruhmkorff'schen Inductionsspule ebenfalls eine Dilatation des Gases eintritt, welche nicht durch eine blosse Erwärmung erklärt werden kann. Es erscheint vielmehr auch hier wahrscheinlich, dass die beobachtete Erscheinung durch die Expansion der hiebei elektrisirten Luft, beziehungsweise des von den Elektroden abgeschleuderten, ebenfalls elektrischen Metalldampfes zu erklären ist.

Dass hier die ältere und einfachere Anschauung vom Zustandekommen der Elektrisirung der Gase acceptirt wurde, geschah nur, um eine einfache Ausdrucksweise zu gewinnen.

---

[1] Vergl. z. B. die Arbeit von Lord Kelvin, Mac-Lean and Galt: Science II, No. 40 (1895).

In der That enthalten die folgenden Beobachtungen nichts, was als Argument gegen die Annahme einer Ionisirung des Gases gedeutet werden könnte.

§ 2. Die Versuche wurden in folgender Weise durchgeführt:

Zwei Halbkugeln aus Messingblech, welche sich vermittelst breiter Flanschen luftdicht aufeinandersetzen liessen, bildeten

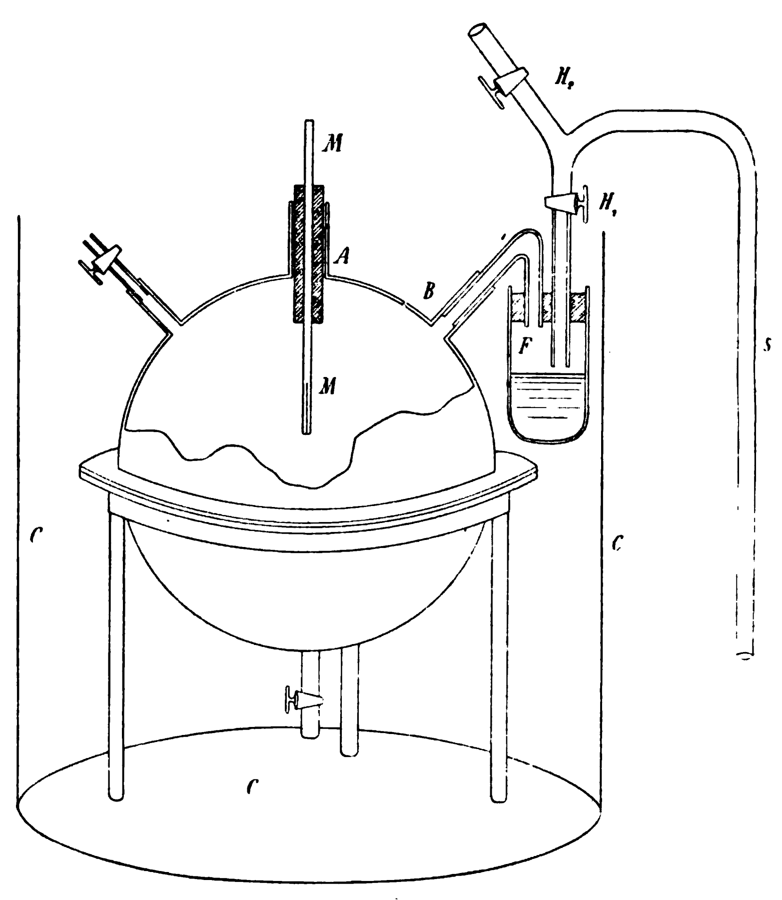


Fig. 1.

eine Hohlkugel von 170 *mm* innerem Durchmesser. Die obere Halbkugel war an der Kuppe durchbohrt und trug eine aufgelöthete Messinghülse *A*, in welche ein durch Glas und Siegel-

lack gut isolirter, starker Messingdraht M so eingekittet wurde, dass er nahezu bis zum Mittelpunkt der Kugel reichte. Derselbe war an seinem unteren Ende aufgeschlitzt. In dem Spalt konnte leicht der dünne Draht festgeklemmt werden, an welchem der jeweilig untersuchte kleine Leiter befestigt war.

In einer zweiten, tubulirten Öffnung B der oberen Halbkugel wurde eine Glasröhre eingesiegelt, welche zu dem verticalen Scalenrohre S führte, dessen innerer Radius $3 \cdot 42$ *mm* betrug. Da es wünschenswerth erschien, die in der Kugel eingefüllten Gase trocken zu erhalten, so wurde zwischen B und S ein Trockenfläschchen F angebracht.

Endlich waren am oberen Theile der oberen und auf der Kuppe der unteren Halbkugel zwei Messingröhrchen aufgelöthet, an deren Enden Glashähne mit weiten Bohrungen sassen. Durch diese Messingröhren konnte die Kugel mit verschiedenen Gasen gefüllt werden.

Der ganze Apparat ruhte auf einem Dreifuss und stand in einem weiten, im Übrigen mit Watte angefülltem Blechcylinder C, aus welchem nur das Scalenrohr und das obere Ende des bei A eingeführten Messingdrahtes herausragten. In das Scalenrohr wurde eine Seifenlamelle als Index eingeführt. Zur Herstellung derselben diente eine einfache wässerige Lösung von gewöhnlicher Seife. Ein Zusatz von Glycerin vermindert die freie Beweglichkeit der Lamelle und kann in Anbetracht der kurzen Dauer der Versuche leicht vermieden werden. Ein besonderes Augenmerk ist darauf zu richten, dass während der Versuche die Innenwand des Scalenrohres gut mit Seifenlösung benetzt sei, was sich durch mehrmaliges Durchziehen gut erreichen lässt. Die Hähne H_1 und H_2 ermöglichen in ohneweiters ersichtlicher Weise diese Manipulationen.

Eine jede Volumenänderung im Innern der Kugel verschob — wie ich mich überzeugte — den Index um ihren vollen Betrag. Diese Verschiebung wurde mittelst eines Fernrohres beobachtet.

Die oben bezeichnete Verpackung mit Watte schützte den Apparat genügend vor Temperaturschwankungen. Ungleich lästiger erwiesen sich die Schwankungen des Luftdruckes, wie sie bei Wind auftreten. Wurde doch durch sie oft Tage hindurch ein jeder Versuch unmöglich gemacht.

A. Spitzen.

§. 3. Ein Platindraht von $^{1}/_{8}$ *mm* Durchmesser wurde durch eine kurze Capillare gezogen und am unteren Ende durch Einschmelzen in ihr befestigt. Er blieb dann noch in einer Länge von 2·33 *mm* frei. Der am oberen Ende der Capillare herausragende Theil des Drahtes wurde in dem Schlitz des Messingdrahtes *M* festgeklemmt und hierauf dieser und die Capillare sorgfältig mit Schellack überzogen. In unmittelbarer Berührung mit dem in die Kugel eingefüllten Gase stand somit nur das kurze Stück Platindraht, welches am unteren Theile der Capillare herausragte. *M* wurde nach Bedarf mit dem positiven oder negativen Pole einer Holtz'schen Influenzmaschine verbunden Die Messingkugel und der andere Pol der Influenzmaschine waren zur Erde abgeleitet. Mittelst einer parallel geschalteten Funkenstrecke konnte das Potential gemessen werden, zu welchem diese kleine Platinspitze elektrisirt wurde.

Es zeigte sich nun je nach der Grösse dieses Potentials eine Compression oder Dilatation des Gases, welche sich durch eine Verschiebung der Lamelle äussert. Diese Volumenänderung wird rasch stationär und behält solange ihren constanten Werth bei, als das Potential der Spitze constant gehalten wird. Leitet man diese zur Erde ab, so geht die beobachtete Volumenänderung rasch und vollständig zurück. Auch hängt die Grösse der Dilatation vom Vorzeichen ab. Diese Abhängigkeit kann nicht überraschen; es hat ja bereits Faraday[1] nachgewiesen, dass von demselben Leiter aus die Entladungen in das umgebende Gas bei negativer Elektrisirung früher erfolgen als bei positiver. Es lässt sich somit erwarten, dass auch die Stärke der Elektrisirung und die hiedurch bedingte Dilatation für beide Elektricitätsarten nicht die gleiche ist. Die Abhängigkeit der Contractionen vom Vorzeichen erklärt sich dann durch die Überdeckung letzterer durch polar verschiedene Dilatationen.

Ich gebe in den folgenden Tabellen die so erhaltenen Werthe für die drei untersuchten Gase. Hiebei sind Contractionen negativ gezählt.

[1] Experimental Researches, § 1501, vergleiche auch: Wesendonck, Wied. Ann. 39, S. 601 (1890).

Versuch I: Luft.

Potential in Volts	Verschiebung des Index in *mm* für		Volumenänderungen in cm^3 für	
	+ Elektr.	— Elektr.	+ Elektr.	— Elektr.
2730	— 1	— 0·5	—0·037	—0·018
4800	— 1·8	— 0·4	—0·066	—0·015
6600	— 1·5	+ 1·3	—0·055	+0·048
8400	— 0·1	3·3	—0·004	0·121
9900	+ 2·1	7·8	+0·077	0·287
11400	5·3	16	0·195	0·588
12900	11·5	27	0·423	0·992
14400	19·3	—	0·709	—

Jeder der hier und in allen folgenden Tabellen angeführten Werthe ist das arithmetische Mittel aus mindestens drei Einzelwerthen.

Versuch II: Wasserstoff.

Potential in Volts	Verschiebung des Index in *mm* für		Volumenänderungen in cm^3 für	
	+ Elektr.	— Elektr.	+ Elektr.	— Elektr.
2730	—0·5	0	—0·018	0
4800	—0·9	+ 3	—0·033	+0·110
5520	0	4 5	0	0·165
6600	+1·2	10	+0·044	0·367
7320	2	19·5	0·074	0·717
8400	4·5	—	0·165	—
9900	8·5	—	0·312	—

Hier tritt der polare Unterschied besonders stark auf.

Versuch III: Kohlensäure.

Potential in Volts	Verschiebung des Index in *mm* für		Volumenänderungen in cm^3 für	
	+ Elektr.	— Elektr.	+ Elektr.	— Elektr.
4800	0	0	0	0
8400	+ 0·3	+ 1	+0·011	+0·037
9900	1·2	2·4	0·044	0·088
11400	3·5	7	0·129	0·257
12900	8	15	0·294	0·551
14400	17	20	0·625	0·735

Eine geringe Contraction konnte auch hier wahrgenommen werden; doch entzog sich dieselbe der Messung. Letztere wurde auch durch den Umstand erschwert, dass die rasche

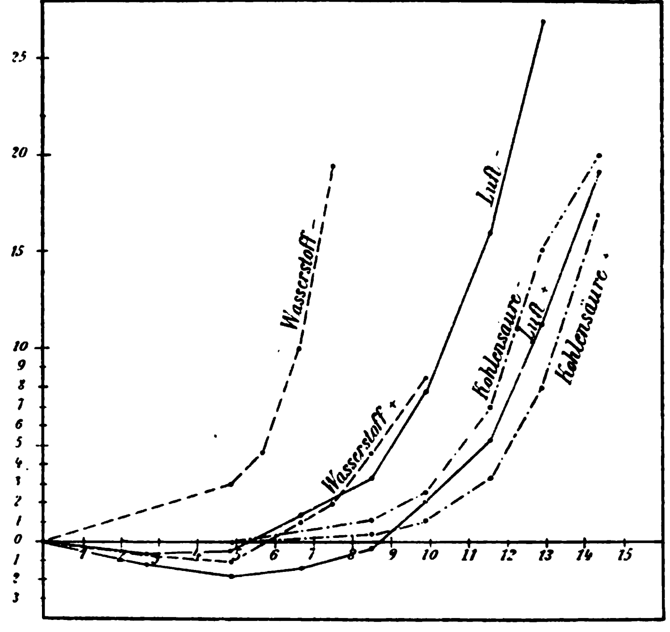


Fig. 2.

Diffusion der Kohlensäure durch die Seifenlamelle ein continuirliches Zurückgehen des Index bewirkte.

In Fig. 2 ist ein Diagramm dieser drei Tabellen gegeben.

§ 4. Eine englische Nähnadel, welche im Mikroskop bei 250facher Vergrösserung sich noch als vollkommene Spitze zeigte, wurde im Spalte des Drahtes *M* festgeklemmt. Für Luft und Wasserstoff ergaben sich Werthe, welche von den oben für die Platinspitze gegebenen um nicht mehr abweichen, als die möglichen Beobachtungsfehler betragen. Nur für Kohlensäure zeigte sich eine bemerkenswerthe Differenz. Die hier erhaltenen Werthe gibt die folgende Tabelle.

Versuch IV.

Potential in Volts	Verschiebung des Index in *mm* für		Volumenänderungen in cm^3 für	
	+ Elektr.	— Elektr.	+ Elektr.	— Elektr.
6600	+ 0·5	+ 1	+0·018	+0·037
8400	2	2·7	0·074	0·099
9900	3	5	0·110	0·184
11400	4	9	0·147	0·331
12900	7·5	15	0·276	0·551
14400	15	20	0·551	0·735

§ 5. Wenn man, wie es oben geschehen ist, die beobachteten Dilatationen dadurch erklärt, dass ein gewisses Quantum elektrisirtes Gas ein grösseres Volumen einnimmt als das gleiche Quantum neutrales Gas, so muss es befremden, dass auch diese Dilatationen sofort und rasch zurückgehen, sobald der elektrisirende Leiter mit der Erde verbunden wird.

In der That würde man bei der bekannten Eigenschaft der Gase, die ihnen einmal mitgetheilte Elektricität nur sehr schwer wieder abzugeben,[1] das Gegentheil erwarten.

Dieser Widerspruch dürfte sich durch die, wie ich glaube, berechtigte Annahme lösen lassen, dass das elektrisirte Gas sehr rasch in das übrige unelektrische diffundirt.

---

[1] Lord Kelvin, Mac-Lean and Galt, Proc. of the R. S., 57, p. 436, (1895).

Hiefür spricht folgender einfacher Versuch:

Ein Thomson'sches Quadrantenelektrometer ist in der Art justirt, dass die Lemniscate mittelst einer Zamboni'schen Säule dauernd auf ein bestimmtes Potential geladen ist, während das eine Quadrantenpaar mit der Erde, das andere mit einer Quecksilber-Tropfelektrode in Verbindung steht. Diese Tropfelektrode befindet sich in einem zur Erde abgeleiteten Kasten, dessen eine Wand durch ein weitmaschiges, ebenfalls abgeleitetes Drahtnetz ersetzt ist. In 1—2·5 *m* Entfernung von diesem Drahtnetz ist in gleicher Höhe mit dem Zerstäubungspunkt der Elektrode gut isolirt eine englische Nähnadel aufgestellt, welche mit Hilfe der Influenzmaschine bis zum Potential von 17000 Volts geladen werden kann.

Zuerst wird die Elektrode in Gang gesetzt und gewartet, bis die Lemniscate des Elektrometers sich fest einstellt. Wird jetzt die Spitze elektrisirt, so bleibt zunächst die Lemniscate absolut in Ruhe. Erst nach Verlauf einer je nach der Entfernung der Spitze verschiedenen Zeit gibt sie einen beträchtlichen Ausschlag an, der in Anbetracht seiner Constanz nur dadurch erklärt werden kann, dass mittlerweile die von der Spitze abgehende elektrisirte Luft vermittelst Diffusion durch das Drahtgitter bis in den abgeleiteten Kasten gelangen konnte.

Diese Diffusion geht rasch vor sich. So erfolgt der Ausschlag bei 1 *m* Distanz nach 15^s, bei 2 *m* Distanz nach 50^s.

B. Kugeln.

§ 6. Es wurde nun versucht, die beobachteten Volumenänderungen für den Fall zu prüfen, dass sich im Gase nicht mehr direct eine Spitze, sondern überhaupt nur ein Körper von grosser elektrischer Flächendichte befindet.

Zu diesem Zwecke wurde an *M* abermals ein Platindraht angesetzt, und zwar in genau der gleichen Weise, wie dies schon in § 3 beschrieben wurde. Nur war hier an das freie Ende des Drahtes eine kleine Kugel angeschmolzen, deren Durchmesser 1·063 *mm* betrug.

Man konnte erwarten, dass es bei Verwendung einer Kugel gelingen werde, die beiden Arten der Volumenänderungen zu

trennen. So lange nämlich das sogenannte Anfangspotential[1] nicht überschritten wird, findet keine Elektrisirung des umgebenden Gases statt und es wird somit bis dahin die auftretende Elektrostriction nicht durch die Ausdehnung, welche die Elektrisirung des Gases zur Folge hat, überdeckt. Dies war in der That auch der Fall.

Sehr erschwert wurde hingegen die Messung dieser Volumenänderung durch die in Folge der Elektrisirung der Kugel vermuthlich noch verstärkte Adsorption des Gases an diese. Ersichtlich hat eine solche an der Kugel condensirte Gasschichte eine Erniedrigung des Anfangspotentials im Gefolge. Sie wirkt somit der Contraction des Gases entgegen. Es ergab sich daher bei Messungen unter dem Anfangspotential die Nothwendigkeit, die kleine Kugel vor jedesmaligem Gebrauch durch Anwärmen von der condensirten Gasschichte zu befreien.

Für das Anfangspotential selbst ist der Werth der Volumenänderung zweideutig, und zwar findet, je nachdem, ob sich auf der Kugel bereits ein Büschellicht bildet oder nicht, eine Dilatation oder Contraction des Gases statt.

Die folgenden drei Tabellen enthalten wieder die so gefundenen Werthe.

Versuch V: Luft.

Potential in Volts	Verschiebung des Index in *mm* für		Volumenänderungen in cm^3 für	
	+ Elektr.	— Elektr.	+ Elektr.	— Elektr.
6600	— 1	0	—0·037	0
8400	— 1·5	— 1·5	—0·055	—0·055
9900	— 2·5	— 2	—0·092	—0·074
11400	{ — 4·5 + 1	{ — 4 + 1·5	{ —0·165 +0·037	{ —0·147 +0·055
12900	+ 2·5	+ 5·5	+0·092	+0·202
14400	6	10·5	0·220	0·386
15750	9	19	0·331	0·698
17100	11	29	0·404	1·066
18300	15	49	0·551	1·800
19500	21	—	0·772	—

[1] J. Precht, Wied. Ann. 49, S. 150 ff. (1893).

Versuch VI: Wasserstoff.

Potential in Volts	Verschiebung des Index in *mm* für		Volumenänderungen in cm^3 für	
	+ Elektr.	— Elektr.	+ Elektr.	— Elektr.
6600	{ — 1 + 1·2	+ 3	{ —0·037 +0·044	+0·110
7320	+ 1·5	6	+0·055	0·220
8400	2·3	12	0·085	0·441
9900	5	19	0·184	0·698
10500	8	—	0·294	—
11400	15	—	0·551	—

Versuch VII: Kohlensäure.

Potential in Volts	Verschiebung des Index in *mm* für		Volumenänderungen in cm^3 für	
	+ Elektr.	— Elektr.	+ Elektr.	— Elektr.
9900	—	+ 0·5	—	+0·018
11400	—	1·5	—	0·055
12900	—	5·3	—	0·195
14400	—	8	—	0·294
15750	+ 0·8	11·8	+0·029	0·434
17100	4	18	0·147	0·661
18300	10	25	0·367	0·919
19500	16	—	0·588	—

In Fig. 3 ist wieder eine graphische Darstellung dieser Tabellen gegeben.

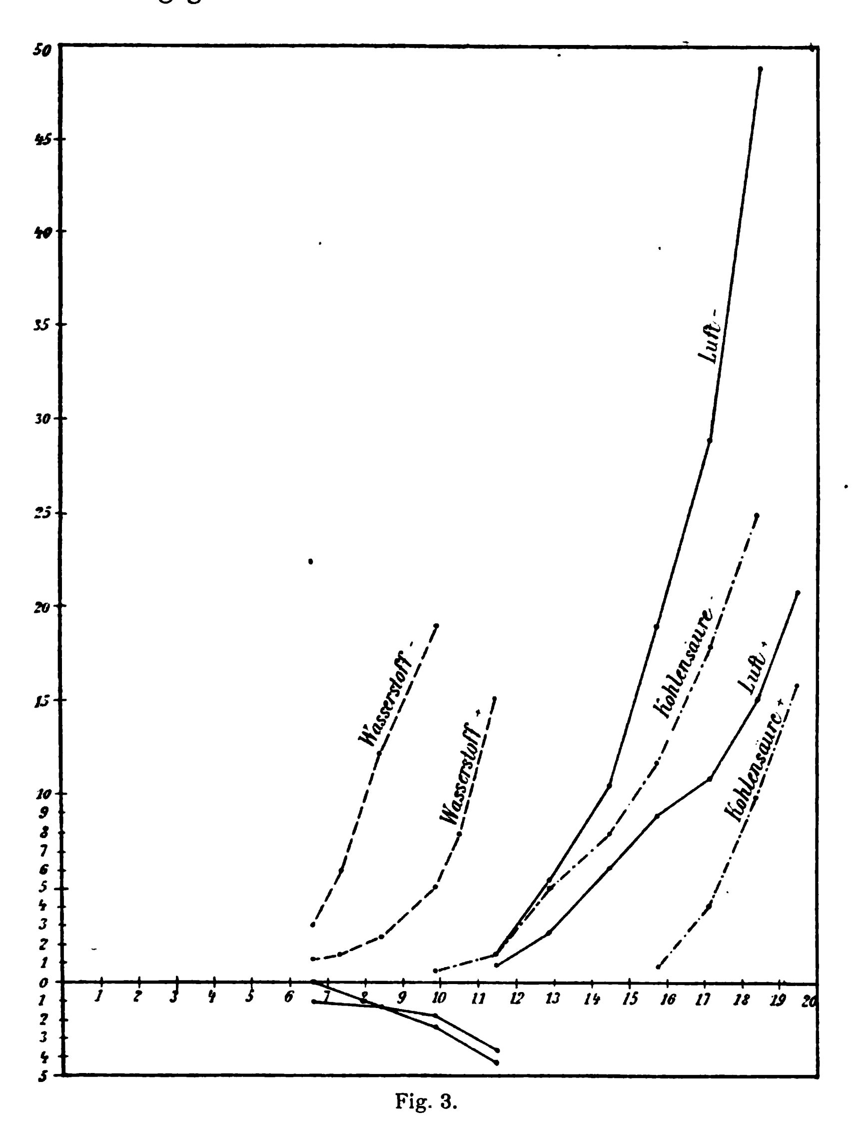


Fig. 3.

§ 7. An das freie Ende des Platindrahtes wurde eine Bleikugel von 5·1 *mm* Durchmesser angeschmolzen. Dieselbe führte für Luft zu folgenden Werthen:

Versuch VIII.

Potential in Volts	Verschiebung des Index in *mm* für		Volumenänderungen in cm^3 für	
	+ Elektr.	— Elektr.	+ Elektr.	— Elektr.
14400	— 1·7	— 1·5	—0·063	—0·055
17100	{— 1·9 {+ 1	{— 2 {+ 2	{—0·070 {+0·037	{—0·074 {+0·074
19500	+ 2·5	+ 4·5	+0·092	+0·165
20550	5·5	9·5	0·202	0·349
20970	9	17	0·331	0·625
21600	15	33	0·551	1·212
21960	21	—	0·772	—
22500	26	—	0·955	—

Auch hier erfolgten die beobachteten Compressionen erst dann, wenn die Kugel angewärmt worden war. Bezüglich der für 17100 Volts beobachteten Zweideutigkeit gilt das oben Gesagte.

§ 8. An grösseren Kugeln konnte keine Comprimirung des Gases erreicht werden. Dagegen liess sich stets — freilich bei immer höheren Potentialen — eine Ausdehnung des Gases constatiren. Die obere Grenze war hier durch die Leistungsfähigkeit der verwendeten Influenzmaschine gegeben. An einer Messingkugel von 10·55 *mm* Durchmesser liess sich bei einer Elektrisirung bis zu etwa 25000 Volts eben noch eine Ausdehnung erkennen.

§ 9. Es wurde versucht, die für die Contraction gefundenen Werthe einer einfachen Prüfung zu unterziehen. Soll nämlich diese Contraction durch dielektrische Polarisirung des Gases erklärt werden können, so muss nothwendigerweise die Verschiebung der Molekel, welche aus ihr resultirt, an allen Stellen des Feldes wesentlich hinter der mittleren Weglänge zurück-

bleiben. Eine Verschiebung um den vollen Betrag der letzteren würde ja die Weglänge auf Null reduciren und somit eine Kraft voraussetzen, welche im Stande wäre, das Gas zu verflüssigen. Die hier auftretenden Kräfte müssen aber von wesentlich niedrigerer Grössenordnung sein; in Folge dessen muss erwartet werden, dass auch die hier auftretenden Verschiebungen von wesentlich niedrigerer Grössenordnung sind, als die mittlere Weglänge. Es lässt sich zeigen, dass die oben erhaltenen Werthe dieser Forderung genügen.

Wir setzen hiebei wieder die Molekel des Gases als leitende Kugeln voraus. Ihren Radius nennen wir a. Im Gase befinde sich ferner eine leitende Kugel vom Radius r; dieselbe sei mit der Elektricitätsmenge $+e$ geladen. Es sei P der Mittelpunkt dieser Kugel und f die Entfernung einer beliebig gewählten Molekel von P. Dann ist das von e auf die Molekel ausgeübte Potential gleich dem Potential zweier Elektricitätsmengen, von denen die eine $e' = \frac{ea}{f}$ sich im Mittelpunkt der Molekel, die andere $-e'$ sich aber in einem Punkte P' zwischen diesem Mittelpunkte O und P befindet, welcher der Gleichung $OP' = \frac{a^2}{f}$ genügt. Das gesuchte Potential ist somit

$$\varphi = -\frac{e^2 a^3}{f^2(f^2-a^2)}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f} = \frac{2e^2 a^3 (2f^2-a^2)}{f^3(f^2-a^2)^2}.$$

Wird also die Molekel aus der Distanz f in die Distanz $f+\Delta f$ gebracht, so berechnet sich die hiebei von der Elektricität geleistete Arbeit zu

$$A = -\frac{2e^2 a^3 (2f^2-a^2)}{f^3(f^2-a^2)^2}\Delta f.$$

Um die ganze im System von der Elektricität geleistete Arbeit A zu berechnen, bedenken wir zunächst, dass alle Kräfte, welche die Molekel aufeinander ausüben, innere Kräfte sind und somit in den gesuchten Ausdruck nicht eingehen werden.

Es ist dann ohneweiters die Gesammtarbeit

$$A = -\int_r^\infty \frac{8e^2a^3\pi N(2f^2-a^2)\,df}{f(f^2-a^2)^2}\,\Delta f =$$

$$= -8e^2a^3\pi N\int_r^\infty \frac{2f^2-a^2}{f(f^2-a^2)^2}\,\Delta f\,df.$$

wo N die Anzahl der Molekel bedeutet, die in der Volumeneinheit enthalten sind.

Die Verschiebung Δf wird innerhalb gewisser Grenzen der verschiebenden Kraft proportional sein. Für den Fall aber, dass die Verschiebung diese Grenzen überschritte, führt die Annahme dieser Proportionalität auf zu grosse, aber gewiss nicht auf zu kleine Werthe für Δf. Wir setzen also

$$\Delta f = C.\frac{2e^2a^3(2f^2-a^2)}{f^3(f^2-a^2)^2},$$

wo C die Proportionalitätsconstante bedeutet.

Es ist dann auch

$$A = -16\,Ce^4a^6\pi N\int_r^\infty \frac{(2f^2-a^2)^2\,df}{f^4(f^2-a^2)^4}.$$

Man findet aber

$$J = \int_r^\infty \frac{(2f^2-a^2)^2\,df}{f^4(f^2-a^2)^4} =$$

$$= \frac{-16a^4+48r^2a^6-99r^4a^4+120r^6a^2-45r^8}{48a^6r^3(r^2-a^2)^3} -$$

$$-\frac{15}{32a^7}\lg\frac{r-a}{r+a}$$

oder falls man den Logarithmus in eine passende Reihe entwickelt und nach dem fünften Gliede abbricht

$$J = \frac{45}{16a^4r^3} - \frac{15}{16a^2r^5} + \frac{127}{112r^7} - \frac{11a^2}{48r^9}.$$

Die von der Elektricität geleistete Arbeit A können wir nun noch auf andere Art berechnen; denn sie ist offenbar auch gleich derjenigen Arbeit, welche nothwendig ist, um die beobachtete Volumenänderung des Gases $\Delta v = v_0 - v_1$ hervor-

zubringen. Bezeichnet also p den Druck, unter welchem das Gas steht, so ergibt sich die Gleichung

$$-16\,Ce^4a^6\pi N.J = p(v_0-v_1)$$

und hieraus

$$\Delta f = C.\,\frac{2e^2a^3(2f^2-a^2)}{f^3(f^2-a^2)^2} = \frac{(2f^2-a^2)p(v_1-v_0)}{8e^2a^3\pi NJf^3(f^2-a^2)^2} \doteq$$

$$\doteq \frac{p(v_1-v_0)}{4e^2a^3\pi NJf^5}.$$

Wird also um P mit f als Radius eine Kugel beschrieben, so gibt dieser Ausdruck die gesuchte Verschiebung, welche jede auf der Oberfläche der Kugel befindliche Molekel erfährt oder, was dasselbe ist, den Betrag, um welchen die mittlere Weglänge für diese Molekel durch dielektrische Polarisation verkürzt erscheint.

Wir wählen als Basis der numerischen Ausrechnung die im Versuch V für das Potential 38 an einer Kugel von 0·0531 Radius beobachte Volumenänderung von —0·165. Für a, den Radius der Molekel, benützen wir den von Herrn F. Exner[1] berechneten Werth. Man findet dann

$$N = 34.10^{19} \quad \text{und} \quad J = 3.10^{37};$$

endlich betrug p nahezu eine Atmosphäre. Setzt man diese Werthe in den oben für Δf gefundenen Ausdruck ein, so wird

$$\Delta f = -25.10^{-34}.\,\frac{1}{f^5}\,cm.$$

Auf der Oberfläche der elektrisirten Kugel selbst ist somit

$$\Delta f = -6.10^{-27}\,cm.$$

Man sieht, dass dieser Maximalwerth vollauf der oben gestellten Forderung genügt.

C. Funkenstrecken.

§ 10. Es war im voraus zu erwarten, dass auch beim Überschlagen des elektrischen Funkens die Luft, welche die

---

[1] Diese Sitzungsber., 91, S. 850 (1885).

beiden Elektroden umgibt, elektrisirt werden könne. Ein principieller Unterschied besteht ja nicht. In der That haben wir es hier einfach statt mit einem, mit zwei elektrischen Leitern zu thun und es wird, wofern nur auf diesen der elektrische Druck einen gewissen Grenzwerth erreicht hat, die umgebende Luft gewiss elektrisirt.

Der Umstand, dass die periodische Entladung jedes der beiden Leiter zwischen denselben direct und nicht vermittelst einer parallel geschalteten Funkenstrecke erfolgt, kann ja diesen Effect nur steigern, da hiebei die elektrische Dichte eines jeden der beiden Leiter durch die Anwesenheit des zweiten, entgegengesetzt elektrisirten noch erhöht wird. Wesentlich muss natürlich aber auch hier die Grösse der Elektroden sein, da vor Allem durch sie die Grösse der Dilatation bestimmt ist. Die Richtigkeit dieser Schlüsse hat das Experiment bestätigt.

Die Versuche wurden an zwei Funkenstrecken durchgeführt. Die erste bestand aus Messingkugeln von 1 *mm*, beziehungsweise 1·25 *mm*, die zweite aus Messingkugeln von je 7 *mm* Durchmesser. Die Zuleitungen zu diesen Elektroden wurden durch den Tubus *A* bewerkstelligt. Die folgende Tabelle gibt die erhaltenen Resultate.

Versuch IX.

Distanz der Kugeln in *mm*	Funkenstrecke I		Funkenstrecke II	
	Verschiebung des Index in *mm*	Volumenänderung in cm^3	Verschiebung des Index in *mm*	Volumenänderung in cm^3
1	16·5	0·606	5·8	0·213
2	21·6	0·794	9	0·331
3	41·3	1·516	15·1	0·555
4	71·7	2·634	21·7	0·797

Die Abhängigkeit der Erscheinung von der Grösse der Elektroden und dem Entladungspotential ist evident. Auch ist ersichtlich (vergleiche Versuch VIII und Funkenstrecke II) die

beobachtete Ausdehnung grösser als die Summe der Einzeldilatationen, d. h. derjenigen Ausdehnungen, welche man erhielte, wenn jede der beiden Elektroden einzeln und in Abwesenheit der zweiten auf das betreffende Entladungspotential der Funkenstrecke gebracht würde. Auch dieses Ergebniss befindet sich in Übereinstimmung mit dem oben Gesagten.

§. 11. Nach dem Vorstehenden lag die Vermuthung nahe, dass auch bei Verwendung eines Ruhmkorff'schen Apparates an Stelle der Influenzmaschine eine Ausdehnung, beziehungsweise Drucksteigerung des Gases in Folge Elektrisirung sich werde beobachten lassen. Überdies konnte man voraussehen, dass die Form und Grösse der beiden Elektroden hiebei von Einfluss sein werde. Die erwartete Erscheinung stellt sich auch thatsächlich ein. Die quantitative Messung derselben wird durch den Umstand nicht wesentlich erschwert, dass hier der Entladungsstrom bereits eine bedeutende Erwärmung des Gases bewirkt. Vielmehr ist die Natur eines Wärmeausschlages von der Natur der hier beobachteten elektrischen Ausdehnung so verschieden, dass die Trennung der beiden Erscheinungen sicher durchzuführen ist. Ich gebe zunächst wieder in der folgenden kleinen Tabelle die an denselben Funkenstrecken beobachteten Dilatationen.

Versuch X.

Distanz der Kugeln in *mm*	Funkenstrecke I		Funkenstrecke II	
	Verschiebung des Index in *mm*	Volumenänderung in cm^3	Verschiebung des Index in *mm*	Volumenänderung in cm^3
1	99	3·637	38	1·396
2	110	4·041	47	1·727
3	114	4·188	56	2·057
4	117	4·298	62·5	2·296

Man sieht, dass für den Ruhmkorff die Volumenänderungen bedeutend grösser sind und in ganz anderer Weise von der

Länge der Funkenstrecke abhängen, als dies bei der Influenzmaschine der Fall ist. Die Erklärung hiefür dürfte in einer hiebei auftretenden Complication zu suchen sein.

Es erscheint nämlich in hohem Grade wahrscheinlich, dass hier die Expansion der elektrisirten Luft und die Expansion des von den Elektroden abgeschleuderten, ebenfalls elektrischen Metalldampfes oder Metallstaubes sich addiren. Die Menge dieses Dampfes hängt aber vornehmlich von der Elektricitätsmenge ab, welche die Funkenstrecke passirt. Es muss somit eine Vergrösserung dieser Elektricitätsmenge auch die Volumenänderungen vergrössern — eine Folgerung, welche ich durch das Experiment vollkommen bestätigt fand. Hiebei wächst nur der eine Summand, nämlich die Expansion des Metalldampfes, und es ist bei genügender Steigerung der Elektricitätsmenge vorauszusehen, dass der zweite Summand, die Expansion der elektrisirten Luft, ihm gegenüber ganz in den Hintergrund treten wird.

Was den abgeschleuderten Metalldampf betrifft, so sei noch betont, dass seine Spannkraft ebenfalls durch elektrische Abstossung zwischen den einzelnen Theilchen und nicht durch Erwärmung zu erklären sein dürfte. Eine in gewisser Beziehung ähnliche Ansicht hat auch Herr E. Lecher[1] ausgesprochen.

Übrigens lässt sich für die Annahme, dass sich an der hier beobachteten Dilatation der Metalldampf betheiligt, auch noch ein weiterer Grund anführen. Es ist nämlich klar, dass im Falle der Metalldampf sich auszudehnen sucht, der Druck, unter welchem er steht, ein höherer sein muss, als der des umgebenden Gases. Neue Untersuchungen auf dem Gebiete der Spectralanalyse haben aber die Existenz eines solchen Druckes im Metalldampf des Funkens sehr wahrscheinlich gemacht.

Es hat nämlich Humphreys[2] gezeigt, dass die Linien eines Spectrums sich zum Theil verschieben, sobald das emittirende Gas unter einen höheren Druck gebracht wird. Eine solche Verschiebung zeigen nun nach den Messungen der Herren F. Exner und E. Haschek[3] auch die Linien des im

---

[1] Diese Sitzungsber., 96, S. 103 (1887).

[2] Astroph. Journ. 6, (1897).

[3] Diese Sitzungsber., 106 (1897).

Funken erzeugten Metalldampfes gegenüber den im Bogen erhaltenen. Der Schluss, den man hieraus ziehen wird, ist einleuchtend.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, die Beobachtungen über die hier an Funkenstrecken wahrgenommenen Volumenänderungen zu erweitern und mit ihrer Hilfe die Grösse dieses Druckes und die Abhängigkeit desselben von der Natur und Dichte des umgebenden Gases, sowie von der Beschaffenheit der verwendeten Elektroden des Näheren zu studiren. Versuche hierüber sind in Vorbereitung.

Jedenfalls erscheint aber die Existenz einer Volumenänderung, beziehungsweise Drucksteigerung in dem die beiden Elektroden umgebenden Raume gesichert und ist hierin eine Bestätigung des eingangs erwähnten Versuches von Warren de la Rue und H. W. Müller enthalten.

Hier sei es mir gestattet, die erhaltenen Resultate nochmals kurz in folgenden Sätzen zusammenzufassen:

1. Gase ändern ihr Volumen, wenn man sie der Einwirkung starker elektrischer Kräfte aussetzt.
2. Diese Volumenänderung lässt sich durch eine Erwärmung des Gases nicht erklären. Sie ist entweder eine Contraction oder eine Ausdehnung des Gases. Erstere erklärt sich durch Polarisation, letztere durch Elektrisirung.
3. Wird Gas elektrisirt, so vergrössert sich sein Volumen, oder, falls letzteres constant gehalten wird, der Druck, unter welchem es steht. Unterbricht man die Elektrisirung, so geht dieser Effect in Folge der raschen Diffusion des elektrisirten Gases in das übrige unelektrische schnell und vollständig zurück. Seine Grösse ist vom Vorzeichen der zugeführten Elektricität abhängig.
4. Bei den Entladungen einer Influenzmaschine oder eines Ruhmkorff durch Luft findet eine plötzliche Drucksteigerung statt, die augenblicklich wieder verschwindet, wenn die Entladungen aufhören. Dieselbe hat ihren Grund in der Dilatation der elektrisirten Luft, beziehungsweise des elektrisch geladenen Metalldampfes.

Nach Abschluss dieser Arbeit wurden mir Beobachtungen von Herrn O. Rosenbach[1] bekannt, die, wie ich glaube, mit dem oben Mitgetheilten vollauf in Einklang gebracht werden können. Herr Rosenbach bemerkt nämlich am Variometer einen Zusammenhang zwischen Blitzen und Luftdruck in dem Sinne, dass kurz vor jedem Blitze eine Abnahme des Luftdruckes zu bemerken ist, welche sich während des Blitzes oder beim Eintritt des Donners in eine Zunahme verwandelt. Auch konnte er diese Druckänderungen am Variometer vermittelst einer Influenzmaschine demonstriren.

In der That war an den oben benützten Funkenstrecken bei allmäliger Steigerung der Spannung bis zur Funkenbildung des Öfteren eine Compression der Luft zu constatiren, wie dieselbe ja nach dem oben Gesagten überhaupt an jedem Leiter von grosser Flächendichte zu erwarten ist. Auch hier wird ein sicherer Erfolg nur dann erzielt, wenn man vor jeder Wiederholung des Versuches die adsorbirte Gasschichte durch Anwärmen entfernt.

Schliesslich ist es mir Bedürfniss, Herrn Prof. Dr. F. Exner für die mir bei dieser Arbeit freundlich gewährte Unterstützung meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

[1] Meteorol. Zeitschrift, Heft 6, 1897.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. VI. UND VII. HEFT.

JAHRGANG 1898. — JUNI UND JULI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 10 TAFELN UND 21 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1898.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 6. und 7. Heftes Juni und Juli 1898 des CVII. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 90 kr. = 5 Mk. 80 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. VI. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XV. SITZUNG VOM 10. JUNI 1898.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 107, Abth. II b., Heft I — IV (Jänner bis März 1898).

Die Nachricht von dem am 25. Mai d. J. erfolgten Ableben des wirklichen Mitgliedes der kaiserlichen Akademie, Herrn Hofrathes und Universitätsprofessors Dr. Friedrich Müller in Wien wurde bereits in der ausserordentlichen Sitzung dieser Classe vom 26. Mai mit der Kundgebung des tiefen Beileides zur Kenntniss genommen.

Herr Dr. J. Ritter Lorenz v. Liburnau, k. k. Sectionschef i. R. in Wien, dankt für die ihm zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Flysch-Algen gewährte Subvention.

Das c. M. Herr Prof. F. Becke in Prag, Referent der Erdbeben-Commission für das deutsche Gebiet von Böhmen, übersendet zur Aufnahme in die Sitzungsberichte einen »Bericht über das Graslitzer Erdbeben vom 24. October bis 25. November 1897«, und zwar als VII. Theil der Mittheilungen dieser akademischen Commission.

Ferner übersendet Herr Prof. Becke zur Aufnahme in die Sitzungsberichte als Nr. VIII der Mittheilungen der Erdbeben-Commission eine Abhandlung des Ingenieurs und Stadtgeologen in Karlsbad, Herrn I. Knett, betitelt: »Verhalten der Karlsbader Thermen während des vogtländisch-westböhmischen Erdbebens im October-November 1897«.

Das c. M. Herr Prof. O. Stolz in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Eine neue Form der Bedingung

zur Integrirbarkeit einer Function einer Veränderlichen«.

Das Mitglied des wissenschaftlichen Stabes der Expedition S. M. Schiff »Pola«, Herr Regierungsrath J. Luksch in Fiume übermittelt einen »Vorläufigen Bericht über die physikalisch-oceanographischen Untersuchungen im Rothen Meere (6. September 1897 bis 24. März 1898).«

Herr Prof. Dr. Richard Přibram übersendet eine im chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Czernowitz ausgeführte Arbeit des Herrn W. Schieber: »Über den Krystallwassergehalt des Manganosulfates«.

Herr Emil Oekinghaus, Lehrer an der königl. Baugewerbeschule zu Königsberg i. Pr., übersendet eine Abhandlung: »Über die Zunahme der Dichtigkeit und Abplattung im Innern der Erde, auf Grundlage einer neuen Hypothese.«

Herr Dr. Leopold Kann in Wien übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Farbige Photographie«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht folgende vier Arbeiten aus dem I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien:

1. »Über das Methylphloroglucin«, von H. Weidel.
2. »Über das 2, 4-Dimethylphloroglucin«, von H. Weidel und F. Wenzel.
3. »Über das 1, 3, 5-Triamido-2, 4, 6-Trimethylbenzol und das Trimethylphloroglucin«, von H. Weidel und F. Wenzel.
4. »Zur Kenntniss des Oroselons und Peucedanins«, von M. Popper.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag von Prof. Dr. Ernst Lecher, betitelt: »Einige Bemerkungen über Aluminiumelektroden in Alaunlösung«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine im chemischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Graz ausgeführte Arbeit von Prof. Friedrich Emich: »Über die Entzündlichkeit von dünnen Schichten explosiver Gasgemenge« (II. Mittheilung).

Das w. M. Herr Director Friedrich Brauer überreicht für die Sitzungsberichte weitere Beiträge zur Kenntniss der *Muscaria schizometopa*, und zwar 1. die zweite Folge der in der Sammlung G. H. Verall's befindlichen Originalstücke der von Bigot, Macquart und Robineau-Desvoidy beschriebenen Arten und deren Deutung; 2. Nachträge zu den in den Denkschriften (Bd. LX) erschienenen Vorarbeiten zu einer Monographie der *Muscaria schizometopa*.

Eine neue Form der Bedingung zur Integrirbarkeit einer Function einer Veränderlichen

von

O. Stolz,

c. M. k. Akad.

Dazu, dass die für jeden Punkt x des endlichen Intervalles (a, b) eindeutig definirte und in diesem Intervalle endliche Function $f(x)$ ein eigentliches bestimmtes Integral über das Intervall (a, b) zulässt, ist nothwendig und hinreichend, dass sie integrirbar sei über jeden Theil von (a, b), der keinen Punkt einer beliebig gegebenen discreten[1] Menge $\mathfrak{M}$ enthält.

Die Nothwendigkeit dieser Bedingung ist unmittelbar einleuchtend, indem die Function $f(x)$, wenn sie von $x = a$ bis $x = b$ integrirbar sein soll, überhaupt über jeden Theil des Intervalles (a, b) integrirbar sein muss.

Dass aber die obige Bedingung ausreicht, ergibt sich aus dem nachstehenden Satze.

»Im Intervalle (a, b) sei ein discretes Punktsystem $\mathfrak{M}$ gegeben. Wir schliessen die Punkte desselben in eine Folge von Strecken $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$ so ein, dass in den nach Wegnahme derselben zurückbleibenden Theilen von (a, b) gar kein Punkt von $\mathfrak{M}$, weder im Innern noch an den Enden, mehr vorkommt. Diese Theilstrecken von (a, b) seien mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{k_n}$ und die Abscissen ihrer dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte mit $b_1, b_2 \ldots b_{k_n}$ bezeichnet. Bedeutet dann $f(x)$ eine in jedem

[1] Vergl. z. B. diese Berichte, Jahrg. 1897, S. 462. — A. a. O., S. 454, in Formel (I) lies: $g_r \tau_r$ anstatt: g_r.

Punkte des Intervalles (a, b) eindeutige und im ganzen Intervalle endliche Function von x, so hat man für das obere Integral derselben im Intervalle (a, b) die Formel

$$(G=)\int_a^{(1)b} f(x)\,dx = \lim_{\delta_r=0} \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{(1)b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx, \tag{1}$$

d. h. jedem $\varepsilon > 0$ entspricht eine kleinere positive Zahl δ so, dass, wenn nur jede der Strecken $\delta_1 \ldots \delta_n$ kleiner als δ ist, sowohl

$$0 < \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n < \varepsilon, \tag{2}$$

als auch

$$\left| G - \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{(1)b_r+\varepsilon_r} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \tag{3}$$

ist. — Ebenso besteht für das untere Integral von $f(x)$ im Intervalle (a, b) die Formel

$$\int_a^{(2)b} f(x)\,dx = \lim_{\delta_r=0} \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{(2)b_r+\varepsilon_r} f(x)dx.« \tag{4}$$

Die Gleichung (1) folgt ohne Weiteres aus der Formel

$$\int_a^{(1)b} f(x)dx = \sum_1^{n}{}_r \int_{a_r}^{(1)a_r+\delta_r} f(x)\,dx + \sum_1^{k_n}{}_r \int_{b_r}^{(1)b_r+\varepsilon_r} f(x)dx, \tag{5}$$

worin $a_1, a_2 \ldots a_n$ die Abscissen der dem Punkte $x = a$ näheren Endpunkte der Strecken $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$ bedeuten.

Es ist nämlich für jedes x im Intervalle (a, b) $|f(x)|$ kleiner als eine gegebene Constante C, somit

$$(S=)\left| \sum_1^{n}{}_r \int_{a_r}^{(1)a_r+\delta_r} f(x)\,dx \right| < C(\delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_n),$$

also, wenn man sich jedes δ_r kleiner als δ denkt, zufolge (2) kleiner als $C\varepsilon$. Versteht man nun unter ε' die grössere von den

Zahlen ε und $C\varepsilon$, so sind S, d. i.

$$\left| G - \sum_r \int_{b_r}^{(1)\, b_r + \varepsilon_r} f(x)\, dx \right|,$$

und $\delta_1 + \ldots + \delta_n$ beide kleiner als ε', falls nur $\delta_r < \delta$ $(r = 1 \ldots n)$ ist.

Auf ähnliche Weise beweist man die Gleichung (4).

Kehren wir zu der eingangs gemachten Voraussetzung über die Function $f(x)$, welcher zufolge sie über jede der Strecken ε_r integrirbar ist, zurück, so dürfen wir

$$\int_{b_r}^{(1)\, b_r + \varepsilon_r} f(x)\, dx = \int_{b_r}^{(2)\, b_r + \varepsilon_r} f(x)\, dx = \int_{b_r}^{b_r + \varepsilon_r} f(x)\, dx$$

setzen. Machen wir von dieser Gleichung Gebrauch, so werden die rechten Seiten der Formeln (1) und (4) identisch.

Demnach ist auch

$$\int_a^{(1)\, b} f(x)\, dx = \int_a^{(2)\, b} f(x)\, dx,$$

d. h. die Function $f(x)$ ist über das Intervall (a, b) integrirbar, w. z. b. w.

Einige Bemerkungen über Aluminiumanoden in Alaunlösung

von

Prof. Dr. **Ernst Lecher.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

Eine elektrolytische Zelle, in welcher die eine Elektrode aus Aluminium und die andere aus indifferentem Platin, Kohle, Blei oder dergleichen besteht, leitet den Strom dann, wenn Aluminium als Anode auftritt, viel schlechter als in umgekehrter Richtung. Das ist lange bekannt.[1] Schon Ducretet gedachte, solche Zellen als Ventile beim gleichzeitigen Durchgange zweier Telegramme in entgegengesetzter Richtung zu verwenden. In neuerer Zeit benützte nun Graetz[2] und gleichzeitig Pollak[3] diese merkwürdige Eigenschaft zur Umformung eines Wechselstromes in Gleichstrom.

Ich möchte mir hier erlauben, einige Erscheinungen, wie sie beim Durchgange von Gleichstrom in solchen Zellen auftreten, zu besprechen, da derartige Betrachtungen vielleicht geeignet sein dürften, das scheinbar Anomale des Phänomens in einfacher Weise zu erklären.

1. Als Elektroden verwendete ich Platin und Aluminium, als Elektrolyt 10% Kalialaunlösung, eine bei Zimmertemperatur fast gesättigte Lösung.

---

[1] Buff, Lieb. Ann., 102, S. 196, 1857. — Ducretet, Journ. de phys., 4, p. 84, 1875. — Beetz, Wied. Ann., 2, S. 94, 1877.

[2] Wied. Ann., 62, S. 323, 1897.

[3] C. R., 124, p. 1443, 1897.

In der Stromrichtung Platin—Aluminium, welche ich die »normale« Richtung nennen will, bieten die Zellen nichts Merkwürdiges; in jener Richtung aber, wo Aluminium zur Anode wird — ich nenne dieselbe die »kritische« Richtung — fand ich einige neue Thatsachen.

2. Über die kritische Richtung sagt Graetz folgendes: »Durch eine Reihe von solchen Zellen, hintereinander geschaltet, kann man daher einem primären Strom in der einen Richtung eine Gegenkraft entgegensetzen, welche der Anzahl der Zellen mal 22 Volt gleich ist. In dieser Richtung, nämlich in derjenigen, in welcher das Aluminium die Anode ist, geht dann von dem primären Strom, wenn seine Spannung kleiner als der genannte Betrag ist, kein mit empfindlichem Galvanometer messbarer Strom hindurch«. Diese Worte von Graetz fand ich nicht allseitig bestätigt. Ein empfindliches Galvanometer ergibt auch in der kritischen Richtung immer einen Strom, dessen Stärke allerdings in vielen Fällen tief unter der Stromintensität in der normalen Richtung liegt. Auch kann man wohl kaum von einer scharf ausgeprägten Gegenkraft von genau 22 Volt sprechen. Eine Gegenkraft, ausser in dem kleinen Betrage der gewöhnlichen Polarisationen, existirt nicht. Man gewinnt vielmehr eine ganz einfache Erklärung der oft recht verwickelten Erscheinungen durch die — wohl fast allgemein gemachte — Annahme, dass die Aluminiumanode mit einer sehr schlecht leitenden Oxydschichte sich überzieht. Diese ist langsam löslich und geht möglicherweise in ein Hydrat über. Die Aufklärung des chemischen Theiles des Vorganges ist wohl noch Schwierigkeiten unterworfen; schon Beetz versuchte hier einige der einfachsten Thatsachen festzustellen. Für die folgende Betrachtung der physikalischen Seite des Problems ist nur der Sinn, nicht aber das eigentliche Wesen dieser Umsetzungen massgebend.«

3. Der Anodenüberzug bietet dem Strome einen grossen Widerstand, und daher die Schwächung: der ganze Potentialabfall im Schliessungskreise liegt in dieser dünnen Schichte. Bei grösseren Spannungen, wobei natürlich gleichzeitig für eine hinlängliche Stromdichte zu sorgen ist, erwärmt sich dieser Anodenüberzug sehr stark;

durch diese Erwärmung sinkt der Widerstand, und der Strom geht nun plötzlich durch. Dieses Sinken des Widerstandes in Folge der Erwärmung ist hauptsächlich durch beschleunigte Lösung (eventuell Umwandlung) des Anodenüberzuges bedingt.

4. Zu meinen Messungen verwendete ich eine Accumulatorenbatterie von 30 Zellen, ein Siemens-Halske'sches Präcisions-Volt-Ampèremeter, das Stromstärken von 0·001 bis 150 Ampère anzeigte, und ein Galvanometer Du Bois-Rubens. Der Gesammtwiderstand des ganzen Stromkreises, d. i. Leitung und Messinstrumente, ist, ausser es wären absichtlich weitere Widerstände eingeschaltet, immer circa 4 Ohm mehr dem Widerstande der Zelle mit der Alaunlösung. Der Widerstand der grossen Accumulatoren ist zu vernachlässigen.

Der Widerstand der Alaunlösung selbst zeigte sich bei verschiedenen Stromstärken als gleich, und es hatte eine circa 4 *cm* lange Schichte der Flüssigkeit von 45 cm^2 Querschnitt ungefähr 3 Ohm. Der Widerstand der Oxydschichte an der Aluminiumanode ist aber so gross, dass in vielen Fällen die eben aufgezählten gesammten anderen Widerstände der Leitung dagegen verschwinden.

Bei Anwendung nur eines Accumulators verdecken die gewöhnlichen Polarisationen den Sinn der Erscheinung; das kritische Verhältniss, womit ich den Quotienten aus normaler Stromstärke durch kritische Stromstärke bezeichne, ist hier oft sogar kleiner als Eins.

5. Ich betrachte daher gleich jene Erscheinungen, welche bei Anwendung von mindestens 5 Accumulatoren auftreten. Bis zu etwa 10 Accumulatoren ist die Erwärmung in Folge des Widerstandes der Oxydschichte keine bedeutende, so dass wir hier von dieser Erwärmung absehen können.

Ist der Strom zuerst in normaler Richtung gegangen und wird dann commutirt, so tritt im ersten Momente auch in der kritischen Richtung der Strom in voller Stärke auf, um dann, je nach der Stromdichte, rasch abzusinken.

Ich erhielt z. B. bei 5 Accumulatoren als Stromquelle und einer Elektrodenfläche von je 1300 cm^2 in normaler Richtung

1·80 Ampère; wurde dann commutirt, so ergibt sich in kritischer Richtung

nach..........	0·1	0·25	0·5	1	3	20	36 Minuten
als Stromstärke	1·80	1·00	0·80	0·50	0·29	0·18	0·17 Ampère.

Letztere Stromstärke, 0·18—0·17 Ampère, bleibt dann lange Zeit ziemlich constant.

Dieselbe Erscheinung zeigt sich auch, wenn man hier als Anode einen Aluminiumdraht nimmt; nur ist dann die Stromdichte eine grössere, und die Herstellung des Endzustandes erfolgt viel rascher.

6. Dieser Endzustand tritt ein, wenn das durch den Strom per Zeiteinheit sich bildende und das umgesetzte und wieder in Lösung gehende Oxyd einen Gleichgewichtszustand gebildet haben. Dass eine fortwährende Lösung und Neubildung der schlecht leitenden Oberflächenschichte besteht, zeigt die Thatsache, dass die kritische Wirkung nach Aufhebung des Stromes sich allmälig verliert.

Wenn in der Anordnung von vorhin (5) die kritische Stromstärke nach einiger Zeit auf 0·17 gesunken war, wurde der Strom geöffnet. Schliesst man nach einer Stunde, so springt die Galvanometernadel auf 1·12, um dann wegen der Oxydbildung wieder rasch zu sinken. Nachdem der Strom 10 Stunden unterbrochen war, springt die Nadel auf 1·70 Ampère, d. h. es ist dann jeder Oxydüberzug vollständig verschwunden.

7. Eine Erschwerung der Angabe bestimmter Zahlenwerthe tritt dadurch auf, dass das kritische Verhältniss (normale Stromstärke durch kritische Stromstärke) bei längerem Gebrauche der Elektroden steigt; dieselben Elektroden, die früher (5) $\frac{1\cdot 80 \text{ Ampère}}{0\cdot 18 \text{ Ampère}}$ gegeben, zeigten nach mehrmaligem Wechseln der Stromrichtung nach einigen Tagen $\frac{1\cdot 80 \text{ Ampère}}{0\cdot 0116 \text{ Ampère}}$. Ein noch stärkeres Ansteigen tritt nach längerem Formiren mit Wechselstrom auf.[1] Alle meine Zahlen dienen daher mehr zur Charakterisirung als zur genauen Bestimmung des Phänomens.

---

[1] Dies scheint auch Pollak, C. R. 124, anzudeuten.

8. Unter dieser Einschränkung will ich nun einige Angaben über den grossen Werth des Widerstandes des Anodenüberzuges machen. Zwei Elektrodenplatten von je 45 cm^2 in etwa $^1/_2$ *cm* Entfernung ergeben als kritisches Verhältniss bei fünf Accumulatoren $\frac{2 \cdot 00 \text{ Ampère}}{0 \cdot 010 \text{ Ampère}}$. Schaltet man nun in normaler Richtung 879 Ohm ein, so sinkt die Stromstärke von 2·00 Ampère gleichfalls auf 0·010 Ampère. Der Anodenüberzug von 45 cm^2 hat hier somit circa 880 Ohm Widerstand.

Bei 10 Accumulatoren stellte ich die Platten weiter auseinander, um annähernd dieselbe normale Stromdichte zu erhalten. Das kritische Verhältniss ist so $\frac{2 \cdot 10 \text{ Ampère}}{0 \cdot 047 \text{ Ampère}}$. Um hier die normale Stromstärke von 2·10 auf 0·047 Ampère zu bringen, bedurfte es der Einschaltung eines Widerstandes von 350 Ohm. Hier ist in Folge der grösseren kritischen Stromstärke schon eine Erwärmung der Platte zu merken, und es findet daher eine raschere Lösung statt.

Diese Zahlen werden viel höher, wenn die Platten einige Zeit in Gebrauch waren; so ergaben sich bei 5 Accumulatoren in obigem Beispiele 5000 Ohm.

9. Genau die gleichen Werthe ergaben sich mittelst elektrometrischer Messungen. Der ganze Potentialabfall, wenn der Strom in kritischer Richtung geschlossen ist, liegt zwischen Flüssigkeit und Aluminium; der Quotient aus dieser Potentialdifferenz durch die Stromstärke ergibt ähnliche Werthe für den Widerstand der Oxydschichte.

10. Noch höhere Zahlen ergeben sich in Folge der grösseren Stromdichte bei Verkleinerung der Aluminiumelektrode. Es diene als solche ein Aluminiumdraht von 1 *mm* Durchmesser, der circa 1 *cm* in die Lösung eintaucht.

Hier erhalten wir bei 5 Accumulatoren $\frac{0 \cdot 43 \text{ Ampère}}{9 \times 10^{-6} \text{ Ampère}}$ und als Widerstand 900.000 Ohm; bei 10 Accumulatoren $\frac{1 \cdot 25 \text{ Ampère}}{8 \times 10^{-5} \text{ Ampère}}$ und als Widerstand 110.000, da sich auch hier schon die Erwärmung, die ich später (13) direct zeigen werde, geltend macht.

11. Diese Widerstände — im äussersten der erwähnten Fälle 900.000 Ohm — für eine Fläche von 0·3 cm^2 und eine gewiss nur sehr dünne Schichte, sind ungemein hoch. Nun, ich glaube sogar, dass dieselben unmittelbar nach Aufheben des Stromes noch höher sind. Es muss ja selbst durch die schwachen Ströme, die noch durch solche Widerstände durchkommen, Joule'sche Wärme entstehen, die bei dem geringen Massenwerthe des minimalen Anodenüberzuges ihre Wirkung in einer kleinen Temperaturerhöhung und in einer Verminderung des Widerstandes äussern wird. Diese Temperaturerhöhung verschwindet unmittelbar nach Aufhören des Stromes, und der Widerstand ist für die nächsten Bruchtheile von Secunden, wo noch keine merklichen Mengen gelöst sind, wahrscheinlich ganz enorm. Nur so sind die Resultate von Streintz[1] zu verstehen, wollten wir nicht zur Annahme einer physikalisch wohl sehr unwahrscheinlichen Gegenkraft von 20 Volt unsere Zuflucht nehmen. Die condensatorische Wirkung ist bedingt durch den grossen Widerstand und eine selbstverständliche Folge desselben.

12. Aus diesem grossen Widerstande des Anodenüberzuges ergibt sich, dass bei Anwendung von 5—10 Accumulatoren das Einschalten selbst beträchtlicher Widerstände in die Leitung die kritische Stromstärke nicht beeinflusst, natürlich aber die normale Stromstärke; das kritische Verhältniss ist bei so geringer Accumulatorenanzahl um so höher, je geringer der Widerstand der Gesammtleitung ist.

Ebenso resultirt aus vorstehenden Thatsachen, dass ein theilweises Herausziehen oder Tiefereintauchen der Platinkathode keinen Einfluss hat, während ein theilweises Herausziehen der Aluminiumanode den Strom rasch sinken macht.

---

[1] Streintz (Wied. Ann., 32, S. 116, 1887; 34. S. 751, 1888) scheint dies auch so aufzufassen, während Graetz (l. c.) die beiden Thatsachen als gesondert hinstellt: »Die Ursache dieser Erscheinung wurde auf die Bildung eines sehr schlecht leitenden Oxydes an der Anode geschoben, also auf einen Übergangswiderstand, während wahrscheinlicher eine Art von Condensatorwirkung zwischen der Elektrode und der Flüssigkeit, also eine Art von dielektrischer Polarisation, zum Unterschiede von der gewöhnlichen elektrolytischen Polarisation, die richtigere Erklärung bietet.«

Dies geschieht aber nicht proportional der in Verwendung bleibenden Anodenfläche, wie zunächst zu erwarten ist, und zwar aus Gründen, welche ich später (18) auseinandersetzen werde.

Ein tieferes Einschieben der Aluminiumelektrode, wodurch noch unoxydirte Partien in Action treten und die Leitung übernehmen, zeigt natürlich ganz enorme Wirkungen. Ein leises Schwingen des Flüssigkeitsspiegels lässt das Bild der Ablesescala rasch aus dem Gesichtsfelde des Beobachters verschwinden. Diese Wirkung liesse sich bei difficilen Messungen, wo es sich um kleine plötzliche Druckänderungen handelt, vielleicht mit Vortheil verwenden.

13. Bei grossen Potentialgefällen, wie solche bei Anwendung von 15 und mehr Accumulatoren entstehen, kommt es natürlich zu einer sehr energischen Erwärmung der schlecht leitenden Oxydschichte an der Aluminiumanode. Um dieselbe zu zeigen, wurde ein hohler Aluminiumcylinder mit etwa $^1/_8$ *mm* Wandstärke gedreht, in welchen das Gefäss eines Quecksilberthermometers strenge hineinpasste. War dieser Cylinder Anode, so stieg das Thermometer bei Stromschluss rasch in die Höhe. Bei 20 Accumulatoren und einer Stromstärke von 0·9 Ampère stieg es bis auf 80°, bei 30 Accumulatoren und einer Stromstärke von 4·0 Ampère stieg es bis auf 105°. Der Anstieg erfolgt bei Stromschluss so plötzlich, als ob man das Thermometer in heisses Wasser steckte: es tritt also die Erwärmung fast momentan auf. Beim Umkehren des Stromes in die normale Richtung sinkt das Thermometer fast ebenso rasch, trotzdem jetzt die Stromstärke in der Zelle meistens eine viel grössere ist.

14. Bei der soeben erwähnten Temperatur siedet die Lösung natürlich in unmittelbarer Nähe der Anode. Der eigentliche Anodenüberzug ist selbstverständlich noch viel heisser; da derselbe mit der Alaunlösung umgeben ist, so zeigt das Thermometer wohl nur einen Bruchtheil der wirklichen Temperatur. Der Anblick eines Drahtes, der zuerst (bei 20 bis 30 Accumulatoren) als Anode gedient, und von dem dann durch einen kurzen Stromschluss in normaler Richtung alle Oxydverunreinigungen weggeputzt sind, gewährt sowohl mit freiem Auge als unter dem Mikroskope betrachtet einen so

eigenthümlichen Anblick, dass es fast den Anschein hat, als hätten an der Oberfläche in Folge der hohen Temperaturen Schmelzungen stattgefunden.

15. Interessant und eine Art experimentum crucis für die vorgebrachte Anschauung, dass das Verhältniss von normaler und kritischer Stromstärke bei grossen Potentialdifferenzen durch diese Erhitzung der Aluminiumanode geändert und im absoluten Werthe der Einheit genähert wird, bietet folgende Versuchsanordnung.

Um das Gefäss eines Quecksilberthermometers wird so dicht als möglich ein Aluminiumdraht von $^1/_2$ *mm* Durchmesser in Form einer möglichst engen Spirale herumgewickelt. Dieser Draht dient wieder als Elektrode. Ist er Anode, so zeigt sich (bei elektromotorischen Kräften von 40—60 Volt) dieselbe Erscheinung des raschen Ansteigens des Thermometers wie vorhin; wegen der ausgiebigeren Wasserkühlung ist der Temperaturanstieg minder kräftig. Es ist dies eine Wiederholung des eben (13) geschilderten Versuches.

Bei Anwendung von nur fünf Accumulatoren zeigt das Thermometer jedoch keine Erwärmung mehr an. Leitet man nun durch die Anodenspirale einen zweiten gesonderten Hilfsstrom, dessen einzige Aufgabe es ist, die Anode rasch und kräftig zu erwärmen, so verschwindet plötzlich die kritische Wirkung und die ganze Eigenthümlichkeit der Erscheinung.

Es ist z. B. zunächst in normaler Richtung eine Stromstärke von 0·81 Ampère und in der kritischen Richtung eine solche von 0·0002 Ampère vorhanden. Erwärmt man nun, während die Aluminiumspirale Anode bleibt, durch den gesonderten Hstrom eben diesse Alumlfiniumspirale, so steigt die kritisiche Stromstärke; dieselbe wird, wenn der erwärmende Hilfsstrom 40—50 Ampère beträgt, gleich der normalen Stromstärke. Damit ist erwiesen, dass durch eine Erwärmung der Anode der Widerstand des Anodenüberzuges heruntergedrückt wird. Hier bei Anwendung einer Potentialdifferenz von 10 Volt ist der eigentliche primäre Strom selbst zu schwach, um eine solche Erwärmung des Anodenüberzuges hervorzubringen, und es bedarf einer anderweitigen Erwärmung mittels eines Hilfsstromes, um die kritische Stromstärke gleich der normalen

zu machen; bei Potentialgefällen von 40—60 Volt besorgt eine solche Erwärmung der primäre Strom selbst.

16. Bereits früher (14) wurde darauf hingewiesen, dass eine solche Erwärmung sehr stark sein muss. Dafür spricht auch die Stärke des Hilfsstromes im vorigen Abschnitte; erst wenn ein Hilfsstrom von 40—50 Ampère durch die Spirale geht, wird die kritische Stromstärke gleich der normalen. Solche Stromstärken können nur ganz kurze Momente durch den dünnen Aluminiumdraht gehen, da derselbe, durch Elektrolyse schon angegriffen, trotz der Wasserkühlung rasch schmilzt. Da also hier fast ein Schmelzen stattfinden muss, um die kritische Stromstärke auf die Höhe der normalen zu bringen, so dürfte auch durch die directe Einwirkung hoher Potentialgefälle auf die Zelle die Anode sehr hoch erhitzt werden.

17. In folgender Tabelle gebe ich einige allgemeine Messungen, deren Ergebniss nach dem Vorhergehenden leicht zu interpretiren ist. In der ersten und zweiten Verticalreihe steht die Anzahl der verwendeten Accumulatoren und deren Klemmspannung in offenem Zustande. Die übrige Tabelle zerfällt in zwei Theile: links die Messungen, wenn kein Zusatzwiderstand in der Leitung war, welche so etwa 4·5 Ohm ohne den Zellenwiderstand darstellt; rechts hingegen sind überdies noch 85·5 Ohm eingeschaltet. In beiden Fällen wurde nun zunächst einer Platinelektrode von 1300 cm^2 eine ebenso grosse Aluminiumplatte gegenübergestellt (Schlagwort »Plattenelektrode«), während dann (Schlagwort »Spitzenelektrode«) diese Aluminiumplatte durch einen 1·5 *cm* tief eintauchenden Aluminiumdraht von 1 *mm* Durchmesser ersetzt wurde. Die gewonnenen Zahlen bedeuten

$$\frac{\text{Normale Stromstärke in Ampère}}{\text{Kritische Stromstärke in Ampère}} = \text{Kritisches Verhältniss.}$$

Anzahl der Accumulatoren	Volt	Gesammtwiderstand der Leitung ohne Zellenwiderstand			
		etwa 4·5 Ohm		etwa 90 Ohm	
		Platten-elektrode	Spitzenelektrode	Platten-elektrode	Spitzenelektrode
5	10·2	$\frac{1\cdot92}{0\cdot012} = 142$	$\frac{0\cdot35}{1\cdot6\times10^{-5}} = 22000$	$\frac{0\cdot091}{0\cdot012} = 7\cdot9$	$\frac{0\cdot06}{1\cdot6\times10^{-5}} = 3750$
10	20·3	$\frac{4\cdot20}{0\cdot06} = 70$	$\frac{1\cdot25}{8\times10^{-5}} = 15600$	$\frac{0\cdot22}{0\cdot04} = 5\cdot5$	$\frac{0\cdot17}{8\times10^{-5}} = 2160$
15	31·2	$\frac{6\cdot7}{0\cdot4} = 17$	$\frac{1\cdot7}{0\cdot0012} = 1400$	$\frac{0\cdot32}{0\cdot09} = 3\cdot5$	$\frac{0\ 28}{6\ 10^{-4}} = 467$
20	41·6	$\frac{8\cdot9}{1\cdot6} = 5\cdot5$	$\frac{2\cdot0}{0\cdot5} = 4\cdot0$	$\frac{0\cdot45}{0\cdot15} = 3\cdot0$	$\frac{0\cdot40}{0\cdot08} = 5\cdot0$
25	51·8	$\frac{11\cdot2}{3\cdot5} = 3\cdot2$	$\frac{2\cdot5}{1\cdot6} = 1\cdot6$	$\frac{0\cdot57}{0\cdot25} = 2\cdot3$	$\frac{0\cdot46}{0\cdot11} = 4\cdot2$
30	62·0	$\frac{13\cdot0}{6\cdot1} = 2\cdot1$	$\frac{3\cdot0}{3\cdot0} = 1\cdot0$	$\frac{0\cdot69}{0\cdot39} = 1\cdot8$	$\frac{0\cdot55}{0\cdot29} = 1\cdot9$

Betrachten wir zunächst den linken Theil der Tabelle, wo die Gesammtleitung möglichst wenig Widerstand enthält. Hier ist bei geringem Potentialgefälle die drahtförmige Elektrode der plattenförmigen in der kritischen Wirkung weit überlegen. Mit 5 Accumulatoren sinkt bei den Platten der Strom von 1·92 Ampère beim Commutiren auf 0·012, d. h. auf den 142ten Theil, bei Drahtelektroden von 0·35 Ampère auf 0·000016 Ampère, d. h. auf den 22000ten Theil. Es ist die Stromdichte und der Anodenüberzug in letzterem Falle viel stärker.

Bei höheren elektromotorischen Kräften, z. B. 62 Volt, ist die Erwärmung der Drahtelektrode so stark, dass es zu einer Widerstandsäusserung der Oxydschichte gar nicht mehr kommt, indess die grosse Platte in der kritischen Richtung den Strom immer noch auf die Hälfte herunterdrücken kann.

Betrachten wir die rechte Seite der Tabelle, so zeigt sich zunächst, dass ein Einschalten eines Zusatzwiderstandes in

die Leitung den Widerstand des Anodenüberzuges in seiner Wirkung schmälert; das kritische Verhältniss ist bei kleineren elektromotorischen Kräften kleiner. Bei grösseren elektromotorischen Kräften aber wird, da jetzt ein Theil des Potentialgefälles aus der Oxydschichte in den Zusatzwiderstand verlegt ist, die Erwärmung der Anode eine minder starke, und jetzt wirkt das Einschalten eines Zusatzwiderstandes wieder fördernd auf das kritische Verhältniss der Drahtelektroden, welche z. B. bei 25 Accumulatoren 1·6 ohne Widerstand und 4·2 mit Widerstand zeigen.

18. Was die Genauigkeit der angegebenen Werthe anlangt, gelten zunächst die früher gemachten Bemerkungen (7), wobei eine weitere Einschränkung darum zu machen ist, weil die gelösten Producte längs der Platte heruntersinken; man erhält daher bei Anwendung verschieden grosser Platten keine zu unmittelbaren weiteren Schlüssen verwendbaren Werthe. Man sieht dieses Heruntersinken direct mit freiem Auge an den Schlieren der Flüssigkeit.

Auch werden die Verhältnisse andere, wenn man die Elektroden horizontal legt, wobei es wieder von Belang ist, ob das Aluminium oben oder unten ist. Da dieser Theil meiner Messungen für den eigentlichen Kern der Erscheinungen irrelevant ist, übergehe ich dieselben.

XVI. SITZUNG VOM 16. JUNI 1898.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 107, Abth. II a., Heft I—II (Jänner und Februar 1898).

Herr Prof. Dr. Gustav Kohn in Wien übersendet eine Abhandlung: »Über Tetraëder in schiefperspectiver Lage«.

Das w. M. Herr Director Friedrich Brauer überreicht eine Arbeit von Dr. Rudolf Sturany unter dem Titel: »Katalog der bisher bekannt gewordenen südafrikanischen Land- und Süsswasser-Mollusken, mit besonderer Berücksichtigung des von Dr. Penther gesammelten Materiales«.

XVII. SITZUNG VOM 23. JUNI 1898.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, gedenkt des schweren Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 21. Juni l. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Hofrath Dr. Anton Ritter Kerner von Marilaun, Professor an der k. k. Universität und Director des botanischen Gartens in Wien, erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder haben sich zur Bezeigung des Beileides von den Sitzen erhoben.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt den VII. Band des im Wege des k. u. k. Ministeriums des Äussern eingelangten italienischen Druckwerkes: »Le Opere di Galileo Galilei«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Elisabeth-Gymnasium im V. Bezirke in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (16. Fortsetzung).

Der Secretär theilt mit, dass Herr Emil Reinhold sein in der Sitzung vom 3. März l. J. behufs Wahrung der Priorität vorgelegtes versiegeltes Schreiben mit der Aufschrift: »Selbstständige Kuppelung« am 21. d. M. zurückgezogen habe.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Wiesner überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Beiträge zur Kenntniss des photochemischen Klimas im arktischen Gebiete«.

Das w. M. Herr Director Friedrich Brauer überreicht eine Arbeit von Dr. H. Rebel, Assistenten am naturhistorischen Hofmuseum in Wien, betitelt: »Fossile Lepidopteren aus der Miocänformation von Gabbro«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung von Dr. Fritz Hasenöhrl in Wien: »Zur Theorie der Transversalschwingungen eines von Wirbeln durchzogenen Körpers« (I. Mittheilung).

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht eine Abhandlung von Herrn K. Lauermann, Lehrer in Pressnitz (Böhmen), betitelt: »Zum Normalenproblem der Hyperbel«.

Herr Prof. J. Liznar überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Die Änderung der erdmagnetischen Kraft mit der Höhe«.

Der k. u. k. Linienschiffs-Lieutenant Herr Karl Koss erstattet einen vorläufigen Bericht über seine auf der Expedition S. M. Schiff »Pola« 1897/98 in der südlichen Hälfte des Rothen Meeres ausgeführten Kimmtiefen-Beobachtungen.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Brunnen-Direction, Moriz Fürst Lobkowitz'sche, Die Mineralwasserquellen von Bilin in Böhmen. Bilin, 1898; 8°.

Adamkiewicz A., Die Functionsstörungen des Grosshirnes. Hannover, 1898; 8°.

Bancroft W. D., The Phase Rule. Ithaca. New York, 1897.

Le Opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli Auspicii Sua Maesta il Rè d' Italia. Volume VII. Firenze, 1897.

Schwab P. F., P. Ägyd Everard von Raitenau 1605—1675, Benedictiner von Kremsmünster, Mechaniker und Architekt. Salzburg, 1898; 8°.

Über die Änderung der erdmagnetischen Kraft mit der Höhe

von

Prof. J. Liznar.

Seit Beginn unseres Jahrhundertes wurde schon vielfach der Versuch gemacht, die Änderung des Erdmagnetismus mit der Höhe zu ermitteln, jedoch vergeblich, denn die von verschiedenen Forschern erhaltenen Resultate sind so widersprechend, dass aus ihnen auf eine Zu- oder Abnahme der erdmagnetischen Kraft mit der Höhe nicht geschlossen werden kann. Eine der schönsten diesbezüglichen Untersuchungen hat Kreil ausgeführt und in seiner Abhandlung: Magnetische und geographische Ortsbestimmungen im östlichen Europa und an einigen Küstenpunkten Asiens, Denkschriften der kaiserl. Akad. der Wiss., Bd. XX, S. 91 veröffentlicht. Die von ihm abgeleiteten Resultate, sowie überhaupt die hier citirte Abhandlung, scheinen wenig bekannt zu sein, obzwar Kreil darin die Resultate seiner langjährigen Messungen im österreichischen Kaiserstaate nebst den nach ihnen gezeichneten Karten publicirt hat. Aus diesem Grunde möge es gestattet sein, die oben erwähnten, auf die Änderung der erdmagnetischen Kraft mit der Höhe bezüglichen Resultate in etwas abgeänderter Form hier anzuführen.

Kreil hat zu dieser Untersuchung die Totalintensität von sieben hochgelegenen Punkten verwendet und sie mit jenen der tieferliegenden benachbarten verglichen. Die Verwendung der Totalintensität war ein glücklicher Griff, denn die Totalintensität muss die grösste Änderung mit der Höhe zeigen; er hätte übrigens die Untersuchung auf die Declination, die Nord- und Westcomponente gar nicht ausdehnen können,

da er nur an zwei Hochstationen alle drei Elemente gemessen hatte. Die Hochstationen waren: Arlberg, S. Maria, Brenner. Böckstein, Gamskogel, Dobracz und Polsterberg. Die Stationsgruppen, deren Daten mit den vorangeführten Hochstationen verglichen worden sind, nachdem die Werthe jeder einzelnen Station auf die geographische Position der betreffenden Hochstation reducirt worden waren, umfassen folgende Stationen:

I. Gruppe: Bludenz und Landeck.

II. Gruppe: Sondrio, Bormio, Mals, Meran, Bozen.

III. Gruppe: Innsbruck, Rattenberg, Bruneck.

IV. und V. Gruppe: Salzburg, Hofgastein, Badgasten, Golling.

VI. Gruppe: Görz, Bleiberg, Kreith.

VII. Gruppe: Eisenerz, Erzberg, Kallwang.

Die Höhendifferenzen und die denselben entsprechenden Änderungen der Totalintensität ersieht man aus folgender Zusammenstellung.

Station	Höhe	Totalintensität
Arlberg	1764 *m*	4·527 G. E.
I. Gruppe	676	5·564
Differenz	1088	—0·037
S. Maria, Stilfserjoch	2643	4·542
II. Gruppe	610	4·538
Differenz	2033	+0·004
Brenner	1267	4·531
III. Gruppe	576	4·545
Differenz	691	—0·014
Böckstein	1785	4·534
IV. Gruppe	686	4·569
Differenz	1099	—0·035
Gamskogel	2432	4·528
V. Gruppe	686	4·572
Differenz	1746	—0·044

Station	Höhe	Totalintensität
Dobracz	2160 *m*	4·543 G. E.
VI. Gruppe	488	4·558
Differenz	1672	—0·015
Polsterberg	1778	4·566
VII. Gruppe	728	4·563
Differenz	1050	+0·003

Gibt man allen Werthen das gleiche Gewicht und bildet das Mittel, so ergibt sich ein mittlerer Höhenunterschied von 1340 *m*, dem eine Abnahme der Totalintensität von 0·0197 G. E. entspricht.

Kreil spricht als Resultat der vorstehenden Zusammenstellung Folgendes aus: »Unter den sieben Höhenpunkten, welche in dieser Tafel in Betracht gezogen werden, zeigen fünf eine sehr merkliche Abnahme der Kraft mit der Höhe an, bei zweien findet sich zwar eine Zunahme, aber so klein, dass sie jedenfalls weit innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegt. Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass die magnetische Kraft mit der Höhe abnehme, und dass die Abnahme selbst schon in dem Bereiche unserer Gebirge merklich sei. Im vorliegenden Falle würde sie, wenn man allen Bestimmungen gleiches Gewicht beilegt, für eine Höhe von 1000 Toisen 0·00028 oder ungefähr den $^{6}/_{100000}$ Theil der Kraft betragen, wie sie im Jahre 1850·0 unterm 45. Breiten- und 33. Längengrade gefunden wurde.«

Es ist unerfindlich, wie Kreil zum letzten Theile dieser Folgerung gelangt ist, denn aus seinen Daten folgt, dass die Abnahme für 1000 *m* den Werth 0·0147 G. E. hat, und da 1000 Toisen = 1949 *m* sind, so ergibt sich für 1000 Toisen eine Abnahme von 0·0286 G. E. und nicht der von ihm angegebene, hundertmal kleinere Betrag. Die geringe Abnahme von 0·00028 müsse die Totalintensität bereits für den Höhenunterschied von 10 Toisen = 19 *m* zeigen. Aus den vorangeführten Daten Kreil's folgt eine so beträchtliche Abnahme der Intensität mit der Höhe, dass, wenn sie wirklich einen so grossen Werth hätte, ihre Bestimmung eine viel leichtere sein

müsste, als es wirklich der Fall ist. Es sei hier vorgreifend erwähnt, dass der wirkliche Betrag derselben circa die Hälfte des von Kreil ermittelten beträgt.

Wenn auch aus den Daten Kreil's eine sehr deutlich ausgesprochene Abnahme der Totalintensität mit der Höhe folgt, so verdienen diese Daten keineswegs jenes Vertrauen, welches man ihnen bei einer flüchtigen Betrachtung entgegenbringen möchte, denn die Ungenauigkeiten in Folge von localen Störungen und von Beobachtungsfehlern sind zu gross, als dass sie sich bei Verwendung von so wenigen Stationen aufheben könnten.

Nach unseren jetzigen Kenntnissen über das Vorhandensein grösserer oder kleinerer Störungskräfte kann uns die geringe Übereinstimmung der älteren Resultate nicht überraschen, da vereinzelte Messungen an und für sich zur Constatirung eines nur geringen Unterschiedes schon aus dem Grunde ungeeignet sind, weil die Beobachtungspunkte nie senkrecht über einander liegen und die oben und unten beobachteten Daten von den anhaftenden Störungen nicht befreit werden können.

Nachdem wir seit den epochemachenden Arbeiten von Gauss[1] die Erde als einen magnetisirten Körper betrachten müssen, lässt sich aus theoretischen Gründen eine Abnahme der erdmagnetischen Kraft mit der Höhe nicht läugnen, da wir uns bei einer Erhebung vom Sitze der Kraft entfernen. Der theoretische Betrag dieser Abnahme kann aus den von Gauss gegebenen Formeln sehr leicht abgeleitet werden. Man kann hiezu entweder die Ausdrücke für das Potential oder für die Componenten X, Y, Z verwenden. Bezeichnet man das Potential in der Höhe h mit V_h, am Meeresniveau mit V_0, so ist, wenn mit R der Erdradius und mit $P', P'', P'''\ldots$ gewisse Functionen von φ und λ bezeichnet werden,

$$\left.\begin{aligned} V_h &= \frac{R^3}{(R+h)^2}\left[P' + \frac{R}{R+h}P'' + \frac{R^2}{(R+h)^2}P''' + \ldots\right], \\ V_0 &= R[P'+P''+P'''+\ldots]. \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

[1] Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. Carl Friedrich Gauss' Werke, Bd. 5, S. 142. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereines im Jahre 1838.

Ist h nicht sehr gross, so können die höheren Potenzen von $\frac{h}{R}$ vernachlässigt werden und V_h lässt sich darstellen durch

$$V_h = \frac{R^3}{(R+h)^2}\left[P'+P''+P'''+\ldots-\frac{h}{R}(P''+2P'''+3P''''+\ldots)\right].$$

Da der zweite Theil des innerhalb der eckigen Klammer stehenden Ausdruckes gegen den ersten sehr klein ist, so kann mit grosser Näherung auch geschrieben werden

$$V_h = \frac{R^2}{(R+h)^2}R[P'+P''+P'''+\ldots],$$

oder mit Rücksicht auf 1)

$$V_h = \frac{R^2}{(R+h)^2}V_0, \qquad \ldots 2)$$

d. h. die Potentiale in der Höhe h und am Meeresniveau verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen vom Erdmittelpunkte.

V_0, und für ein bestimmtes h auch V_h, ist eine Function der geographischen Coordinaten. Differenzirt man Gleichung 2) nach der Breite und Länge und setzt $u = 90-\varphi$, so wird

$$\frac{dV_h}{du} = \frac{R^2}{(R+h)^2}\frac{dV_0}{du}$$

$$\frac{dV_h}{d\lambda} = \frac{R^2}{(R+h)^2}\frac{dV_0}{d\lambda},$$

oder

$$\frac{\frac{dV_h}{du}}{\frac{dV_0}{du}} = \frac{\frac{dV_h}{d\lambda}}{\frac{dV_0}{d\lambda}} = \frac{R^2}{(R+h)^2}. \qquad \ldots 3)$$

Nun ist bekanntlich die Nord- und Westcomponente X und Y gegeben durch

$$X_h = -\frac{dV_h}{(R+h)du}, \qquad Y_h = -\frac{dV_h}{(R+h)\sin u d\lambda}$$

$$X_0 = -\frac{dV_0}{Rdu}, \qquad Y_0 = -\frac{dV_0}{R\sin u d\lambda},$$

woraus folgt

$$\frac{dV_h}{du} = -X_h(R+h), \qquad \frac{dV_h}{d\lambda} = -Y^h(R+h)\sin u$$

$$\frac{dV_0}{du} = -X_0 R, \qquad \frac{dV_0}{d\lambda} = -Y_0 R \sin u.$$

Nach Einsetzung dieser Werthe in Gleichung 3) erhält man

$$X_h = \frac{R^3}{(R+h)^3} X_0, \qquad Y_h = \frac{R^3}{(R+h)^3} Y_0.$$

Um den entsprechenden Ausdruck für Z_h zu erhalten, hat man Gleichung 2) nach h zu differenziren und zu beachten, dass hiebei V_0 constant ist, dann ergibt sich

$$\frac{dV_h}{dh} = -2\frac{R^2}{(R+h)^3} V_0,$$

und für den speciellen Fall, dass $h = 0$ ist,

$$\frac{dV_0}{dh} = -2\frac{V_0}{R}.$$

Bekanntlich ist aber

$$\frac{dV_h}{dh} = Z_h, \qquad \frac{dV_0}{dh} = Z_0,$$

so dass

$$\frac{\frac{dV_h}{dh}}{\frac{dV_0}{dh}} = \frac{Z_h}{Z_0} = \frac{R^3}{(R+h)^3}$$

oder

$$Z_h = \frac{R^3}{(R+h)^3} \cdot Z_0$$

wird.

Die Intensitäten in der Höhe h und am Meeresniveau verhalten sich demnach umgekehrt wie die dritten Potenzen der Entfernungen vom Erdmittelpunkte.

Mit Rücksicht auf die vorhin gemachte Voraussetzung bezüglich der Grösse h, kann man auch schreiben

$$X_h = \left(1 - 3\frac{h}{R}\right) X_0, \quad Y_h = \left(1 - 3\frac{h}{R}\right) Y_0, \quad Z_h = \left(1 - 3\frac{h}{R}\right) Z_0,$$

woraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \delta X_h &= X_h - X_0 = -3\frac{h}{R} X_0 \\ \delta Y_h &= Y_h - Y_0 = -3\frac{h}{R} Y_0 \\ \delta Z_h &= Z_h - Z_0 = -3\frac{h}{R} Z_0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots 4)$$

Um die Änderungen δH_h, δT_h, δD_h, δJ_h der Horizontal- und Totalintensität, sowie der Declination und Inclination zu erhalten, hat man nur in den Formeln

$$H_h^2 = X_h^2 + Y_h^2, \quad T_h^2 = H_h^2 + Z_h^2, \quad \text{tg}\, D_h = \frac{Y_h}{X_h}, \quad \text{tg}\, J_h = \frac{Z_h}{H_h}.$$

die vorhin für X_h, Y_h, Z_h ermittelten Werthe einzusetzen, wodurch sich ergibt

$$\left.\begin{aligned} \delta H_h &= -3\frac{h}{R} H_0 \\ \delta T_h &= -3\frac{h}{R} T_0 \\ \delta D_h &= 0 \\ \delta J_h &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots 5)$$

Nach den Gleichungen 4) und 5) ist die Abnahme der Intensität proportional der Höhe h und dem Intensitätswerthe am Meeresniveau, die Richtung der erdmagnetischen Kraft erleidet aber mit der Höhe keine Änderung.

Da die Werthe X_0, Y_0, Z_0 Functionen der geographischen Coordinaten sind, so müssen die Änderungen δX_h, δY_h, δZ_h, δH_h, δT_h an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche ebenfalls verschiedene Werthe zeigen. Es muss aber nach 4) und 5)

$$\frac{\delta X_h}{X_0} = \frac{\delta Y_h}{Y_0} = \frac{\delta Z_h}{Z_0} = \frac{\delta H_h}{H_0} = \frac{\delta T_h}{T_0} = -3\frac{h}{R}$$

sein.

Um eine Vorstellung über die Grösse dieser Änderungen zu erhalten, sollen sie für den Höhenunterschied $h = 1000\,m$ und für

$$X_0 = H_0 = 2 \cdot 1,\quad Y_0 = 0 \cdot 33,\quad Z_0 = 4 \cdot 0,\quad T_0 = 4 \cdot 5,$$

welche Werthe dem Punkte $\varphi = 46° 40'$, $\lambda = 17° 6'$ zur Epoche 1890·0 entsprechen, berechnet werden. Nach Einsetzung dieser Werthe und $R = 6371000\,m$ wird

$$\left.\begin{aligned} \delta X_h &= -0 \cdot 0010 \text{ G. E.} \\ \delta Y_h &= -0 \cdot 00016 \\ \delta Z_h &= -0 \cdot 0019 \\ \delta H_h &= -0 \cdot 0010 \\ \delta T_h &= -0 \cdot 0021 \end{aligned}\right\} \quad \ldots 6)$$

Die Abnahme für 1000 m ist demnach eine sehr geringe und entspricht ungefähr der Genauigkeit, die sich bei Reisebeobachtungen erreichen lässt.[1]

Würden wir in der Lage sein, nachzuweisen, dass die Intensitätsabnahme die theoretisch ermittelten Beträge zeigt, so würden wir damit den Beweis erbringen, dass die magnetischen Verhältnisse, wie sie durch die Jahresmittel dargestellt werden, dem magnetischen Zustande der Erde allein zugeschrieben werden müssen, und dass sie durch irgendwelche andere magnetische Kräfte nicht beeinflusst werden. Ein derartiger

---

[1] Die für die Änderungen δX_h, δY_h, δZ_h, δH_h, δT_h abgeleiteten Werthe sind Minimalwerthe, da bei der Ableitung des Potentialwerthes V_h eine kleine Vernachlässigung gemacht worden ist, wodurch der Potentialwerth V_h und mit ihm auch der Werth von X_h, Y_h, Z_h zu gross, daher die Änderung δX_h, δY_h, δZ_h zu klein erhalten werden musste. Um einen Maximalwerth der Änderungen zu erhalten, soll angenommen werden, dass in dem Ausdrucke für V_h

$$V_h = \frac{R^2}{(R+h)^2} R \left[P' + P'' + P''' + \ldots - \frac{h}{R}(P'' + 2P''' + 3P'''' + \ldots)\right]$$

die in der runden Klammer stehende Summe gleich ist der Summe $P' + P'' + P''' + \ldots$, was gewiss sehr übertrieben ist, da die Werthe P', P'', P'''..

Nachweis wäre daher für die Theorie des Erdmagnetismus von grösster Wichtigkeit.

Angeregt durch eine kleine Untersuchung des Herrn Obersten R. v. Sterneck über die Abnahme der Schwere mit der Höhe, welche er in einer jüngst erschienenen Abhandlung[1] veröffentlicht hat, habe ich im Nachfolgenden den Versuch unternommen, aus den Daten der für 1890·0 in Österreich-Ungarn ausgeführten magnetischen Landesaufnahme die Änderung der erdmagnetischen Elemente mit der Höhe in ähnlicher Weise zu berechnen, obwohl ich überzeugt war, dass die Anzahl der Beobachtungsstationen viel zu gering ist, um vollkommen verlässliche Resultate ableiten zu können. Die zu dieser Rechnung verwendeten Daten sind die Störungen, welche ich für die einzelnen Stationen berechnet und in den Tabellen

---

immer kleiner werden und bei der Summe in der runden Klammer gerade der erste, massgebende Theil P' fehlt. Man erhält dann

$$V_h = \frac{R^2}{(R+h)^2} \,.\, R(P'+P''+P'''+\ldots)\left(1-\frac{h}{R}\right)$$

oder

$$V_h = \frac{R^3}{(R+h)^3} V_0.$$

Mit diesem Werthe von V_h ergeben sich für die Änderungen folgende Werthe:

$$\frac{\delta X_h}{X_0} = \frac{\delta Y_h}{Y_0} = \frac{\delta Z_h}{Z_0} = \frac{\delta H_h}{H_0} = \frac{\delta T_h}{T_0} = -4\frac{h}{R},$$

woraus für die angenommenen Werthe von X_0, Y_0, Z_0, H_0, T_0 resultirt:

$$\left.\begin{aligned} \delta X_h &= -0\cdot013 \quad \text{G. E.} \\ \delta Y_h &= -0\cdot00021 \\ \delta Z_h &= -0\cdot0025 \\ \delta H_h &= -0\cdot0013 \\ \delta T_h &= -0\cdot0028. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 6a)$$

Obwohl sich diese Werthe nur wenig von jenen unter 6) stehenden unterscheiden, so sind sie, wie oben betont wurde, viel zu gross; es ist sicher, dass die oben angeführten der Wahrheit viel näher kommen.

[1] Relative Schwerebestimmungen, ausgeführt in den Jahren 1895 und 1896. Mittheilungen des k. u. k. militärgeogr. Institutes, Bd. XVII, S. 8.

XVI und XVII meiner Abhandlung: Die Vertheilung der erdmagnetischen Kraft in Österreich-Ungarn zur Epoche 1890·0, II. Theil, Denkschriften der kais. Akad. der Wiss., Bd. 67, mitgetheilt habe.

Wird der an einer beliebigen Station beobachtete Werth irgend eines erdmagnetischen Elementes mit E, der normale (ungestörte) aber mit e bezeichnet, so ist nach der in der citirten Abhandlung gegebenen Definition $\Delta E = E - e$ die Grösse der Störung. Es war mir selbstverständlich schon bei der Berechnung der einzelnen Werthe von ΔE klar, dass die beobachteten Werthe E nicht allein durch störende Kräfte und durch Beobachtungsfehler beeinflusst werden, sondern dass sie auch von der Höhe des Beobachtungspunktes abhängen müssen, so dass man eigentlich alle erst auf dasselbe Niveau, dem die normalen Werthe e entsprechen, reduciren sollte, um sie von dem Einflusse der Höhe zu befreien. Eine solche Reduction war jedoch aus dem einfachen Grunde unmöglich, da mir die wirkliche Änderung mit der Höhe unbekannt war, und die theoretischen Werthe derselben, deren Richtigkeit nicht erwiesen war, unberücksichtigt bleiben mussten.

Die in meiner citirten Abhandlung angeführten Normalwerthe e beziehen sich auf ein gewisses mittleres Niveau m aller Stationen; bezeichnet man sie mit e_m und die auf dasselbe Niveau reducirten Werthe von E_h mit E_m, ferner mit δe_{h-m} die dem Höhenunterschiede $h-m$ entsprechende Änderung und mit f den Beobachtungsfehler, so ist

$$E_h = E_m + \delta e_{h-m} + f,$$

und da

$$E_h - e_m = \Delta E$$

als Störung bezeichnet wurde, so ist

$$E_m - e_m + \delta e_{h-m} + f = \Delta E.$$

Nun ist

$$E_m - e_m = \Delta E_m$$

die wahre Störung, so dass

$$\delta e_{h-m} + \Delta E_m + f = \Delta E \qquad \ldots 7)$$

wird.

Die Grösse δe_{h-m} ist eine Function der Höhe, und zwar kann gesetzt werden [entsprechend 4) und 5)]

$$\delta e_{h-m} = f(h) = b(h-m) = a+bh. \qquad \ldots 8)$$

Nach dieser Gleichung könnte man die Constanten a und b leicht berechnen, wenn von einigen Höhenintervallen die Werthe δe_{h-m} bekannt wären. Das ist leider nicht der Fall. Die Werthe δe_{h-m} lassen sich aber aus ΔE finden, wenn man die Stationen mit wenig verschiedenen Höhen zu einer Gruppe vereinigt und Mittelwerthe bildet, wodurch sich bei hinreichend grosser Zahl der Stationen die Störungen ΔE_m und die Beobachtungsfehler f aufheben und ein genäherter Werth von δe_{h-m} erhalten wird. Seien die zu den Gruppen gehörigen Werthe

$$\begin{array}{llll}
\Delta E' & \Delta E'' & \Delta E''' & \ldots \\
\Delta E'_m & \Delta E''_m & \Delta E'''_m & \ldots \\
f' & f'' & f''' & \ldots \\
h' & h'' & h''' & \ldots \\
\delta e_{h'-m} & \delta e_{h''-m} & \delta e_{h'''-m} & \ldots,
\end{array}$$

so wird durch Mittelbildung, entsprechend 7) und 8), für jede Gruppe erhalten

$$\frac{\Sigma \delta e_{h-m}}{r} + \frac{\Sigma \Delta E_m}{r} + \frac{\Sigma f}{r} = \frac{\Sigma \Delta E}{r} = a + b\frac{\Sigma h}{r}. \qquad \ldots 8a)$$

Ist die Zahl r der zur Mittelbildung verwendeten Stationen hinreichend gross, so wird $\frac{\Sigma \Delta E}{r} + \frac{\Sigma f}{r}$ nahezu Null werden. Bezeichnet man den etwa übrig bleibenden kleinen Werth dieser Summe mit σ, so nehmen die Gleichungen 8a) die Form an

$$\left.\begin{array}{l}
\delta e_{h_1-m} + \sigma_1 = a + bh_1 = \dfrac{\Sigma \Delta E'}{r_1} \\
\delta e_{h_2-m} + \sigma_2 = a + bh_2 = \dfrac{\Sigma \Delta E''}{r_2} \\
\delta e_{h_3-m} + \sigma_3 = a + bh_3 = \dfrac{\Sigma \Delta E'''}{r_3} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \qquad \ldots 9)$$

aus welchen sich die Constanten a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen lassen. Die Constante a ist nach 8) nichts anderes als die Änderung δe_m des betreffenden Elementes vom Meeresniveau bis zur Höhe m, so dass

$$\delta e_h = \delta e_{h-m} - a = bh, \qquad \ldots 10)$$

wobei mit Rücksicht auf 4) und 5)

$$b = -3 \frac{e_0}{R}$$

sein müsste, wenn die magnetischen Kräfte, deren Wirkungen wir beobachten, ihren Sitz nur in der Erde hätten.

Von den 210 Stationen, deren Daten in meiner vorhin citirten Abhandlung veröffentlicht worden sind, habe ich bei der folgenden Untersuchung die Stationen Ödenburg, Schottwien, Chiesch und Rom nicht benützen können, weil an den ersten drei die Declination nicht beobachtet wurde, während ich für die zwei letzten die Höhen nicht erlangen konnte. Die übrig bleibenden 205 Stationen wurden nach der Höhe in drei Gruppen geordnet, wobei in die erste Gruppe alle Stationen bis inclusive 200 m Höhe, in die zweite jene mit Höhen von 201—400 m und in die dritte solche, deren Höhe über 400 m betrug, einbezogen wurden. Die erste Gruppe umfasst 77, die zweite 72 und die dritte 56 Stationen. In der letzten Gruppe sind die Höhenunterschiede recht bedeutend, denn sie schwanken zwischen 400 und 1300 m (St. Anton am Arlberg). Ich konnte aber eine weitere Trennung dieser Gruppe aus dem Grunde nicht vornehmen, weil dann die Zahl der Stationen in den Theilgruppen viel zu klein gewesen wäre, um voraussetzen zu können, dass sich bei der Mittelbildung die Störungen und die Beobachtungsfehler aufheben werden.

Die nachfolgende Tabelle enthält die Stationen mit den zugehörigen Höhen, die ich zum Theil aus dem astronomischen Kalender der Wiener Sternwarte entnommen habe, zum Theil aber der Güte der Herren Oberst R. v. Sterneck und Oberst H. Hartel verdanke. Die Stationen sind in jeder Gruppe alphabetisch angeordnet. Die angegebenen Höhen beziehen sich zwar nicht genau auf den Beobachtungspunkt,

ihr Mittelwerth dürfte aber der wahren mittleren Höhe sehr nahe kommen, da sich bei der Mittelbildung die Fehler ziemlich aufheben werden.

Gruppe I.

	Station	Höhe		Station	Höhe
1	Agram	135 *m*	36	Lesina	1 *m*
2	Ancona	124	37	Lissa	8
3	Antivari	2	38	Losoncz	191
4	Banjaluka	163	39	Lundenburg	159
5	Bjelina	94	40	Lussin piccolo	41
6	Bodenbach	131	41	Makarska	14
7	Bosnisch-Brod	96	42	Malinska	2
8	Bosnisch-Gradiska	95	43	Manfredonia	2
9	Bosnisch-Novi	119	44	Martinsberg	119
10	Bosnisch-Šamac	86	45	Medolino	3
11	Brčka	96	46	Meleda	2
12	Brindisi	2	47	Molfetta	2
13	Brod	95	48	Mostar	59
14	Budapest	114	49	Nisko	164
15	Castelnuovo	55	50	Orsova	54
16	Corfu	2	51	Parenzo	6
17	Curzola	7	52	Pescara	2
18	Debreczin	121	53	Pirano	36
19	Dignano	135	54	Pola	10
20	Doboj	146	55	Prag	187
21	Durazzo	2	56	Rabaz	10
22	Erlau	170	57	Riva	70
23	Esseg	94	58	Rovigno	36
24	Fiume	3	59	Sebenico	34
25	Fort Opus	2	60	Semlin	79
26	Fünfkirchen	160	61	Spalato	9
27	Göding	162	62	Stagno grande	21
28	Görz	86	63	Szegedin	84
29	Gradiska	38	64	Sziszek	99
30	Gravosa	2	65	Szolnok	95
31	Grosswardein	126	66	Teodo	2
32	Ó-Gyalla	115	67	Temesvár	91
33	Kalocsa	97	68	Trappano	2
34	Karlstadt	112	69	Trient	195
35	Lagosta	2	70	Triest	54

	Station	Höhe		Station	Höhe
71	Ungvár	137 *m*	75	Weisskirchen	87 *m*
72	Valona	2	76	Zara	8
73	Venedig	3	77	Zwornik	170
74	Višegrad	108			

Gruppe II.

	Station	Höhe		Station	Höhe
1	Altheim	400 *m*	31	Leipa	263 *m*
2	Bihač	227	32	Leitomischl	347
3	Bozen	265	33	Lemberg	320
4	Bregenz	394	34	Linz	264
5	Brody	234	35	Marburg	274
6	Brünn	227	36	Maros-Vásárhely	316
7	Budweis	384	37	Melk	210
8	Chlumec	216	38	Meran	324
9	Cilli	241	39	Náchod	351
10	Čáslau	263	40	Nagybánya	228
11	Czernowitz	246	41	Neustadt (Wiener-)	280
12	Czortków	226	42	Olmütz	221
13	Dolnji-Tuzla	232	43	St. Paul	400
14	Dolina	398	44	Pilsen	311
15	Gleichenberg	317	45	Pisek	378
16	Graz	365	46	Pisino	262
17	Hérény	213	47	Przemysl	241
18	Horn	309	48	Ravenna	327
19	Jajce	341	49	Rawa ruska	256
20	Karánsebes	211	50	Reichenau	321
21	Karlsbad	399	51	Reichenberg	375
22	Karlsburg	220	52	Rzeszów	215
23	Kaschau	211	53	Rudolfswerth	202
24	Klausenburg	349	54	Sambor	309
25	Kolomea	284	55	Sandec	321
26	Komotau	330	56	Sanok	314
27	Krakau	212	57	Schärding	313
28	Kremsmünster	343	58	Seelau	379
29	Krosno	278	59	Stanislau	256
30	Laibach	287	60	Stryj	302

	Station	Höhe		Station	Höhe
61	Suczawa	320 *m*	67	Troppau	260 *m*
62	Tarnopol	318	68	Veszprim	260
63	Tarnów	225	69	Wieliczka	254
64	Teplitz	230	70	Wien	202
65	Teschen	308	71	Zenica	309
66	Trebinje	273	72	Znaim	289

Gruppe III.

	Station	Höhe		Station	Höhe
1	Adelsberg	548 *m*	29	Késmárk	626 *m*
2	Admont	641	30	Klagenfurt	446
3	Aflenz	765	31	Klattau	409
4	St. Anton	1302	32	Ključ	521
5	Avtovac	1083	33	St. Lambrecht	888
6	Bleiberg	892	34	Landeck	816
7	Bludenz	581	35	Lienz	673
8	Bruck a./M.	487	36	Liezen	659
9	Bruneck	835	37	Livno	726
10	Eisenerz	745	38	Mals	1050
11	Foča	410	39	Szt. Miklós	576
12	Fogaras	437	40	Neuhaus	478
13	Franzensbad	441	41	Petrovac	670
14	Gastein (Hof-)	869	42	Plan	510
15	Glamoč	1031	43	Přibram	509
16	Gmünd	732	44	Radstadt	856
17	Golling	476	45	Rattenberg	513
18	Gratzen	450	46	Rogatica	541
19	Hermannstadt	430	47	Salzburg	412
20	Hohenelbe	484	48	Sarajevo	537
21	Jablanica	417	49	Schässburg	478
22	Iglau	516	50	Schemnitz	593
23	Imst	828	51	Senftenberg	421
24	Innsbruck	574	52	Skole	437
25	Ischl	468	53	Strasswalchen	541
26	Jakobeny	838	54	Travnik	504
27	St. Johann	660	55	Vlašenica	668
28	Kalinovik	1137	56	Vöcklabruck	433

Die folgenden Gleichungen 11) enthalten die den Gleichungen 9) entsprechenden Daten. Ich muss gestehen, dass mich die für die drei Höhenunterschiede erhaltenen Werthe der Änderungen δX_{h-m}, δY_{h-m}, δZ_{h-m} etc. sehr überrascht haben, denn ich habe im Vorhinein wenig Hoffnung gehabt, dass die, wie ich nach der theoretischen Untersuchung glauben musste, sehr geringen Änderungen bei einer verhältnissmässig so geringen Anzahl von Stationen auf dem eingeschlagenen Wege ermittelt werden können.

	δX_{h-m}	δY_{h-m}	δZ_{h-m}	δH_{h-m}	δT_{h-m}	δD_{h-m}	δJ_{h-m}	
$a+71\,b=$	15·5	—9·7	15·8	13·6	21·3	—1'78	—0'36	…11)
$a+288\,b=$	—3·3	—2·3	— 0·3	—2·0	2·4	—0·24	0·32	
$a+635\,b=$	—5·5	7·1	—20·4	—4·5	—17·9	1·12	—0·61	

Hiebei sind die Änderungen δX_{h-m}, δY_{h-m}, δZ_{h-m} etc. in Einheiten der vierten Decimale des Gauss'schen Maasses ausgedrückt. Nach der Methode der kleinsten Quadrate erhält man für a und b ebenfalls in Einheiten der vierten Decimale nachfolgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\delta X_{h-m} &= 13·6-0·0344\,h \\
\delta Y_{h-m} &= -11·4+0·0295\,h \\
\delta Z_{h-m} &= 19·4-0·0636\,h \\
\delta H_{h-m} &= 11·8-0·0290\,h \\
\delta T_{h-m} &= 24·6-0·0685\,h \\
\delta D_{h-m} &= -1'97+0'00503\,h \\
\delta J_{h-m} &= -0·01-0'00065\,h
\end{aligned}\right\}\ldots 12)
\qquad
\left.\begin{aligned}
\delta X_{h} &= -0·0344\,h \\
\delta Y_{h} &= 0·0295\,h \\
\delta Z_{h} &= -0·0636\,h \\
\delta H_{h} &= -0·0290\,h \\
\delta T_{h} &= -0·0685\,h \\
\delta D_{h} &= 0'00503\,h \\
\delta J_{h} &= -0'00065\,h
\end{aligned}\right\}\ldots 13)$$

Gleichungen 12) entsprechen jenen unter 8), Gleichungen 13) aber den unter 10) stehenden. Rechnet man nach 12) für die Höhenstufen von 71 m, 288 m, 635 m die Änderungen und vergleicht sie mit den aus den Beobachtungen abgeleiteten, so findet man

δX_{h-m}			δY_{h-m}			δZ_{h-m}		
B	R	$B-R$	B	R	$B-R$	B	R	$B-R$
15·5	11·2	4·3	—9·7	—9·3	—0·4	15·8	14·9	0·9
—3·3	3·7	—7·0	—2·3	—2·9	0·6	— 0·3	1·1	—1·4
—5·5	—8·2	2·7	7·1	7·3	—0·2	—20·4	—21·0	0·4

δH_{h-m}			δT_{h-m}			δD_{h-m}		
B	*R*	*B—R*	*B*	*R*	*B—R*	*B*	*R*	*B—R*
13·6	9·7	3·9	21·3	19·7	1·6	−1'78	−1'61	−0'17
−2·0	3·4	−5·4	2·4	4·9	−2·5	−0·24	−0·52	0·28
−4·5	−6·6	2·1	−17·9	−18·9	1·0	1·12	1·22	−0·10

δJ_{h-m}		
B	*R*	*B—R*
−0'36	−0'06	−0'30
0·32	−0·20	0·52
−0·61	−0·42	−0·19

Mit Ausnahme der Inclination, bei welcher sich eine sehr langsame Abnahme mit der Höhe ergibt, zeigen alle übrigen Elemente zwischen Beobachtung und Rechnung eine befriedigende Übereinstimmung. Hätte ich eine grössere Anzahl von Stationen verwenden und mehr als drei Höhenstufen bilden können, so wäre das Resultat gewiss ein noch viel günstigeres gewesen. Die unter 13) stehenden Änderungen der einzelnen Elemente sind höchst interessant, da wir vor Allem ersehen können, dass die Westcomponente mit der Höhe wächst und dass dementsprechend auch die Declination in der Höhe grösser wird; die übrigen Kraftcomponenten, sowie die Totalintensität nehmen zwar mit der Höhe ab, wie es die Theorie verlangt, aber der Betrag der wirklichen Abnahme ist mehr als dreimal so gross als der theoretisch berechnete. Dies ist ein für die Theorie des Erdmagnetismus höchst wichtiges Ergebniss, denn es liefert den Beweis, dass die magnetischen Verhältnisse durch die Annahme einer Magnetisirung der Erde allein, im Sinne der Gauss'schen Theorie, nicht erklärt werden können, welche Möglichkeit bekanntlich schon Gauss ins Auge gefasst hat.

Es müssen also neben dem eigentlichen Erdmagnetismus, der durch Magnetisirung der kleinsten Theile des Erdkörpers hervorgebracht gedacht werden kann, noch andere magnetische Kräfte, deren Ursache auch elektrische Ströme sein können, vorhanden sein, welche die Wirkungen des ersteren modificiren. Es entsteht nun die wichtige Frage, wo der Sitz dieser Kräfte zu suchen sei. Eine einfache Überlegung lehrt, dass ihre Quelle nicht im Erdkörper gesucht werden kann, denn wäre

dies der Fall, dann könnte man sich stets eine magnetische Vertheilung im Erdkörper denken, welche nach aussen hin genau dieselben Wirkungen hervorbringt, wie der Magnetismus der Erde und die fraglichen magnetischen Kräfte zusammen. dann müssen aber alle Kräfte X, Y, Z, H, T nach oben abnehmen, und zwar in jenem Maasse, wie es früher theoretisch abgeleitet worden ist. Nun sieht man aber aus dem Vorhergehenden, dass die Westcomponente mit der Höhe wächst und dass die Abnahme der übrigen Kräfte viel grösser ist, als sie theoretisch sein sollte; es muss daher geschlossen werden, dass der Sitz der hier besprochenen Kräfte nur ausserhalb des Erdkörpers liegen kann. Dass diese Kräfte ein Potential besitzen müssen. dafür hat unsere neuere Aufnahme einen schönen Beweis geliefert.[1]

Man gelangt auch bald zur Überzeugung, dass die drei Componenten dieser Kräfte X'', Y'', Z'' nach Süd, West und nach oben gerichtet sein müssen.

Es erscheint mir höchst wahrscheinlich, dass die ausserhalb der Erde liegenden Kräfte dieselben seien, welche durch ihre Veränderungen die von uns beobachteten Variationen hervorbringen. Wäre dies der Fall, so müssten jeder Änderung dieser Kräfte um so grössere Variationen entsprechen, je näher wir dem Sitze derselben kommen, oder mit anderen Worten, die Amplituden müssten mit der Höhe eine Änderung zeigen. Es ergibt sich hieraus, wie wichtig es wäre, magnetische Observatorien in grösseren Höhen zu errichten. Ich habe einen diesbezüglichen Vorschlag bereits vor einigen Jahren in einer früheren Abhandlung gemacht, und zwar habe ich speciell die Errichtung eines magnetischen Observatoriums auf dem Sonnblick empfohlen, ohne dass es bisher gelungen wäre, diese Idee zu realisiren. Vielleicht werden die hier gemachten Auseinandersetzungen ein grösseres Interesse an der Sache rege machen, und jene Kreise, welche an der wissenschaftlichen Forschung ein Interesse haben, bewegen, sich mit dieser Frage näher zu beschäftigen. Ich will nicht verkennen, dass die Errichtung eines magnetischen Observatoriums in einer grösseren Höhe mit

[1] Liznar, Die magnetische Aufnahme Österreich-Ungarns und das erdmagnetische Potential. Met. Zeitschrift, Maiheft 1898.

sehr bedeutenden Schwierigkeiten und Kosten verbunden ist, allein ich glaube, dass sich die Schwierigkeiten bei einigermassen gutem Willen beheben lassen würden, und was die Kosten anbelangt, so dürfen sie bei einer so wichtigen Frage nicht das entscheidende Hinderniss bilden, um die Lösung derselben ganz unmöglich zu machen.

Sollte sich meine Vermuthung nicht bestätigen, sondern würden in der Höhe gleich grosse Variationen auftreten, so würde dies beweisen, dass dieselben durch Veränderungen der beiden magnetischen Systeme zu Stande kommen. Aber auch dann hätten die in der Höhe angestellten Variationsbeobachtungen eine sehr grosse Bedeutung, da sie uns unter allen Umständen über die Ursachen der Variationen Auskunft geben werden.

Die hier ermittelten Resultate über die Änderung der erdmagnetischen Kraft mit der Höhe werden gewiss bald eine Bestätigung durch die Daten anderer Gebiete erhalten, denn die Möglichkeit, diesbezügliche Untersuchungen anzustellen, ist durch die in anderen Ländern ausgeführten Detailaufnahmen gegeben.

Die nicht unbedeutenden Werthe der Änderungen der erdmagnetischen Elemente, die hier abgeleitet worden sind, lassen erkennen, dass die von mir gegebene Darstellung der erdmagnetischen Verhältnisse Österreich-Ungarns etwas anders ausgefallen wäre, wenn ich die isomagnetischen Linien für das Meeresniveau gezeichnet hätte. Es würden die Isodynamen der Horizontalintensität und der Nordcomponente um ein kleines Stück von Süd nach Nord, die Isodynamen der Vertical- und Totalintensität dagegen von Nord nach Süd gerückt sein, während die Isodynamen der Westcomponente und die Isogonen eine kleine Verschiebung gegen Westen gezeigt hätten.

Das Niveau, welchem die von mir gezeichneten isomagnetischen Linien entsprechen, ist ungefähr die mittlere Höhe aller Beobachtungsstationen (300 *m*). Man kann diese Höhe m aus den Constanten a, b der Gleichungen 12) ermitteln, denn es ist

$$a = bm, \text{ folglich } m = \frac{a}{b}.$$

Man erhält die Werthe

$$m_1 = 395\,m,\ m_2 = 386\,m,\ m_3 = 305\,m,\ m_4 = 407\,m,\ m_5 = 359\,m,$$

also im Mittel $m = 370\,m$. Die auf diese Weise bestimmten Werthe von m zeigen unter einander ziemlich bedeutende Unterschiede, weil die Constanten a und b nicht vollkommen genau sind.

Die Constanten b der Gleichungen 13) gelten ihrer Ableitung nach bloss für die dem Punkte $\varphi = 46°7$, $\lambda = 17°1$ zukommenden Werthe X_m, Y_m, Z_m, H_m, T_m, welche für das Niveau m abgeleitet worden sind, und zwar

$$X_m = 2\cdot1138,\quad Y_m = 0\cdot3314,\quad Z_m = 4\cdot0139,\quad H_m = 2\cdot1394,$$
$$T_m = 4\cdot5482,\ D_m = 8°54'7,\ J_m = 61°56'4.$$

Um die Werthe von b für beliebige Punkte φ, λ zu erhalten, hat man nur zu berücksichtigen, dass nach 4) und 5) der Quotient $\frac{\delta e_h}{e_0}$ gleich ist einer Constanten multiplicirt mit h. Bildet man diese Quotienten für die Gleichungen 13), so findet man

$$\frac{\delta X_h}{X_m} = -0\cdot0163\,h = c_x h \qquad \frac{\delta H_h}{H_m} = -0\cdot0136\,h \doteq c_H h$$

$$\frac{\delta Y_h}{Y_m} = +0\cdot0890\,h = c_y h \qquad \frac{\delta T_h}{T_m} = -0\cdot0150\,h = c_T h$$

$$\frac{\delta Z_h}{Z_m} = -0\cdot0158\,h = c_z h.$$

Wie man sieht, ergeben sich auch hier die Factoren c_x, c_z, c_H, c_T nur wenig verschieden, so dass man bei einer genaueren Bestimmung von b ihre vollständige Gleichheit erwarten dürfte. Setzt man daher

$$\frac{c_x + c_z + c_H + c_T}{4} = c,$$

so folgt für beliebige Werthe X_0, Z_0, H_0, T_0

$$\frac{\delta X_h}{X_0} = \frac{\delta Z_h}{Z_0} = \frac{\delta H_h}{H_0} = \frac{\delta T_h}{T_0} = ch, \quad \frac{\delta Y_h}{Y_0} = c_y h.$$

Statt der für das Meeresniveau geltenden Werthe X_0, Y_0, Z_0, H_0, T_0 können ohneweiters auch die Werthe X_h, Y_h, Z_h, H_h, T_h eingesetzt werden, so dass man zur Reduction auf das Meeresniveau folgende Formeln erhält:

$$\left.\begin{aligned}
X_0 &= X_h + 0\cdot00000152\, X_h h = (1 + 0\cdot00000152\, h) X_h \\
Y_0 &= Y_h - 0\cdot00000890\, Y_h h = (1 - 0\cdot00000890\, h) Y_h \\
Z_0 &= Z_h + 0\cdot00000152\, Z_h h = (1 + 0\cdot00000152\, h) Z_h \\
H_0 &= H_h + 0\cdot00000152\, H_h h = (1 + 0\cdot00000152\, h) H_h \\
T_0 &= T_h + 0\cdot00000152\, T_h h = (1 + 0\cdot00000152\, h) T_h \\
D_0 &= D_h - 0'01791 \sin 2 D_h . h \\
J_0 &= J_h
\end{aligned}\right\} \ldots 16)$$

Die für die Reduction der Declination und Inclination angeführten Formeln wurden durch Differentirung der Ausdrücke

$$\operatorname{tg} D = \frac{Y}{X}, \qquad \operatorname{tg} J = \frac{Z}{H}$$

erhalten, denn es ist bekanntlich

$$\delta D = \frac{X\delta Y - Y\delta X}{X^2} \cos^2 D, \quad \delta J = \frac{H\delta Z - Z\delta H}{H^2} \cos^2 J.$$

Nun ist nach dem Früheren

$$\delta X = cXh, \quad \delta Y = cYh, \quad \delta Z = cZh, \quad \delta H = cHh.$$

Nach Einsetzung dieser Werthe erhält man daher

$$\left.\begin{aligned}
&\delta D_h = \frac{c_y - c}{2} \sin 2Dh \text{ oder in Minuten } \delta D_h = \frac{c_y - c}{2} \frac{\sin 2D}{\sin 1'} \cdot h \\
&\delta J_h = 0.
\end{aligned}\right\} \ldots 17)$$

Dass hier δJ_h Null wird, kommt daher, dass ich für den Factor c einen constanten Werth angenommen habe. Nach 13)

hat sich zwar aus den Störungen der Inclination eine kleine Abnahme ergeben, dieses Resultat ist aber sehr unsicher, da die zu seiner Ableitung aus den Störungen erhaltenen Grössen sehr klein sind.

Als Beispiel soll nach den vorstehenden Formeln die Reduction der in St. Anton am Arlberg in der Höhe $h = 1300\,m$ beobachteten und der für diesen Punkt für das Niveau $m = 370\,m$ berechneten Normalwerthe angeführt werden, um daraus den wahren Betrag der Störungen ableiten und sie mit den von mir ohne Reduction auf dasselbe Niveau ermittelten Störungsgrössen vergleichen zu können.

Beobachtet	Reducirt auf das Meeresniveau		Normalwerthe	ΔE_0	ΔE_h
$H_h = 2 \cdot 0686$	2·0723	2·0695	2·0684	28	2
$D_h = 11°59'4$	11°49'9	11°59'2	12° 1'9	—9'3	—2'5
$J_h = 63°\ 4'0$	63° 4'0	63° 3'4	63° 3'4	0'6	0'6
$X_h = 2 \cdot 0235$	2·0271	2·0241	2·0230	30	5
$Y_h = 0 \cdot 4297$	0·4247	0·4298	0·4312	—51	—15
$Z_h = 4 \cdot 0716$	4·0790	4·0717	4·0694	73	22
$T_h = 4 \cdot 5669$	4·5751	4·5675	4·5649	76	20

In der ersten Columne stehen die in der Höhe $h = 1300\,m$ beobachteten Daten, welche nach der Reduction auf das Meeresniveau die Werthe der zweiten Columne lieferten. Die Zahlen der dritten Columne sind durch Reduction aus den Daten der vierten Columne entstanden. Unter $\Delta E_0 = E_0 - e_0$ sind die wahren und unter $\Delta E_h = E_h - e_m$ die von mir in meiner citirten Abhandlung veröffentlichten Störungen, welche der Differenz der ersten und vierten Columne entsprechen, angeführt. Aus der vorstehenden Zusammenstellung kann man ersehen, dass die wahren Störungen bei allen Elementen, mit Ausnahme der Inclination, bedeutend grösser sind als die unter ΔE_h stehenden. Bei geringeren Höhen, wie sie dem grösseren Theil der Beobachtungsstationen zukommen, wird der Unterschied natürlich viel kleiner sein.

Um ein richtiges Bild der Störungen, die ja ohnehin mit den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern behaftet sind, zu

erhalten, bleibt nichts übrig, als sämmtliche Daten der magnetischen Aufnahme auf dasselbe Niveau zu reduciren. Als solches könnte man auch das mittlere Niveau, dessen Höhe $m = 370\,m$ beträgt, wählen, in welchem Falle man nur die in verschiedenen Höhen h gemessenen Daten auf dieses zu reduciren hätte. Will man aber die isomagnetischen Linien für das Meeresniveau construiren, und das ist nothwendig, wenn die magnetischen Aufnahmen verschiedener Gebiete der Erde streng vergleichbar sein sollen, so müssen auch die Normalwerthe, nach welchen ich die Curven gezeichnet habe, auf das Meeresniveau reducirt werden. Ich behalte mir vor, diese ziemlich umständliche Arbeit später einmal auszuführen. Was ich hier über die Nothwendigkeit der Reduction in Bezug auf unsere Aufnahme vorgebracht habe, gilt selbstverständlich für alle bisher auch in anderen Gebieten ausgeführten, bei welchen Stationen von grösserer Höhe vorkommen. Diese Reduction wird sich in jenen Gebieten, von denen magnetische Detailaufnahmen vorliegen, mit grosser Sicherheit ausführen lassen, da bei einer grossen Zahl von Stationen die Änderungen mit der Höhe viel genauer ermittelt werden können.

Aus den vorstehenden Ausführungen konnte man ersehen, dass die magnetischen Detailaufnahmen verschiedener Gebiete nicht nur zu dem Zwecke vorgenommen werden müssen, um die wirkliche Vertheilung der erdmagnetischen Kraft auf denselben kennen zu lernen, sondern dass sie auch sehr wichtige Daten für die Theorie des Erdmagnetismus liefern. Vor Allem ist noch der Nachweis zu führen, dass die Grösse c in den Gleichungen

$$\frac{\delta X_h}{X_0} = \frac{\delta Z_h}{Z_0} = \frac{\delta H_h}{H_0} = \frac{\delta T_h}{T_0} = ch$$

nicht nur auf einem und demselben Gebiete, sondern auch für alle eine constante Grösse ist, wie es mir entsprechend den Gleichungen 4) und 5) als sehr wahrscheinlich erscheint. Ebenso wichtig ist die Entscheidung, ob in $\frac{\delta Y_h}{Y_0} = c_y h$ für alle Gebiete c_y denselben Werth besitzt. Dass dem so sein könnte, ist vorläufig eine blosse Vermuthung, welche hoffentlich durch

ähnliche Untersuchungen für andere Gebiete bald zur Gewissheit werden wird.

Ich hätte die vorliegende Untersuchung auch auf die Daten der ersten Aufnahme ausdehnen können, allein da ich mir durch die frühere Bearbeitung derselben die Überzeugung verschafft habe, dass sie mit sehr bedeutenden Unsicherheiten, die bei der Intensität sogar systematischer Natur sein dürften, behaftet sind, so hätte ich im günstigsten Falle höchstens eine ziemlich rohe Bestätigung der aus den Daten der neueren Aufnahme abgeleiteten Resultate erhalten können. Aus diesem Grunde habe ich die Arbeit nicht ausgeführt, da ja ohnehin die Möglichkeit vorliegt, die Prüfung der Resultate an den verlässlicheren Daten von anderen Gebieten vornehmen zu können.

Über Tetraëder in schiefperspectiver Lage

von

Gustav Kohn in Wien.

1. Zwei Tetraëder bezeichnen wir als schiefperspectiv, wenn das eine in das andere durch eine geschaarte Collineation des Raumes übergeführt werden kann.

Da sowohl die Verbindungslinien von je zwei entsprechenden Punkten als auch die Schnittlinien von je zwei entsprechenden Ebenen die beiden Axen der geschaarten Collineation treffen, so werden bei zwei schiefperspectiven Tetraedern die vier Verbindungslinien entsprechender Ecken und die vier Schnittlinien entsprechender Ebenen zwei gemeinschaftliche Transversalen zulassen.

Haben umgekehrt zwei Tetraëder, das eine T_1 mit den Ecken $A_1 B_1 C_1 D_1$ und den Ebenen $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, das zweite T_2 mit den Ecken $A_2 B_2 C_2 D_2$ und den Ebenen $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ eine solche Lage gegen einander, dass die Verbindungslinien homologer Ecken $a \equiv A_1 A_2$, $b \equiv B_1 B_2$, $c \equiv C_1 C_2$, $d \equiv D_1 D_2$ und die Schnittlinien homologer Ebenen $a' \equiv \alpha_1\alpha_2$, $b' \equiv \beta_1\beta_2$, $c' \equiv \gamma_1\gamma_2$, $d' \equiv \delta_1\delta_2$ von denselben zwei windschiefen Geraden t, t' getroffen werden, so wollen wir zeigen, dass die beiden Tetraeder in schiefperspectiver Lage sich befinden.

Wir bestimmen eine geschaarte Collineation des Raumes durch Annahme der Geraden t und t' als Axen und durch die Festsetzung, dass dem Punkte A_1 der mit ihm auf derselben Transversale a zu den Axen gelegene Punkt A_2 entspricht, und zeigen, dass diese Collineation dem Tetraëder T_1 das Tetraëder T_2 als entsprechend zuweist. Zunächst sind $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$, $\delta_1\delta_2$ drei Paare entsprechender Ebenen, denn die erste

Ebene jedes Paares geht durch den Punkt A_1, die zweite durch den entsprechenden Punkt A_2 hindurch und beide schneiden sich der gemachten Voraussetzung nach in einer Transversale zu den Collineationsaxen $t\,t'$. Ferner sind B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 drei Paare entsprechender Punkte. Denn es muss z. B. der dem Punkte B_1 entsprechende Punkt jetzt nicht nur auf der von B_1 aus an t, t' gelegten Transversale $b \equiv B_1B_2$ liegen, sondern auch auf den Ebenen $\gamma_2 \equiv A_2B_2D_2$ und $\delta_2 \equiv A_2B_2C_2$, welche wir als den Ebenen $\gamma_1 \equiv A_1B_1D_1$ und $\delta_1 \equiv A_1B_1C_1$ entsprechend erkannt haben.

Wir finden:

Das Kriterium der schiefperspectiven Lage zweier Tetraëder ist die Existenz von zwei windschiefen Geraden, welche sowohl die vier Verbindungslinien entsprechender Ecken als auch die vier Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden Tetraëder treffen.

Diese beiden Treffgeraden können aber natürlich sowohl reell als auch conjugirt imaginär sein.

2. Es gibt eine Gruppe von ∞^1 geschaarten Collineationen des Raumes mit den Axen t und t'. Bei Anwendung der Collineationen der Gruppe beschreibt ein beliebiger Punkt eine Transversale zu den Geraden t und t' und eine beliebige Ebene dreht sich um eine solche Transversale.

Übt man die Collineationen dieser Gruppe auf das Tetraëder T_1 aus, so erhält man infolge dessen eine Schaar von ∞^1 Tetraëdern, deren Ecken respective auf den Geraden $a\,b\,c\,d$ liegen und deren Ebenen respective durch die Geraden $a'b'c'd'$ hindurchgehen.

Die Geraden t und t' sind Axen für eine lineare Congruenz, welche die Basis für ein Büschel von linearen Complexen (Strahlengewinden) bildet. Die ∞^1 Nullcorrelationen, welche zu den Complexen dieses Büschels gehören, bilden nun zusammen mit der genannten Gruppe von Collineationen eine neue Gruppe von Raumverwandtschaften. Jede dieser ∞^1 Nullcorrelationen transformirt einen Punkt in eine Ebene, welche durch die vom Punkte aus an das Axenpaar t, t' gehende Transversale hindurchgeht, und eine Ebene in einen Punkt,

welcher auf der in dieser Ebene befindlichen Transversale des Axenpaares t, t' liegt.

Wenn wir diese ∞^1 Nullcorrelationen auf das Tetraëder T_1 anwenden, so entsteht daher eine Schaar von ∞^1 Tetraëdern mit Ecken auf den vier Geraden $a'b'c'd'$ und Ebenen durch die vier Geraden $abcd$. Wir bezeichnen sie als Gegenschaar der früher erhaltenen Schaar von Tetraëdern.

Unser Ergebniss lautet:

Liegen zwei Tetraëder so, dass die vier Verbindungslinien homologer Eckpunkte und die vier Schnittlinien homologer Ebenen der beiden Tetraëder dieselben zwei windschiefen Transversalen zulassen, dann gibt es eine ganze Schaar von Tetraëdern, welche auf den ersten vier Geraden ihre Ecken haben und ihre Ebenen durch die zweiten vier Geraden hindurchschicken, und es gibt eine ganze Schaar von Tetraëdern, die Gegenschaar der ersten, welche ihre Ecken auf den zweiten vier Geraden haben und ihre Ebenen durch die ersten vier Geraden hindurchschicken.

Die Schaar umfasst alle Tetraëder, welche mit den beiden gegebenen Tetraëdern T_1 und T_2 (in derselben Weise) schiefperspectiv liegen, die Gegenschaar alle Tetraëder, welche den beiden Tetraëdern T_1 und T_2 zu gleicher Zeit um- und eingeschrieben sind. Man erkennt, dass sich zwei schiefperspective Tetraëder allgemein definiren lassen, als zwei Tetraëder, welche demselben dritten zu gleicher Zeit um- und eingeschrieben sind. Denn die beiden Nullcorrelationen, welche das erste und zweite Tetraëder in das dritte überführen, geben nacheinander ausgeübt (als »Product«) eine geschaarte Collineation des Raumes, welche das erste Tetraëder in das zweite überführt.

3. Jetzt sollen die Beziehungen untersucht werden, welche zwischen den acht Strahlen $abcd$, $a'b'c'd'$ bestehen. Solche acht Strahlen, welche aus dem Quadrupel der Verbindungslinien homologer Ecken und dem Quadrupel der Schnittlinien homologer Ebenen zweier schiefperspectiver Tetraëder sich zusammensetzen, wollen wir in der Folge als Doppelvier bezeichnen.

Nach der letzten Nummer kann sich ein Tetraëder so bewegen, dass seine Ecken auf den Strahlen des einen Quadrupels einer Doppelvier fortschreiten, während seine Ebenen sich um die Strahlen des andern Quadrupels drehen. Man erkennt sofort, dass jede Kante des Tetraëders dabei eine Regelschaar beschreibt. Denn eine solche Kante gleitet längs vier Geraden der Doppelvier, den zwei Geraden des ersten Quadrupels, auf denen die Tetraëderecken liegen, welche die Kante verbindet und den zwei Geraden des zweiten Quadrupels, durch welche die Tetraëderebenen hindurchgehen, die sich in der Kante schneiden.

Für die Doppelvier der Strahlen $abcd$, $a'b'c'd'$ folgt hieraus, dass sechsmal vier von ihren Strahlen hyperboloidisch liegen (demselben System von Erzeugenden eines Hyperboloids angehören). Es sind dies die Strahlenquadrupel:

$$abc'd',\ acb'd',\ adb'c'$$
$$cda'b',\ bda'c',\ bca'd'.$$

Wir wollen zeigen, dass diese Eigenschaft für die Doppelvier charakteristisch ist, d. h. dass, wenn von acht Strahlen $abcd$, $a'b'c'd'$ in der angegebenen Weise sechsmal vier hyperboloidisch liegen, diese acht Strahlen eine Doppelvier bilden.

Nach unserer Annahme liegen je zwei von den Geraden des ersten Quadrupels $abcd$ und die den beiden anderen im zweiten Quadrupel $a'b'c'd'$ zugeordneten Geraden in derselben Regelschaar, wobei a und a', b und b', c und c', d und d' als zugeordnet gelten. Wir betrachten nun die projectiven Punktreihen, welche auf je zwei Geraden des Quadrupels $abcd$ durch die Leitstrahlen der genannten die beiden Geraden enthaltenden Regelschaar bestimmt werden. Zwei Punkte auf den zwei Geraden sind homolog, wenn ihre Verbindungslinie einen (und dann auch schon den andern) Strahl des zweiten Quadrupels trifft, der keinem von den beiden Strahlen des ersten Quadrupels zugeordnet ist.

Entsprechen dem beliebig auf a angenommenen Punkte A auf b und c die Punkte B und C, so werden die Verbindungslinien AB und AC die Gerade d' des zweiten Quadrupels treffen. Es wird deshalb, die in die Ebene der Geraden AB, AC,

d' fallende Verbindungslinie der Punkte B und C die Gerade d' treffen und somit werden B und C homologe Punkte unserer projectiven Reihen auf b und c sein. Wir finden: Zwei Punkte auf zwei von den Geraden $abcd$, welche demselben Punkte einer dritten in unseren projectiven Beziehungen homolog sind, sind auch untereinander homolog und die Ebene dieser drei homologen Punkte geht durch jene Gerade des Quadrupels $a'b'c'd'$, welche der vierten Geraden des ersten Quadrupels zugeordnet ist.

Ein beliebiger Punkt A von a bildet also zusammen mit dem ihm in den Geraden b, c, d entsprechenden Punkten B, C, D die Ecken eines Tetraëders, dessen sechs Kanten (als Verbindungslinien von zwei homologen Punkten je eines der sechs Geradenpaare, die in dem Quadrupel $abcd$ enthalten sind) Erzeugende je eines unserer sechs Hyperboloide sind und dessen Ebenen (als Verbindungsebenen von drei homologen Punkten) je durch eine der Geraden des Quadrupels $a'b'c'd'$ hindurchgehen.

Ohneweiters ist zu sehen, dass die acht Geraden $abcd$, $a'b'c'd'$ zwei gemeinsame Transversalen aufweisen. Denn jede von den beiden Transversalen der Geraden $abcd'$ muss auch c' treffen, weil sie die drei anderen von den Geraden $abc'd'$ trifft, welche derselben Regelschaar angehören, ebenso muss sie b' treffen, weil sie drei von den Geraden $acb'd'$ trifft u. s. f. Es ist also der Satz bewiesen:

Eine Doppelvier von Geraden $abcd$, $a'b'c'd'$ ist durch die Eigenschaft charakterisirt, dass je zwei Geraden des einen Quadrupels zusammen mit den beiden keiner von ihnen zugeordneten Geraden des zweiten Quadrupels demselben System von Erzeugenden eines Hyperboloids angehören. Die Erzeugenden der zweiten Systeme dieser sechs Hyperboloide lassen sich sowohl zu Kanten einer Schaar von Tetraëdern gruppiren, welche ihre Ecken auf den Strahlen des ersten Quadrupels der Doppelvier haben und ihre Ebenen durch die Geraden des zweiten Quadrupels schicken, als auch zu Kanten der Tetraëder der Gegenschaar mit Ecken auf den Geraden

des zweiten und Ebenen durch die Geraden des ersten Quadrupels.

4. Ein Satz von Charles sagt, dass wenn zwei Tetraëder so liegen, dass die vier Verbindungslinien homologer Ecken derselben Regelschaar angehören, ein Gleiches für die vier Schnittlinien homologer Ebenen gilt. Die Lagenbeziehung der beiden Tetraëder wird als hyperboloidisch bezeichnet.

Für zwei schiefperspective Tetraëder ist es lediglich eine einfache Bedingung, wenn sie auch noch in hyperboloidischer Lage sein sollen. Ein einem Hyperboloid eingeschriebenes Tetraëder T_1 und das Tetraëder T_2, das ihm in einer geschaarten Collineation entspricht, deren Axen zwei Erzeugende desselben Systems dieses Hyperboloids sind, bilden ein solches Paar von schiefperspectiven Tetraëdern in hyperboloidischer Lage. Die Lagenbeziehung der acht Strahlen, von denen vier entsprechende Ecken solcher zwei Tetraëder verbinden und vier als Schnittlinien entsprechender Ebenen auftreten, ist bemerkenswerth, denn die acht Strahlen bilden eine vierfache Doppelvier, indem der Satz gilt:

Liegen die Strahlen des einen Quadrupels einer Doppelvier auf einem Hyperboloid, so besteht zwischen den Geraden des zweiten Quadrupels dieselbe Lagenbeziehung. Die acht Strahlen einer solchen speciellen Doppelvier lassen sich noch auf drei andere Arten so anordnen, dass eine Doppelvier entsteht, so dass es acht Schaaren von Tetraëdern gibt mit Ecken auf vier, und Ebenen durch die übrigen vier von den acht Strahlen und je zwei Tetraëder derselben Schaar sind in hyperboloidischer Lage.

Dass, wenn von den Geraden einer Doppelvier $abcd$, $a'b'c'd'$ die Geraden des einen Quadrupels einer Regelschaar angehören, ein gleiches für die Geraden des zweiten Quadrupels gilt, besagt der citirte Satz von Charles. Es gehören dann folgende acht Strahlenquadrupel je derselben Regelschaar an (vergl. Nr. 3):

$$a\ b\ c\ d,\quad a\ b\ c'd',\ a\ c\ b'd',\ a\ d\ b'c',$$
$$a'b'c'd'\quad a'b'c\ d,\ a'c'b\ d,\ a'd'b\ c.$$

Daraus ist aber zu schliessen, dass jedes der vier Schemata

$$abcd,\ a'b'c'd'$$
$$abc'd',\ a'b'cd$$
$$acb'd',\ a'c'bd$$
$$adb'c',\ a'd'bc$$

eine Doppelvier liefert. Denn die nach Nr. 3 charakteristische Eigenschaft einer Doppelvier ist für jede dieser Strahlenanordnungen erfüllt: Je zwei Strahlen eines Quadrupels liegen mit den den beiden übrigen im zweiten Quadrupel zugeordneten Strahlen in derselben Regelschaar.

5. Caporali und del Pezzo haben bewiesen,[1] dass zwei Tetraëder, die einander sowohl um- als eingeschrieben sind, (Möbius'sche Tetraëder) durch eine windschiefe Involution in einander übergeführt werden können, wobei je zwei Eckpunkte der beiden Tetraëder in einander übergehen, von denen der eine in der Gegenebene des andern liegt. Zwei solche Tetraëder befinden sich also in schiefperspectiver Lage. Die Figur zweier solcher Tetraëder, des Tetraëders T_1 mit den Ecken $A_1B_1C_1D_1$ und den Ebenen $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ und des Tetraëders T_2 mit den Ecken $A_2B_2C_2D_2$ und den Ebenen $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ lässt sich, wie die genannten Autoren bemerkt haben, noch auf drei andere Arten in zwei Möbius'sche Tetraëder zerlegen. Die vier Paare von Möbius'schen Tetraëdern, die man aus den acht Punkten und den acht Ebenen zusammensetzen kann, heissen:

$$A_1B_1C_1D_1,\ \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 \text{ und } A_2B_2C_2D_2,\ \alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$$
$$A_1B_1C_2D_2,\ \beta_1\alpha_1\delta_2\gamma_2 \text{ und } A_2B_2C_1D_1,\ \beta_2\alpha_2\delta_1\gamma_1$$
$$A_1B_2C_1D_2,\ \gamma_1\delta_2\alpha_1\beta_2 \text{ und } A_2B_1C_2D_1,\ \gamma_2\delta_1\alpha_2\beta_1$$
$$A_1B_2C_2D_1,\ \delta_1\gamma_2\beta_2\alpha_1 \text{ und } A_2B_1C_1D_2,\ \delta_2\gamma_1\beta_1\alpha_2,$$

wobei für jedes Tetraëder sowohl die Ecken als die Ebenen, welche ihnen der Reihe nach gegenüber liegen angegeben sind, um aus dem Schema den folgenden Satz abzulesen.

---

[1] Introduzione alla teoria dello spazio rigato, abgedruckt in Caporali, Memorie, p. 270 f.

welcher daraus folgt, dass die Tetraëder jedes Paares schiefperspectiv liegen.

Die vier Verbindungslinien entsprechender Ecken und die vier Schnittlinien entsprechender Ebenen zweier Möbius'scher Tetraëder bilden auf vierfache Weise eine Doppelvier. Es gibt acht Schaaren von Tetraëdern mit Ecken auf den vier ersten und Ebenen durch die vier übrigen Geraden.

Die Doppelvieren, welche zu den vier Paaren von Tetraëdern des oberen Schemas gehören, lauten nämlich unter Beibehaltung der Bezeichnungen von Nr. 1:

$$abcd,\ a'b'c'd'$$
$$abcd,\ b'a'd'c'$$
$$abcd,\ c'd'a'b'$$
$$abcd,\ d'c'b'a'$$

Wir wissen, dass zwei Gerade des einen Quadrupels einer Doppelvier und die den beiden anderen im zweiten Quadrupel zugeordneten Geraden auf demselben Hyperboloid liegen. Daraus folgt für unsere acht Strahlen:

Die Verbindungslinien entsprechender Ecken und die Schnittlinien homologer Ebenen zweier Möbius'scher Tetraëder sind acht gerade Linien, von denen zwölfmal je vier auf demselben Hyperboloid liegen.

Nicht nur das Strahlenquadrupel $abc'd'$ und die analogen, sondern auch das Quadrupel $aba'b'$ und die analogen liegen hyperboloidisch. Für das Quadrupel $aba'b'$ folgt dies daraus, dass $abcd,\ c'd'a'b'$ eine Doppelvier ist.

Wir bemerken endlich, dass je zwei zugeordnete Geraden einer der vier Doppelvieren, die sich aus den Strahlen $abcda'b'c'd'$ bilden lassen, reciproke Polaren in Bezug auf eine Oberfläche 2. O. sind. Caporali und Del Pezzo haben nämlich erkannt, dass zwei Möbius'sche Tetraëder zwei Polartetraëder für dieselbe Oberfläche 2. O. darstellen und der Verbindungslinie zweier Ecken wird die Schnittlinie ihrer Gegenebenen in Bezug auf diese Oberfläche als Polare zugewiesen sein.

Es folgt:

Die acht Strahlen der Doppelvier zweier Möbius'scher Tetraëder lassen sich auf vier Arten in vier Paare reciproker Polaren einer Oberfläche 2. O. eintheilen, wobei jedesmal die Strahlen des einen Quadrupels der Doppelvier die Strahlen des andern zu Polaren haben

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. VII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XVIII. SITZUNG VOM 7. JULI 1898.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 107, Abth. I, Heft I—IV (Jänner bis April 1898).

Der prov. Secretär legt das im Auftrage Sr. k. und k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzog Ludwig Salvator, Ehrenmitglied der kaiserlichen Akademie, durch die Buchdruckerei H. Mercy in Prag eingesendete Druckwerk »Benzert« vor.

Das k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministerium »Marine-Section« theilt mit, dass voraussichtlich mit 1. October l. J. S. M. Schiff »Saida« eine auf 12 Monate veranschlagte Missionsreise nach Ostafrika, Süd- und Ostaustralien und den Sunda-Inseln antreten wird, und ladet die kaiserliche Akademie ein, ihre etwaigen Wünsche betreffs anzustellender wissenschaftlicher Beobachtungen bekannt zu geben.

Die königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen übermittelt die Protokolle über die Verhandlungen der Delegirten der cartellirten Akademien und gelehrten Gesellschaften in der V. Versammlung zu Göttingen am 31. Mai und 1. Juni 1898.

Der prov. Secretär theilt folgende eingelangte Preisausschreibung mit:

Der Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft, welche im Jahre 1798 ihren Sitz von Mohrungen nach Königsberg verlegt hat, ist zur Feier dieser hundertjährigen Erinnerung von ihrem Mitgliede, Herrn Stadtrath Dr. Walter Simon hierselbst, ein Betrag von 4000 Mark zur Stellung einer Preisaufgabe überwiesen worden. Die Aufgabe verlangt: eine Arbeit, welche

auf dem Gebiete der pflanzlichen oder thierischen Elektricität entweder fundamental neue Erscheinungen zu Tage fördert, oder hinsichtlich der physikalischen Ursache der organischen Elektricität, oder ihrer Bedeutung für das Leben überhaupt oder für bestimmte Functionen, wesentlich neue Aufschlüsse gewährt.

Herr Dr. Karl Camillo Schneider in Wien dankt für die ihm zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Hydropolypenfauna der Adria gewährte Subvention.

Das c. M. Herr Prof. H. Molisch in Prag übersendet eine Arbeit unter dem Titel: »Botanische Beobachtungen auf Java«, I. Abhandlung: »Über die sogenannte Indigogährung und neue Indigopflanzen«.

Ferner übersendet Herr Prof. Molisch eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit des Privatdocenten Dr. A. Nestler, unter dem Titel: »Über die durch Wundreiz bewirkten Bewegungserscheinungen des Zellkerns und des Protoplasmas«.

Das c. M. Herr Prof. R. v. Wettstein in Prag übersendet eine Abhandlung des stud. philos. Fritz Vierhapper, betitelt: »Zur Systematik und geographischen Verbreitung einer alpinen *Dianthus*-Gruppe«.

Das c. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt in Prag übersendet eine Abhandlung: »Über Tetrahydropapaverin«.

Das w. M. Prof. Franz Exner legt die XII. und XIII. Mittheilung der von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Dr. E. Haschek ausgeführten Untersuchung: »Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente« vor.

Ferner legt Herr Prof. F. Exner eine Abhandlung des Herrn Dr. Hasenöhrl vor: »Über den Rückstand und die Leitfähigkeit von Paraffin und Schwefel«.

Weiter legt Herr Prof. F. Exner eine Abhandlung des Herrn Dr. E. v. Schweidler vor, betitelt: »Über die lichtelektrischen Erscheinungen« (I. Mittheilung).

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht folgende zwei Abhandlungen der Herren Regierungsrath Director Dr. J. M. Eder und E. Valenta in Wien:

1. »Spectralanalyse der Leuchtgasflamme«.
2. »Über das Funkenspectrum des Calciums und des Lithiums und seine Verbreitungs- und Umkehrungserscheinungen«.

Herr Hofrath v. Lang überreicht ferner eine Abhandlung von Prof. Dr. G. Jaumann in Prag, betitelt: »Interferenz der Kathodenstrahlen« I.

Weiter überreicht Herr Hofrath v. Lang eine Abhandlung von stud. phil. P. Emerich Wippermann in Prag: »Über Wechselstromcurven bei Anwendung von Aluminiumelektroden«.

Herr Dr. Friedrich Bidschof, Assistent an der k. k. Universitäts-Sternwarte zu Wien, überreicht einen von Dr. J. Palisa, Adjuncten an demselben Institute und ihm gemeinsam ausgearbeiteten Fixsternkatalog.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(XII. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von Au, Ti)

von

Prof. **Franz Exner**, w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek**.

(Mit 4 Tafeln.)

XXXVII. Gold.

(Taf. I und II.)

An bisherigen Messungen des ultravioletten Goldspectrums liegen vor die auf den Bogen bezüglichen von Kayser und Runge[1] und die des Funkenspectrums von Eder und Valenta.[2] Da im Goldspectrum neben vielen unscharfen auch besonders scharfe Linien vorkommen, so haben wir diese letzteren durch ein beigefügtes »s.« kenntlich gemacht.

Die Banden, welche wir schon im Pd, Ir und Rh beobachtet haben und welche dem Stickstoff angehören, treten auch im Goldspectrum auf. Die Wellenlängen ihrer Kanten haben wir zu 3371·55, 3577·13 und 3914·47 bestimmt. In den Messungen wurden die Linien dieser Banden selbstverständlich weggelassen. Das Gold, welches von Schuchardt bezogen war, zeigte sich schwach mit Ca, Cu und Ag und Spuren von Fe verunreinigt. Die Zahl der Linien betrug 400.

---

[1] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1892).

[2] Eder und Valenta Denkschr. der k. Akad. Wien, Bd. 63 (1896)

λ	i	λ	i	λ	i
1977·6	1	2229·07	5+	2301·15	1+
2000·9	1	31·40	4+	04·90	10
44·70	1	33·75	2+	08·26	1+
82·16	2	37·55	1+	09·50	5
83·16	1	40·35	2+	11·06	1
98·18	1	42·00	1	12·3	1+
2110·78	2+	42·78	4	14·77	5
13·69	1	44·01	1	15·96	5
25·32	2	45·53	1	17·10	1 s. Ag
26·73	1	46·50	1	18·39	1+
29·57	1	46·70	3	20·37	1
33·3	1+	48·77	1	22·39	6 s.
37·95	1	49·13	1	24·73	1
40·5	1+	53·48	1	25·32	1+
44·27	1	55·1	1+	25·80	1
54·30	1	55·95	1+	26·8	1+
57·21	1	61·35	1+	31·46	2
59·13	1	62·70	2+	32·00	2+
60·55	1	63·77	2+	34·15	1+
61·27	1+	65·10	1	40·30	5
67·40	1	66·01	2+	47·23	1
72·28	1	67·07	1	51·61	1
84·21	1	70·27	1	52·81	4 s.
85·65	1	73·25	1	55·57	1
86·80	1+	77·65	3+	58·02	1
89·03	3	78·10	1	64·64	3 s. } [1]
90·57	1	79·40	1+	64·99	4 r. }
93·55	1+	80·05	1+ Ag	68·10	1
2201·42	4	82·94	3	69·46	3
05·97	1	83·38	3	71·67	3
10·27	1	86·80	1	76·31	2 s.
10·73	2	87·85	2+	77·3	1+
13·25	3	88·66	1	78·0	1+
15·80	3+	91·60	6	82·51	2
19·25	2+	94·1	1+	87·84	3 s.
20·62	2	95·20	2	88·35	1+ d.
22·70	1	96·62	1	93·66	1
24·7	1+	96·92	1	2401·3	1+

[1] Eder und Valenta geben eine umgekehrte Linie bei 2364·8; Kayser und Runge im Bogen eine Linie 2364·69.

λ	i	λ	i	λ	i
2401·68	1	2552·9	1+ br.	2847·20	2+
02·83	2	65·80	3 s.	57·00	1+
04·95	1	90·18	2	64·6	1+ br.
05·24	2	92·20	1+	83·57	2
11·50	1	99·5	1+	85·72	2
13·31	2	2609·60	1	92·07	1+
16·7	1+ br.	10·4	1+	93·55	2+
19·4	1+ br.	16·62	2+	2906·05	2+
25·05	1+	17·48	1	07·19	4 s.
28·10	20 u.[1]	25·60	1	13·68	8 s.
33·7	1+ br.	27·09	2	18·52	1+
37·89	3 s. Ag	41·56	4 s.	32·32	2
42·48	1+	59·57	1	54·51	3
45·67	1	65·25	1	82·25	1
46·20	1	67·09	1	90·42	4 s.
48·00	1 Ag	76·10	15	95·09	3
58·25	1	87·73	3 s.	3015·97	1
68·05	1+	88·26	3 s.	29·31	2
73·90	1+	88·82	3 s.	33·3	1+ br.
76·10	2+	2701·03	3 s.	3122·63	5 s.} [2]
77·80	2	02·54	1	22·97	6 }
78·68	1	03·51	1	56·78	1
80·35	2+	06·13	1	94·9	1+ br.
88·98	1	21·94	2	3204·8	1+ br.
90·5	1+ br.	32·10	2+	22·0	1+ br.
91·5	1+ br.	48·35	6 s.	28·15	1+
92·68	1	49·0	1+ br.	30·76	2+
2503·33	5 r.	80·96	3 s.	42·8	1+
06·07	1+	95·73	1+	47·65	1 Cu
06·38	1	2802·30	10	65·20	1 "
10·59	2 s.	05·40	2+	74·1	1 Cu
15·17	1	20·11	8	80·85	2 Ag
28·15	1	22·85	5	3308·43	1
33·74	2	25·58	6 s.	55·29	1
38·09	1+	33·17	1	58·5	1+ br.
44·30	1	35·5	1+	82·1	1+
50·3	1+	38·13	4	82·6	1+

[1] Rothe Componente stärker.

[2] Kayser und Runge geben eine umgekehrte Linie bei 3122·88 und Eder und Valenta ebenda eine nicht umgekehrte starke Linie.

λ	i	λ	i	λ	i
3383·06	2 Ag	3635·35	2+	3770·1	2+ br.
3404·05	1+	37·6	1+ br.	71·1	1+
04·73	1	42·6	1+ br.	73·35	2
21·37	1	45·1	1+ br.	80·14	2+
41·5	1+	49·25	2+	85·4	1+
52·4	1+ br.	50·95	1	87·4	1+
57·05	1+	53·70	2+	88·8	1+
60·8	1+	54·4	1+	91·93	1
70·5	1+	54·8	1+	93·0	1+
81·35	1+	57·2	1+ br.	94·4	1+ br.
87·1	1+	58·2	1+ br.	95·4	1+ br.
87·33	1+	71·3	1+ br.	96·10	2+
93·02	1+	72·9	1+ br.	98·15	1+
3523·50	1	75·0	1+ br.	99·4	1+
28·1	2+ r.	76·6	1+ br.	3800·50	1+
48·20	1	77·7	1+ br.	04·20	5
49·2	1+ br.	80·9	1+ br.	06·5	1+ br.
51·65	1	81·60	1+	07·1	1+ br.
53·70	3+	83·00	1+	08·1	1+ br.
55·5	2+	87·6	1+ br.	10·07	1+
86·84	5+ v.	90·2	1+ 3fach	16·42	2+
90·52	1+	94·1	1+	20·40	1+
92·03	1+	95·6	1+ br.	22·05	3+
94·31	1+	98·6	1+ br.	23·12	2+
98·20	1+	3702·50	1+	24·5	1+
3601·22	2+	06·96	3+	25·87	3+
05·0	1+	08·3	1+	28·4	1+ br.
07·70	2+	09·8	1+	29·60	1+
09·74	2	14·2	1+	31·27	1+
14·20	3+ v.	18·0	1+	32·50	1+
20·5	1+ br.	31·0	1+	35·40	1+
22·9	1+	31·8	1+	36·62	1+
23·6	1+	32·6	1+	37·7	1+ br.
23·9	1+	46·1	1+	42·8	1+
31·0	1+	52·8	1+ br.	44·42	1+
31·6	1+	54·8	1+ br.	45·02	2+
32·8	1+	59·1	1+ br.	47·62	1+
33·40	5 s.	63·1	1+	49·1	1+
34·40	1	65·0	1+	53·72	2+
34·84	2	65·73	2	55·52	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3859·50	1+	4001·7	1+ br.	4260·06	2
60·8	1+	02·6	1+ br.	78·0	1+
65·70	1+	12·35	1+	4315·37	8 r.
74·90	3	12·8	1+	95·6	1+ br.
77·42	2	16·28	5 r.	4400·5	1+
80·45	2	20·87	1	10·5	1+
83·47	1	28·63	1	20·80	2
89·61	1+	30·1	2+ br.	31·3	1+
90·56	1+	41·06	3 s.	37·50	2 r
98·1	10 r.	53·01	7	75·7	1+
3909·54	1 s.	57·0	1+ br.	88·45	4 r.
14·93	1+	61·2	1+ br.	99·1	1+
16·2	2+ br.	65·25	15	4549·7	1+ br.
27·84	3	76·52	1	59·1	1+ br.
33·1	1+ br.	77·83	1	88·0	1+ br.
33·80	4 Ca	83·49	2	4607·72	3
45·2	1+	84·30	2	83·77	1
59·31	2	89·9	1+ br.	4700·4	1+
76·77	2+	4173·02	2	60·37	1+
79·74	2+	4222·00	1+	92·79	4 r.
86·1	1+	26·89	2 Ca	4803·4	1+ br.
86·48	1	42·00	2		

XXXVIII. Titan.

(Taf. III und IV.)

Das Bogenspectrum des Titans wurde zum Theil von Lockyer[1] und Cornu[2] und in neuerer Zeit in ausführlicher Weise von Hasselberg[3] gemessen. Das Funkenspectrum wurde bisher nicht untersucht. Auch dieses zeigt, wie schon Hasselberg für das Bogenspectrum nachgewiesen hat, zahlreiche Coincidenzen schwacher Linien mit schwachen Eisenlinien. Die schon mehrfach erwähnten Linienverschiebungen,

[1] Lockyer, Phil. Trans. 173 (1881).

[2] Cornu, Journ. de l'Ec. Polytechn. 52 (1883).

[3] Hasselberg, Vetensk. Akad. Hand. 28 (1895).

die durch geänderte Druck- und Dampfdichtenverhältnisse hervorgerufen werden, zeigen sich beim Titan sehr auffallend, so zum Beispiel bei verschiedenen Aufnahmen mit Hilfe derselben Elektroden, aber bei verschiedener Stellung derselben gegeneinander, wodurch die oben erwähnten Verhältnisse eben geändert werden.

Die folgenden vier Linien, die wir auf zwei verschiedenen Platten I und II massen, mögen als Beleg dafür dienen; wir setzen zum Vergleiche die Zahlen Rowland's aus dem Sonnenspectrum daneben.

Platte I	Rowland (Sonne)	Platte II
3757·89	3757·824	3757·82
59·45 u.	59·447	59·42 u.
61·50 u.	61·464	61·42
62·07	62·012	62·00

Platte I war dabei stärker exponirt als Platte II. Andere Linien dagegen blieben gänzlich unverschoben, wie z. B.

Platte I	Rowland (Sonne)	Platte II
3776·20	3776·198	3776·19

Alle diese Linien sind starke Linien.

Die festen Stücke Titan, die wir als Elektroden verwendeten, verdanken wir der Güte des Herrn H. Moissan in Paris. An Verunreinigungen waren nur geringe Mengen von Ca, Sr, C, Al und Fe nachweisbar. Die Zahl der gemessenen Linien beträgt 1697.

λ	i	λ	i	λ	i
2041·3	1	2199·25	1	2282·25	1
50·2	1	2201·33	1	82·80	1
54·0	1	03·75	1+	83 11	1
54·4	1	05·28	1+	83·40	1
56·5	1+	10·6	1+ 2 AE.	85·25	1
58·5	1+	12·05	1	85·5	1+
67·4	1	21·52	1	86 22	3
78·9	1	25·15	1+	87·35	1+
97·3	1+	25·60	1+	87·55	1+
99·9	1	27·19	4	89·05	1
2103·1	1+	28·80	2	89·44	1
04·4	1+	29·28	2	90·53	1+
05·1	1+ br.	30·92	4	91·23	1
30·17	1	33·3	1+	91·7	1+
32·20	1	36·9	1+	91·90	2
33·36	1	37·81	2	93·8	1+ br.
34·82	1	38·39	1	95·1	1+ br.
35·79	2	38·8	1+	95·74	1
37·87	1	40·65	1	96·61	1
38·47	2	47·00	1	96·90	2
39·23	1	50·02	3	99·00	1
42·88	1	53·27	3	99·90	1
43·9	1+	59·00	1	2300·4	1+ br.
54·70	2	61·24	5	02·13	1
55·56	2	61·67	1	02·70	2+ br.
56·79	1	64·07	1	05·74	1
58·28	1	65·11	1	07·30	1
59·07	2	66·8	1+	10·14	1
59·54	2	67·62	1	10·6	1+
62·70	2	67·98	1	11·90	1+
64·40	1+	69·12	6	12·2	1+
66·45	1+	70·2	1+	14·93	2+ r.
66·83	1+	71·5	1+	17·4	1+ br.
68·4	1+ br.	72·65	1+	19·77	1
73·1	1+ br.	73 33	1+	20·41	1+ d.
77·9	1+ br.	74·12	1	20·86	1
87·50	2+	76·75	1	25·15	1
90·2	2+ br.	80·01	1	26·35	1
93·45	1+	81·16	1	27·05	1
95·6	1+	81·65	1	29·04	1

λ	i	λ	i	λ	i
2331·40	4	2407·48	1+	2474·24	2
31·71	4	10·90	2	77·24	2
33·72	1	11·68	1	78·70	5 C
34·38	3	12·55	1	81·55	1
34·58	3	14·10	15	83·34	1
34·97	1+	16·45	1+	87·33	1
36·15	1+ br.	17·02	1	88·20	1
37·60	1+	17·55	2	90·0	1+ br.
37·84	1	18·44	1	91·24	1
39·02	6	18·80	1+	94·16	1
41·26	4	20·70	1+	97·00	1+
42·35	5	21·40	1	99·80	1+
46·41	2	22·03	1	2501·55	2+ br.
46·86	8	23·78	3	04·60	1
47·53	3	24·24	1	08·6	1+
50·02	4	24·32	1	09·17	1 C
50·73	3	27·17	1+	10·96	2
54·18	3	28·37	1	12·13	1 C
54·70	2	31·7	1+ br.	13·60	1+
55·25	2	31·90	1	16·15	20
55·93	1	33·30	1	17·50	4
57·39	2	33·65	1+	18·15	1
57·91	2	34·16	1	18·62	1+
62·80	1+	40·29	6 r.	19·41	1
63·1	1+	41·08	1	19·89	2
68·53	1+	42·77	3	20·63	2
71·20	2	47·98	2	24·74	5
72·10	1	48·93	1	25·70	9
74·55	1+	49·92	1	27·90	10
75·08	8	50·51	6	29·83	4
77·3	1+ br.	51·70	1	31·39	8
78·22	2+	52·9	1+	33·15	1+
87·22	1+	57·07	1 d.?	34·73	8
89·45	2	57·49	1	35·99	7
93·9	1+ br.	60·80	2+	40·13	10
98·60	1+	62·70	1	41·99	2
98·93	1+	65·52	1+	42·52	1
2400·70	1	68·15	1+	43·0	1+ br.
02·22	3	69·17	1	44·90	1
05·92	1	72·97	1	45·07	1 Cu?

λ	i	λ	i	λ	i
2545·76	1	2604·21	2	2664·32	1+
47·01	1	05·23	2	65·31	1
48·07	1	08·19	3+	67·40	1
48·75	2+	11·37	2	67·83	1
49·13	1+	11·55	1+	68·8	1+
54·28	1	12·95	1+	69·35	1
56·02	7	13·87	1+	69·67	2
57·08	1	20·00	1	70·08	1
60·92	1+	20·64	1+	72·04	1
63·47	10	21·42	1+	72·65	1+
64·28	1	23·3	1+ br.	73·67	1
64·6	2+	26·7	1+ br.	74·13	1
65·48	9	28·85	1+ br.	76·07	1
67·60	9	30·25	1+ br.	76·9	1+ br.
69·01	3	32·49	2	77·4	1+ br.
70·15	1	33·0	2+ br.	78·35	1+
71·11	5	35·62	5+ r.	78·72	1
71·52	1	37·2	1+	79·43	1
72·74	4	38·78	6+ r.	80·01	2
74·75	2	41·17	3	81·00	3+
75·0	2+ br.	42·21	6+ r.	81·50	1+
76·50	6	44·00	1	82·20	1+
80·51	6	44·20	1	85·22	1
80·92	1	44·35	3+	86·39	1
81·80	3	46·10	7+	86·49	1
83·2	1+ br.	46·70	3+	88·05	1
84·09	1	48·69	1	88·90	2
88·70	1	49·58	2+	90·70	3+ r.
89·15	1+	50·1	1+	92·24	1
90·35	1	51·0	2+	95·55	1+
91·06	1	55·00	1	96·10	2
91·3	1+	55·35	2+	97·17	1
92·70	5+	56·17	1	98·19	2+
93·75	1	56·49	1	98·65	6+ r.
94·8	1+	56·57	1	2700·23	1
95·5	1+ br.	57·00	1	01·08	1
96·68	1	57·26	1	01·66	1
97·20	1	60·73	1	02·08	2
2600·02	2	62·05	1	02·73	3+ r.
01·3	1+	64·07	1+	07·15	2

λ	i	λ	i	λ	i
2711·69	1	2765·34	1	2818·00	10+
13·87	1	65·8	1+	19·05	1
16·31	3	68·28	1+	20·02	2
16·73	1	71·18	1	20·46	2
17·39	3	72·98	1+	21·4	4+ r.
18·05	2+	74·0	1+ br.	27·20	4+
19·49	2	74·96	1+	28·26	10+
22·2	1+ br.	76·7	1+ br.	28·93	6+
22·73	1	78·6	2+	32·24	5
23·6	1+ br.	79·8	1+	34·20	5 r.
25·18	1	80·62	2+	36·62	5 r.
25·89	3	82·34	2+	38·70	1
26·60	1	84·71	2	39·82	5 r.
31·1	3+	86·00	2+	42·01	6
31·69	1	87·1	2+	44·10	1+
32·25	2+	88·02	4+	44·65	1
33·37	1	90·62	3+	46·12	5 r.
34·94	1	93·82	1+	47·1	1+ br.
35·38	1	94·47	1+	51·21	5
35·70	1	95·51	2+	53·00	1+
38·8	2+ br.	96·96	1+	53·43	1+
39·90	1	97·4	1+	54·01	2
42·4	5+	98·95	1	55·1	1+
44·95	1+	2800·65	7	55·6	1+
45·92	1	01·7	1+	56·22	4 r.
46·7	6+	02·60	1	56·7	1+
48·25	1+	02·75	1	57·8	2+ br.
50·6	1+ br.	05·00	10+	58·49	2
51·83	8+	05·73	1	60·85	1+
52·86	2+	06·55	2	61·40	1
57·71	2+	07·6	1+	62·02	2+
58·15	1	08·4	1+	62·47	4
58·46	1+	09·3	1+	63·0	1+ br.
58·98	1+	10·42	10+	64·27	1+
61·37	4	12·10	1	68·81	4 v.
62·32	3	12·58	1+	70·12	4+ r.
63·0	1+ br.	13·7	1+	74·23	1
63·98	1	14·66	1	74·8	1+
64·43	1+	15·64	2	75·5	2+
64·90	4	16·44	2 Al?	75·8	2+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
2877·52	5	2933·64	1	3036·91	1
80·42	1	36·20	4+ r.	38·80	1+
83·32	1	37·41	1	42·77	1+
84·22	7	38·73	3+ r.	43·97	1
87·53	1	41·5	1+ br.	45·17	2+
88·73	2+	42·00	2+	46·4	1+ br.
89·00	2	42·20	2+ r.	46·79	2
90·60	2+	43·17	2+	48·52	1
91·18	4	45·51	5+ r.	48·89	1
95·93	1	46·75	1+	51·6	1+ br.
98·00	1+	48·40	1+	53·45	1+
2902·10	1	51·00	1+	54·9	1+ br.
03·08	1+	52·2	1+	56·86	2
06·70	3+ r.	54·78	5+ r.	57·52	1
08·20	1+	56·26	1+	58·20	5
08·6	1+ br.	56·90	1	59·17	1+
09·55	1	58·4	1+ br.	59·86	1 r.
10·03	1	59·00	5+ r.	62·5	1+ br.
10·82	1+	60·35	1+	63·50	1+
11·55	1+	65·34	1	63·66	1+
12·24	1	65·79	1	65·25	1+
13·40	2+	66·65	1+	66·4	6+ 3fach
14·92	2+	67·35	1	68·95	1+
15·7	1+	68·4	1+ br.	71·37	2
16·11	2+	70·50	1	72·17	5
16·80	1	71·9	1+	73·03	6 u.
18·8	1+ br.	77·85	1+	75·30	6 u.
19·75	1+	79·25	1+	78·70	8 u.
20·6	1+	83·46	1	80·3	1+ br.
20·8	1+	84·85	4	81·7	1+ br.
21·9	1+	87·38	1	83·8	1+ br.
23·4	1+ br.	90·25	1+	88·09	15 u.
23·85	1+	95·8	1+ br.	89·49	5
24·1	1+	3000·91	1	90·2	1+
24·77	1	08·43	1	93·19	1
26·8	2+	17·30	6	94·27	1
27·90	1+	18·3	1+ br.	96·51	1
28·42	1+	22·85	1+	97·29	5
28·75	1+	23·9	1+ br.	97·70	1+
31·25	5+ r.	29·84	5	3100·75	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3101·62	1	3165·02	3	3211·2	1+ br.
03·06	1	68·69	15+	13·25	2
03·91	7	72·83	1	14·32	1
04·70	1	74·91	3	14·90	4
05·21	4	75·8	1+ br.	15·67	1
06·36	5	77·7	1+ br.	17·20	10+
06·9	1+	78·7	1+ br.	18·43	10+
09·02	1	79·6	1+ Ca	19·39	1
10·21	1	80·40	1+	20·61	1
10·81	2	82·0	1+ br.	21·55	1
12·19	1	82·8	1+ br.	23·00	10
12·61	1	84·22	1	23·63	1
15·20	1	86·60	2+	24·43	9
16·7	1+	89·7	1+ br.	25·61	1
17·80	6	91·02	20+	26·30	1
18·92	1	92·20	1+	26·88	3
19·92	6	92·35	1+	28·76	7
21·72	1	92·8	1+ br.	29·30	5
22·23	1	94·0	1+	29·54	7 u.[1]
23·20	1	94·5	1+	31·48	3
23·9	1+	94·75	1+	32·50	7
28·05	2+	94·9	1+ br.	34·63	20 u.
28·72	2+	95·83	3	36·25	7
30·91	5	97·64	3	36·70	15 u.[1]
38·8	1+ br.	3200·10	3+	39·19	10 u.
41·7	1+ d.	01·72	1	39·83	8
43·88	6	02·70	15+	40·80	1
44·87	1	03·54	3	42·13	20 u.[1]
45·52	1	03·97	1	43·62	1
48·13	6	04·99	1	43·90	1
52·42	6 r.	06·13	1	45·45	1+
54·34	6	06·50	1	48·80	20 v.
55·81	6	06·98	1+	49·50	3
57·51	1	07·46	1+	52·03	9
61·38	7+	08·03	1+	53·05	10
61·95	7+	08·7	1+ br.	54·40	9
62·74	9+	09·2	1+ br.	55·4	1+
63·49	1	10·05	1+	57·6	2+ br.

[1] Rothe Componente stärker.

λ	i	λ	i	λ	i
3260·41	3	3308·52	2	3358·52	1+
61·74	30	08·99	8	61·32	50 u.
63·83	4	09·62	2	62·77	1
66·65	1+	09·82	2+	64·9	2+ br.
67·2	1+	12·83	1	66·34	5 r.
69·90	1	13·00	1+	68·1	1+ br.
70·73	1+	14·61	5 [1]	69·32	3
71·80	8	15·47	9	69·7	2+ br.
72·23	8	18·20	10	70·58	3
73·16	1	19·20	1	71·60	3+
73·62	1	21·85	10	72·33	4
74·19	1	23·05	30 u. [2]	72·90	30 u.
74·57	1	24·0	2+	74·50	4
75·42	3	24·90	1	77·63	2
76·90	5	25·37	1	77·73	2
77·10	2+	26·92	10	79·33	2
78·42	10	29·63	20	80·10	2
79·07	10	32·25	15	80·40	15 u.
80·17	5	35·39	20	82·44	2
82·50	10	37·06	1	83·90	50 u.
87·81	15	37·97	4	85·78	2
88·30	1	38·9	1+	86·08	3
88·57	2	40·53	15	88·00	15
88·70	3	41·99	20 u.	88·90	4
92·22	3	43·92	7	90·82	2
95·09	1+	46·92	7	91·4	1+
96·50	1	49·16	20 u. } [3]	92·11	2
97·4	1+ br.	49·70	10 u. r. }	92·85	2
98·05	1+	50·65	1	92·94	1
98·30	1+	51·9	2+ br.	94·72	30
99·56	2	52·20	3	98·1	1+ br.
3301·81	2	53·06	1	98·76	2
02·22	2	54·80	5	3400·33	1+
07·02	2 r.	56·3	1+ br.	02·61	8 r.
07·84	1	58·40	2	03·49	1

[1] Rowland gibt in der Sonne zwei Linien bei 14·574 und 14·663.

[2] Rothe Componente stärker.

[3] Rowland gibt in der Sonne vier Linien: 49·043, 49·135, 49·212, 49·597.

λ	i	λ	i	λ	i
3405·12	1	3461·70	15	3511·00	50
05·21	1	63·17	1	13·3	1+ br.
07·32	4	63·32	1	14·5	1+ br.
08·85	1	65·70	5	15·6	1+ br.
09·4	1+	67·36	2	16·98	1
09·99	4 r.	72·95	1+	17·9	1+ br.
10·40	1+	73·90	1+	19·4	1+ br.
10·95	1+	76·58	1+	20·47	20
11·83	1+	77·15	2	24·0	1+ br.
14·8	1+	77·39	15	24·99	1
16·15	1+	79·05	2	25·32	1
17·12	4	79·52	1	30·75	1
23·32	1	80·68	3	32·05	1+
25·57	1	81·03	3	34·00	5
29·14	1	81·30	1+ br.	35·60	20
30·68	1	81·85	1+	37·61	1
31·03	1	82·17	1	39·1	1+ br.
31·9	1+ br.	84·0	4+ br. r.	42·72	2
32·86	1	85·83	2	44·79	1
35·60	1	87·8	1+ br.	47·20	4
38·35	2 r.	89·5	1+ br.	47·82	1
39·42	2	89·91	4	52·10	1
40·05	1+	91·26	10	52·96	1
41·85	1+	92·7	3+ br.	56·35	1+
43·50	3 r.	93·43	1	56·75	1
43·77	1	94·16	1	61·71	4
44·53	15 r.	94·75	1+	62·07	3 r.
46·72	1	95·87	2	64·67	1
47·96	1+ br.	96·07	1	65·50	4
48·38	1+	96·33	2	66·11	5
50·00	1	99·27	3 r.	69·2	1+
50·8	2+ br.	3500·51	5	70·03	1
52·60	9	01·6	1+ br.	70·2	2+ br.
53·30	1+	03·90	1	72·60	2
54·35	1+	05·09	50	73·89	7
56·56	15	06·03	2	74·39	3
57·63	1	06·80	2	75·97	1
58·13	1	07·58	2	76·58	1
58·25	1+	08·6	1+ br.	76·99	1
59·63	1	10·00	3	78·38	1

λ	i	λ	i	λ	i
3580·42	1	3617·36	1+	3669·65	1
87·20	5	19·63	1+	70·20	1
87·30	4	20 25	1+	71·38	1
88·1	1+	22·31	1	71·81	6
89·1	1+	23·26	2	72·8	1+
89·9	1+	24·00	1	73·4	1+
90·5	1+	24·99	15	74·5	1+ br.
90·9	1+	26·22	2	74·88	2
92·17	1	27·07	1+	76·9	2+ br.
92·6	1+	27·81	1	77·90	1
93·22	3	28·57	1+	79·88	4
94·12	1	29·4	1+	80·40	3
95·47	1	31·59	1	81·4	1+ br.
96·20	10	33·6	1+ br.	81·8	1+ br.
96·68	2	35·34	4	85·31	50 u.
98·86	5	35·62	8	86·89	1
99·8	1+	38·07	3	87·49	1
3601·34	1	41·50	20	88·36	1+
01·55	1+	42·87	10	88·9	1+ br.
03·96	1	44·57	1	89·1	1+ br.
04·41	2	44·88	2 r.	90·09	4
06·25	1+	46·32	4	92·30	1+
06·90	1	48·98	2+ r.	94·61	3
07·35	1+	53·64	15	95·71	3
09·34	1	54·70	5	96·49	1
09·72	1	56·3	1+ br.	97·02	1
10·32	5	57·3	1+ br.	97·60	1+
11·83	1+	58·21	6	98·00	1
12·00	1+	59·91	15	98·32	2
12·44	1+	60·77	4	98·74	1
12·95	1+	62·39	15	3700·17	1+ br.[1]
13·2	1+	64·0	3+ br.	01·70	1
13·4	1+	64·83	1	02·42	3
13·5	1+	66·05	1+	03·14	1
13·95	1+	67·20	1+	03·72	1
14·34	1+	68·15	1+	04·48	3
14·95	1	68·7	1+	06·41	9
15·45	2	69·10	5	07·69	1+

[1] Violette Kante eines 1·5 AE. breiten Bandes.

λ	i	λ	i	λ	i
3708·88	1+	3766·54	2	3814·95	2+
10·11	5 r.	69·82	1	17·75	2
13·20	2	70·51	2	18·37	2+
13·89	1+	71·80	7	19·35	1+
14·97	1	74·43	1	22·20	3+
15·6	1+ br.	74·74	2	22·97	1
15·95	1+	76·19	8	23·10	1
17·23	1	80·50	1	23·90	1
17·56	6	81·8	1+	25·37	1
18·10	1	82·23	1	26·80	1
20·52	2	86·13	6	27·07	2
21·80	8	86·40	4	28·40	4+
22·72	3	87·25	1 d.	29·5	1+ br.
23·76	2	89·41	3	29·81	2
24·22	2	93·15	1+	31·2	1+
24·79	7	93·85	1+	31·9	1+ d.
25·32	6	94·89	1	32·23	1
26·37	1	96·00	3 r.	32·57	1
28·82	1	96·98	2 r.	33·29	3
30·01	8	98·38	2	33·43	3
30 95	1	3801·20	2	33·80	3
31·40	1	01·35	1+	34·00	3
32·9	1+	01·74	1	35·27	1
33·96	1	03·1	1+ br.	35·43	1
35·9	1+ br.	03·60	1+	36·19	4
36·90	1	04·15	1+	36·90	4 r.
38·2	1+	04·9	1+ br.	37·70	1
39·2	1+ br.	05·25	1+	37·93	1
39·8	1+ br.	06·2	1+ br.	38·47	1+
41·28	8	06·55	1+	38·84	1
41·89	30 r.	07·36	1	39·90	1+
48·23	9	08·32	1	41·8	1+ br.
51·77	2	09·18	1	42·74	1+
53·00	7	09·80	1	43·11	1
53·80	4	10·3	1+ br.	44·12	1
55·6	1+ br.	11·51	2	44·34	1
57·82	10	12·2	1+ br.	45·3	2+
59·42	50 u.	13·49	4	45·52	1+
61·42	50 u.	13·61	2	46·0	1+ br.
62·00	6	14·70	5	46·59	3

λ	i	λ	i	λ	i
3847·95	1+	3888·2	1+ br.	3982·62	5
48·43	2	90·08	2	84·52	1+
49·12	1	93·77	1	85·4	1+ br.
51·35	1	95·39	4+	85·8	2+ br.
51·67	1+	96·8	1+ br.	87·74	2
52·50	1	98·62	2	89·97	20 r.
53·20	3+	3900·72	50 r.	91·28	1+
53·88	4+	04·98	10	93·98	1+
54·70	2	09·8	1+ br.	96·85	1+
54·98	1	11·32	2+	98·83	15
55·75	1	13·69	30	99·6	2+ br.
56·00	1	14·49	3	4002·7	3+ br.
58·05	2	14·86	1	04·0	3+ br.
58·26	3+	15·97	1	06·1	2+
60·74	1	16·22	1	07·37	1+
61·21	2+	19·92	2	08·20	2+
62·6	1+ br.	21·59	4	09·10	8
62·9	2+ br.	24·70	7	09·82	4
64·17	2+	26·47	3	12·58	7
66·13	1	30·00	6	13·75	3+ br.
66·59	5+	32·20	6	15·52	3+
67·84	2+	33·80	15 Ca	16·44	3
68·55	2+	34·34	1	17·10	1
69·42	2	38·2	1+ br.	17·90	3+
69·70	1	44·16	1+ Al	21·99	4+
70·22	1	47·90	9	23·90	1
70·35	1	48·84	10	24·80	5
71·49	2	56·49	9	25·32	4
72·32	1	58·37	10	26·70	4+
73·35	3+	60·50	1	27·64	1+
74·27	2	61·68	1+ Al	28·50	10
75·42	5+[1]	63·00	7	30·70	5+
77·6	1+ br.	64·40	7	31·85	1+
81·52	2	68·62	10 Ca	32·77	2+
82·42	8+	75·9	1+ br.	34·06	2+
83·00	8+	80·99	1+	36·00	3 r.
84·2	1+	81·99	15	38·50	1+

[1] Von 3875 bis 3883 liegen Linien einer Cyanbande, die in der Tabelle aber nicht angeführt sind.

λ	i	λ	i	λ	i
4040·45	1+	4131·36	2	4211·89	1
43·95	1+	37·40	4+	15·68	1+ Sr
49·55	1+	39·9	1+ br.	25·00	2
53·10	1+	40·57	1	26·99	6
54·00	8	42·7	1+	27·52	2
55·18	6	43·19	2+	27·82	2
56·3	1+	45·70	1	30·18	1+
57·73	2+	48·53	1+	34·80	1+
58·30	2	49·36	1+	38·09	5
59·07	2	49·63	1+	39·43	1
60·43	6	50·70	1+	43·7	1+ br.
64·39	5	51·20	5	45·67	1
65·22	5	52·70	1+	49·35	2+
65·72	1	58·50	2+	51·79	2
68·8	1+	59·85	4	51·99	1
69·15	1+	60·6	1+ br.	52·29	1
71·3	1+	61·71	2	56·28	4+ r.
74·43	1	63·90	20	58·76	2+ r.
76·46	1	64·85	1	60·94	1
77·24	2	66·48	2	61·80	3+ r.
77·75	1	68·2	1+ br.	63·30	8
78·57	9	69·51	3	65·50	1+
79·80	3	71·27	3	65·84	1
81·3	1+	72·15	10	65·96	1
82·59	7	73·75	3	66·45	1+
86·7	1+ br.	74·27	2	70·38	3 r.
90·3	1+ br.	74·65	2	72·60	3
99·31	4	77·15	1+	73·48	1+
99·90	1+	77·52	1+	74·80	8
4101·01	1	80·07	1	75·9	1+
11·9	1+ r.	80·68	1	76·59	3 r.
12·88	5	81·3	1+	78·39	4
15·3	1+ br.	83·47	2	79·00	1+
20·1	1+	84·47	1	80·5	1+ br.
21·75	2	84·75	1	81·56	4
22·34	4+	86·30	6	82·91	6
23·41	1+	88·83	2	85·17	4
23·70	5+	4200·91	3	86·20	7·
27·72	7 r.	03·63	3	87·60	6
29·30	3	05·49	1	88·00	2

λ	i	λ	i	λ	i
4288·27	1	4338·6	1+	4412·13	1
89·25	8	40·2	1+ br.	12·60	1
90·10	1	41·57	2	14·30	1
90·49	9	43·93	1	16·75	2
91·11	4	44·48	2	17·49	5
91·30	4	46·28	2	17·95	6
92·80	1	46·74	1	18·56	2
94·30	10	51·06	2	21·98	3
95·94	8	54·28	2	22·10	2
98·88	7	55·52	1+	23·02	3
99·38	3	60·71	3	24·59	1
99·79	2	67·89	6	26·29	5
4300·30	8	69·17	1	27·80	8
00·72	4	69·87	3+	30·27	1
01·30	6	72·60	3	30·59	3
02·18	6	75·05	3	31·49	2
02·77	1	75·60	1	32 80	1+
05·62	1 (Sr)	75·77	1	33·75	1+
06·12	15	79·44	1	34·20	5
07·02	1	84·88	1	35·07	1
08·65	1	86·1	1+	36·84	3 d.?
09·2	1+ br.	87·10	5	38·40	2
10·48	1+	88·24	2	40·60	4
11·79	2	88·75	1+	41·48	2
13·10	8	90·19	1	41·97	1
14·48	2	91·23	4	43·3	2+ br.
14·98	7	91·85	1	44·00	15
15·17	7	94·14	3	44·7	2+ d.
16·92	2	94·26	3	49·40	10
18·83	7	95·28	15	50·70	6
21·18	2	96·06	2	51·15	8
21·89	5 r.	98·5	1+ br.	53·54	7
23·56	1	4400·02	10	53·90	7
25·37	6	00·78	1	54·95	1
26·50	4	04·52	7	55·59	8
27·10	1	05·86	1	56·85	1+
30 38	2	07·85	1	57·70	10
30·88	2	09·4	1+	62·28	1
34·95	1	09·7	1+	63·59	2
38·10	10	11·30	6	63·75	3

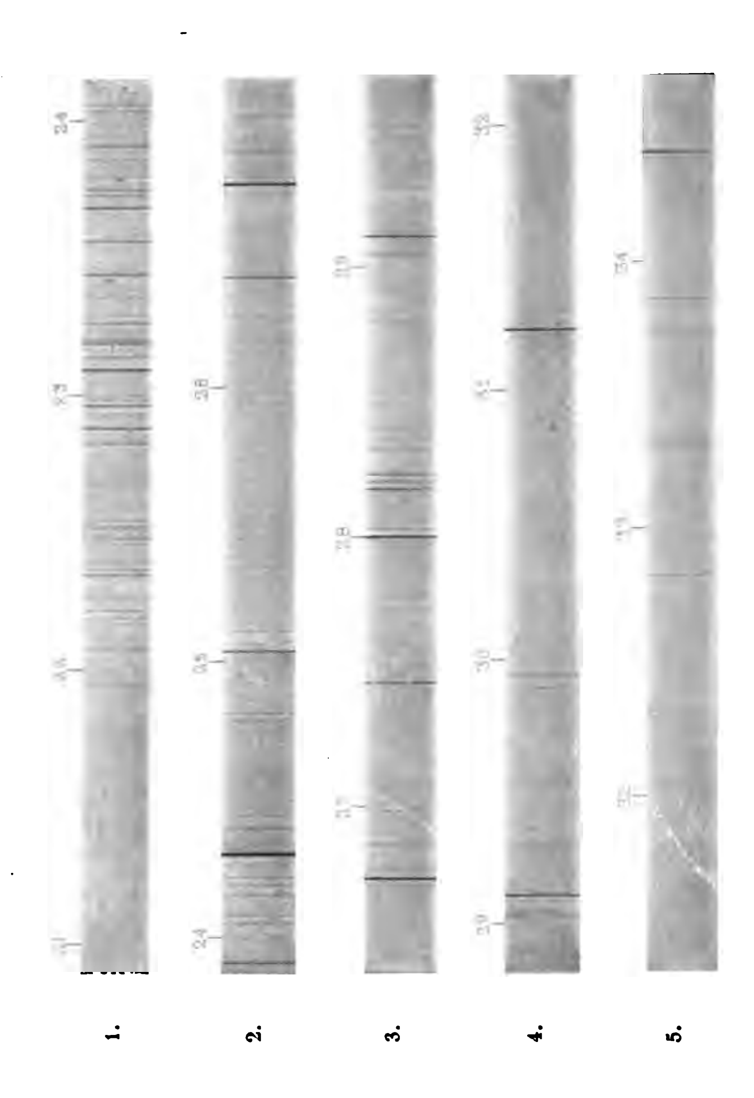
λ	i	λ	i	λ	i
4464·70	2	4534·23	8	4586·07	2
66·03	5	35·00	7	87·2	1+ br.
68·79	15	35·79	6	90·20	7
71·05	1	36·22	6 d.	91·8	1+ br.
71·49	5	37·42	1+	92·23	1+
75·09	3	39·26	2	94·70	1+
76·9	1+ br.	40·64	1	95·55	1
77·7	1+ br.	41·05	1	99·50	4
78·6	1+ br.	41·17	1	4600·43	1+
79·97	3	44·21	1	02·2	1+
80·82	3	44·99	7 r.	04·1	1+
81·50	7	45·40	1	05·0	1+ br.
82·93	4	47·51	1	06·93	1
85·37	1	48·05	1+	09·64	3
88·57	7	48·35	1+	14·50	1
89·31	5	49·00	8	16·4	1+
90·90	1	49·90	15 r.	17·50	10
92·82	1+	52·70	9	19·69	2
93·75	1+	53·6	1+	20·9	1+
95·25	2+	54·4	1+ br.	23·38	9
96·40	7	55·30	1	26·5	1+ br.
98·00	2	55·71	8	27·3	1+
4501·59	15	58·02	1	27·9	1+
04·02	2	58·29	3	29·59	7
06·05	1+	60·11	3	33·8	1+
06·60	1+	62·78	2	34·9	1+
08·4	1+ br.	63·60	2	35·07	3+
11·32	3	64·00	15	35·70	2
13·00	10	65·6	1+ br.	36·50	1
13·90	1	66·7	1+ br.	37·37	2
15·82	1+	67·6	1+ br.	38·10	3
18·28	8 d.?	67·8	1+ br.	39·60	5
18·92	3	68·47	1	39·89	4
23·06	10	71·06	2	40·20	5
24·95	1+	72·24	20	40·62	1
26·10	1	75·70	1+	43·6	1+ br.
26·57	1	76·65	1+	45·43	6
27·57	9	80·60	1	49·80	3+
29·73	2	81·73	1+	50·30	5
33·50	8+	83·59	1	51·9	1+

λ	i	λ	i	λ	i
4652·8	1+	4679·92	1	4709·18	1
53·0	1+	82·12	8	10·41	5
55·88	2	84·70	1	11·9	1+ br.
56·24	3	87·10	1	15·48	2
56·70	6	87·98	1	19·67	1+
57·40	3	88·58	1	22·80	3
59·9	1+ br.	90·99	1	23·36	3
63·0	1+ br.	91·60	6	24·87	1
64·9	1+	92·63	1+	31·39	3
66·5	1+	93·87	2	33·60	3
67·80	7	97·15	2	34·83	2
68·52	1	99·00	6	42·30	1+
69·41	1	4700·4	1+	43·01	5
75·34	4	03·3	1+ br.	47·46	1
77·16	1	08·83	2	47·83	2
77·68	1	09·0	1+ br.		

Schliesslich erlauben wir uns noch, die folgende Berichtigung zu unserer IX. Mittheilung, betreffend die Wellenlängen einiger Eisenlinien, zu geben.

Statt 2362·23 ist zu setzen 2362·13
» 2546·80 » » » 2546·75
» 48·73 » » » 48·68
» 48·89 » » » 48·83
» 49·20 » » » 49·17
» 49·60 » » » 49·50
» 50·20 » » » 50·10
» 50·87 » » » 50·75
» 53·85 » » » 53·83
» 55·12 » » » 55·17.

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente. XII.

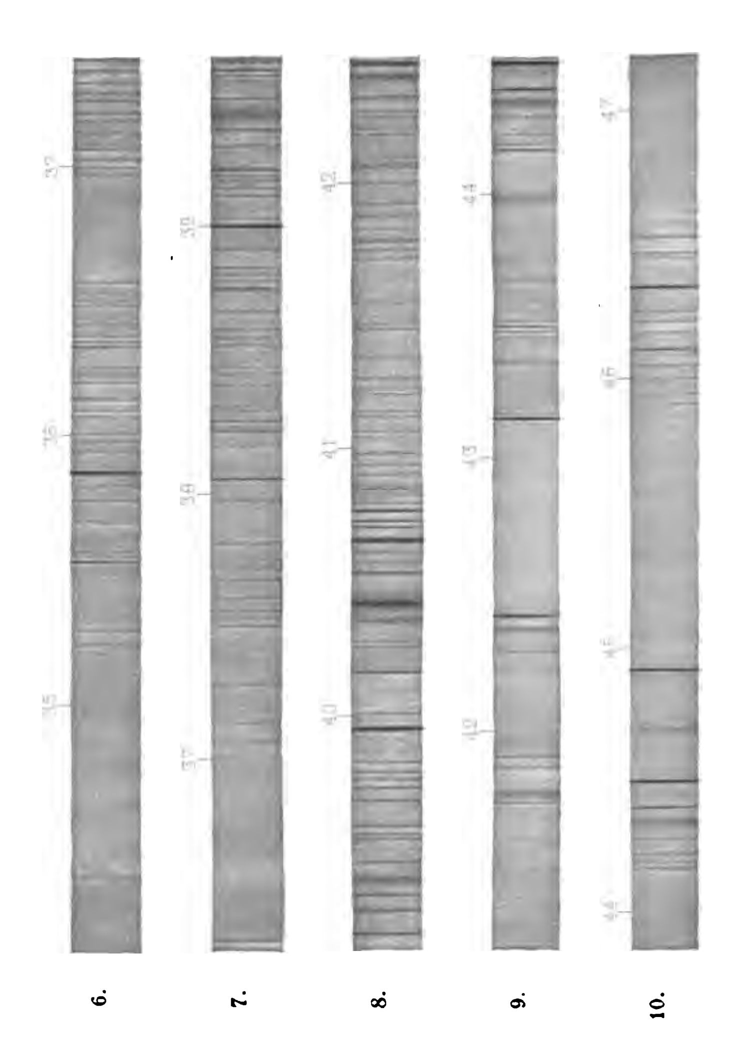


1. 2. 3. 4. 5.

Gold.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente. XII.

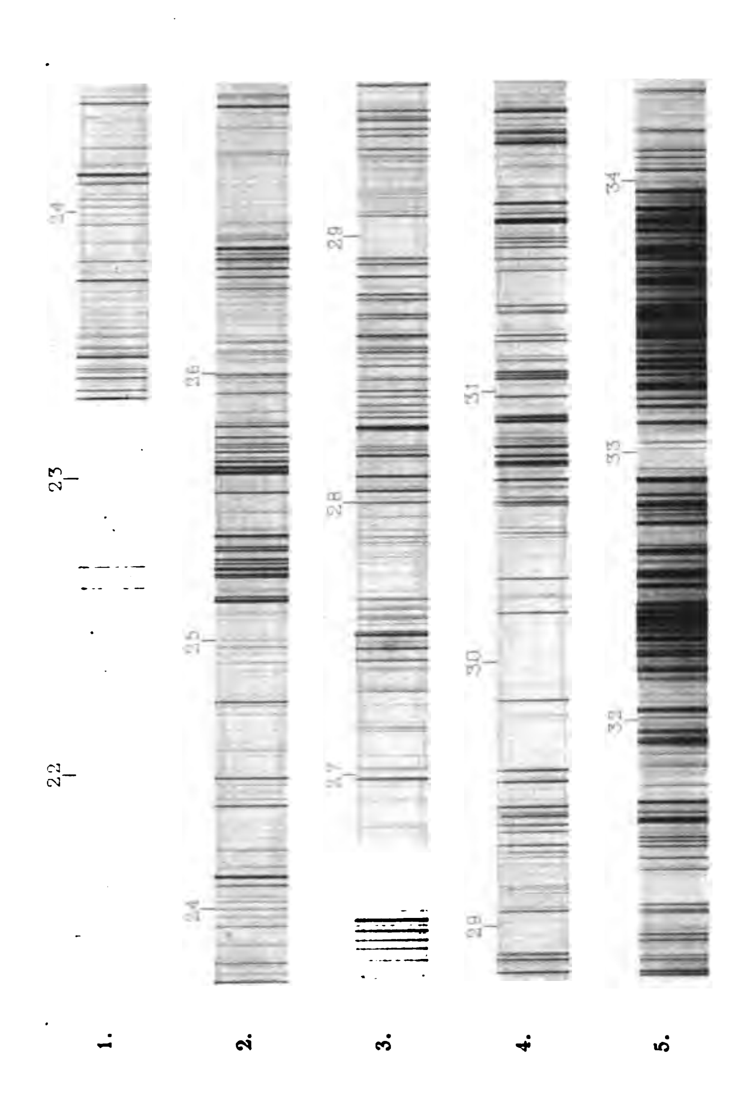


6. 7. 8. 9. 10.

Gold.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

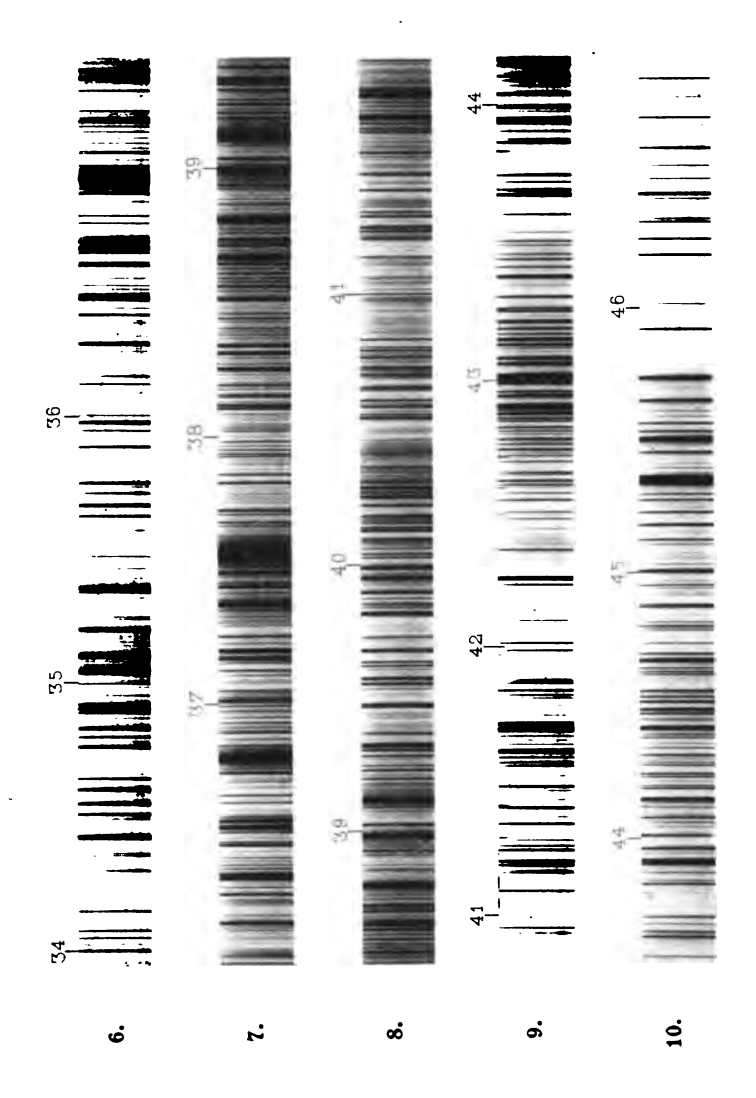
F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente. XII.



Titan.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente. XII.



Titan.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(XIII. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von Ta, Zr)

von

Prof. **Franz Exner**, w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek.**

(Mit 4 Tafeln.)

XXXIX. Tantal.

(Taf. I und II.)

Die Substanz bezogen wir in Pulverform von Schuchardt und pressten sie in einer Stahlpresse zu Elektroden. Das Spectrum ist ziemlich linienreich, doch nicht durch hervorragende Linien oder Liniengruppen ausgezeichnet. An Messungen des Bogenspectrums liegen nur die älteren von Lockyer[1] im Intervall von 3900—4000 vor; das Funkenspectrum wurde bisher noch nicht untersucht. Erwähnenswerth ist, dass eine grosse Zahl von Tantallinien sich im Rowland'schen Sonnenspectrum als unbezeichnete Linien findet, so dass die Anwesenheit von Tantal auf der Sonne mit grosser Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann. Verunreinigt war unsere Substanz ziemlich stark mit Fe, Ca, Sr, Na, K, Al, Pb und Ti, wahrscheinlich auch mit Mn, Cu, Mg und Bi. Die Zahl der gemessenen Linien beträgt 1270.

---

[1] Lockyer, Phil. Trans. 173 (1881).

λ	i	λ	i	λ	i
2182·75	1	2269·67	1	2315·54	1
93·31	1	70·28	1	16·16	1+
93·96	1	71·03	1+	19·20	1
96·10	1+	71·95	1	24·07	1
99·7	1+	72·70	1	24·22	1
2203·7	1+ br.	73·73	1+	24·35	1
07·17	1	74·25	1+	32·10	2
08·02	1	75·28	1+	32·22	1
10·2	1+	75·74	1	34·22	1
11·00	1	80·60	1+	34·97	1
11·9	1+	81·61	1	35·83	1
12·50	1	82·26	1	38·3	1+
14·5	1+ br.	83·10	1	38·73	1
15·63	1	83·25	1+	40·13	1
16·71	1	84·48	1+	41·02	1
17·89	1	85·10	1+	41·73	1
18·12	1	85·35	1	42·62	1
23·40	1	87·36	1	43·7	1+
26·57	1	89·25	1	46·15	1+
27·90	1	90·49	1	46·60	1+
37 3	1+	92·28	1	47·09	1
37·5	1+	92·65	1	49·33	1+
39·02	1	95·80	2	52·07	1
39·51	1	96·90	2	52·48	1
42·7	1+	98·20	1	52·98	1
43·90	1	99·06	1	53·92	1
48·49	1	2300·42	1	54·10	1
49·81	1	00·92	1	55·67	1
50·85	1	01·57	1	56·15	1
52·31	1	02·20	1	57·02	1
55·8	1+	02·32	1	64·35	2
56·57	1	03·00	1	65·29	1
58·78	1	03·58	1	67·33	1+
59·65	1	04·88	1+	69·40	1
60·65	1	08·61	1	70·05	1+
61·50	1	09·35	1	70·88	1
61·70	1+	11·30	1	71·12	1
62·39	2	12·73	1	72·86	1+
65·67	1+	13·40	2	74·03	1+
69·30	1	14·98	1	76·49	2

λ	i	λ	i	λ	i
2378·40	1+	2435·2	2+ br.	2480·00	1
81·24	2	36·00	1	81·91	1
81·66	2	36·56	1	83·35	1+
83·82	1	37·48	1+ Mn?	83·9	1+
84·43	1	37·80	1+	84·98	1
87·16	3	38·23	1	87·69	1
87·59	1	38·73	1+	88·23	1+
88·4	1+ br.	39·87	1	88·74	2
89·18	1	40·10	1	90·34	1
89·62	1	41·40	1	92·12	1
98·58	1	41·90	1	92·22	1
2400·02	1	42·22	1	98·37	1
00·70	3	42·74	1	99·80	1
02·22	1	43·45	1	2501·5	1+ br.
03·77	1	43·90	1	02·05	1
05·44	1	44·19	1	03·07	1
05·97	1	44·7	2+	05·36	1
08·33	1	49·50	1	07·02	2+ u.[1]
12·56	1	50·4	1+	10·75	1
14·01	1+	51·90	1	11·08	1
14·58	1+	53·97	1+	12·6	1+
15·30	1	54·70	1+	13·19	1
16·27	1	57·55	2+ r.	13·98	1
17·02	2+	58·17	1	14·5	2+ br. u.[1]
17·40	1	60·03	1	16·12	3+ u.[1] Ti?
18·78	2	61·08	1+	18·18	1
21·96	2	62·1	1+	19·40	2
23·55	1	63·85	1	21·52	1
25·98	1	67·41	1	24·30	3+
26·92	1+	68·45	1	27·51	1
28·08	1	69·43	1	28·02	1
29·52	1	70·95	2	28·69	2+ u.[1]
29·75	1	73·0	1+	31·06	1
30·3	1+	73·17	1	31·39	1
31·11	1	75·36	1	32·24	2
32·75	2 r.	76·71	1	34·15	1
33·63	1	77·42	1	38·05	1
33·86	1	78·33	1	41·56	1

[1] Rothe Componente stärker.

λ	i	λ	i	λ	i
2542·49	1	2591·05	2	2638·70	1+
44·06	1	92·23	1+	41·13	1
44·53	1	92·66	1	42·32	2
44·96	2	93·78	2	44·65	1
45·62	1	94·35	1	45·17	1
45·77	1	94·82	1	46·34	1
51·46	1	95·37	1	47·55	1
51·79	1	95·67	1	51·27	2
53·20	1	96·26	1	53·35	1
53·58	1	96·55	2	54·50	1
54·67	2	99·0	1+ br. Cu?	56·16	2
54·95	1+	2600·26	1	56·65	1
55·70	1	00·82	1	58·16	1
56·56	1	01·13	1	58·93	1
57·00	1	01·40	1	59·48	1
57·75	1	03·06	1	61·42	1
58·0	1+	03·57	2	63·20	1+
58·40	1	04·65	1	63·68	1
59·49	1	04·90	1	64·31	1
59·96	1	05·19	1	65·34	1
60·72	1	06·26	1	65·68	1
64·90	1	06·55	1	67·20	1+
65·51	1 Ti?	07·93	1	67·40	1
68·10	1	08·72	1	67·86	1
69·20	1	09·08	1	68·69	1
71·41	1	12·72	1	69·65	1
71·51	1	14·2	1+ br. Pb?	71·40	1
73·23	1	20·33	1	72·04	2
74·94	1	23·08	1	72·61	1 Mn?
76·13	1	27·51	1	73·70	2
76·52	1 Ti?	28·9	1+ br.	75·99	3
77·42	2	30·65	1	77·80	1
78·30	1	32·37	1 Mn?	78·8	1+ d.
79·12	1	32·62	1	80·17	1
80·68	1	33·25	1+ br.	80·75	1
81·65	1+	33·86	1	84·40	1
84·10	3	35·64	3	85·25	3
84·58	1	36·98	1	86·50	1
88·97	1+	38·05	1+	89·38	1
89·90	1	38·20	1+	91·89	1

λ	i	λ	i	λ	i
2694·63	2	2749·93	1	2840·5	1+
95·7	1+ br.	50·5	1+	41·25	2
97·21	3	52·59	1	42·73	2
98·4	1+	53·17	2+	44·55	2
99·00	1	54·67	1	45·95	1+
2700·28	1	58·45	1+	46·36	2
02·31	1	58·9	1+	48·4	1+ br.
02·64	1	59·1	1+	49·7	1+
02·8	1+	63·50	1	52·2	1+ Mg?
04·44	1	63·75	1+	52·49	1+
06·58	1	65·43	1+	58·57	1+
07·99	1	66·05	1+	61·23	2+
09·38	2	68·24	2	65·8	1+
10·28	1	71·50	1	67·55	1+
10·88	1	71·9	1+	68·66	3
14·80	1	75·20	1	75·52	3
15·45	1	80·37	2	77·14	3
16·00	1	85·06	1	77·8	1+ br.
16·75	2	91·49	1	79·5	1+ br.
17·43	1+	91·90	1	80·89	1
17·74	1	93·15	1	81·9	4+ br.
19·12	1 [1]	94·02	1	83·31	3
20·0	1+ br.	95·65	4 Mg?	88·96	1
20·4	1+ br.	97·85	3	90·47	1+
21·03	1+	2802·1	1+ Pb?	97·94	2
22·12	2	02·82	3 Mg?	99·39	2
23·77	1+	03·9	1+	2905·40	1
23·98	1+	10·99	1	08·39	2
25·55	1	11·83	1	09·05	1+
30·45	1	14·42	1+	10·71	2
33·37	1 r.	16·80	1	11·88	2
35·34	1	17·16	2	17·18	1
39·34	1	27·15	1	19·07	1
40·31	1	27 6	1+	27·91	3
45·07	1+	28·63	1	31·55	1
45·40	1+	33·3	1+ br.	41·61	3
45·85	1	35·20	1	46·0	1+ br.
48 89	1	38·3	1+ br.	47·00	1

[1] Ist nicht Fe.

λ	i	λ	i	λ	i
2951·01	3	3191·25	2	3274·10	1 Cu?
56·98	1	91·59	2	75·02	1
72·20	2	94·50	1	75·78	1
74·23	2	95·11	4	77·80	1
77·77	1	3203·50	2	79·38	1
79·10	1	05·14	1	80·1	1+ br.
80·02	1	06·50	3	80·82	1
80·86	1	15·72	3	80·95	1
90·45	2	17·1	1+ br.	83·63	3
94·90	1	23·0	1+ Ti	85·80	1
3012·65	1+	23·50	1	87·85	1 Ti
22·90	1+	23·97	1	88·02	1
24·85	1+	25·62	5	91·17	1
28·51	1	29·36	1	92·20	2
32·88	1	29·70	1	94·55	1
39·9	1+	34·65	2 Ti	96·16	1
44·87	1+	36·51	2	99·8	1+ br.
55·7	1+ br.	36·67	2 Ti	3301·7	1+
64·0	1+ br.	37·87	1+	02·5	1+ Na
64·7	1+ br.	38·2	1+	03·12	1+ Na
69·9	1+ br.	39·19	1 Ti	03·50	1+
76·96	1	41·12	1	04·97	1+
82·3	1+ br. Al?	42·15	1 Ti	05·78	1
88·0	1+ br.	47·69	2 Cu?	06·50	1
93·0	1+ br.	48·77	1 Ti	08·19	1
94·30	3	49·10	1	11·28	2
3127·6	2+	49·68	1	12·75	1
30·90	3	51·5	1+	15·37	1
45·52	2	51·78	1	18·10	1
52·2	1+ br.	52·03	1 Ti	18·97	1
59·0	1+ br.	53·07	1 Ti	19·10	1
63·50	4	54·20	3	19·38	1
73·35	1	54·98	1+	19·75	1
75·97	1	60·3	1+	20·98	1
79·6	1+ Ca	60·73	3	22·12	1
80·42	3	61·75	1+ Ti	24·1	1+
81·02	1	63·51	3	24·8	1+
84·36	1	64·77	1	26·76	1
87·57	1	72·37	1+	26·9	1+ (Ti)
89·45	1	73·22	1	31·16	2

λ	i	λ	i	λ	i
3332·3	1+ Mg ?	3389·0	1+	3448·36	1
32·8	1+ br.	92·11	2	48·83	1+
35·35	1	92·47	2	50·89	1
40·05	1	94·77	1	51·8	1+
40·6	1+	95·13	1	52·47	1
41·74	2	96·05	1	54·85	1
42·10	3	96·55	1+	55·03	2
43·83	2	98·45	1	56·6	1+
44·10	2	99·9	1+	59·88	1+
46·88	1	3403·15	1+	61·7	1+ (Ti)
47·01	1	05·56	1	62·75	1+
48·40	1	06·30	1	63·20	1
49·15	3 Ti	06·81	1	63·94	2
49·51	4	07·09	1	69·59	1
54·83	2	08·52	1	70·47	1+
58·52	3	08·82	3	71·3	1+ br.
61·07	1+	09·34	2	73·20	1
61·34	3 Ti	13·07	3	74·1	1+ br.
65·71	1	14·25	1	74·4	1+ br.
67·07	1	15·40	1	77·38	1 Ti
68·50	1+	16·13	1+	77·60	1
69·30	2+ br.	20·86	1	78·90	3
71·48	1	22·95	1+	79·75	4 d.?
71·65	1	23·88	1	80·40	1
72·8	1+	25·59	4	80·69	2
72·90	3 Ti	25·98	1	81·3	1+
74·37	1+	26·71	4	83·16	1+
75·03	1	27·57	1	84·25	2
76·20	1	29·17	1	84·80	1+
79·47	1	31·07	2	88·96	2
79·61	1	32·87	5	89·23	2
80·20	1	36·16	1+	91·18	2
80·55	1	37·05	1+	96·37	2
81·05	1	38·37	1	97·2	1+ br.
83·03	1	38·55	1	98·79	2
83·89	2 Ti	39·1	1+	3500·10	1+
85·18	1	40·06	1	03·05	1
86·39	2	42·9	1+	03·35	1+
87·95	1	44·45	1	04·05	1
88·45	1+	47·01	1	05·05	1 Ti

λ	i	λ	i	λ	i
3505·28	1	3559·74	2	3619·83	4
08·09	2	63·64	2	21·16	1
10·47	5	63·76	2	25·32	1
10·98	1 Ti	65·78	2+	25·87	1
11·20	1 d.?	66·88	1	26·73	3
15·59	4	68·20	1	28·30	1
17·02	1	68·65	1	28·81	1
17·20	1	68·89	1	29·6	1+
17 82	3	69·64	1	30·75	1
19·73	1	72·63	1	33·2	1+ br.
20·21	1	72·96	1+ Pb?	33·46	2
20·66	1	73·10	1+	33·85	1+
20·82	1+	76·00	5	34·60	2
23·30	1	77·00	1	35·60	2
27·23	1	77·86	1	37·58	1+
28·65	1+	78·82	1	37·70	1
29·03	1	79·10	1+	37·98	2
31·77	1	80·45	6	38·91	1
33·83	1	82·52	1	39·17	1
34·35	2+	84·37	1	39·47	1
35·47	6	84·67	1	39·73	6 Pb?
37·60	4	85·11	2	40·78	1
37·78	3	88·15	1+	41·5	1+ d. (Ti)
39·78	1	89·23	3	42·21	2
41·11	4	89·50	3	42·82	2
42·03	1	91·40	1	43·5	1+
42·75	1+	93·67	1	45·07	1
43·15	1	94·13	3	50·01	2
44·17	3	95·79	1	50·93	1
44·81	3	99·45	1	51·32	6
47·87	1	99·78	1	53·63	2 Ti
48·28	1	3601·34	1	56·09	1
49·24	1	02·70	3	57·3	1+ br.
49·45	1	07·54	2	58·9	1+ br.
50·63	2	10·8	1+ br.	59·73	6
51·31	1+	13·22	1+	60·51	3
52·14	1	13·60	1+	61·9	1+
54·69	1	14·94	1	62·23	1
54·81	3	15·66	1	62·48	1
56·77	1	19·62	4	63·80	1

λ	i	λ	i	λ	i
3664·83	4	3729·97	1	3781·17	4
66·70	1	32·20	1	82·57	4 r.
67·22	1	36·90	1	83·1	1+
68·77	1	39·95	5	84·00	1
69·15	2	40·11	3	84·41	1
69·88	1	40·90	3	86·38	1 Pb?
71·7	1+ Pb?	40·99	3	87·20	5
73·4	1+ br.	41·18	2	89·63	1
74·91	2	41·93	2 Ti	91·36	6
77·21	1	42·56	5 r.	92·17	1
78·20	2	44·15	2	94·62	1
81·85	1+	48·69	1	95·73	1+
83·69	8	50·75	1+	96·65	1+
85·34	5 Ti	51·4	1+	96·72	1
88·15	5+ d.	51·77	1+	96·99	1
88·85	1	53·00	2	98·26	6
89·20	1	53·30	2	3801·17	1
91·36	1	54·65	1	01·30	2
92·1	1+ br.	55·88	2	01·45	2
93·55	1	59·43	4 Ti	03·10	5
94·8	1+ br.	59·69	5	04·02	4
96·06	3	60·9	1+ br.	04·90	4
98·01	4	61·3	1+	06·35	1
3703·34	1	61·45	3 Ti	10·65	4 d.?
04·07	1	63·63	3	11·18	3
04·29	1	64·26	1	15·64	3
06·35	1+	65·21	2	19·00	5
10·61	1	66·27	2	25·02	4
11·49	2	69·28	1	27·15	1
11·93	1	70·12	1	28·37	2+
13·20	6 r.	70·87	2+ d.	29·06	1
13·95	3	71·98	2	30·13	1
17·25	8	73·30	1	31·3	1+
17·68	1	74·58	1	32·00	6
20·63	3	75·58	1	33·87	3
21·72	1	77·22	1+	35·30	2
23·61	1	77·40	1+	36·08	1
25·4	1+	77·8	1+	36·56	1
26·40	5	79·33	1+	36·87	1
27·39	1	79·7	1+ br.	37·18	1

λ	i	λ	i	λ	i
3839·17	1	3898·41	2	3952·50	2
41·95	1+	98·65	1	53·20	1
42·83	1	3900·68	1 Ti	55·82	2+
44·21	1	04·33	1	56·47	2 Ti
46·02	2	04·94	1 Ti ?	58·35	3 Ti
48·16	1	05·77	10 r.	59·48	1
53·53	1	07·40	1	61·72	15 r. Al
53·73	1	09·11	2	63·00	1 Ti
54·9	1+	09·76	1	64·43	1 Ti
55·30	1	13·16	1	65·85	3
55·60	2	13·64	1 Ti	66·40	5
56·1	2+ br.	14·83	4	68·6	30 Ca
57·8	1+	18·76	1	70·25	1
59·09	3	19·18	1	70·79	1
62·7	3+ br.	19·30	1	72·04	2
63·20	2+	19·85	2	72·69	2
63·52	2	20·95	1+	73·80	1
64·02	1	22·55	2+	76·67	1
64·50	1	24·66	1 Ti ?	76·80	1
65·17	2+	25·14	1	78·09	1
66·4	1+ br.	25·38	1	78·90	1
68·06	2	26·76	1	79·50	1
70·80	1+	29·44	1	80·65	2
71·32	1+	29·7	1+	81·17	1
75·55	1	30·00	1 Ti ?	81·93	2 Ti
75·88	2	32·0	1+	82·15	1
77·11	1	33·82	50 Ca	88·30	1
77·67	3	35·60	1	88·83	1
79·05	2+	36·18	2+	89·91	3 Ti
79·50	3 r.	36:60	1	91·3	1+
83·28	4	37·56	3	91·87	1
85·54	4	38·10	2	96·34	1
85·82	4	38·71	2+	98 80	3 Ti
86·20	1	41·41	2	99·35	2
89·8	1+ br.	43·80	3	4000·77	2
90·49	1	44·22	10 r. Al	01·3	1+ br.
91·43	3	47·67	1	07·00	1
93·86	3	47·91	1 Ti	08·43	1
94·17	4	48·80	2 Ti	09·06	1 Ti
96·05	2	49·60	2+	12·30	2+

λ	i	λ	i	λ	i
4013·41	2	4061·57	2 d.	4122·98	1
17·68	1	62·20	2 d.	24·03	10
22·5	1+	64·27	1	25·45	1+
23·30	1	64·76	1	25·75	1+
23·40	1+	64·98	1	26·4	1+
24·71	1	66·30	1	27·1	1+
26·51	1	67·35	2	27·7	2+ (Ti)
27·10	1	68·06	1	28·2	2+ br.
27·46	1	68·40	1	29·59	4
28·12	1	71·15	1	30·10	4
30·13	1	72·89	1	31·0	3+ br.
30·88	1 Mn?	73·28	1	31·7	1+ br.
31·5	1+	77·23	1	34·77	2
32·67	5	77·86	7 Sr	35·6	1+
33·36	2	78·6	1+ (Ti)	36·35	1
35·25	1	79·4	1+ Bi?	37·29	7
36·05	1	79·92	12	38·6	1+ br.
37·8	1+ br.	81·40	1	39·56	3
39·23	1	84·35	1	39·91	8
39·68	3 r.	85·03	2	42·42	1
40·7	1+ d.	85·6	1+	43·35	2
41·1	1+ d.	86·80	1	46·68	1
42·71	1	90·36	1	47·35	2
43·30	1+	93·25	1+ br.	48·05	2
44·30	4+ K	94·25	1+ br.	48·89	1
44·88	1	95·76	1	49·36	1
47·40	2+ K	96·17	1	50·26	4
48·76	1+	98·40	1	52·20	1
49·88	1	99·24	2	52·70	8
51·68	1	4100·56	3	58·15	1
54·6	1+	01·12	10	61·35	1+
55·2	1+ (Ti)	04·40	2+	62·9	1+ br.
55·33	1+	05·21	1	63·82	8
57·10	1	06·36	1	64·80	8
58·03	15 Pb	10·50	1	66·00	1
59·12	15	11·03	1	68·28	8
59·65	1	12·32	1	69·70	1
59·85	1	14·11	2	74·08	1
60·50	1	17·05	3	74·48	1
60·96	2	19·41	4	75·3	1+

λ	i	λ	i	λ	i
4177·1	1+	4268·8	1+	4388·55	1
78·04	1	70·87	2	92·93	1
79·99	1	74·95	1+	4402·8	1+ br.
81·32	1	77·66	1	10·41	2
81·50	1	79·65	1+	11·72	1
84·60	2	80·76	1	15·97	1
86·28	1	83·17	2	19 63	2
91·05	6	86·4	1+ br.	20·82	1+
92·22	4	87·15	2	25·60	1+ Ca
95·25	4	89·55	3	26·87	1
95·82	1	91·37	1	27·3	1+ (Ti)
98·65	1	92·23	1	27·5	1+
99·02	1	92·59	1	29·62	1+
4201·67	2	95·80	1	35·11	2 Ca
05·46	5	96·34	1	35·83	1 Ca
06·03	1	98·83	1	37·38	2
08·30	1	99·13	1 Ca	46·0	1+
12·20	1	99·76	4	46·35	1+
12·71	1	4300·72	1	47·31	3
14·90	2	01·17	4	54·95	2 Ca
15·67	2 Sr	02·70	4 Ca	56·05	1+ Ca
18·09	3	06·10	2 Ti	57·00	1
26·89	15 Ca	09·72	1	57·60	1
27·86	1	11·50	3	60·6	1+ br.
29·29	3	12·63	1	64·30	1
29·98	2	18·80	2 Ti, Ca	64·42	1
30·46	1	26·50	2	69·95	1
32 12	1	27·56	1	71·50	1
38·0	1+	31·57	2	72·75	1
39·45	1+	43·06	1	93·2	1+ br.
42·8	1+ br.	45·55	1+	4500·0	1+
45·43	1+ br.	48·88	1	03·26	1
46·42	1	49·26	1	08·65	1+
49·60	1	51·80	2	11·25	2+
53·11	1+	60·1	1+ br.	23·61	3
54·49	1	68·18	1	24·3	1+
54·81	1	68·64	2	27·9	1+ br.
55·58	2	78·14	1	31·00	1
62·22	3	85·1	1+	33·45	1 Ti
66·18	2	86·25	1+	34·99	1 Ti

λ	i	λ	i	λ	i
4535·80	1 Ti	4579·7	1+	4666·45	2
36·2	1+ Ti	81·86	2	67·45	1+
47·00	3	4600·46	1	72·30	2 d.?
54·09	1	06·99	5	75·56	2
54·28	1	07·53	1+ Sr	82·12	1 Ti
64·77	2	16·39	1	85·37	1
73·31	3	30·32	2	4708·49	1
74·52	1	49·13	2		
75·05	1	64·05	2		

XL. Zirkonium.

(Taf. III und IV.)

Das Zirkonium in Form fester Stücke verdanken wir der Güte des Herrn H. Moissan. An früheren Messungen des Bogenspectrums liegen vor die älteren von Lockyer[1] und aus jüngster Zeit die von Rowland und Harrison.[2] Das Funkenspectrum wurde bisher nicht untersucht. Die Substanz erwies sich als sehr rein, nur Fe, C und Ca konnte als Verunreinigung nachgewiesen werden. Die Zahl der Linien beträgt 1424.

Auffallend sind beim Zirkonium einerseits die starken Verschiebungen der Linien des Funkenspectrums gegen die des Bogenspectrums, sowie anderseits die geänderten Intensitätsverhältnisse. Es muss aber auch bemerkt werden, dass die Rowland'schen Messungen im Bogenspectrum gegen die Messungen desselben Autors im Sonnenspectrum Verschiebungen von der gleichen Grösse aufweisen. In beiden Fällen kommen Differenzen bis zu 0·2 AE vor, also Grössen, die weit ausserhalb der Beobachtungsfehler fallen.

1 Lockyer, Phil. Trans. 173 (1881).
2 Rowland und Harrison, Astroph. Journ. 7 (1898).

λ	i	λ	i	λ	i
2138 70	1+	2387·26	2	2512·81	1
63·81	3	89·43	2+	13·15	1
2227·88	1+	89·63	2+	17·00	1
76·5	1+	92·78	2	22·03	1
77·26	1	93·4	1+	32·60	3
80·43	1	93·90	1	35·28	1
86·73	3	99·08	1	42·21	4
91·22	3	2400·22	1	50·86	4
94·14	3	05·51	1	51·50	1
95·59	3	05·91	3	58·15	1+
96·96	3 C	06·80	3	67·18	2
2301·6	1+	06·93	1	67·73	5
08·18	2	10·21	1	68·99	7
13·53	1	17·78	1	71·50	8
17·33	3	19·51	3	74·03	1
22·00	1	20·76	4	83·49	2
22 58	1	26·48	1	89·13	3
24·60	1	33·63	1	93·78	5
24·89	3	34·66	2	99·45	1
30·44	3	38·83	1+	2600·45	1+
31·6	1+ br.	42·07	2	04·30	1+
36·58	1+	44·19	4	04·93	1+
42·45	1+	47·30	1	06·43	1
47·23	1	48·92	6	07·08	1
47·50	1	49·91	5	08·72	1+
51·02	1	57·54	6	09·80	2
51·28	1	60·61	1	11·99	1
51·77	2	64·30	1	13·70	1
53·29	1	65·51	1	15·65	1+
57·50	4	69·30	1+	16·06	1+
59·2	1+ br.	78·67	4 C	18·48	1
61·87	1	85·72	1	19·29	1+
63·97	1	87·94	3	20·70	8
70·27	1+	92·27	1	21·34	2
73·02	2	94·17	1	22·85	1
80·4	1+	95·27	1	26·51	1
82·15	1	96·61	2	27·04	1
82·51	1	2504·10	1	28·32	4
82·71	1	09·25	1	30·99	4
83·62	1	12·20	1	34·39	2

λ	i	λ	i	λ	i
2638·78	1	2715·85	3	2777·1	1+ br.
39·17	3	20·14	2	83·68	1
41·48	2	20·46	1	86·00	1+
42·6	1+ br.	21·48	1	87·1	2+ br.
43·46	1	22·71	4	89·6	1+
43·90	5	25·52	1	89·85	1
47·34	2	26·61	4	90·27	1
50·45	2	27·01	1	97·02	2
56·58	4	28·64	1	98·85	1+
61·98	1	30·00	1	99·27	2
62·58	1	32·80	3	2806·80	2+
64·40	5	34·99	3	07·23	1
65·23	1	35·91	3	08·0	1+ br.
67·89	2	38·46	1	08·25	1
69·53	2	38·84	1	09·53	1
71·06	2	39·8	1+	11 01	3
75·6	1+ br.	40·47	2	15·00	1
78·78	5	40·60	2	18·81	3
81·88	1	41·61	2	19·4	1+ br.
82·31	5	42·70	3	20·32	1
83·46	1	44·55	1+	22·79	1
86·42	4	45·99	3	24·44	1
89·56	2	47·02	1	25·65	3
90·63	4	48·90	1+	27·64	1
92·11	2	49·40	1+	28·00	1+
92·71	2	49·94	1+	34·01	2
93·62	3	50·50	1+	34·48	1
94·16	3	51·03	1	36·28	2
95·53	2	52·32	3	37·32	1
98·47	3	52·67	1+	38·13	1
99·70	2	53·3	1+ br.	39·41	2
2700·29	4	54·30	1	43·64	2
01·2	1+ br.	58·91	3	44·75	4
03·40	1+	60·2	1+ br.	46·27	1
04·80	1	62·01	1	48·28	2
06·48	1	68·88	3	48·62	1
09·13	3	73·47	1	49·30	1+
11·60	3	74·28	3	50·75	2+
12·50	3	75·38	1	51·40	1+
14·32	3	76·7	1+ br.	52·11	3

λ	i	λ	i	λ	i
2853·8	1+ br.	2937·88	1	3055·00	4
54·55	1	45·56	1	57·37	1
56·21	1	49·12	3	60·24	1
59·7	1+ br.	51·66	2	61·49	1
61·1	1+	52·40	1	63·8	1+ br.
61·85	1	55·92	3	64·78	1
65·28	1	62·81	2	65·34	1
65·77	1	64·7	1+	68·2	1+ br.
69·26	2	69·10	3	75·72	1
69·94	3	69·77	3	85·5	1+ br.
72·68	1	76·00	1	86·57	1+
74·3	1+ br.	76·76	2	95·29	3
76·60	1	78·21	2	99·42	3
77·69	1	79·35	2	3106·79	4
82·23	1	81·18	2	09·27	1
83·93	1	85·53	1	11·02	1
84·2	2+ br.	87·93	1	14·15	1+
86·8	1+	89·0	1+	15·86	1
88·16	1	91·52	1+	16·8	1+ br.
89·54	1	98·6	1+ br.	20·90	1
92·0	1+ br.	3000·8	1+ br.	25·33	2
95·45	1+	03·88	2	26·10	3
98·85	1	05·6	1+ br.	28·96	1
2901·74	1	08·24	1	29·38	4
01·97	1	11·88	1	29·96	4
02·40	1	13·44	1	30·75	1+
03·75	2+	18·6	1+ br.	31·23	1
05·32	2	19·96	1	32·22	1
07·50	1	20·53	2	33·70	4
08·05	1+	21·3	1+ br.	34·85	1
10·40	1	24·85	1+	37·08	1
16·12	3	25·25	1+	38·88	4
16·78	1	25·87	1	39·96	1
18·39	3	26·3	1+ br.	49·4	1+ br.
24·75	1	28·18	3	49·98	1
25·7	1+	29·63	1	55·90	3
27·15	4	31·04	2	57·19	2
31·25	1+	36·57	3	57·94	1
34·73	1	44·3	1+	59·26	1
36·42	1	48·45	1+	61·12	1 r.

λ	i	λ	i	λ	i
3164·54	3	3237·66	1	3313·02	1
65·68	2	41·26	4	13·89	3
66·17	3	42·32	3	14·70	4
66·48	2	44·10	1	16·35	1
66·79	1	47·67	2	18·70	3
72·3	1+ br.	50·62	4	19·19	3
74·9	1+ br.	53·81	1	21·0	1+ br.
75·8	1+ br.	54·42	1	21·51	2+
77·00	1	55·4	1+	23·21	4
78·30	3	56·11	1	24·30	1
81·17	1	56·67	1	27·05	5
81·79	3	57·8	1+ br.	27·85	1
82·15	3	59·4	1+ br.	29·0	1+ br.
83·08	5	60·24	1	32·08	1
84·2	1+ br.	64·96	2	32·88	1
91·31	1	69·81	1	33·75	1
92·11	3	71·30	3	34·49	4
93·18	1	72·39	4	34·81	4
94·27	1	73·22	8	38·07	2
96·9	1+	74·13	1	38·61	4
97·2	1+	75·28	1	40·80	6
99·55	1+	75·80	1	44·00	2
3200·79	1	76·55	1	45·00	4
04·50	1	79·03	3	50·75	1+ br.
05·05	1	79·45	5	51·4	1+ br.
08·42	1	80·92	2	52·21	1
11·10	1	81·5	1+ br.	53·3	1+ br.
12·17	2	83·09	4	53·80	1
13·01	2	84·89	4	54·59	3
14·40	4	86·01	4	56·28	4
18·84	1	87·46	2	57·48	4
20·80	1	88·52	1	60·20	4
22·19	3	88·99	3	60·61	1
24·04	1	95·20	1	61·35	1+
29·00	4	96·59	3	62·1	1+
30·0	1+ br.	3302·89	3 r.	62·77	3
31·89	4	05·33	4	64·00	3
34·24	2	06·48	6	68·01	3
36·26	1	10·10	3	69·42	2
36·75	2	11·53	3	70·73	1

λ	i	λ	i	λ	i
3373·05	1	3431·71	3	3482·96	1
73·61	4	32·59	4	83·17	1
74·89	5	34·08	4	83·70	7
76·42	3	34·9	1+ br.	84·8	1+
77·61	3	37·30	4	85·48	3
78·47	3	38·39	15	87·1	1+
80·07	1	40·54	2	92·8	1+
84·8	1+ br.	40·70	1	93·46	1
85·40	1	41·12	1	94·3	1+ br.
88·07	5	41·8	1+	96·40	20
88·49	5	42·72	1	97·21	1
89·95	1	43·69	3	98·00	8
92·20	15	46·71	2	99·78	4
93·30	4	47·45	3	3500·31	3
94·79	2	50·03	1	01·50	1
96·51	3	54·71	3	01·67	1
96·71	3	56·02	2	02·2	1+
98·10	2	57·30	1	03·3	1+
99·51	4	57·75	6	05·67	5
99·95	2	59·10	5	05·88	4
3401·94	1	60·10	3	06·23	2
02·68	1	61·22	2	06·66	2
03·10	4	63·23	12	07·80	3
03·89	4	65·3	1+ br.	09·48	3
05·03	6	65·76	1	10·61	4
08·23	5	66·6	1+	11·70	2
08·90	1	69·18	1	12·50	1
10·44	8	70·10	3	12·81	2
12·0	1+ br.	71·31	4	14·79	3
13·55	3	72·53	1	17·56	1
14·87	6	73·02	1	18·4	1+
16·80	1	75·60	1	18·9	1+
19·22	3	76·1	1+	19·80	3
19·76	1	77·8	1+	20·45	1
21·05	1	78·45	2	21·01	3
21·6	1+	78·68	2	22·35	1
24·0	2+ br.	79·19	3	23·20	1
25·02	3	79·58	10	23·78	1
27·23	2	80·59	3	24·38	1
30·73	10	81·36	10	24·69	1

λ	i	λ	i	λ	i
3526·00	4	3570·25	1	3615·09	10
27·58	4	72·70	12	16·90	1
30·17	2	73·30	2	17·02	1
30·35	2	75·89	2	18·61	2
31·00	4	77·10	10	18·96	2
33·35	3	77·74	1	20·08	1
35·30	2	78·40	3	21·65	1+
35·67	2	80·11	1	22·0	1+ br.
36·8	1+	80·65	1	24·10	4
37·11	3	81·36	1	25·57	1
38·31	1	82·30	3	26·6	1+
39·17	3	85·70	1	27·7	1+
40·05	1	86·42	3	29·20	2
42·87	12	87·12	1+	30·30	5
46·3	1+ br.	88·19	3	31·64	1
47·90	3	88·51	2	32·23	1
48·60	1+	88·96	2	32·52	1
49·73	3	91·87	1	33·70	6
49·90	2+	93·31	1	34·33	2
50·67	2	93·80	1	36·69	4
52·20	10	94·35	1+	38·87	1
52·91	1	96·45	1+	40·67	1
53·54	1	97·60	1+	44·54	2
54·31	4	99·2	1+	45·04	1
55·70	1	99·55	1	47·08	1
56·89	15	3600·11	6	48·55	1
59·13	2	01·40	4	49·30	1
60·37	1	02·57	1	50·90	4
61·37	1	02·97	1	51·65	3
61·81	2	03·95	1+	55·72	4
62·66	1	04·92	1	57·01	1
63·9	1+	05·6	1+ br.	58·5	1+
64·33	1	06·06	1	58·7	1+
65·61	4	07·60	5	61·10	2
66·30	3	08·47	1	61·40	2
67·46	1	09·8	1+ br.	61·49	2
68·32	3	12·13	10	62·32	4
69·03	2	12·61	2	63·81	4
69·18	1	13·30	5	65·20	1
69·50	1	13·88	1	65·51	1

λ	i	λ	i	λ	i
3665·98	1	3717·94	1	3764·60	3
67·20	2	19·02	3	65·33	1
67·53	1	19·45	1	66·99	10
68·69	4	21·86	2	68·05	3
69·2	1+	23·40	1	71·53	1
71·49	8	24·2	1+	72·29	4
72·81	2	24·94	1	73·7	1+
74·98	10	26·80	1	74·25	1
75·90	1	27·90	7	74·75	1
79·10	6	28·83	1	75·61	1+
79·80	1	29·98	3	76·17	1+
80·54	1	30·61	1	77·82	1
82·32	2	31·50	10	80·78	3
82·81	2	33·48	1	81·80	1
84·1	1+ br.	33·93	1	82·48	3
87·22	1	35·75	1	82·97	3
92·75	1	36·70	1	86·80	2
94·00	2+	37·54	2	90·13	1
94·6	2+	38·32	3	91·60	3
97·70	3	39·6	1+	92·55	3
98·41	10	39·95	1+	93·53	2
99·90	1	40·50	1+	96·71	8
3700·82	1+	42·0	1+ br.	3800·91	3
01·30	2	42·4	2+ br.	07·55	2
02·05	1+	44·2	1+	08·38	2
03·0	1+ br.	44·7	1+	09·85	2
03·71	1	45·16	1	14·15	1
05·0	1+ br.	46·18	10	15·18	2
05·58	1	48·07	1+	16·86	2
05·70	1	50·87	3	17·80	6
06·79	2	51·85	12	18·90	1
09·51	10	54·25	1+	20·00	1
11·2	1+	54·95	2	22·60	3
11·85	1+	56·42	1	24·55	2
12·15	2	57·10	1	24·90	2
13·13	1+	57·99	3	25·91	2
14·30	2	58·40	1	27·40	2
14·99	6	59·3	1+	27·65	2
16·23	1	61·16	1+	34·00	2
17·18	1	62·70	1	36·18	2

λ	i	λ	i	λ	i
3836·98	12	3918·25	1	3956·90	2
38·49	3	20·35	1	57·50	1
43·30	8	21·17	1	58·39	15
47·22	3	21·99	3	60·82	1
48·83	1+	22·51	1	61·71	4
49·48	3	23·27	1	62·4	1+
52·60	1	23 65	1	63·90	2+
53·30	2	24·05	2	65·07	1
55·61	2	25·02	1	66·80	3
64·12	3	25·8	1+	68·39	3
64·57	3	26·96	2+	68·61	2 Ca
74·56	1	27·60	1	71·00	1+
77·78	3	29·71	5	72·43	2
79·21	3	31·07	1+	73 68	3
82·20	3	31·55	1+	74·3	1+
85·61	3	32·52	1+	74·97	1
89·47	1	33·34	2	75·47	3
89·62	1	33·8	3 Ca	76·30	1
90·58	4	34·39	4	77·60	3
91·61	3	34·99	4	78·35	2
92·19	2	36·28	3	78·86	2
92·66	1	38·3	1+ br.	79 50	1+
94·00	2 d.	38·9	1+ br.	79·7	1+
94·52	1	39·8	1+ br.	81·79	3
96·73	2	40·78	1	82·20	2
97·82	2	41·75	3	82·30	2
98·07	1	42·09	3	83·45	1
98·72	1	42·96	1	84·15	1
3900·08	1	44·14	1	84·90	3
00·71	3	45·2	1+ br.	86·22	1
01·70	1+	45·5	1+ br.	86·90	1
03·92	1	46·2	1+ br.	87·4	1+
06·30	1	46·4	1+ br.	87·94	1
08·25	1+	46·96	1	88·31	1
09·1	1+	49·7	1+ br.	88·80	2
12·3	2+ r.	51·45	1	89·39	2
14·59	4	51·96	1	89·65	2
16·16	8	53·00	1	91·31	15
16·80	2	55·79	1+	92·2	1+
17·63	1	55·94	1	92·6	2+

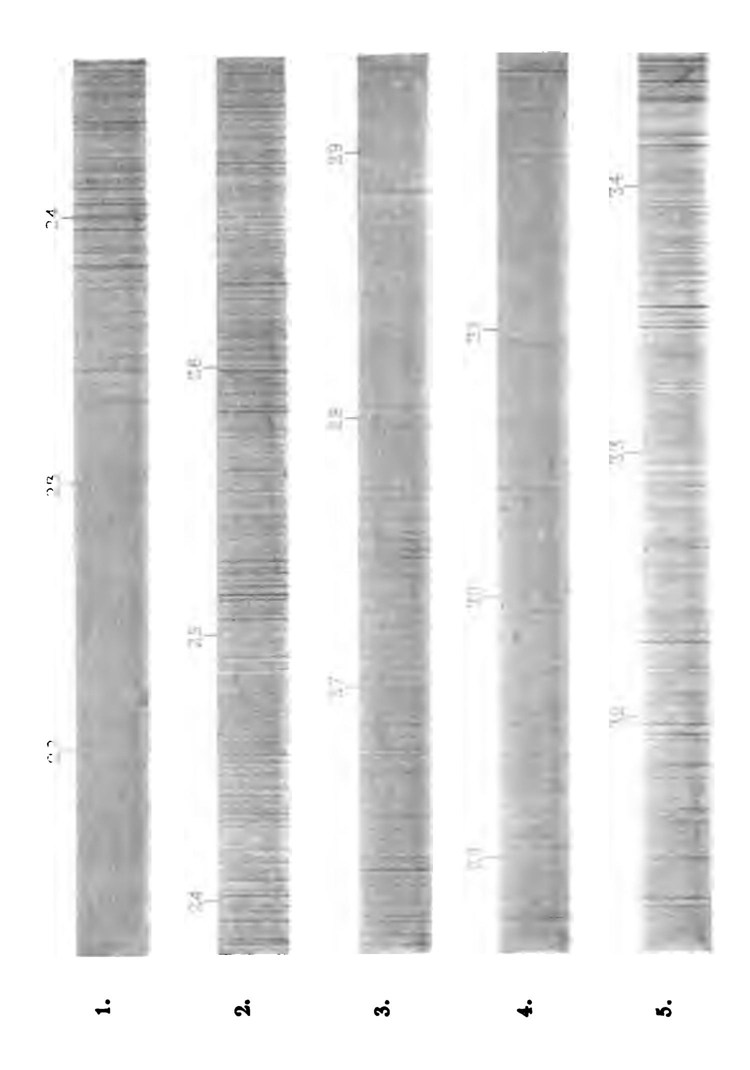
λ	i	λ	i	λ	i
3993·23	1	4040·49	3	4083·29	3
94·26	1	41·90	2	84·50	3
96·98	1	42·49	2	85·89	4
99·18	15	43·80	3	87·88	2
4001·21	1	44·80	3	88·3	1+
01·37	1	45·90	8	90·70	4
02·68	2	46·3	1+	91·00	2
03·28	2 d.	48·15	1+	93·32	2
04·51	2	48·93	10	94·42	2
05·02	2+	50·52	8	96·33	1
07·80	3	52·9	1+	96·80	3
09·56	1	53·3	1+	99·50	2
10·96	1	54·60	2	4102·7	1+ br.
12·48	3	55·20	3	07·75	2
13·99	1	55·90	3	08·60	2
16·10	1	56·65	1	10·29	3
17·16	2	58·30	1	10·84	1
17·49	2+	58·78	2	19·99	1
18·60	4	59·37	1+	20·38	1
20·51	1	60·25	1 d.	21·68	2
21·15	1+	60·78	2	21·87	1
22·6	1+	61·70	3	22·70	1
23·22	1	62·83	1	23·53	1
23·47	1	63·47	1	28·08	1+ d.
24·20	3	64·38	4	30·63	1
24·70	3	65·37	1	31·50	1
25·16	3	68·10	1	32·14	1
27·40	3	68·90	2	33·16	1
29·17	2	69·73	1	33·91	1
29·88	4	71·30	3	34·46	2
30·26	3	72·90	4	35·85	2
30·87	2	75·09	2	37·20	1
31·57	2	75·20	1	40·18	1
33·8	1+	76·70	2	43·39	1
34·30	3	77·27	3	45·30	1+
35·01	1	78·49	3	47·53	1
36·10	3	80·3	1+	49·43	20
36·70	1	80·64	1	51·23	6
38·35	1+	81·48	5	52·87	2
39·7	1+ br.	82·45	2	53·96	1

λ	i	λ	i	λ	i
4155·30	1	4199·30	3	4244·4	1+ br.
56·49	10	4201·69	3	46·65	1+
57·93	1	05·00	1+	46·50	1+
59·10	1	06·20	2	49·55	1+
59·77	1	08·30	1	50·89	1
61·48	10	09·21	10	53·76	2
62·60	1	10·50	1	55·55	1
63·6	1+	10·87	3	56·26	1
65·55	1+	11·50	1	56·66	2
65·80	1+	12·17	5	58·31	5
66·60	3	12·79	1	61·42	1
67·30	1+	13·45	1+	61·65	1
67·88	1+	14·58	3	64·23	1
68·40	1+	15·50	1	65·17	2
68·90	1+	15·95	1	66·96	2
69·55	2	17·45	1+	67·2	2+ br. (C)
70·75	1+	18·60	2	67·55	1
71·65	2	20·08	1	68·22	2
73·36	1	20·30	1	69·40	1
74·56	1	22·67	2	69·90	1
77·75	1+	24·42	2	70·37	1
80·08	7	24·8	1+	72·48	1
81·13	1	25·40	1	73·07	1
82·75	1+	25·67	1	73·80	4
83·51	3	26·58	1	74·95	1
84·62	1	26·88	1 Ca	76·91	1
86·25	1	27·98	4	77·60	2
86·89	4	30·37	1	80·51	1
87·30	1	31·88	5	82·53	8
87·80	3	32·64	1	84·95	1
91·75	3	34·89	2	85 44	1
92·03	2	36·23	2	86·78	3
92·30	1	36·81	3	89·45	2
94·20	1	37·57	2	90·41	1
94·66	1	39·58	4	91·38	1
95·00	2	40·59	3	91·54	1
96·32	1	41·50	3	93·41	4
96·50	1	41·98	3	94·67	1
97·95	1+	42·83	1	95·08	2 r.
98·5	1+ br.	43·74	1	97·00	5

λ	i	λ	i	λ	i
4300·76	1	4342·80	1	4401·10	1
01·2	1+	43·23	1	01·57	2
02·10	5	43·59	1	03·16	1
02·80	1	45·69	1	03·67	4
03·12	2	46·70	2	04·98	2
03·60	1	47·42	1	08·50	1
04·92	2	47·53	1	09·82	1
06·4	1+ br.	48·15	3	11 83	1
07·42	1	49·10	1	12·15	1
07·62	1	50·71	1	13·28	2
08·13	1	54·08	1	14·37	1
09·20	4	55·7	1+ br.	14·80	4 r.
09·36	1	56·6	1+ br.	16·10	1
09·99	1	58·95	2	17·6	2+
11·02	1	60·05	10	18·40	1
12·47	2	61·01	2	19·50	1
14·17	1	62·19	1	20·70	2
17·57	6	64·30	1+	21·22	1
19·24	1	64·50	1+	22·97	1
20·9	1+	66·69	3 r.	27·44	2
21·35	1	68·1	1+	29·28	1
21·62	1	68·7	1+	29·55	1
22·50	1	71·27	10	31·30	1
23·19	1	72·73	1	31·70	2
23·81	2	73·28	1	35·7	1+
24·24	2	75·7	1+ br.	36·55	1
25·62	2	80·12	12	36·94	1
25·87	2	83·20	1	38·23	2
27·65	1	83·35	1	40·80	5
29·76	1	84·4	1+	42·70	1
33·59	8	84·53	1+	43·31	10
34·9	1+	86·70	1	44·53	1
36·30	1	88·72	2	44·74	1
36·54	1	89·81	1	46·59	1
36·87	1+	90·36	1	48·18	1
37·90	3	94·73	1	49·14	1
39·80	3	95·14	2	50·49	2
40 7	1+	95·42	2	55·08	5
41·40	3	99·62	1	55·64	1
42·42	1	4400·45	2	56·50	2

λ	i	λ	i	λ	i
4457·71	5	4513·56	1+	4574·78	4
59·22	1	15·62	1	75·78	3
60·57	1	16·03	1	76·37	1
61·50	5	19·10	1	82·50	1
64·35	1	22·2	1+	84·44	1
66·62	1	23·17	1	85·13	1
67·12	2	23·33	1	85·9	1+
68·42	1	24·10	1	90·35	1
68·98	1	26·32	1	90·73	2
69·75	1+	28·2	1+	4602·20	2+
70·52	2	33·4	1+	02·80	3
70·80	3	33·88	1	04·59	2
75·48	1	36·00	3	09·32	1
78·66	1	37·8	1+	09·45	1
81·00	1	38·9	1+	10·00	1
82·28	2	40·19	2	10·30	1
82·72	1	42·49	3	13·55	1+
85·71	2	50·2	1+	14·20	3
90·47	1+	50·9	1+	20·10	1+
91·78	1	53·25	1	22·90	1
94·78	10	54·29	7	25·60	1
95·76	2	55·30	2	26·62	3
97·27	10	55·74	2	27·90	1
99·2	1+ br.	56·46	1+	29·33	4
4500·9	1+	58·25	1	34·20	3
01·7	1+ br.	58·90	1+	34·87	1
04·07	1+	62·33	1	38·05	1+
04·3	1+	64·0	1+	40·31	1
07·39	3	65·70	2	45·01	2
13·08	1	70·9	1+		

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente. XIII.



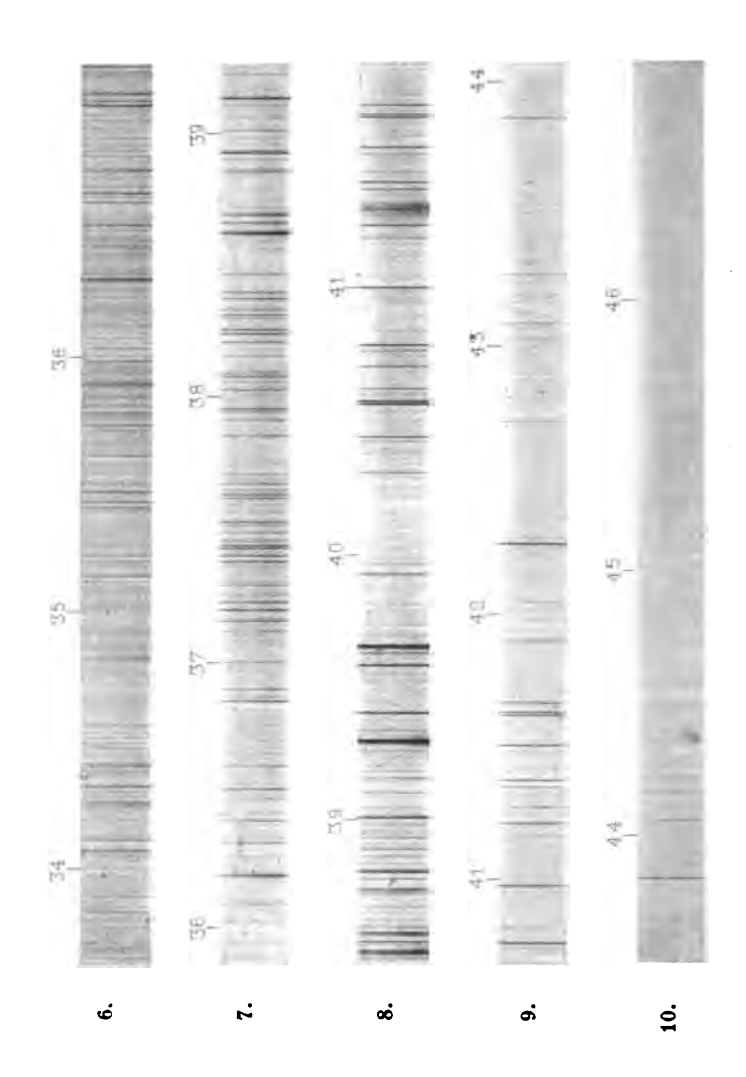
1. 2. 3. 4. 5.

Tantal.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

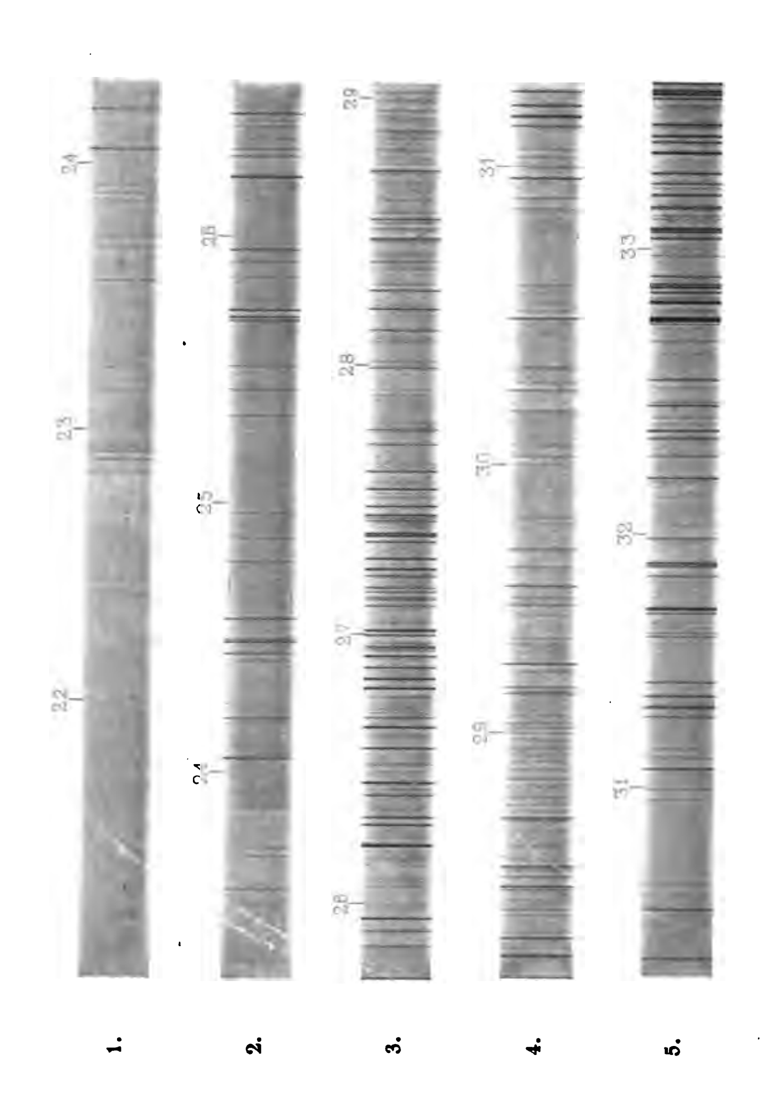
Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Classe, Bd. CVII. Abth. IIa. 1898.

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente. XIII.



Tantal.

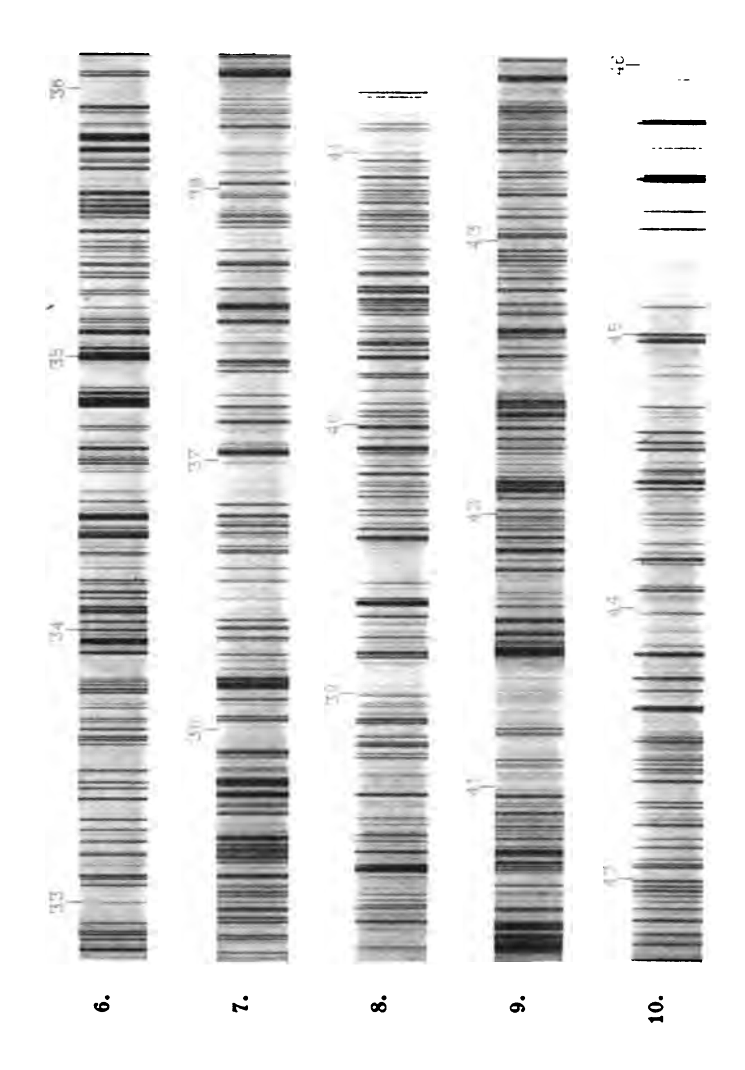
Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.



Zirkonium.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente. XIII.



6. 7. 8. 9. 10.

Zirkonium.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Über Wechselstromcurven bei Anwendung von Aluminiumelektroden

von

P. **Emerich Wippermann**, ph. st.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität Prag.

(Mit 12 Textfiguren.)

Die altbekannte Thatsache, dass Elektroden aus Aluminium und irgend einem indifferenten Metalle in einer elektrolytischen Zelle dem Strome in einer Richtung einen unendlich viel grösseren Widerstand bieten als in der anderen, haben vor einiger Zeit Graetz[1] und Pollak[2] dazu benützt, um Wechselstrom wenigstens theilweise in Gleichstrom zu verwandeln. Es erschien nun nicht ohne Interesse, die Stromcurve bei einem derartigen Vorgange experimentell festzustellen. Im Anschlusse an eine Arbeit von Prof. Lecher[3] habe ich viele solche Messungen vorgenommen; trotzdem die Resultate, weil sich das Phänomen als ein sehr complicirtes erwies, einer einfachen Deutung kaum zugänglich sind, hoffe ich mit der Wiedergabe der allereinfachsten Formen einiges Interesse zu finden.

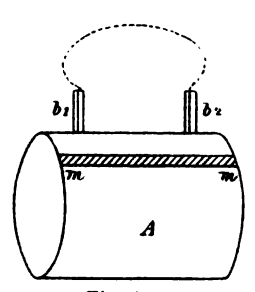


Fig. 1.

A ist ein Hartgummicylinder, der an der Axe der Wechselstrommaschine befestigt ist, mit einem eingelassenen Metallstreifen *m*, b_1 und b_2 sind zwei Bürsten.

[1] Graetz, Wiedemann's Annalen, 62, S. 323, 1897.
[2] Pollak, Elektrotechn. Zeitschrift, S. 359, 1897.
[3] Lecher, diese Sitzungsberichte, Juni 1898.

welche auf diesem Cylinder schleifen. Die Stromleitung $b_1 b_2$ wird dann, so oft beim Durchrotiren *m* die metallische Verbindung herstellt, geschlossen werden. Durch solche Vorrichtungen ist es bekanntlich gelungen, irgend einen bestimmten Theil der Phase des Wechselstromes abzufangen. b_1 und b_2 sind an einer Kreistheilung montirt und können an verschiedene Stellen des rotirenden Cylindermantels gebracht werden, so dass man nach und nach sämmtliche Punkte der Sinuscurve zu bestimmen in der Lage ist. Mir selbst stand keine Wechselstrommaschine, sondern nur ein von der Firma Ganz ausgeführter Gleichstrom-Wechselstrom-Umformer zur Verfügung, welche Thatsache aber für die Ausführung der Messungen ganz irrelevant ist. Die später folgenden Diagramme geben als Abscisse die Phase in Graden, als Ordinate die entsprechende Stromstärke in Ampère.

Die gesammte Schaltung der Versuchsanordnung ist dann folgende: $W_1 W_2$ sind die Klemmen des Wechselstromes. Der-

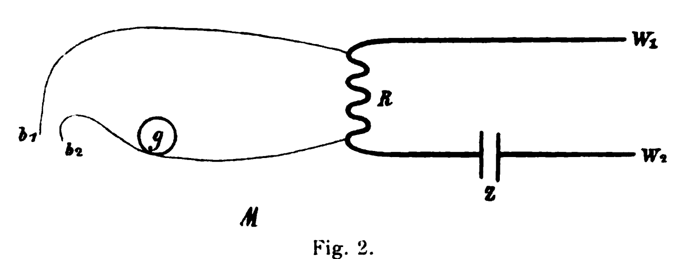


Fig. 2.

selbe fliesst durch einen Rheostaten *R* und dann durch die Zersetzungszelle *Z*. Von den Endklemmen des Rheostaten ist eine Zweigleitung über den eben geschilderten Schleifcontact $b_1 b_2$ und ein D'Arsonval-Galvanometer geführt. Das D'Arsonval-Galvanometer mit einem Widerstand von 587 Ohm hat überdies noch eine Glühlampe mit einem Widerstande von circa 500 Ohm vorgeschaltet. Diese Nebenleitung ist somit ziemlich inductionsfrei und ihr Widerstand unendlich gross gegen den Widerstand des Rheostaten, welcher 7·03 Ohm beträgt. Da die Nebenleitung nur zeitweilig von einem Strome stossweise durchflossen wird, so wird zur Reducirung der Galvanometerausschläge in diese Nebenleitung eine variable elektromotorische Gegenkraft (kleine Accumulatorenbatterie) eingeschaltet, welche

den Galvanometerausschlag immer auf Null bringt. Auf diese Weise wird zunächst für die jeweilige Stellung des Schleifcontactes $b_1 b_2$, d. h. für die jeweilige Phase die entsprechende Potentialdifferenz an den Enden des Rheostatenwiderstandes gefunden und daraus die Stromstärke im Wechselstromkreis berechnet.

Die Zersetzungszelle Z besteht aus fünfprocentiger Kalialaunlösung. Die eine Elektrode war Platin, die zweite Aluminium. Die Grösse einer Elektrode war circa 20 cm^2.

Ich gehe nun zur Beschreibung der Resultate über. In folgender Fig. 3 stellt die Curve I die Erscheinung dar, wenn in Z zwei Platinplatten sind.

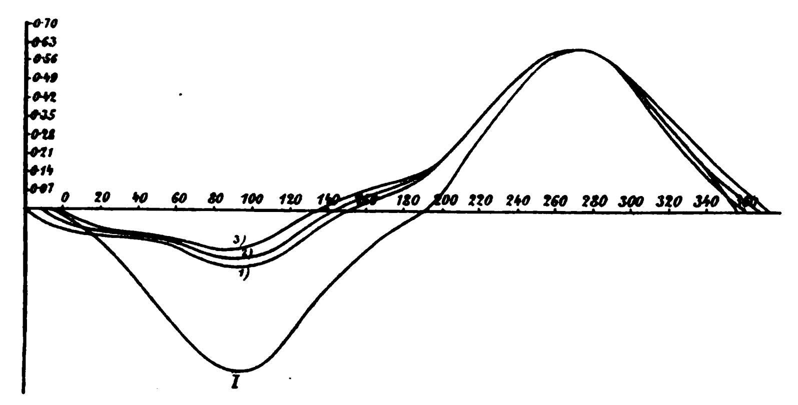


Fig. 3.

Wird die eine Platinplatte durch Aluminium ersetzt, so zeigt sich eine auffallende Änderung dieser Curve, wobei es aber ziemlich gleich bleibt, ob 1, 2 oder 3 Zellen hintereinander geschaltet werden (Curve 1, 2, 3). Die Abflachung der Curve findet dann statt, wenn Aluminium Anode ist. Um die Flächenwerthe zu integriren, wurden dieselben auf gutes Papier gezeichnet, ausgeschnitten und abgewogen.

Das Verhältniss der negativen Stromfläche zur positiven in Procenten ausgedrückt, nenne ich kritisches Verhältniss. Dasselbe beträgt in letzterem Falle (Fig. 3) 23 %.

Fig. 4 ist ebenso gewonnen. 1, 2, 3, 4 bedeutet, dass 1, 2, 3, 4 Zellen hintereinander geschaltet sind. Aber hier ist bereits

länger gebrauchtes Aluminium in Anwendung gebracht. Das kritische Verhältniss ist 15 %. Durch Vergleichung dieser

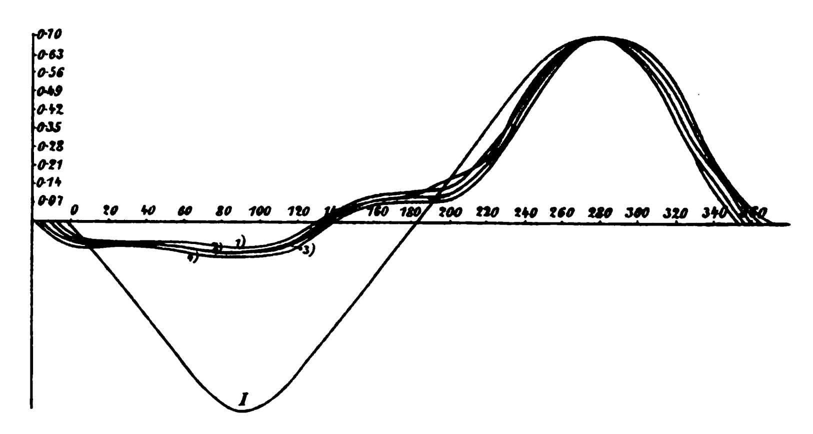


Fig. 4.

beiden Ergebnisse zeigt sich, dass ein längeres Formiren der Platten im Wechselstrom das Charakteristische der Erscheinung begünstigt.

Vergrössert man die Oberfläche der Elektroden bedeutend, so beeinträchtigt das den Effect, wie nachstehende Figur zeigt.

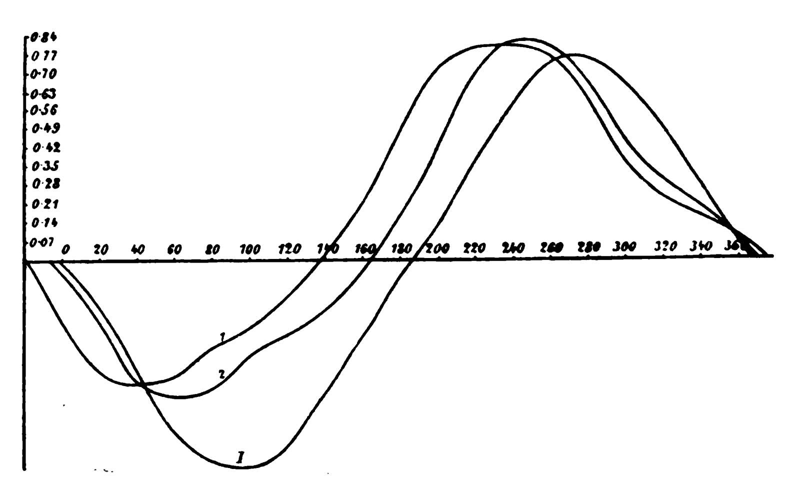


Fig. 5.

1 gibt den Strom, wenn vier Zellen nebeneinander geschaltet sind, mit frischen Elektroden, und 2, wenn die Elektroden etwas formirt wurden. Das kritische Verhältniss der Curvenflächen ist hier 58%, respective 47%. Eine Erklärung dieser Erscheinung gewinnt sich leicht im Anschluss an jene Tabelle, die Prof. Lecher in seiner eingangs citirten Arbeit gibt.

Ich theile noch einige Versuche mit, welche den Einfluss der Frequenz und der Spannung zeigen soll. Durch einen Transformator war es mir möglich, die gewöhnliche Spannung von circa 35 Volt, wie sie bei den bisherigen Versuchen herrscht, auf 50 und 70 Volt zu steigern. Überdies konnte ich durch passende Schaltung im Nebenschluss des Ganz'schen Umformers die Tourenzahl von 1190 auf 900 und 640 in der Minute herunterdrücken.

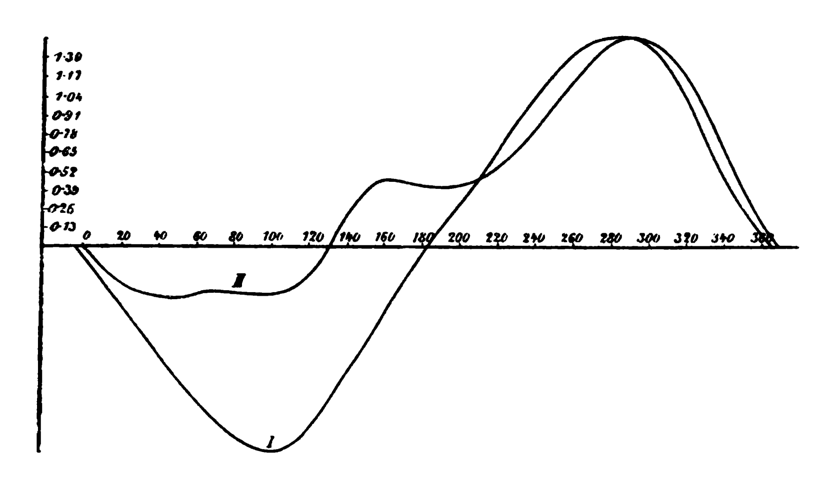


Fig. 6.

Fig. 6 gilt für 70 Volt und eine Tourenzahl von 1190. Die Aluminiumelektrode ist schon gebraucht.

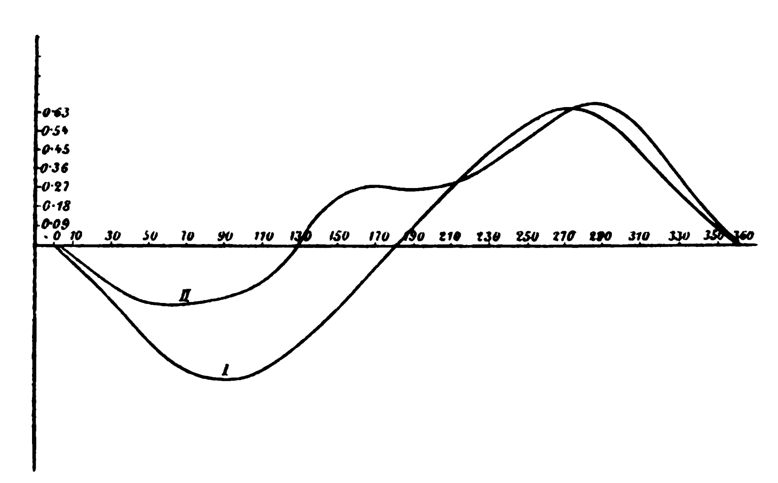


Fig. 7.

Fig. 7 gilt für 50 Volt und die gleiche Tourenzahl wie vorher.

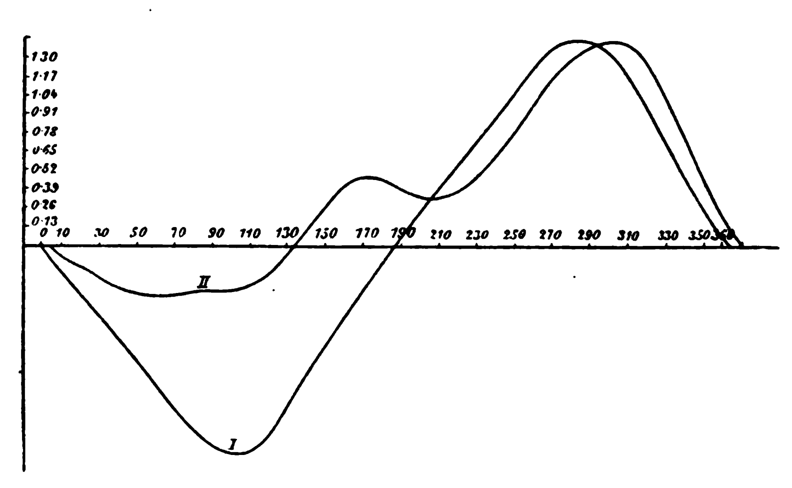


Fig. 8.

Fig. 8 gilt für 70 Volt und Tourenzahl 900.

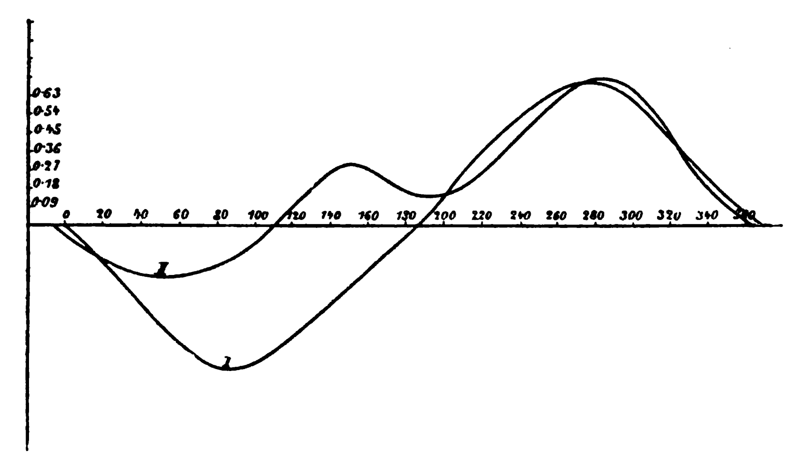


Fig. 9.

Fig. 9 gilt für 50 Volt und dieselbe Tourenzahl.

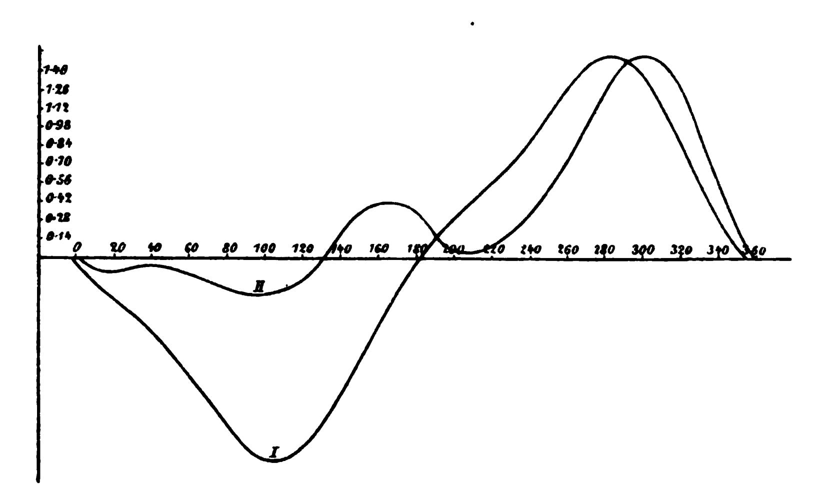


Fig. 10.

Fig. 10 gilt für 70 Volt Spannung und Tourenzahl 640.

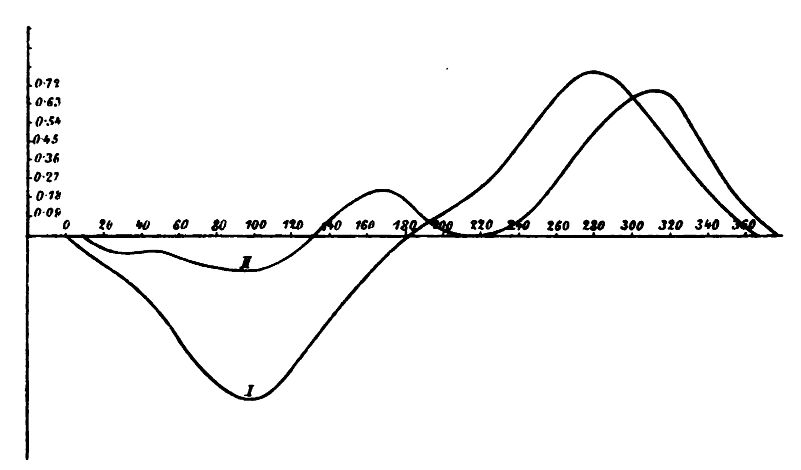


Fig. 11.

In Fig. 11 ist die Spannung 50 Volt, Tourenzahl dieselbe wie vorher.

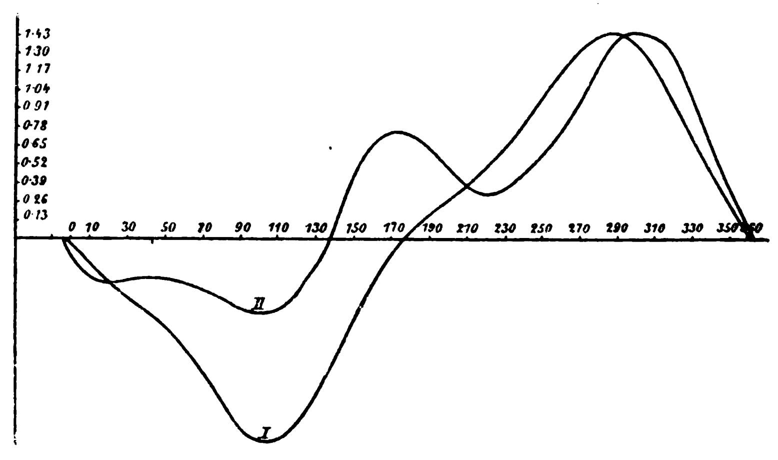


Fig. 12.

Fig. 12 zeigt das Flächenverhältniss bei Anwendung grösserer Aluminiumelektroden als bisher und der Tourenzahl 640.

Folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die gewonnenen Resultate.

1. Bei einer Spannung von 35 Volt.

Anzahl und Art der Elektroden	Tourenzahl	Kritisches Verhältniss in Procenten
1 frische	1190	23·15
1 gebrauchte		15·58
4 frische parallele		57·92
4 gebrauchte parallele		46·81

2. Bei einer Spannung von 50 Volt.

Anzahl und Art der Elektroden	Tourenzahl	Kritisches Verhältniss in Procenten
1 gebrauchte	1190	32·06
	900	24·22
	640	22·00

3. Bei einer Spannung von 70 Volt.

Anzahl und Art der Elektroden	Tourenzahl	Kritisches Verhältniss in Procenten
1 gebrauchte	1190	22·45
	900	18·63
	640	15·54
4 gebrauchte	640	32·80

Während eine Erklärung der merkwürdig bizarren Formen oben gegebener Curven wohl Schwierigkeiten begegnen dürfte, fügen sich die in der Tabelle mitgetheilten Zahlen gut einer Beurtheilung von jenen Gesichtspunkten aus, wie sie Prof. Lecher in seiner früher citirten Arbeit versucht hat.

XIX. SITZUNG VOM 14. JULI 1898.

Erschienen: Sitzungsberichte: Bd. 107, Abth. I, Heft V (Mai 1898). — Monatshefte für Chemie, Bd. 19, Heft V (Mai 1898).

Die Direction der Manora-Sternwarte in Lussinpiccolo dankt für die dieser Sternwarte zur Anschaffung eines Passagen-Instrumentes und zur Ergänzung ihrer Bibliothek bewilligte Subvention.

Das w. M. Herr Prof. F. Lippich überreicht eine im physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit des Privatdocenten Dr. Josef Rit. v. Geitler, betitelt: »Notiz über complicirte Erreger Hertz'scher Schwingungen«.

Das w. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup in Graz übersendet drei in seinem Institute durchgeführte Untersuchungen zur Aufnahme in die Sitzungsberichte.

1. »Über die Acetylirung mit Zuhilfenahme von Schwefelsäure«, von Zd. H. Skraup.
2. »Zur Kenntniss der dem Cinchonin isomeren Basen«, von V. Cordier v. Löwenhaupt.
3. »Über Derivate des Amidoorcins«, vom Privatdocenten Dr. Ferdinand Henrich.

Das c. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet folgende drei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

1. »Condensationen mit Phenylaceton« II., von Guido Goldschmiedt und Gustav Knöpfer.
2. »Condensationen von Phtalaldehydsäure mit Aceton und Acetophenon«, von Arthur Hamburger.

3. »Notiz über das Verhalten des Phtalids bei der Destillation mit Kalk«, von Hans Krczmař.

Herr Dr. Ludwig Mach, d. Z. in Jena, übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, mit der Aufschrift: »Versuche über hohe Temperatur«.

Das w. M. Herr Intendant Hofrath F. Steindachner überreicht eine Abhandlung: »Über einige neue Fischarten aus dem rothen Meere«.

Herr Hofrath Steindachner legt ferner eine Abhandlung des Herrn Dr. Th. Adensamer vor, betitelt: »Die Decapoden der fünf Tiefsee-Expeditionen im Mittelmeer«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht drei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. »Die Condensationsproducte des Isobutyraldehydes« (experimentelle Revision der Literatur), von Ad. Franke und L. Kohn.
2. »Zur Kenntniss des Strophantins«, I., von L. Kohn und V. Kulisch.
3. »Über das Vorkommen einiger einfachster Kohlenstoffverbindungen im Pflanzenreich«, von Ad. Lieben.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht die folgenden drei Arbeiten:

1. »Über Condensationsproducte des Phloroglucins und Phloroglucids«, von J. Herzig.
2. »Über einen neuen Tiegel ‚Der Rohrtiegel'«, von Dr. E. Murmann.
3. »Bemerkungen zur Bestimmung des Zinks und Mangans als Sulfid«, von Dr. E. Murmann.

Herr Prof. E. Zuckerkandl in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Zur Anatomie von *Chiromys madagascarensis*«.

Ferner überreicht Herr Prof. Zuckerkandl von Dr. Julius Tandler, Prosector der I. anatomischen Lehrkanzel der k. k.

Universität in Wien: »Zur vergleichenden Anatomie der Kopfarterien bei den *Mammalia*«.

Herr Dr. Carl Hillebrand, Privatdocent an der k. k. Universität zu Wien, überreicht eine Abhandlung: »Die Erscheinung 1892 des periodischen Kometen Winnecke«.

Herr Karl Linsbauer überreicht eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit, betitelt: »Beiträge zur vergleichenden Anatomie einiger tropischer Lycopodien«.

Schliesslich überreicht der prov. Secretär, Hofrath Prof. E. Mach, eine Abhandlung von Dr. Ludwig Mach: »Über einige Verbesserungen an Interferenzapparaten«.

Nachträglich übersandte das c. M. Herr Prof. H. Molisch eine Arbeit des Herrn Dr. Julius Stoklasa in Prag unter dem Titel: »Über die Verbreitung und biologische Bedeutung der Furfuroide im Boden«.

Über einige Verbesserungen an Interferenzapparaten

von

M. U. Dr. **Ludwig Mach**, d. z. in Jena.

(Mit 3 Textfiguren.)

In diesen Berichten habe ich ein Interferenzrefractometer, das zur Durchführung einiger besonderer Versuche construirt wurde, beschrieben. Die Vortheile dieses Apparates gegenüber dem Jamin'schen bestehen in der beliebig weiten Trennung der Bündel bei entsprechender Grösse des Interferenzfeldes.[1]

Der Strahlengang in diesem Apparate ist in Fig. 1 dargestellt. Bei vollkommen planparallelen Platten $P_1 P_2$ und genau paralleler Stellung derselben zu den Spiegeln $S_1 S_2$ und gleicher Länge der Lichtwege haben die Lichter beim Zusammentreffen in Bündel 1 den Gangunterschied Null, ebenso die Lichter, welche durch eine Platte dreimal oder fünfmal (Bündel 2 und 3) gegangen sind. Bei Abweichung von der obigen Bedingung treten in jedem der Bündel 1, 2, 3... Interferenzen auf, und zwar in jedem etwas von den anderen verschiedene. Wie ich schon früher nachgewiesen, enthält Bündel 1 nur ein Vierplattensystem,[2] Bündel 2 dagegen ein Vierplattensystem und zwei Zweiplattensysteme; ebenso auch das Bündel 3, 4 u. s. f.

Beim Gebrauch des Apparates musste man das erste, das Vierplattensystem enthaltende Bündel isoliren, was man auf

---

1 L. Mach, Über ein Interferenzrefractometer (II. Mittheilung). Diese Sitzungsberichte, Bd. CII, Abth. II. a, October 1893. — Vergl. auch die älteren Mittheilungen in Bd. CI, Abth. II. a, Jänner 1892, sowie die Zeitschrift für Instrumentenkunde, März 1892 und August 1894.

2 Vergl. S. 7 der sub 1 citirten Arbeit.

folgende Weise erreichte. Auf die erste Platte fällt das divergirende Licht einer kleinen, in endlicher Entfernung befindlichen Lichtquelle, wobei die den austretenden Strahlen 1, 2, 3... nun entsprechenden Lichtkegel von virtuellen Bildern der Originallichtquelle, die von links nach rechts geordnet (in durch die Plattendicke bestimmten Abständen) nebeneinander liegen, auszugehen scheinen. Mit Hilfe einer achromatischen Linse werden die austretenden Strahlen abgefasst und von jenen virtuellen Bildern reelle Bilder in umgekehrter Ordnung 3, 2, 1... entworfen und das Licht von 1, das nur das reine Vierplattensystem enthält, durch Abblendung der übrigen isolirt.

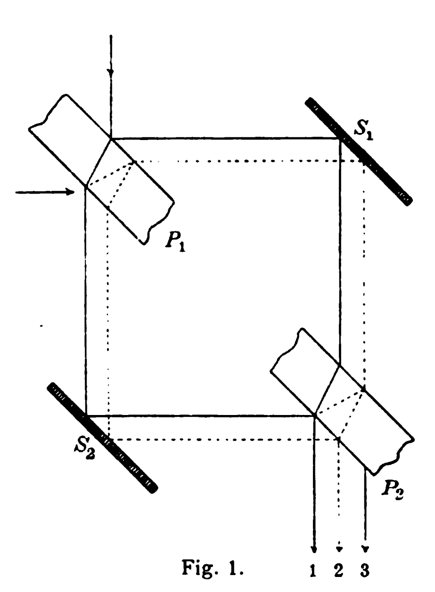


Fig. 1.

Bei verschwindend kleiner Dicke der Glasplatten $P_1 P_2$ müssen die Zweiplattensysteme verschwinden, die Vierplattensysteme identisch werden und die mehrfachen Bilder in eines zusammenfallen. Es ist mir nun gelungen, $P_1 P_2$ durch planparallele Luftplatten von ausserordentlich geringer Dicke zu ersetzen und dadurch den Apparat weiter zu verbessern. Bei der Anwendung solcher von Glaskörpern eingeschlossenen Luftplatten ist Einiges zu beachten.

Bei einer Luftplatte findet ein eigenthümliches Verhältniss statt; das durchgehende Licht ist zum reflectirten complementär. So lange die Strahlen 1, 2, 3... u. s. w. (Fig. 1) genügend getrennt bleiben, ist dies ohne Bedeutung, denn jeder Strahl macht dieselben Veränderungen in verschiedener Ordnung durch. Wenn die Platten aber so dünn werden, dass die Bündel ineinander laufen, so können diese Bündel verschiedener Wellenlänge (complementär) nicht mehr interferiren. Die einzelnen

Bündel 2, 3, 4... haben jedoch $\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2} \ldots \lambda$ Gangunterschied gegen einander und werden sich deshalb verwischen, so dass nur Bündel 1, das von hervorstechender Lichtstärke ist, allein zur Geltung kommt, was auch der Versuch bestätigt.

Noch ein anderer Punkt muss in Betracht gezogen werden. Von dem Licht einer bestimmten Wellenlänge λ wird bei P_1 der Theil μ reflectirt, bei S_1 der Theil ρ reflectirt, bei P_2 der Theil $(1-\mu)$ durchgelassen. Bei P_2 kommt also $\mu\rho(1-\mu)$ heraus.

Auf dem anderen Wege ergibt sich $\rho\mu(1-\mu)$, also dasselbe. Man hat demnach nur darauf zu achten, dass nicht $\mu = 1$, also $1-\mu = 0$ wird, dass also keine totale Reflexion eintritt. Die Luftplatten dürfen also (bei Luft Crownglas) nicht unter 41° gegen den Strahl stehen.

Wenn ρ, der Reflexionscoëfficient am Spiegelmetall, gegeben ist, so ist μ am Glas-Luftplättchen vom Einfallswinkel abhängig, und $\rho\mu(1-\mu)$ wird ein Maximum für $\mu = 1/2$. Diesem Maximum nähert man sich, wenn man das Glas-Luftplättchen unter 38° gegen den einfallenden Strahl orientirt. Unter diesen Umständen erreicht der reflectirte Strahl eine beträchtlich grössere Intensität, als er bei der Reflexion von Luft zu Glas unter ähnlichen Incidenzwinkeln erhalten würde, weil hier der Übergang von Glas zu Luft bis auf wenige Grade an den Grenzwinkel der totalen Reflexion herangeführt werden kann. Unter den angegebenen Verhältnissen beträgt die Intensität des reflectirten Strahles zwei Fünftel, die des durchgelassenen Strahles drei Fünftel des unzertheilten Lichtes.

Das Verfahren zur Herstellung dünner Luftplatten besteht in Folgendem: Man schleift die Flächen zweier Glasstücke so genau plan, dass sie beim staubfreien Aufeinanderlegen in optischen Contact treten (anspringen). Die eine Fläche wird nun nach Liebig's Verfahren ausserordentlich dünn versilbert, die Silberschichte bis auf die Ecken abgelöscht und an dieselbe die zweite Platte mit einem Rähmchen aus Nickelstahl staubfrei angepresst.[1] Die beiden Stücke schliessen dann,

[1] Ich verwende G. E. Guilleaume's Nickelstahl (Arch. sc. phys. et naturelles, 1807, sér. 4, t. IV, p. 301). Der lineare Ausdehnungscoëfficient

entsprechend der Dicke der Silberschichte, eine planparallele Luftplatte ein.

Wenn man das Ende eines plan geschliffenen Glasstreifens mit einer schmalen, etwa 1·5 *mm* breiten Versilberung versieht und diesen auf einen ebensolchen plan geschliffenen auflegt, so kann man mit Hilfe von Natriumlicht den Luftkeil und damit auch die Dicke der Versilberung ausmessen. Ich fand, dass man je nach der Dauer des Silberbades und bei gleichzeitiger sorgfältiger Beachtung einiger technischer Einzelheiten mit Sicherheit Schichten von 0·0002 bis 0·003 *mm* Dicke niederschlagen kann.[1]

Die Dicke der bei dem Interferenzapparate verwendeten Luftplatten beträgt rund 0·001 *mm*. Da die Lichtbündel im Apparat nahe dem Winkel der totalen Reflexion reflectirt werden, so darf man die Dicke der Luftschichte nicht unter eine Wellenlänge, also etwa 0·0005 *mm* sinken lassen. Bei einer solchen Dicke ist das reflectirte Bündel bereits grau gefärbt, und ein unter dem Grenzwinkel einfallender Strahl wird nicht mehr reflectirt, sondern tritt ohne Reflexion in den zweiten Glaskörper ein.[2]

Zunächst habe ich bloss zu meiner Orientirung den kleinen, in Fig. 2 schematisch dargestellten Apparat zur Ausführung gebracht. An zwei Glasstücke vom Grundriss $abcdef$ und $a'b'c'd'e'f'$, deren genau plane Wände ab und de, ferner cd und af zu einander parallel sind, werden zwei genau gleiche Prismen agb und $a'g'b'$ so angesetzt, dass die Hypothenusenfläche je eines Prismas, z. B. ab mit der entsprechenden Fläche ab des Glasstückes die dünne Luftschichte einschliesst

eines mit 27% Ni legirten Stahles beträgt 0·000009, ist also gleich dem des Crownglases.

[1] An die Genauigkeit der Flächen werden die höchsten Anforderungen gestellt, und das Poliren und Justiren derselben ist deswegen auch eine ungemein schwierige und ermüdende Arbeit. Herr J. Rudolph, Kittmeister der Firma Carl Zeiss, hat die technische Ausarbeitung der Aufgabe übernommen und die nöthigen optischen Bestandtheile in mustergiltiger Weise selbst hergestellt und mir dadurch die Durchführung der ganzen Arbeit erst ermöglicht.

[2] Newton, Optice, lib. II, observ. 1 und 2. — Fresnel, Oeuvres complètes, t. II, p. 179. — Stokes, Cambridge Philosophical Transactions, vol. VIII, part 5, 1848. — Quincke, Poggend. Annalen, Bd. CXXVII.

und die Kathetenfläche *ag* die Fläche *af* optisch ergänzt. Die Hypothenusenfläche und damit die dünne lufterfüllte Schichte ist unter einem Winkel von 38° gegen die Axe des einfallenden Lichtbündels geneigt; die zu derselben genau parallelen Flächen *de* und *d'e'* sind versilbert.

Dieser Apparat liefert, genau ausgeführt und entsprechend justirt, ein einziges farbensattes Vierplattensystem, welches ungemein lichtstark ist, da (theoretisch) die Hälfte des in den Apparat geschickten Lichtes ausgenützt wird. Während, wie ich früher gezeigt habe,[1] eine zu grosse Ausdehnung der Lichtquelle eine Verwischung der projicirten Streifen bewirkt, lässt sich nun bei diesem Apparat eine ausgedehnte Lichtquelle ohneweiters verwenden. Sieht man durch den Apparat gegen den hellen Himmel mit dem blossen Auge hindurch, so erblickt man das Vierplattensystem. Bei sorgfältiger Einstellung konnte ich die Streifen so verbreitern, dass das etwa 3 cm^2 grosse Feld rein weiss (Gangunterschied Null) erschien und nur seitlich von den schwarzen Streifen schwach gesäumt wurde.

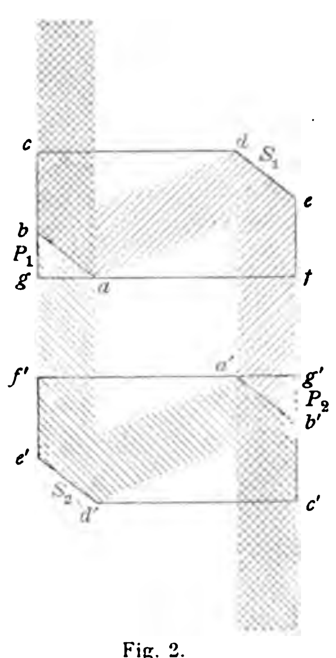


Fig. 2.

Diese Ausführung (des Apparates) wird wegen der leichten Justirung und sonstigen Unveränderlichkeit immer dann von Werth sein, wenn es sich um ein kleines Interferenzfeld und eine nur mässige Trennung der Bündel handelt.

Legt man von den Hypothenusenflächen aus zwei auf die durchfallenden und reflectirten Bündel senkrecht orientirte Schnitte, lässt dann die übrigbleibenden Glaskörper weg, ersetzt die Spiegel *de* und *d'e'* durch solche von Metall, so hat man

---

[1] Vergl. S. 9 der sub 1 citirten Arbeit.

den Vierplattenapparat mit frei beweglichen Spiegeln und Luftplatten vor sich (Fig. 3).

Die Justirung dieses Apparates ist ganz ähnlich wie bei dem gewöhnlichen Vierplattenapparat. P_1 und S_2, S_1 und P_2 sind paarweise auf zwei Schienen verschieblich angeordnet. Die Prismenpaare (Luftplatten) und die Spiegel sind grob und mikrometrisch um Horizontal- und Verticalaxen drehbar. Mit Hilfe eines Fernrohres und weit entfernten Objectes stellt man P_1 zu S_2 und S_1 zu P_2 parallel und macht die Strecken P_1S_2 und S_1P_2 möglichst genau gleich. S_2 lässt sich ohne Störung seiner Justirung um eine horizontale Axe niederlegen. Man stellt sodann durch P_1 auf das ferne Object ein und dreht die Schiene mit S_1P_2 so lange, bis das durch P_1 direct gesehene Bild mit dem durch S_1P_2 gesehenen zusammenfällt. Schlägt man S_2 wieder in seine frühere Lage zurück, so darf bei sonst unverrücktem Apparat das Bild sich nicht verändern. Mit Hilfe eines Prismas von gerader Durchsicht findet man leicht die Streifen.

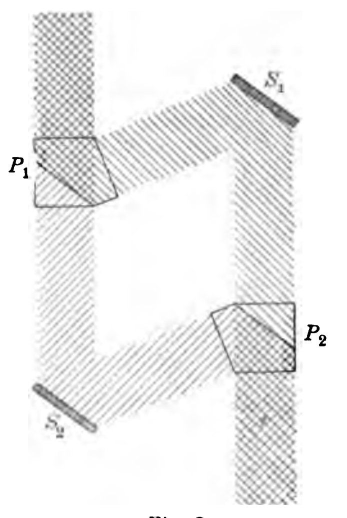


Fig. 3.

Wenn P_1P_2 gegen einander geneigt sind, wie dies beim wirklichen Versuch der Fall ist, so können, abgesehen von der eigentlichen Interferenz, matte Streifen im Spectrum auftreten; μ und ρ sind dann in beiden Bündeln ungleich und mit λ variirend. Ich konnte einmal solche sehr verwaschene, kaum sichtbare Streifen wahrnehmen.

Bei dem in Fig. 3 dargestellten Apparate entfallen die durch Platten von grösserer Dicke bedingten Nachtheile. Man erhält ein einziges Vierplattensystem und kann Lichtquellen (Spalten und Diaphragmen) von grosser Flächenausdehnung verwenden, ohne dass dies eine Verwischung oder Trübung der Streifen zur Folge hat.[1]

[1] Der Apparat ist dadurch bei Anwendung von Momentbeleuchtungen weit brauchbarer als der frühere, denn die durch die geringe Funkenlänge

Diesmal gelang es mir auch, die virtuellen Bilder der Lichtquelle für den Beobachter hintereinander zu bringen, wobei die Ringform der Interferenzstreifen hervortritt. Dieser Versuch, den ich früher nur bei Anwendung einer Natriumflamme und durch Einschaltung einer 15 *mm* dicken Planplatte durchführen konnte, gelang diesmal bei weissem Licht.[1]

Bei dem von mir verwendeten Apparat betrug die Grösse der Luftplatten etwa 4 cm^2, doch zweifle ich nicht, dass sich derselbe auch in grösseren Dimensionen herstellen lässt. Bei grösseren Prismenpaaren kann man die Flächen noch viel genauer herstellen, dagegen ist es recht schwierig, sich grössere Glasblöcke von der nöthigen Homogenität und Spannungsfreiheit zu verschaffen.

Es gelang übrigens auch, die der älteren Construction durch die Keilfehler der Glasplatten anhaftenden Fehler zu beseitigen.

Wenn man sehr vollkommene, runde Planplatten[2] in ihrer eigenen Ebene drehbar fasst und auf optischem Wege die Mittelpunktsnormalen mit den Drehungsaxen zur Coincidenz bringt, so kann man bei der Einstellung des Apparates eine Stellung ermitteln, bei der die Platten am günstigsten wirken,

---

bedingte Lichtschwäche bereitete mir seinerzeit die grössten Schwierigkeiten. Vergl. auch L. Mach, Weitere Versuche über Projectile. Diese Sitzungsberichte, Bd. CV, Abth. II. a, Juli 1896.

1 Vergl. S. 17 der sub 1 citirten Arbeit.

2 Dr. M. Pauly hat ein neues Verfahren ersonnen, das die Herstellung ungemein vollkommener Planplatten erlaubt und den Fehler unter die Grenze des Beobachtbaren bringt.

Durch verschiedene Verbesserungen des mechanischen Theiles, wie leichte Lagerung der Axen, sauber geschnittene Schrauben geringer Steigung, die mit flexiblen Wellen versehen wurden, und Anwendung eines besonders geeigneten Fettes wurde das Wandern der Streifen nach ihrer Einstellung vermieden. Die Justirung und Handhabung wurde durch Drehung um eine einzige Verticalaxe, sowie durch einen auf den Ring aufgeschraubten Jamin-schen Compensator erleichtert, während die Verminderung des Gewichtes durch Anfertigung mancher Theile aus Aluminium, Vulcanfiber und dünnwandigen Stahlröhren den Apparat in der Horizontal- und Verticalebene gleich gut brauchbar machten. Herrn Werkmeister G. Stiege, unter dessen Leitung der Apparat gebaut wurde und von dem aus die constructive Durcharbeitung herrührt, bin ich zu ganz besonderem Danke verpflichtet.

bei der also die letzten Reste der Keil- und sonstigen Fehler sich nahezu compensiren.

Mit einem derart ausgeführten Apparate lassen sich die Interferenzstreifen, ohne Verminderung ihrer Farbensättigung. zu mächtigen, einen grossen Theil des Feldes einnehmenden Bändern verbreitern, und dieselben durchziehen, wenn schmäler gestellt, als ganz gerade unter sich genau parallele Linien das Feld. Während früher bei tiefsatten Farben in den beiden mittleren dunklen Streifen (zwischen denen der Gangunterschied Null liegt) bloss eine feine tiefschwarze Linie zu sehen war, ist diese jetzt zu einem Bande verbreitert.

Auch den Jamin'schen Apparat kann man durch eine solche Ausführung und Anordnung der Planplatten bedeutend verbessern. Bei der günstigsten Stellung derselben konnte ich den schwarzen oder weissen Streifen so breit machen, dass derselbe das ganze Feld erfüllte. Im ersteren Fall war das Feld tiefschwarz, und es kam nur ein leichter Lichtschimmer von den Seiten herein, im letzteren war das hell erleuchtete Feld durch zwei leichte seitliche Schatten eingeengt.

Die Flächen einer Planplatte kann man so genau zu einander orientiren, dass der Keilfehler verschwindend klein wird. Ein anderer Umstand setzt hier eine Grenze, nämlich die Spannung und mangelhafte Homogenität des Glases und die dadurch bedingte verschiedene Härte, die die Herstellung einer grossen, ganz genau planen Fläche ungemein erschwert, weil die weicheren Stellen immer etwas mehr angegriffen, also tiefer gelegt werden. Polirt man ein mit Absicht inhomogen hergestelltes Glas oder Spiegelmetall an, so kann man die Entstehung der dadurch bedingten Gestaltfehler der Fläche genau studiren.

Bei der Herstellung grösserer Planplatten muss mit der grössten Peinlichkeit auf das Einhalten einer constanten Temperatur geachtet werden. Schon eine ganz kurz andauernde locale Erwärmung (während des Polirens) kann die correcte Gestalt einer Fläche verderben. Wenn man bei dem justirten Vierplattenapparat auf eine Platte einstellt und dem Centrum

derselben für einen Moment die warme Kappe eines Paquelinschen Brenners nähert, so kann man mit Hilfe der Streifenausbiegungen die durch die Erwärmung an dieser Stelle entstandene Deformation des Glases und deren weiteren Verlauf studiren.

Diese Versuche wurden in der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena durchgeführt, welche auch die hier beschriebenen Apparate anfertigt.

Zum Normalenproblem der Hyperbel

von

Karl Lauermann,

Lehrer in Pressnitz.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Juni 1898.)

Die Anregung des Herrn Prof. Pelz, das Normalenproblem der Kegelschnitte hinsichtlich seiner Degenerationsfälle zu untersuchen, beziehungsweise der Frage näher zu treten, ob es Punkte in der Ebene gebe, für welche das Normalenproblem auf quadratische Aufgaben sich zurückführen und deshalb lösen lasse, leitete bekanntlich ausser den von dem genannten Autor zuvor schon aufgedeckten Ellipsendiametern[1] zur Feststellung zweier Kreise für die Ellipse und eines der Hyperbel zugehörigen Geradenpaares von der Beschaffenheit, dass für sämmtliche Punkte dieser Linien die Normalenconstruction mit Zirkel und Lineal allein durchführbar erscheint.[2]

Herr Prof. Schoute[3] hat einen schönen Beweis dafür gegeben, dass die hervorgehobenen Geraden und Kreise die einzigen Gebilde dieser Art sind, bezüglich welcher die das Normalenproblem lösende Gleichung vierter Ordnung in zwei quadratische Factoren zerlegt werden kann.

Im Nachfolgenden erlaube ich mir, mit Zugrundelegung analytischer Beweisführung das Normalenproblem der Hyperbel

---

[1] Zum Normalenproblem der Ellipse. Diese Sitzungsberichte, Bd. XCV, 2. Abth., März 1887.

[2] Mertens, Zum Normalenproblem der Kegelschnitte. Diese Sitzungsberichte, Bd. XCVIII, 2. Abth., März 1889; Lauermann, Zum Normalenproblem der Ellipse. Diese Sitzungsberichte, Bd. XCVIII, 2. Abth., März 1889

[3] Zum Normalenproblem der Kegelschnitte. Diese Sitzungsberichte Bd. XCVIII, 2. Abth., December 1889.

zu behandeln und die angeführten Arbeiten durch eine einfache Constructionsmethode der Normalen dieses Kegelschnittes zu ergänzen.

1.

Von einem Punkte $P(g,h)$ der Ebene lassen sich im allgemeinen vier Normalen auf die Hyperbel

$$H = b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

fällen. Ihre Fusspunkte bestimmen einen Büschel von Kegelschnitten, unter welchen nebst der apollonischen Hyperbel

$$H' = c^2xy - b^2hx - a^2gy = 0$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

auch drei Linienpaare vorkommen, die durch dieselben Punkte gehen, und mit deren Construction die Lösung des Normalenproblems zusammenfällt.

2.

Bezeichnen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die sogenannten excentrischen Winkel von vier Punkten I, II, III, IV der Hyperbel H, dann können

$$b^2xu - a^2yv - a^2b^2 = 0 \qquad \ldots 1)$$

und

$$b^2xu' - a^2yv' - a^2b^2 = 0 \qquad \ldots 2)$$

als die Gleichungen eines Paares ihrer Verbindungsgeraden angesehen werden, wobei $u, v; u', v'$ die Coordinaten der Pole von 1), beziehungsweise 2) bedeuten und folgende Werthe haben:

$$u = \frac{a\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}}{\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}}, \qquad v = \frac{b\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}}{\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}};$$

$$u' = \frac{a\cos\frac{(\gamma-\delta)}{2}}{\cos\frac{(\gamma+\delta)}{2}}, \qquad v' = \frac{b\sin\frac{(\gamma+\delta)}{2}}{\cos\frac{(\gamma+\delta)}{2}}. \qquad \ldots 3)$$

Für den Fall, als I, II, III, IV mit den Fusspunkten der von P auf H gefällten Normalen identisch sind, müssen ausserdem noch die Gleichungen

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\alpha+\delta) = 0,$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180^\circ$$

erfüllt sein, die bekanntlich der Bedingung Ausdruck verleihen, dass vier Normalen in einem gemeinschaftlichen Punkte der Ebene zusammentreffen.[1]

Durch Einführung halber Winkel erhalten obige Gleichungen die Gestalt:

$$\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}\cos\frac{(\gamma-\delta)}{2}+\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{(\gamma+\delta)}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{(\gamma+\delta)}{2}-\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{(\gamma+\delta)}{2} = 0,$$

und man gewinnt aus ihnen, wenn die unter 3) dargestellten Coordinatenwerthe $u, v; u' v'$ in Berücksichtigung gezogen werden, folgende Relationen:

$$uu'+a^2 = 0, \quad vv'-b^2 = 0.$$

Nun kann man in 2) u', v' durch u, v ersetzen und diese Gleichung in folgende überführen:

$$xv+yu+uv = 0.$$

Die Gleichungen eines Sehnenpaares der Normalenfusspunkte sind demnach durch die Formen

$$\left.\begin{aligned} b^2xu-a^2yv-a^2b^2 &= 0,\\ xv+yu+uv &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots 4)$$

dargestellt, und ihre Construction ist abhängig von der Bestimmung des Poles (u, v). Hiermit ist ein Satz Joachimsthal's[2] bewiesen, der, in Worten ausgedrückt, folgendermassen lautet:

[1] Eine Ableitung dieser Gleichungen enthält die Abhandlung: »Über die Normalen der Ellipse«. Zeitschr. für Math. und Phys., XXVI, 6.

[2] Crelle's »Journal für reine und angewandte Mathematik«, XXVI und XXXVIII.

Werden in gleichen Entfernungen vom Centrum eines Kegelschnittes zwei diametral gegenüberliegende Punkte angenommen, so schneiden die Polare des einen und die Verbindungsgerade der Axenprojectionen des anderen aus der Curve vier Fusspunkte zusammengehöriger Normalen heraus.

3.

Da H und H' Curven des Büschels der Normalenfusspunkte sind, wird die Gleichung des Kegelschnittes

$$H+2kH'=b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2+2k\left(xy-\frac{b^2h}{c^2}x-\frac{a^2g}{c^2}y\right)=0$$

dann in das Product

$$(b^2xu-a^2yv-a^2b^2)(xv+yu+uv) \qquad \ldots 6)$$

der linearen Factoren 4) zerfallen, wenn die Discriminante

$$\begin{vmatrix} k, & -a^2, & -a^2gk \\ b^2, & k, & -b^2hk \\ b^2hk, & a^2gk, & a^2b^2c^4 \end{vmatrix}$$

verschwindet und k der cubischen Gleichung

$$2ghk^3+k^2(b^2h^2-a^2g^2+c^4)+a^2b^2c^4=0 \qquad \ldots 7)$$

genüge leistet.

Entwickelt man die angezeigte Multiplication 6), so ergibt sich:

$$b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2+$$
$$\frac{b^2u^2-a^2v^2}{uv}\left(xy-\frac{b^2v(a^2-u^2)}{b^2u^2-a^2v^2}x-\frac{a^2u(b^2+v^2)}{b^2u^2-a^2v^2}y\right)=0, \quad \ldots 8)$$

und man gelangt mit Beachtung des Umstandes, dass die Coëfficienten der entsprechenden Glieder in 5) und 8) identisch gleich sein müssen, zu den Argumenten

$$u^2+\frac{2khu}{c^2}-a^2=0, \qquad \ldots 9)$$

$$v^2-\frac{2kgv}{c^2}+b^2=0 \qquad \ldots 10)$$

und somit auch zur Lösung des vorliegenden Problems.

Dabei ist nun allerdings ersichtlich, dass die Gleichungen 9) und 10) für u und v nur dann constructiv brauchbare Werthe liefern, sobald k rational ist.

Nachdem aber diese Voraussetzung in nur ganz speciellen Fällen zutreffen wird, weil eine Wurzel der cubischen Gleichung wohl stets reell, doch nicht rational sein muss, so folgt, dass es allgemein nicht möglich ist, die Normalenconstruction mit Zirkel und Lineal durchzuführen.

Eine bemerkenswerthe Ausnahme in dieser Richtung bilden jedoch die schon Eingangs erwähnten geraden Linien, deren Gleichungen sich in folgender Weise finden lassen:

Löst man die cubische Gleichung 7) nach der Veränderlichen g auf und gibt ihr die Gestalt

$$a^2gk = hk^2 \pm \sqrt{h^2k^4+a^2k^2(b^2h^2+c^4)+a^4b^2c^4}, \quad \ldots 11)$$

so muss der Bedingung, dass eine lineare Function,

$$h+mg+n = 0,$$

in 11) substituirt, der Grösse a^2gk auf der linken Seite dieser Gleichung den rationalen Werth λ ertheilt, entsprochen werden, wenn der Ausdruck

$$h^2k^4+a^2k^2(b^2h^2+c^4)+a^4b^2c^4$$

unter dem Wurzelzeichen zu dem vollständigen Quadrate

$$(\lambda - hk^2)^2$$

wird und, nach Entwicklung der Operationen, der Coëfficient der zweiten Potenz von k in der Gleichung

$$k^2(a^2b^2h^2+a^2c^4+2\lambda h)+a^4b^2c^4 - \lambda^2 = 0$$

verschwindet.

Man erhält

$$a^2b^2h^2+a^2c^4+2\lambda h = 0,$$
$$\lambda^2 - a^4b^2c^4 = 0,$$

daraus

$$\lambda = \pm a^2bc^2;$$

ferner

$$k = \pm \frac{bc^2}{g}$$

und als Gleichungen des doppelt zu zählenden Geradenpaares

$$G = bh + c^2 = 0$$
$$G' = bh - c^2 = 0.$$

Für alle Punkte der beiden Geraden G und G, welche in den Entfernungen $\pm\frac{c^2}{b}$ zur Hauptaxe der Hyperbel H parallel laufen, zerfällt das Normalenproblem in quadratische Aufgaben und lässt sich deshalb mit Zirkel und Lineal allein lösen.

Charakteristisch für diese Zerlegung ist der Zerfall der Bedingungsgleichung

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$$

in die Theilsummen

$$\alpha + \beta = 90°, \quad \gamma + \delta = 90°,$$

wie durch Substitution der Wurzel $k = \pm\frac{bc^2}{g}$ in 10) gezeigt werden kann.

4.

Zum Zwecke der Construction betrachte man den concentrischen Kreis

$$K = \xi^2 + \eta^2 - \frac{b^2 g^2}{a^2} = 0$$

als affine Curve der Hyberbel H, was durch die Substitution

$$x = \frac{bg}{\xi}, \quad y = \frac{b\eta}{\xi}$$

erreicht wird, und nehme an, dass den Normalenfusspunkten I, II, III, IV auf H die Punkte 1, 2, 3, 4 des Kreises K entsprechen.

Um diese Transformation auf die Problemgleichungen 9) und 10) zu übertragen, muss

$$u = \frac{bg}{u_0}, \quad v = \frac{bv_0}{u_0}, \quad k = \frac{bc^2}{g} k_0$$

gesetzt werden. Sie nehmen dann die Form

$$u_0^2 + \frac{2b^2hk_0u_0}{a^2} - \frac{b^2g^2}{a^2} = 0$$

$$v_0^2 - \frac{2bc^2k_0v_0}{a^2} - \frac{b^2g^2}{a^2} = 0$$

an, und die Verbindung derselben führt zu dem Kreise

$$K' = u_0^2 + v_0^2 + \frac{2bhk_0u_0}{a^2} - \frac{2bc^2k_0v_0}{a^2} - \frac{b^2g^2}{a^2} = 0,$$

dessen Axenschnitte das Geradenpaar festlegen, welches auf K die Punkte 1, 2, 3, 4 heraushebt.

Die Construction des Kreises K' unterliegt keinen Schwierigkeiten; er hat mit K die Sehne

$$S = bhu_0 - c^2v_0 = 0$$

gemeinschaftlich, und die Geraden

$$L = c^2u_0' + bhv_0' = 0$$

$$L' = \frac{u_0'}{h} + \frac{v_0'}{b} - k_0 = 0$$

convergiren in seinem Mittelpunkte v, wie aus den Coordinaten

$$u_0' = -\frac{b^2hk_0}{a^2}, \quad v_0' = \frac{bc^2k_0}{a^2}$$

desselben leicht gefolgert werden kann. Was schliesslich den Übergang von den Kreis- zu den Normalenfusspunkten anbelangt, so lässt sich derselbe in folgender Weise bewerkstelligen:

Der über der grossen Hyperbelaxe (siehe die Figur) geschlagene Kreis schneidet den Verbindungsstrahl 01 in 1'. Ist od gleich der halben kleinen Hyperbelaxe, ferner $1'r \perp 01'$,

$1'I \perp 1'd$, dann sind nach den ähnlichen Dreiecken $01'd$ und $1'Ir$ und in der Darstellung des excentrischen Winkels

$$or = \frac{a}{\cos\alpha}, \quad rI = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

die Coordinaten des Fusspunktes I.

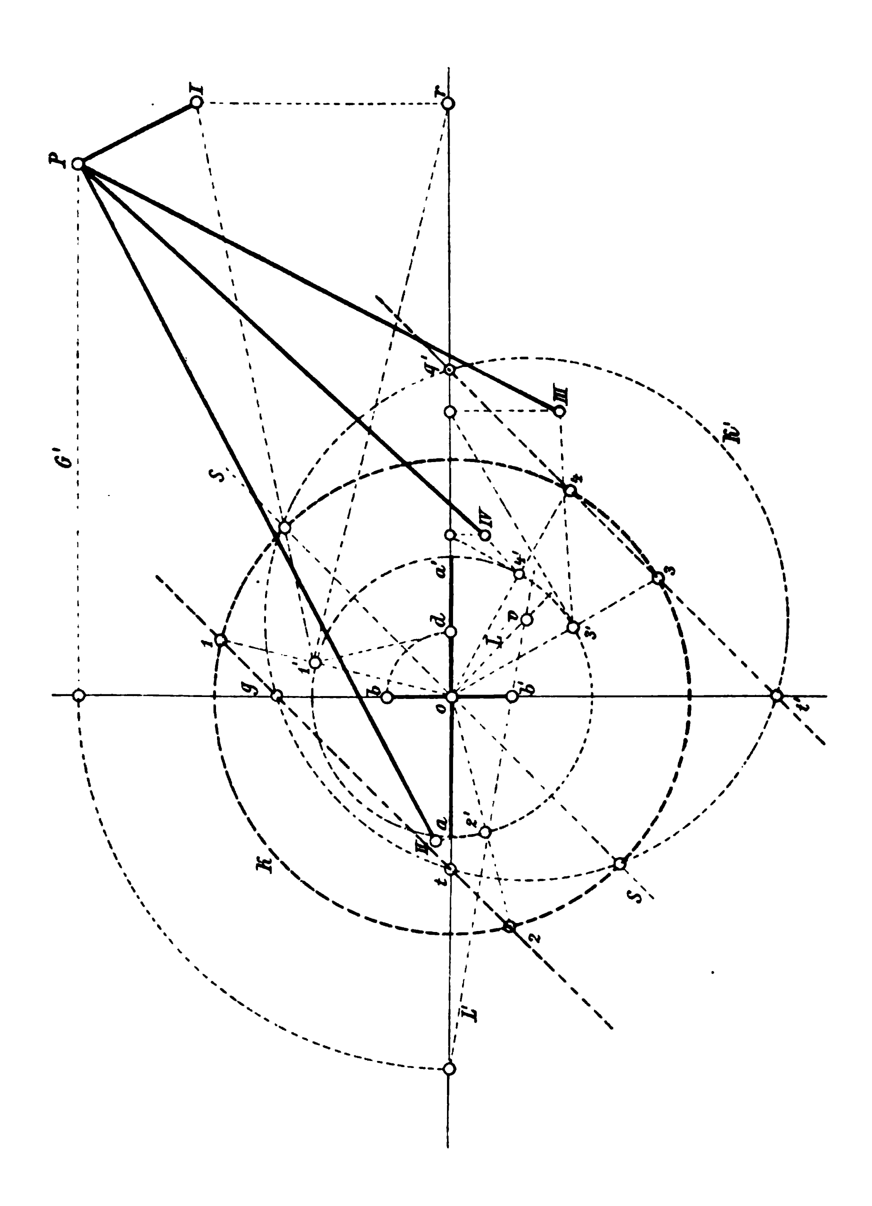
5.

Von dem Punkte $P(g,h)$ der Geraden G' (siehe die Figur) sollen die vier möglichen Normalen an die durch ihre Axen aa_1, bb_1 gegebene Hyperbel H gelegt werden. Hier ist $k = -\frac{bc^2}{g}$, sonach $k_0 = -1$, und die Sehne S halbirt den Winkel zwischen den positiven Axentheilen. Der Mittelpunkt v des Kreises K' wird als Schnitt der zu S normalen Sehne L mit der Geraden

$$L' = \frac{u_0'}{h} + \frac{v_0'}{b} + 1 = 0$$

erkannt, welche auf den Axen die Stücke $-h$ und $-b$ angibt.

K. Lauermann: Normalenproblem der Hyperbel.



Notiz über complicirte Erreger Hertz'scher Schwingungen

von

Dr. Josef R. v. Geitler.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität Prag.

(Mit 5 Textfiguren.)

Die folgenden Bemerkungen stehen in engem Anschlusse an meine zweite Mittheilung über den Schwingungsvorgang in complicirten Hertz'schen Erregern.[1] Es sei mir gestattet zuerst einen Fehler zu verbessern, welcher sich in die Rechnungen des §. 6 jener Arbeit[2] eingeschlichen hat;[3] sodann soll die corrigirte Rechnung an der Erfahrung geprüft und eine kurze Discussion der in der citirten zweiten Mittheilung gewonnenen experimentellen Resultate vorgenommen werden, wobei ich auch auf einige in der Zwischenzeit über denselben Gegenstand erschienene Arbeiten mehrerer Physiker mit wenigen Worten werde eingehen müssen.

1. Es sollen die in einem Systeme von n einander beliebig beeinflussenden einfachen Hertz'schen Erregern möglichen Schwingungen berechnet werden. Dabei wird der Einfachheit halber vorausgesetzt, dass die als Capacitäten verwendeten Conductoren im Vergleiche zu den

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 104, II. a, October 1895; Wied. Ann., 57, S. 412, 1896.

[2] Wied. Ann., 57, S. 424, 1896.

[3] Auf denselben wurde ich vor längerer Zeit durch Herrn Prof. H. Lorberg in liebenswürdigster Weise aufmerksam gemacht, wofür ich nicht versäumen möchte, meinen besten Dank an dieser Stelle auszusprechen.

Verbindungsdrähten verschwindende Selbstinductionscoëfficienten, die Verbindungsdrähte dagegen verschwindende Capacität und unendlich kleinen Widerstand besitzen. Die Bezeichnungen sind dieselben wie in der citirten zweiten Mittheilung.[1]

Die dortige Gleichung 1) lautet richtig:

$$2J_i = -\sum_{k=1}^{k=n}(c_{ik}^{(1,1)}-c_{ik}^{(2,1)})\frac{dV_k^{(1)}}{dt} + \sum_{k=1}^{k=n}(c_{ik}^{(2,2)}-c_{ik}^{(1,2)})\frac{dV_k^{(2)}}{dt}, \qquad \ldots 1)$$

Dadurch erhält Gleichung 5) folgende Gestalt:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=n} L_{ip}.\left\{\sum_{k=1}^{k=n}(c_{pk}^{(1,1)}-c_{pk}^{(2,1)})A_k^{(1)}.x^2+\sum_{k=1}^{k=n}(c_{pk}^{(2,2)}-c_{pk}^{(1,2)})A_k^{(2)}.x^2\right\}-A_i^{(1)}+A_i^{(2)}=0 \quad (i=1,2\ldots n) \qquad \ldots 5)$$

und die für symmetrisch gebaute Erreger geltende Gleichung 5a) wird zu:

$$\sum_{p=1}^{p=n}\sum_{k=1}^{k=n}(c_{pk}^{(1,1)}-c_{pk}^{(1,2)})A_k.L_{ip}.x^2-2A_i=0 \qquad (i=1,2,\ldots n) \qquad \ldots 5a)$$

Demnach lautet die zur Bestimmung der x^2, beziehungsweise der möglichen Schwingungsdauern τ und Wellenlängen λ dienende Determinante Gleichung 7) folgendermassen:

$$\begin{vmatrix} \left[\sum\limits_{k=1}^{k=n} (c_{k1}^{(1,1)} - c_{k1}^{(1,2)}) L_{1k} x^2 - 2\right], & \sum\limits_{k=1}^{k=n} (c_{k2}^{(1,1)} - c_{k2}^{(1,2)}) L_{1k} . x^2, & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{k=n} (c_{kn}^{(1,1)} - c_{kn}^{(1,2)}) L_{1k} x^2 \\ \sum\limits_{k=1}^{k=n} (c_{k1}^{(1,1)} - c_{k1}^{(1,2)}) L_{2k} x^2, & \left[\sum\limits_{k=1}^{k=n} (c_{k2}^{(1,1)} - c_{k2}^{(1,2)}) L_{2k} . x^2 - 2\right], & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{k=n} (c_{kn}^{(1,1)} - c_{kn}^{(1,2)}) L_{2k} x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{k=1}^{k=n} (c_{k1}^{(1,1)} - c_{k1}^{(1,2)}) L_{nk} . x^2, & \sum\limits_{k=1}^{k=n} (c_{k2}^{(1,1)} - c_{k2}^{(1,2)}) L_{nk} x^2, & & \left[\sum\limits_{k=1}^{k=n} (c_{kn}^{(1,1)} - c_{kn}^{(1,2)}) L_{nk} x^2 - 2\right] \end{vmatrix} = 0. \qquad \ldots 7)$$

Es bleiben also die in meiner zweiten Mittheilung ausgesprochenen allgemeinen Sätze unverändert bestehen, dass ein System von n beliebigen einfachen Erregern, welche einander beliebig beeinflussen, gleichzeitig höchstens n von einander und von den n Eigenschwingungen der unbeeinflusst gedachten n Erreger verschiedene Schwingungen zu erzeugen vermöge, und dass diese Aussage auch dann gilt, wenn es sich um ein mit Bezug auf eine Ebene vollkommen symmetrisches System derartiger n Erreger handelt.

---

[1] L. c. §. 6.

2. In dem praktisch häufigsten Falle eines Systems zweier einfachen Erreger ($n = 2$) (als dessen wichtigste Formen die Lecher'sche und die Blondlot'sche Combination anzusehen sind) erhält Gleichung 7) die folgende Gestalt:

$$\left|\begin{matrix} [(c_{1,1}^{(1,1)}-c_{1,1}^{(1,2)})L_{1,1}+(c_{2,1}^{(1,1)}-c_{2,1}^{(1,2)})L_{1,2}]x^2-2, & [(c_{1,2}^{(1,1)}-c_{1,2}^{(1,2)})L_{1,1}+(c_{2,2}^{(1,1)}-c_{2,2}^{(1,2)})L_{1,2}]x^2 \\ [(c_{1,1}^{(1,1)}-c_{1,1}^{(1,2)})L_{2,1}+(c_{2,1}^{(1,1)}-c_{2,1}^{(1,2)})L_{2,2}]x^2, & [(c_{1,2}^{(1,1)}-c_{1,2}^{(1,2)})L_{2,1}+(c_{2,2}^{(1,1)}-c_{2,2}^{(1,2)})L_{2,2}]x^2-2 \end{matrix}\right| = 0 \quad 7a)$$

Man kann weiter noch einige der Wirklichkeit nahe kommende Vereinfachungen hinsichtlich der Grössen c vornehmen, wodurch die numerische Berechnung erleichtert, beziehungsweise ermöglicht wird. Sowohl die Platte (1) und (2) des Kreises I, als auch jene des Kreises II (Fig. 1) mögen nämlich je soweit von einander entfernt sein, dass man setzen kann:

$$c_{1,1}^{(1,2)} = c_{2,2}^{(1,2)} = c_{1,2}^{(1,2)} = c_{2,1}^{(1,2)} = 0. \quad \ldots \alpha)$$

Ferner ist nach Fig. 1, vorausgesetzt, dass alle Platten gleiche Form und Grösse haben, also:

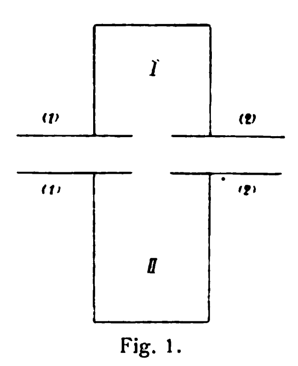


Fig. 1.

$$\left.\begin{matrix} c_{2,1}^{(1,1)} = c_{1,2}^{(1,1)} = c_{1,2}^{(2,2)} = c_{2,1}^{(2,2)} = \gamma \text{ und} \\ c_{1,1}^{(1,1)} = c_{1,1}^{(2,2)} = c_{2,2}^{(1,1)} = c_{2,2}^{(2,2)} = c. \end{matrix}\right\} \quad \ldots \beta)$$

Mithin wird Gleichung 7 a):

$$\left|\begin{matrix} (c.L_{1,1}+\gamma.L_{1,2}).x^2-2, & (\gamma.L_{1,1}+c.L_{1,2}).x^2 \\ (c.L_{1,2}+\gamma.L_{2,2})x^2, & (\gamma.L_{1,2}+c.L_{2,2})x^2-2 \end{matrix}\right| = 0. \quad \ldots 7b)$$

Beschränken wir uns weiterhin auf die Lecher'sche Aufstellung, so ist ausserdem $L_{1,2} = 0$ zu setzen, und es folgt für das Lecher'sche System:

$$\begin{vmatrix} c.L_{1,1}.x^2-2, & \gamma.L_{1,1}.x^2 \\ \gamma.L_{2,2}x^2, & c.L_{2,2}.x^2-2 \end{vmatrix} = 0. \qquad \ldots 7c)$$

Mithin:

$$x^2 = \frac{c(L_{1,1}+L_{2,2})}{(c^2-\gamma^2)L_{1,1}.L_{2,2}} \pm \sqrt{\left[\frac{c(L_{1,1}+L_{2,2})}{(c^2-\gamma^2)L_{1,1}.L_{2,2}}\right]^2 - \frac{4}{(c^2-\gamma^2)L_{1,1}.L_{2,2}}}. \qquad \ldots 8)$$

Die positiven Wurzeln der beiden Werthe für x^2 liefern die Schwingungsdauern τ und Wellenlängen λ der beiden dem Systeme zukommenden Grundschwingungen:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{2\pi}{x_1}, & \tau_2 &= \frac{2\pi}{x_2}; \\ \frac{\lambda_1}{4} &= \frac{\pi v}{2x_1}, & \frac{\lambda_2}{4} &= \frac{\pi.v}{2x_2}; \end{aligned}\right\} = 9),$$

wo v die Lichtgeschwindigkeit $\left(3.10^{10}\frac{cm}{sec.}\right)$ bedeutet.

3. Die Berechnung der λ gestaltet sich besonders einfach für den Fall, dass auch $L_{1,1} = L_{2,2} = L$ wird, das System also aus zwei ganz gleichen Einzelkreisen besteht. Für diesen Fall soll die Theorie mit dem Experimente verglichen werden. Es ist dann:

$$x^2 = \frac{2c}{(c^2-\gamma^2).L}\left(1 \pm \frac{\gamma}{c}\right) \qquad \ldots 8a)$$

und somit:

$$\frac{\lambda_1}{4} = \frac{\pi v}{2}\sqrt{\frac{L(c-\gamma)}{2}}, \quad \frac{\lambda_2}{4} = \frac{\pi v}{2}.\sqrt{\frac{L(c+\gamma)}{2}} \qquad \ldots 9a)$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{c-\gamma}{c+\gamma}}. \qquad \ldots 9b)$$

Die Versuchsanordnung, mit welcher die λ experimentell ermittelt wurden, ist aus Fig. 2 ersichtlich. *A*, *A'*, *B*, *B'* sind kreisrunde Zinkblechscheiben von 20 *cm* Halbmesser; ihre Distanz ist veränderlich. Die Drähte *C*, *C'*, von welchen ersterer durch die mit dem Inductorium verbundene Funkenstrecke bei *F* unterbrochen war, hatten bei den verschiedenen Versuchen behufs Änderung von *L* verschiedene Stärke und waren in der aus Fig. 2 ersichtlichen Form gerade gespannt. *E* ist ein Elektrometer von der früher beschriebenen Einrichtung, *D* eine Drahtbrücke, welche längs der Resonatordrähte *RR'* continuirlich verschiebbar war. Die Drähte *RR'* waren in einem gegenseitigen Abstande von 5 *cm* genau parallel geführt und hatten einen Radius von 1 *mm*. Die einer bestimmten Lage von *D* entsprechende Viertelwellenlänge ist gleich der Distanz *ED*, vermehrt um eine Correction für die Capacität des Elektrometers[1] (etwa = 10 *cm*).

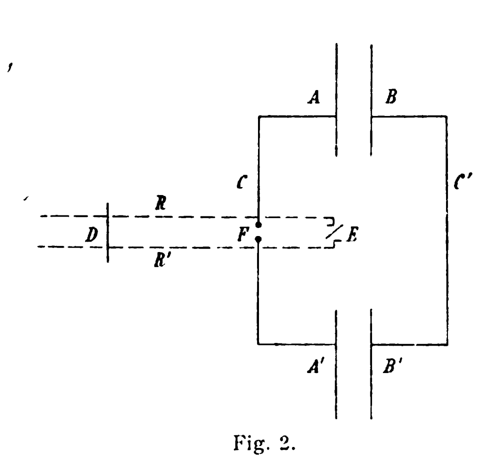


Fig. 2.

Die Berechnung der in Gleichung 9*a*) auftretenden Grössen *c*, γ und *L* erfolgte nach den Formeln:[2]

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}\left[\frac{R^2}{4a}+\frac{R}{2\pi}\lg\text{nat.}\left(9\cdot 246.\frac{R}{a}\right)\right]+\frac{R}{2\pi} \\ \gamma &= -\frac{1}{2}\left[\frac{R^2}{4a}+\frac{R}{2\pi}\lg\text{nat.}\left(9\cdot 246.\frac{R}{a}\right)\right]+\frac{R}{2\pi} \\ L &= \frac{2l}{9.10^{20}}\lg\text{nat.}\frac{l}{\rho}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots 10)$$

[1] F. Koláček, Tschech. Kaiser Franz Josef-Akad., Prag 1896, Nr. 41.

[2] Winkelmann, Handbuch, III, 1, S. 39; Kirchhoff, Ges. Abh. S. 101, ff.; Drude, Physik des Äthers, S. 361.

Es bedeutet: $2a$ den gegenseitigen Abstand der Condensatorplatten vom Halbmesser R, und l die Länge des Verbindungsdrahtes vom Radius ρ.

Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der nach den angegebenen Formeln berechneten mit den beobachteten Werthen der Wellenlängen für den Fall $l = 100\,cm$, $\rho = 0{\cdot}04\,cm$, somit $L = 1{\cdot}739.10^{-18}\frac{\text{sec.}^2}{cm}$.

$2a$ in Centimetern	$\frac{\lambda_1}{4}$ in Centimetern		$\frac{\lambda_2}{4}$ in Centimetern		$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$	
	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet	beobachtet
7	281	247	111	115	2·53	2·15
6	299	265	111	115	2·7	2·3
5	322	290	111	113	2·9	2·52
4	352	305	111	111	3·2	2·75

Diese Tabelle zeigt eine, wenn auch nicht genaue, so doch hinreichend befriedigende Übereinstimmung der beobachteten mit den berechneten Werthen; insbesondere zeigen beide Werthereihen das verschiedene Verhalten von λ_1 und λ_2 bei veränderten Werthen von $2a$.[1] Die vorhandenen Abweichungen rühren wohl hauptsächlich von der Ungenauigkeit der zur Berechnung von c und γ benützten Formeln 10) und den oben gemachten vereinfachenden Annahmen über die Grössen $c_{1,1}^{(1,2)}$ u. s. w. her.

Eine weitere Vergleichung von Experiment und Rechnung kann aus den Werthen von λ_1 und λ_2 bei verändertem L gewonnen werden, während alle übrigen Bestimmungsstücke des Versuches ungeändert bleiben. Nach Gleichung $9a$) müssen sich sowohl die λ_1, als auch die λ_2 proportional mit der $\sqrt{L}$

[1] Aus Gl. 10 ist ersichtlich, dass $c+\gamma$, wodurch nach Gl. $9a$ der Werth von λ_2 bei constantem L bestimmt ist, von der Distanz $2a$ der Condensatorplatten unabhängig ist, $c-\gamma$, welches den Werth von λ_1 ergibt, dagegen von $2a$ abhängt.

verändern. Es wurden zu diesem Zwecke Versuche mit drei Kupferdrähten von verschiedenem Radius ρ und von derselben Länge $l = 100\,cm$ vorgenommen.

Es waren:

für $\rho = 0\cdot04\,cm$:

$$L = 1\cdot739.10^{-18};\quad \frac{\lambda_1}{4} = 247\,cm;\quad \frac{\lambda_2}{4} = 115\,cm,$$

für $\rho = 0\cdot0175\,cm$:

$$L' = 1\cdot923.10^{-18};\quad \frac{\lambda_1'}{4} = 258\,cm;\quad \frac{\lambda_2'}{4} = 121\,cm,$$

für $\rho = 0\cdot0125\,cm$:

$$L'' = 1\cdot997.10^{-18};\quad \frac{\lambda_1'}{4} = 260\,cm;\quad \frac{\lambda_2''}{4} = 126\,cm.$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{\frac{L'}{L}} = 1\cdot052;\quad \frac{\lambda_1'}{\lambda_1} = 1\cdot044;\quad \frac{\lambda_2''}{\lambda_2} = 1\cdot062.$$

$$\sqrt{\frac{L''}{L}} = 1\cdot072;\quad \frac{\lambda_1''}{\lambda_1} = 1\cdot052;\quad \frac{\lambda_2''}{\lambda_2} = 1\cdot096.$$

Auch in diesen Resultaten glaube ich eine hinreichende Bestätigung der Rechnung durch den Versuch erblicken zu dürfen.

4. In Bezug auf die Beobachtungsresultate meiner zweiten Mittheilung möchte ich die folgenden Bemerkungen machen. Die bei jenen Versuchen verwendeten Erreger gehören gleichfalls in jene Kategorie, für welche im Sinne der Theorie $n = 2$ ist. Man sollte daher nach der Theorie erwarten, dass jene Erreger nur zwei Schwingungen gleichzeitig aussenden. Gleichwohl ist aus meinen Versuchen zu sehen, dass die Zahl der ausgesendeten Schwingungen oft bis zu fünf beträgt. Bei näherer Betrachtung erkennt man jedoch, dass die dort beobachteten Schwingungen nicht Grundschwingungen, sondern Oberschwingungen, und zwar nahezu harmonische Oberschwingungen der grösseren Grundschwingung sind, während die kleinere Grundschwingung bei jenen Versuchen nicht zur Beobachtung gelangte. Der Grund hierfür mag gewesen sein, dass ihre Intensität bei den damals obwaltenden Anregungsbedin-

gungen[1] zu gering war, um wahrgenommen zu werden. Berechnet man den Verlauf der beiden Grundschwingungen für einige der in meiner zweiten Mittheilung verwendeten Erreger, und für verschiedene Länge L_s der secundären Leitung, so ist aus einem Vergleiche mit den dort gegebenen Tabellen und Curventafeln zu ersehen, dass von der, den Verlauf der grösseren Grundschwingung darstellenden Curve von mir stets nur der erste Anfang beobachtet wurde, und in Folge der in denselben Tafeln verzeichneten Intensitätsverhältnisse auch nur dieser Anfang beobachtet werden konnte. Verdoppelt man die Ordinaten L_r der in der betreffenden Figur auf die der Grundschwingung entsprechenden folgenden Curve, verdreifacht die Ordinaten der nächsten u. s. f., so fallen die hierdurch entstehenden neuen Curven nahezu mit der für den Verlauf der Grundschwingung berechneten zusammen; ein Beweis, dass es sich dort wirklich um Oberschwingungen der grösseren Grundschwingung handelt, wie oben behauptet wurde. Fig. 3 stellt diese Verhältnisse für den Fall der Figur gleicher Nummer meiner zweiten Mittheilung dar. Die gestrichelten Curven $\frac{\lambda_1}{2}$ und $\frac{\lambda_2}{2}$ geben den berechneten Verlauf der grösseren und kleineren Grundschwingung. Die Curven $2\times$I und $3\times$II sind durch Verdoppeln, beziehungsweise Verdreifachen der Ordinaten jener Curven entstanden, welche l. c. den Verlauf der ersten, beziehungsweise zweiten Oberschwingung darstellen.

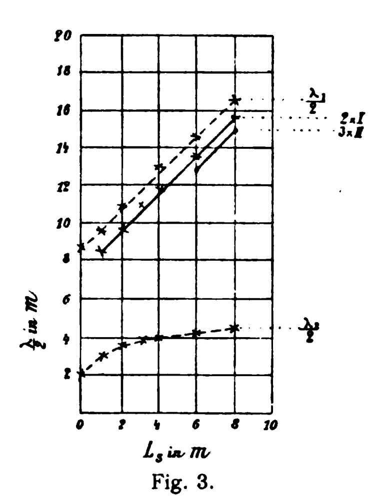


Fig. 3.

Dass das Auftreten von Oberschwingungen keinen Widerspruch mit der Theorie begründet, ist wohl klar. Ich habe dies am Schlusse der zweiten Mittheilung auch ausdrücklich hervorgehoben mit den Worten: »Alle angeführten Resultate (der

[1] Vgl. hiezu M. Wien, Wied. Ann., 61, S. 151, 1897.

Theorie) gelten streng nur für die einschränkenden Voraussetzungen, welche über den Widerstand und die Capacität der Drähte gemacht wurden. Die hier in Kürze dargestellte Theorie gestattet daher keinerlei Aussage: einestheils über die Dämpfung oder Aperiodicität der einzelnen Schwingungen bei Versuchen, wo der Widerstand der Drähte nicht zu vernachlässigen ist, anderntheils über das Auftreten von Oberschwingungen bei Benützung von Drähten, deren eigene Capacität gegenüber derjenigen der verwendeten Condensatoren nicht als verschwindend klein betrachtet werden kann. Es ist möglich, Versuchsanordnungen zu treffen, bei welchen die genannten Voraussetzungen nahezu erfüllt sind; bei den mitgetheilten Versuchen war dies jedoch keineswegs der Fall.«

5. Herr F. Koláček[1] hat in Folge meiner Versuche Veranlassung genommen, dieselben auf Grund der Maxwell'schen Theorie zu berechnen. Soweit es mir möglich war, den Inhalt dieser umfangreichen und gewiss sehr werthvollen Abhandlung zu verstehen, was mir durch meine höchst mangelhafte Kenntniss der Sprache, in welcher dieselbe verfasst ist, bedeutend erschwert war, so ist es Herrn Koláček gelungen, den Verlauf der grösseren Grundschwingung und deren Oberschwingungen, sowie deren Intensität in sehr befriedigender Übereinstimmung mit der Erfahrung zu berechnen; dagegen scheint seine Rechnung die Existenz der zweiten Grundschwingung, welche durch meine in dieser Notiz mitgetheilten Versuche in Übereinstimmung mit der Theorie nachgewiesen ist, nicht zu ergeben.

Ähnliches gilt von den theoretischen Ausführungen von P. Drude[2] über die Grundschwingung und die Oberschwingungen in Lecher'schen und Blondlot'schen Systemen. Auch Herr Drude erhält nur die Werthe für die grössere Grundschwingung und deren Oberschwingungen, nicht aber jene der kleineren. Auch M. Lamotte[3] findet in seiner auf Herrn

---

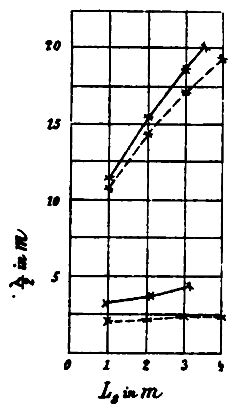
[1] L. c.

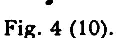
[2] P. Drude, Königl. Sächs. Ges. der Wiss., XXIII, 1896; Wied. Ann., 61, 1897; Arch. de Genève, 1897, Mai.

[3] M. Lamotte, Wied. Ann., 65, S. 92, 1898. Herrn Lamotte dürfte die von mir angewendete Resonatormethode zur Untersuchung schwingender

Drude's Anregung unternommenen Experimentaluntersuchung nur die grössere Grundschwingung und deren Obertöne.

Herr D. Mazzotto,[1] welcher sich in einer Reihe interessanter Abhandlungen mit dem Schwingungsvorgang in Lecher'schen Systemen befasst hat, stellte auf Grund seiner graphischen Methode der Knotenlinien (linee nodale) die Vermuthung auf, dass ein Lecher'sches System — abgesehen von den auch von ihm beobachteten Oberschwingungen der grösseren Grundschwingung (vibrazione primaria) und von dieser selbst — eine zweite Grundschwingung (vibrazione secondaria) besitze. Herr Mazzotto hatte die grosse Liebenswürdigkeit, mir über meine Bitte die genauen Dimensionen seiner Apparate anzugeben, wofür ich ihm bestens danke. Hiedurch war es mir möglich, die Theorie auf seine Versuche und auf die Ergebnisse seiner graphischen Methode anzuwenden. Die mühevollen numerischen Rechnungen, welche




Fig. 4 (10).

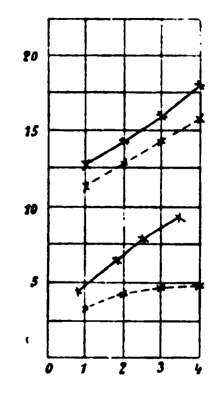


Fig. 5 (23).

Herr stud. phil. F. Queisser in dankenswerther Weise für mich ausführte, ergaben eine befriedigende Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Werthe für die grössere

---

elektrische Systeme entgangen sein, da er derselben in seiner Literaturübersicht keine Erwähnung thut. Ich halte dieselbe aus den in meiner zweiten Mittheilung ausführlich dargelegten Gründen für einwandfreier, als die Methode des Herrn Lamotte.

[1] D. Mazzotto, Nuovo Cim., Januar 1898.

Grundschwingung (vibrazione primaria) und eine ziemlich befriedigende Übereinstimmung der berechneten mit den graphisch bestimmten Werthen für die kleinere Grundschwingung (vibrazione secondaria). Fig. 4 und Fig. 5 stellen diese Verhältnisse für zwei der von Herrn Mazzotto l. c. mitgetheilten Fälle dar. Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf die Figuren in der citirten Abhandlung von D. Mazzotto. Die gestrichelten Curven geben den Verlauf der nach meiner Formel berechneten Schwingungen.

Zum Schlusse möchte ich nochmals hervorheben, dass die Theorie durch die in dieser Notiz mitgetheilten Versuche für den Fall $n = 2$ den Vergleich mit der Erfahrung bestanden hat.

Über die lichtelektrischen Erscheinungen

(I. Mittheilung)

von

Dr. **Egon R. v. Schweidler.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.)

Unter lichtelektrischen Erscheinungen verstehe ich hier die Entstehung oder Beeinflussung von Gasentladungen durch Strahlen, die dem sichtbaren oder ultravioletten Theile des Spectrums angehören. Erscheinungen anderer Natur, die dem Namen nach auch hiehergerechnet werden könnten, wie z. B. Widerstandsänderung oder Auftreten elektromotorischer Kräfte durch Belichtung in Stromkreisen, die aus festen und flüssigen Leitern gebildet sind, sollen ganz unberücksichtigt bleiben.

Dass auch die nahe verwandten Phänomene der aktinoelektrischen Wirksamkeit der Kathoden-, Röntgen-, Uran- und Thorstrahlen ausgeschieden werden, mag gerechtfertigt werden erstens durch den Umstand, dass die genannten »Strahlen« nicht mit Sicherheit als dem Licht analoge Äthervorgänge nachgewiesen sind, zweitens dadurch, dass die Wirkung der sichtbaren und ultravioletten Strahlen im Gegensatze zur Wirkung jener unipolaren Charakter hat und daher eine Sonderstellung einnimmt.

Trotz der reichhaltigen Literatur, die das Gebiet der lichtelektrischen Erscheinungen behandelt — es liegen seit 1887 fast 100 Abhandlungen vor — gelten noch immer die Worte

Hertz':[1] »Durch die Arbeiten einer ganzen Reihe von Forschern ist die genauere Kenntniss dieser Erscheinung selbst ungemein gefördert; die Mechanik derselben hat sich freilich dem Verständniss noch nicht vollständig erschlossen«.

Eine Zusammenstellung dieser Literatur und der darin enthaltenen Resultate in etwas grösserer Ausführlichkeit, als sie bisher vorliegt, dürfte Manchen nicht unwillkommen sein; bevor ich daher über einige eigene Versuche zu einzelnen Detailfragen berichte, will ich zunächst eine Übersicht über die gewonnenen experimentellen Daten und die theoretischen Erklärungsversuche geben.

Im Anhange folgt dann ein, wie ich glaube, ziemlich vollständiges Verzeichniss der die lichtelektrischen Erscheinungen behandelnden Originalarbeiten.

I. Hauptformen und charakteristische Eigenschaften der lichtelektrischen Wirkung.

Durch Belichtung einer Funkenstrecke wird die Funkenentladung im Allgemeinen befördert, d. h. bei gegebener Potentialdifferenz der Elektroden die Schlagweite vergrössert, respective bei gegebener Schlagweite das Entladungspotential verringert (Hertz[2]); wesentlich ist nur die Belichtung der Kathode, die der Anode oder bloss der Luftstrecke der Funkenbahn ist ohne Einfluss; die Belichtung verändert auch den Charakter der Funkenentladung, indem die einzelnen Entladungen in gleichmässigen und kürzeren Intervallen erfolgen (Wiedemann und Ebert[3]).

Durch Belichtung wird ferner das Anfangspotential einer Spitzenentladung herabgesetzt, wenn die Spitze negativ geladen ist (Precht[4]), der Widerstand einer Geisslerröhre gegen leuchtende Entladung vermindert (Elster und Geitel[5]).

---

[1] Einleitung zu den »Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft« (1894).

[2] Vide Literaturverz. Nr. 1.

[3] Vide Literaturverz. Nr. 2 und 7.

[4] Vide Literaturverz. Nr. 65.

[5] Vide Literaturverz. Nr. 57.

Unter gewissen Bedingungen kann auch umgekehrt eine Funken- oder Büschelentladung durch den Einfluss des Lichtes gehemmt werden, wobei eine andere Entladungsform (Glimmentladung) auftritt, die weniger Elektricität transportirt, als die Funken- oder Büschelentladung (Elster und Geitel,[1] Klemenčič[2]).

Eine zweite Hauptform der lichtelektrischen Wirkung ist die auf statische Ladungen. Negativ geladene Körper verlieren ihre Ladung, wenn ihre Oberfläche belichtet wird (Hallwachs[3]).

Dieser Elektricitätsverlust hat den Charakter einer continuirlichen und convectiven Entladung; die entweichende negative Elektricität bewegt sich längs der Kraftlinien, wobei auf die belichtete Kathode eine dem Rückstoss fortgeschleuderter Theilchen entsprechende ponderomotorische Kraft ausgeübt wird (Righi,[4] Bichat[5]), und wird an die Leiter, auf denen die Kraftlinien enden, abgegeben. Werden die belichtete Kathode und die Anode auf constantem Potential erhalten, so geht zwischen ihnen ein constanter Strom über, der galvanometrisch messbar ist (Arrhenius,[6] Stoletow[7]) und bei günstigen Versuchsbedingungen die Grössenordnung von 10^{-7} Ampère erreichen kann.

Quantitativ ist diese Zerstreuung der Elektricität durch Belichtung, nach dem Entdecker kurz »Hallwachseffect« genannt, der belichteten Fläche und der Intensität des Lichtes direct proportional (Stoletow,[8] Elster und Geitel[9]); die Herstellung eines stationären Zustandes erfordert keine messbare Zeit (Stoletow,[8] womit Borgmann[10] widerlegt).

---

1 Vide Literaturverz. Nr. 35, 79.
2 Vide Literaturverz. Nr. 84.
3 Vide Literaturverz. Nr. 3.
4 Vide Literaturverz. Nr. 8, 9.
5 Vide Literaturverz. Nr. 16.
6 Vide Literaturverz. Nr. 4.
7 Vide Literaturverz. Nr. 11.
8 Vide Literaturverz. Nr. 23, 24.
9 Vide Literaturverz. Nr. 57*a*, 64.
10 Vide Literaturverz. Nr. 30.

Im Gegensatz zu den meisten übrigen Beobachtern fand Branly[1] auch eine Zerstreuung positiver Elektricität durch Belichtung, doch haben Elster und Geitel[2] wahrscheinlich gemacht, dass in diesem Falle auch nur eine Zerstreuung der inducirten negativen Ladung durch reflectirtes Licht erfolgt sei, wie dies schon Righi und Stoletow in ähnlichen Fällen angenommen hatten.

Eine dritte Form der lichtelektrischen Wirkung wurde ziemlich gleichzeitig von Hallwachs[3] und Righi[4] gefunden: ungeladene lichtempfindliche Körper erhalten durch Belichtung eine positive Ladung. Unter sonst gleichen Umständen, aber bei verschiedener Gestalt des belichteten Körpers wird eine bestimmte Flächendichte der Ladung erreicht, die bei verschiedenen Metallen zwischen den Grenzen

$$\delta = 0\cdot00012—0\cdot00024 \text{ C. G. S. (stat.)}$$

liegt (Righi[5]).

Durch Anblasen des belichteten Körpers wird diese Wirkung verstärkt (Bichat und Blondlot[6]).

Der Einfluss verschiedener Nebenumstände auf die lichtelektrischen Erscheinungen wird in den folgenden Abschnitten behandelt.

Als ein für die Erklärung dieser Erscheinungen wichtiges Phänomen wäre noch zu erwähnen, dass negativ geladene, lichtelektrisch empfindliche Körper auf einen Dampfstrahl so wirken, als ob durch die Belichtung ihre Oberfläche zerstäubt würde (Lenard und Wolf[7]).

II. Abhängigkeit von der Wellenlänge des Lichtes und der Natur der Kathode.

Die Wirkung auf disruptive Entladungen kommt hauptsächlich den sehr brechbaren Strahlen zu. Dementsprechend

---

1 Vide Literaturverz. Nr. 40, 50, 51, 59.

2 Vide Literaturverz. Nr. 78.

3 Vide Literaturverz. Nr. 6.

4 Vide Literaturverz. Nr. 8, 9, 10.

5 Vide Literaturverz. Nr. 27, 28.

6 Vide Literaturverz. Nr. 15.

7 Vide Literaturverz. Nr. 21.

sind wirksame Lichtquellen: Funken, Bogenlicht (besonders wenn Zn, Pb oder Al im Bogen verbrennt), Magnesiumlicht etc.; die Durchlässigkeit von Platten für die aktinoelektrische Wirkung geht ihrer Durchsichtigkeit für ultraviolettes Licht parallel; es sind daher sehr gut durchlässig: Quarz, Gyps, Kalkspath, Wasser; wenig oder gar nicht durchlässig: Glimmer, Glas, viele färbige und farblose Lösungen und natürlich alle undurchsichtigen Körper.

Unter günstigen Umständen ist aber auch die Wirkung sichtbarer Strahlen noch deutlich zu bemerken (Wiedemann und Ebert,[1] Warburg[2]).

Eine Abhängigkeit der lichtelektrischen Wirkung auf disruptive Entladungen von der Substanz, aus der die Kathode besteht, ist zwar beobachtet worden, doch nicht von wesentlicher Bedeutung; Hertz gibt an, dass am ehesten Eisen eine grössere Empfindlichkeit zeige als andere Metalle; hingegen ordnen Wiedemann und Ebert[1] die Metalle nach ihrer Empfindlichkeit in die Reihe: Pt; Zn, Cu; Fe, Pd, Al, Ag.

Beim Hallwachseffect spielt die chemische Natur und die Oberflächenbeschaffenheit der Kathode eine viel grössere Rolle.

Bei intensiver Beleuchtung mit an ultravioletten Strahlen sehr reichem Lichte zeigen sich die meisten Körper lichtempfindlich, sofern sie ultraviolettes Licht absorbiren; Wasser, benetzte oder nur feuchte, eingefettete oder gefirnisste Oberflächen sind unempfindlich (Hallwachs, Stoletow u. A.). Von Metallen zeigt sich Zink und Aluminium besonders lichtempfindlich; allgemein ist die Empfindlichkeit an frisch abgeschmirgelten (eventuell amalgamirten) Flächen grösser. Auffallend gross ist ferner die Lichtempfindlichkeit mancher Lösungen (Fuchsin in wässeriger Lösung, aber nicht in alkoholischer), sowie von Eis bei tiefen Temperaturen, was für die Theorie der atmosphärischen Elektricität von Bedeutung ist (Brillouin-Brisson[3]).

Bei Zn, Al, Mg, sowie deren Amalgamen tritt die lichtelektrische Zerstreuung negativer Ladungen auch schon ein

[1] Vide Literaturverz. Nr. 7.

[2] Vide Literaturverz. Nr. 83.

[3] Vide Literaturverz. Nr. 94.

bei sichtbaren Strahlen; an diesen Substanzen haben Elster und Geitel[1] zuerst die Wirksamkeit von Sonnen- und Tageslicht nachweisen können, später auch an Balmain'scher Leuchtfarbe, sowie an einigen Mineralien (besonders Flussspath).

Die oben genannten Metalle sind stark elektropositiven Charakters; bei den noch elektropositiveren Metallen Na, Ka, Rb, deren Amalgamen und Legirungen liegt sogar die Wellenlänge maximaler Wirksamkeit im sichtbaren Spectrum, bei Ka im Blau, bei Rb im Gelb.[2]

Die von Branly[3] behauptete Zerstreuung positiver Elektricität soll hauptsächlich durch das alleräusserste Ultraviolett bewirkt werden, so dass selbst Luft und Quarz merklich absorbiren.

Die Fähigkeit einer Oberfläche, durch Belichtung positive Ladung anzunehmen, geht ihrer Lichtempfindlichkeit bezüglich des Hallwachseffectes ziemlich parallel (Righi).

III. Abhängigkeit von Natur und Druck der Gase.

Die Einwirkung des Lichtes auf eine Funkenentladung steigt mit abnehmendem Druck (Hertz), sie erreicht ein Maximum bei circa 300—400 *mm* und verschwindet bei sehr kleinem Drucke vollständig (Wiedemann und Ebert[4]).

Nach Hertz wird eine Funkenentladung in verschiedenen Gasen verschieden stark beeinflusst, und zwar in abnehmender Reihenfolge in H, Luft, CO_2, Leuchtgas. Nach Wiedemann und Ebert hingegen ist die Wirkung in CO_2 am grössten; hier sind auch sichtbare Strahlen noch wirksam.

Der Einfluss dieser Umstände auf den Hallwachseffect ist hauptsächlich von Righi[5] und Stoletow[6] untersucht.

Während bei normalem Druck die negative Elektricität sich längs der Kraftlinien bewegt, weichen die Bahnen der elektrisirten Theilchen bei geringerem Drucke davon ab und

---

[1] Vide Literaturverz. Nr. 22.
[2] Vide Literaturverz. Nr. 55.
[3] Vide Literaturverz. Nr. 59.
[4] Vide Literaturverz. Nr. 2 und 7.
[5] Vide Literaturverz. Nr. 44.
[6] Vide Literaturverz. Nr. 13, 23, 24.

nähern sich jenen, die die Theilchen in Folge der Trägheit beschreiben würden (Righi).

Stoletow untersuchte die Abhängigkeit des durch Belichtung im Plattennetzcondensator erzeugten Stromes von Natur und Druck des Gases: der Strom ist stärker (ungefähr das Doppelte) in CO_2, als in trockener oder feuchter Luft und in Wasserstoff; die Abhängigkeit des Stromes vom Druck ist in allen diesen Gasen ziemlich die gleiche; der Strom wächst mit abnehmendem Druck, erreicht ein Maximum bei ungefähr 3—4 *mm*, wobei der Maximalwerth circa 4—6mal grösser ist als bei Atmosphärendruck, nimmt dann wieder ab und ist bei den äussersten Verdünnungsgraden noch merklich. Nach späteren[1] Mittheilungen ist der »kritische Druck«, d. i. der dem Maximum der Stromintensität entsprechende Druck, eine Function der Feldintensität (respective Ladungsdichte) im Condensator, und zwar dieser direct proportional (nachgewiesen in einem Intervall von 60—240 Volt Potentialdifferenz der beiden Condensatorbelegungen und einer Distanz derselben von 0·25 bis 3·8 *mm*); bei sehr kleiner Ladungsdichte hat die Function $i = f(p)$ kein Maximum.

Nach Breisig[2] ist der Hallwachseffect besonders stark ausgeprägt in Dämpfen von Alkohol oder Äther.

Elster und Geitel finden die Empfindlichkeit einer mit Wasserstoff gefüllten Ka- oder Na-Zelle am grössten bei einem Drucke von ungefähr 0·3 *mm*.

IV. Abhängigkeit von der Beschaffenheit des elektrischen Feldes.

Die Beförderung einer Funkenentladung lässt sich nach Hertz am besten bei kurzen Funken zwischen Kugeln beobachten, keine oder nur eine geringe Wirkung erhält man bei Funken zwischen Spitzen. Nach Klemenčič[3] ist bei langen Funken zwischen Spitzen der Einfluss der Belichtung sogar der entgegengesetzte: die Funkenentladung wird gehemmt und es tritt Büschelentladung ein.

---

1 Vide Literaturverz. Nr. 41.

2 Vide Literaturverz. Nr. 52.

3 Vide Literaturverz. Nr. 84.

Nach Swyngedauw[1] wird das »statische Entladungspotential«, d. i. die Potentialdifferenz, die bei langsamer Elektricitätszufuhr nothwendig ist, um eine Funkenentladung herbeizuführen, durch Belichtung weniger herabgesetzt, als das »dynamische Entladungspotential«, d. i. das Entladungspotential bei raschen Potentialschwankungen (z. B. wenn die Funkenstrecke durch ein Inductorium erzeugt wird).

Warburg[2] kommt mit einer anderen Versuchsanordnung zu theilweise ähnlichen Resultaten. Allgemein scheint der Funkenentladung, wenn die Bedingungen einer solchen bereits vorhanden sind, ein noch nicht näher bekannter Process voranzugehen, der längere oder kürzere Zeit dauern kann und eine »Verzögerung« der Funkenentladung bewirkt. Ist durch langsame Elektricitätszufuhr das statische Entladungspotential erreicht, so kann diese Verzögerung im Dunkeln einige Minuten betragen; durch Belichtung wird die Verzögerung sehr vermindert, das statische Entladungspotential selbst aber nicht wesentlich erniedrigt.

Bei rascher Elektricitätszufuhr kann eine Funkenstrecke für eine gewisse sehr kurze Zeit ($^1/_{1000}$ Secunde) auf eine das statische Entladungspotential weit übersteigende (circa 7mal grössere) Spannungsdifferenz geladen werden, ohne dass in dieser kurzen Zeit die Entladung eintritt, wenn keine Belichtung stattfindet; bei Belichtung erfolgt die Entladung schon bei Potentialen, die nur wenig grösser als das statische Entladungspotential sind.

Sehr complicirt ist die Abhängigkeit des Hallwachseffectes von der Intensität des elektrischen Feldes, in dem er vor sich geht.

Bei der Messung der ultravioletten Sonnenstrahlung mit dem lichtelektrischen Actinometer setzen Elster und Geitel[3] voraus, dass die Entladungsgeschwindigkeit des beleuchteten negativ geladenen Körpers seiner Potentialdifferenz gegen die Umgebung proportional sei; innerhalb des Intervalles, in dem

---

[1] Vide Literaturverz. Nr. 73, 81 und 82.

[2] Vide Literaturverz. Nr. 83.

[3] Vide Literaturverz. Nr. 57 *a*.

die Messungen ausgeführt werden, ist diese Voraussetzung so nahe erfüllt, dass keine merklichen Fehler im Resultate entstehen; allgemein gilt diese Voraussetzung aber nicht.

Stoletow[1] hat die Stromstärke im belichteten Plattennetzcondensator als Function der Feldgrössen eingehend untersucht; indem ich Angaben aus seinen ersten Abhandlungen, die er später modificirte, hinweglasse, führe ich folgende seiner Resultate an:

Bei einem gewissen Drucke, z. B. Atmosphärendrucke, ist die Stromstärke i eine Function der Ladungsdichte an der Kathode, respective der ihr proportionalen Feldintensität im Condensator, also

$$i = \varphi\left(\frac{E}{l}\right),$$

wenn E die Potentialdifferenz, l der Abstand von Platte (Kathode) und Netz (Anode) ist. Dabei sind in E eventuelle Contactpotentialdifferenzen mit einzurechnen.

$\varphi\left(\frac{E}{l}\right)$ steigt zuerst rascher als sein Argument, dann nach Überschreitung eines Wendepunktes langsamer und nähert sich einer oberen Grenze. Dies gilt nicht bei kleinem Drucke, speciell beim kritischen. Bei sehr kleinem Drucke ist $i = f(E, l)$, wo E und l getrennt vorkommen; Verkleinerung von E wird durch entsprechende Verkleinerung von l nicht compensirt.

Analoge Resultate erhielt Branly.[2]

Dufour, Dutoit und Hofer[3] finden, dass die Entladungsgeschwindigkeit einer Zinkkugel von 30 *cm* Durchmesser von 50 Volt an rascher wächst, als es einer Proportionalität mit dem Potentiale entspricht.

In einer Ka-Zelle wächst der Strom rascher als die Potentialdifferenz der Elektroden und erreicht einen verhältnissmässig unendlich grossen Werth bei einer Potentialdifferenz (ungefähr 300 Volt), die auch ohne Belichtung im verdünnten Gase

---

1 Vide Literaturverz. Nr. 23, 24 und 41.

2 Vide Literaturverz. Nr. 40.

3 Vide Literaturverz. Nr. 77.

(Wasserstoff 0·3 *mm* Druck) eine leuchtende Entladung hervorruft (Elster und Geitel[1]).

V. Abhängigkeit von der Temperatur.

Da Feuchtigkeitsschichten auf der Oberfläche einer Kathode deren Lichtempfindlichkeit herabsetzen oder ganz zerstören können, hat die Temperatur natürlich einen secundären Einfluss. Aber auch wo solche Einflüsse ausgeschlossen sind, z. B. in den Ka-Zellen von Elster und Geitel steigt die Lichtempfindlichkeit mit der Temperatur.[1] Hoor[2] behauptet umgekehrt eine Abnahme der Lichtempfindlichkeit einer Zinkplatte bei steigender Temperatur (18—55°). Nach Righi[3] steigt die durch Belichtung erzeugte positive Ladungsdichte stark mit der Temperatur.

Die Entladungsgeschwindigkeit einer amalgamirten Zinkfläche ist im Intervalle von 20—70° C. unabhängig von der Temperatur (Elster und Geitel[1]).

VI. Einfluss magnetischer Kräfte.

In sehr verdünnten Gasen wird die positive Ladung belichteter Körper vermindert durch magnetische Kräfte, die parallel zur Oberfläche des Körpers sind (Righi[3]); ebenso finden Elster und Geitel[4] eine Abnahme des Hallwachseffectes durch magnetische Kräfte, die senkrecht zu den Stromlinien stehen; diese Abnahme ist bei einem Drucke von etwa 5 *mm* merklich und beträgt bei sehr kleinen Drucken ungefähr die Hälfte der Gesammtwirkung.

VII. Abhängigkeit von der Orientirung der Lichtschwingungen.

Versuche von Hertz und von Wanka,[5] bei Anwendung polarisirten Lichtes eine von der Orientirung der Polarisationsebene abhängige Einwirkung auf die Funkenentladung aufzufinden, hatten ein negatives Resultat.

---

1 Vide Literaturverz. Nr. 64 und 57*a*.
2 Vide Literaturverz. Nr. 17 und 25.
3 Vide Literaturverz. Nr. 27.
4 Vide Literaturverz. Nr. 37.
5 Vide Literaturverz. Nr. 58.

Dagegen konnten Elster und Geitel[1] eine solche Abhängigkeit des photoelektrischen Stromes constatiren an einer ebenen Kathodenfläche einer flüssigen Na-Ka-Legirung, die unter Wasserstoff von geringem Druck auch für sichtbare Strahlen empfindlich ist.

Bezeichnet i die Stromstärke, α den Winkel zwischen der Polarisationsebene und der Einfallsebene des polarisirten parallelen Lichtbündels, so besteht die Relation

$$i = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha.$$

Also i = Maximum, wenn

$$\alpha = 0 \begin{cases} \text{Polarisationsebene} \perp \text{Einfallsebene,} \\ \text{Richtung der elektr. Verschiebung} \parallel \text{Einfallsebene,} \end{cases}$$

d. h., wenn die elektrischen Verschiebungen (im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie) eine zur Kathodenoberfläche normale Componente haben.

A und B sind abhängig vom Einfallswinkel; für sehr kleine Werthe desselben sind A und B gleich und sehr klein; mit wachsendem Einfallswinkel nimmt A zu und erreicht ein Maximum bei circa 60°, während B durchwegs abnimmt; beim Maximum von A ist $\frac{A}{B} = 50$ ungefähr. Bei demselben Einfallswinkel zeigte auch die Wirkung unpolarisirten Lichtes ein Maximum.

VIII. Theoretische Erklärungsversuche.

E. Wiedemann[2] betrachtet die Einwirkung des Lichtes auf eine disruptive Entladung als ein Resonanzphänomen, bei dem durch Absorption des Lichtes zunächst in der Oberflächenschichte der Kathode die kinetische Energie der Molekeln soweit gesteigert wird, wie dies bei einem dauernden und über einen grösseren Raum verbreiteten Zustande einer sehr hohen Temperatur entsprechen würde. Indem diese Energie theilweise an das benachbarte Gas abgegeben wird, stellt sich ein Zustand

[1] Vide Literaturverz. Nr. 67, 70 und 71.

[2] Vide Literaturverz. Nr. 2 und 7.

her, der an sich Bedingung einer disruptiven Entladung ist und durch das Auftreten von Kathodenstrahlen als einer Begleiterscheinung charakterisirt ist; in der That verschwindet der Einfluss der Belichtung auf eine disruptive Entladung bei so niederem Drucke, dass von selbst Kathodenstrahlen entstehen.

Jaumann[1] sieht in der Wirkung des Lichtes, das im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie als Wellenbewegung elektrischer und magnetischer Kraft aufgefasst wird, einen Specialfall der Beförderung einer Entladung durch rasche Schwankungen des Potentialgradienten.

Die convective Natur der Zerstreuung negativer Elektricität durch Belichtung kann als sichergestellt und allgemein anerkannt betrachtet werden. Die Träger der Elektricität können dabei sein:

1. Die Molekeln des Gases;
2. durch Dissociation des Gases entstandene Ionen;
3. von der Kathode losgelöste Theilchen.

Dass der atmosphärische Staub, der bei der gewöhnlichen Zerstreuung der Elektricität eine Rolle spielt, hier kein wesentlicher Factor ist, geht wohl daraus hervor, dass die lichtelektrische Entladung in Fällen, wo dieser Umstand ausgeschlossen ist, z. B. in den lichtelektrischen Zellen von Elster und Geitel, sogar in besonderer Stärke auftritt.

Die unter 1) genannte Hypothese erscheint besonders naheliegend, wenn man mit Hoor[2] an eine Ablösung der an der Kathodenoberfläche condensirten Gasschichte denkt; die experimentellen Ergebnisse widersprechen dem aber vollkommen. Righi[3] hat nachgewiesen, dass die Oberflächengasschicht eines Metalles, sei dieses positiv, negativ oder gar nicht geladen, durch Belichtung entfernt wird; dabei bleibt ein auf diese oder andere Weise seiner Gasschichte beraubte Metalloberfläche lichtelektrisch empfindlich; ebenso spricht die Lichtempfindlichkeit wässeriger Lösungen (Hallwachs, Stoletow) und sich frisch bildender Amalgamstrahlen (Elster und Geitel) gegen diese Annahme.

[1] Vide Literaturverz. Nr. 75, 76 und 96.
[2] Vide Literaturverz. Nr. 17 und 25.
[3] Vide Literaturverz. Nr. 29.

Von dieser speciellen Form abgesehen, kann die Hypothese, dass die Gasmolekeln die Träger der Elektricität sind, nicht direct widerlegt werden; doch bietet sie auch keinen besonderen Vortheil zur Erklärung specieller Eigenthümlichkeiten der lichtelektrischen Zerstreuung, z. B. des unipolaren Charakters.

Die allgemeine Tendenz der Erklärungsversuche für Gasentladungen überhaupt geht heute dahin, die Molekeln eines Gases als Isolatoren zu betrachten, ein scheinbares Leitungsvermögen eines Gases auf Anwesenheit freier Ionen zurückzuführen.

In der That gibt diese Theorie, zunächst von Giese für Flammengase aufgestellt, dann von ihm, Schuster, J. J. Thomson u. A. weiter entwickelt, ein gutes Bild dieser Erscheinungen.

In der ursprünglichen, von Arrhenius[1] vertretenen Form, auf die lichtelektrische Entladungen übertragen, hat sie sich zwar nicht bewährt. Die Belichtung an sich macht das Gas nicht leitend, sondern es muss die Kathode bestrahlt werden (Wiedemann und Ebert,[2] Hallwachs,[3] Simon[4]). Im Gegensatz zu Luft, die durch Elektrisiren, Bestrahlung mit Röntgen- und Uranstrahlen leitend wurde, verliert die die lichtelektrische Entladung vermittelnde Luft ihre Leitfähigkeit sehr schnell (Batelli und Garbasso,[5] Zeleny[6]).

Die Dissociationstheorie wurde daher für diesen Fall dahin modificirt, dass an der Kathodenoberfläche eine Doppelschichte vorhanden sei, deren negative Belegung von den Gastheilchen gebildet wird; unter dem Einflusse der Bestrahlung mit geeignetem Lichte (das von der Kathode absorbirt werden muss), tritt eine Trennung derselben ein und die in Folge elektrostatischer Kraftwirkung abgestossenen Gas-Ionen verbreiten sich in der Umgebung der Kathode; da hier nicht wie bei Elektrolyten positive und negative Ionen in gleicher Anzahl

1 Vide Literaturverz. Nr. 4.
2 Vide Literaturverz. Nr. 2 und 7.
3 Vide Literaturverz. Nr. 3.
4 Vide Literaturverz. Nr. 74.
5 Vide Literaturverz. Nr. 87.
6 Vide Literaturverz. Nr. 97.

vorhanden sind, sondern letztere im Überschusse, so wird die unipolare Leitfähigkeit verständlich (J. J. Thomson,[1] Elster und Geitel[2]). Auch die Entwicklung positiver Ladungen durch Belichtung kann so erklärt werden.

Die dritte Annahme, dass an der Kathode durch Belichtung eine Zerstäubung eintrete, findet eine Stütze in den Beobachtungen von Lenard und Wolf[3] (siehe oben); aber nach Untersuchungen von R. Helmholtz und Richarz[4] zeigen sich diese Condensationserscheinungen an einem Dampfstrahl nicht nur bei Anwesenheit von Staub, sondern auch wenn z. B. chemische Reactionen in der Nähe vor sich gehen; es ist daher die Dissociationshypothese auch mit diesen Beobachtungen in Übereinstimmung.

Übrigens ist es durchaus nicht unwahrscheinlich, dass beide Vorgänge, Dissociation des Gases und Zerstäubung der Kathode gleichzeitig stattfinden, wie dies z. B. der Fall ist bei der Elektricitätszerstreuung in der Nähe glühender Körper, ein Erscheinungsgebiet, das mit der lichtelektrischen Zerstreuung die grösste Analogie hat.

Eine Superposition zweier Vorgänge beim photoelektrischen Strome vermuthet auch Stoletow.[5]

Experimentelle Beiträge.

I. Potentialgefälle im belichteten Condensator.

Die sowohl von der Dissociationstheorie, als der Zerstäubungstheorie geforderte Consequenz, dass in der Umgebung einer belichteten Kathode eine negative Raumdichte freier Elektricität vorhanden sei, ist bisher nicht direct durch Versuche bewiesen.

Ich erhielt einen solchen Beweis durch folgende Versuchsanordnung:

[1] Electr. Researches, p. 64 u. ff.
[2] Vide Literaturverz. Nr. 70.
[3] Vide Literaturverz. Nr. 21.
[4] Vide Literaturverz. Nr. 39.
[5] Vide Literaturverz. Nr. 24.

Eine amalgamirte Zinkscheibe von 18 *cm* Durchmesser und ein Eisendrahtnetz etwas grösserer Dimensionen standen einander parallel und vertical gegenüber in einer Distanz von 3—5 *cm*. Die Zinkplatte war dauernd zur Erde abgeleitet, das Netz mit einem Punkte verbunden, der einem Gleichstromkreise angehörte und dessen constantes positives Potential an einem Westonvoltmeter gemessen wurde.

Zwischen der Zinkplatte und dem Netze befand sich eine Wassertropfelektrode, deren Zerreissungspunkt in der centralen Verbindungslinie Platte und Netz lag; diese Tropfelektrode konnte mittelst einer mikrometrischen Vorrichtung horizontal verschoben werden. Ein mit ihr verbundenes geaichtes Exner'sches Elektroskop gestattete, das im Zerreissungspunkte herrschende Potential auf circa ±2 Volt genau zu bestimmen.

Im unbelichteten Condensator ergaben die Messungen bei verschiedenen Stellungen der Tropfelektrode nur geringe unregelmässige Abweichungen von einem linearen Potentialgefälle. Wurde die Zinkplatte durch das Netz hindurch von den Strahlen einer in circa 30 *cm* Entfernung aufgestellten Bogenlampe getroffen, so wurde das am Elektroskop abgelesene positive Potential verringert; durch Einschieben einer undurchlässigen Platte in den Gang der Lichtstrahlen wurde das frühere Potential wieder erreicht; die Zeit, in der eine solche Einstellungsänderung bei Belichten oder Abblenden erfolgte, betrug höchstens 5—10 Secunden; da die Function der Tropfelektrode an sich ungefähr diese Zeit beansprucht, kann man schliessen, dass die Herstellung des stationären Potentialvertheilung im belichteten Condensator sehr rasch geschieht.

Folgende Tabelle gibt das Resultat von zwei Versuchsreihen, die mit grösserer Sorgfalt angestellt wurden. Es bezeichnen:

l die horizontale Entfernung der Tropfelektrode von einem willkürlichen Nullpunkt;

V_n das Potential bei der betreffenden Stellung im unbelichteten Condensator;

V_b im belichteten.

Distanz der Platten........circa 50 *mm* Potentialdifferenz der Platten.... 196 Volt			Ebenso 163 Volt	
l	V_n	V_b	V_n	V_b
0	10	10	29	14
5	32	22	45	28
10	52	34	58	38
15	70	50	73	57
20	92	67	91	68
25	112	92	105	88
30	132	115	120	105
35	152	136	134	123
40	172	—	—	—

Eine graphische Darstellung geben Fig. 1 und Fig. 2 der Tafel.

Das sich hieraus ergebende Resultat ist:

Im belichteten Condensator wird das Potentialgefälle in der Nähe der Kathode erniedrigt, in der Nähe der Anode erhöht; zwischen den Condensatorplatten ist die Raumdichte negativ.

Stellt man die Potentialvertheilung im belichteten Condensator durch die Formel dar:

$$V_b = Ax + Bx^2,$$

so erhält man für die Raumdichte ρ den Werth

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 V_b = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{B}{2\pi};$$

aus der Einsetzung numerischer Werthe ergibt sich

$$\rho = 0\cdot 002 \text{ C G. S. (stat.)} = \frac{2}{3} . 10^{-12} \frac{Cb}{cm^3};$$

bei der Unvollkommenheit der Messungsmethode ist dieser Werth natürlich nur als Angabe der Grössenordnung aufzufassen.

Während ich diese Messungen ausführte, erschien eine Arbeit von Child,[1] in der nach einer ganz analogen Methode die Potentialvertheilung in einem Condensator unter Einwirkung der Röntgenstrahlen untersucht wurde.

Die Verschiedenheit der Resultate, die Herr Child und die ich erhielt, ist charakteristisch für die Unterschiede der beiden Entladungsarten durch Röntgenstrahlen und durch Licht.

II. Versuche über die Abhängigkeit des photoelektrischen Stromes von der Intensität des elektrischen Feldes.

In der einleitenden Übersicht habe ich die Resultate von Stoletow einerseits, Elster und Geitel anderseits erwähnt, zwischen denen ein gewisser Gegensatz besteht.

Indem ich dieser Erscheinung nachging, prüfte ich zunächst das Verhalten einer Ka-Zelle, wie sie von Müller-Unkel in Braunschweig nach den Angaben von Elster und Geitel angefertigt und in den Handel gebracht wird.

Die Kathode dieser Zelle war durch ein Galvanometer zur Erde abgeleitet, die Anode und das Gehäuse wurden auf constantes positives Potential geladen, das durch Stöpselung in einem Widerstandskasten rasch zwischen 0 und +300 Volt variirt werden konnte und an einem Westonvoltmeter direct abgelesen wurde.

Je nachdem bei kleinerer oder grösserer Potentialdifferenz gemessen wurde, diente als Lichtquelle eine Bogenlampe oder ein Auerbrenner.

Folgende Tabellen zeigen das Verhalten des Stromes in verschiedenen Intervallen der Potentialdifferenz. Wegen der verschiedenen Intensität der Beleuchtung sind die Versuchsreihen untereinander nicht vergleichbar.

Ein Scalentheil $= 1 \cdot 75 . 10^{-10}$ Ampère.

---

[1] Wied. Ann. 65 (1898), S. 152.

E in Volt	i in Scalentheilen	E	i	E	i
0	5·0	0	4	0	0
0·083	7·5	0·82	18	27	7
0·118	9	1·58	30	41	9
0·160	10	3·78	54	50	11
0·200	11	7·06	75	61	12·5
0·260	13·5	9·10	83	80	16
0·391	17	16·0	105	135	36
0·766	29	28·8	146	145	39
				183	63
				198	75
				240	130
				288	204

Die Figuren 3, 4 und 5 der Tafel stellen dies graphisch dar.

Die Stromstärke in einer solchen Zelle ist, wie daraus hervorgeht, bis circa 2 Volt eine lineare Function der Potentialdifferenz, steigt dann langsamer als diese bis ungefähr 70 Volt, hierauf rascher. Dass die Stromstärke im Intervalle von 2 bis 70 Volt langsamer steigt als die Potentialdifferenz, steht nicht im Widerspruche mit den Resultaten von Elster und Geitel, im Gegentheil sind die Zahlenangaben dieser beiden Autoren[1] in vollkommener Übereinstimmung hiemit, nur in ihrer graphischen Darstellung verschwindet diese Eigenthümlichkeit der Curve wegen des zu kleinen Massstabes derselben.

Weitere Versuche betrafen die Abhängigkeit der Entladungsgeschwindigkeit einer amalgamirten Zinkkugel vom Potentiale derselben. Die Kugel hatte einen Durchmesser von

[1] Vide Literaturverz. Nr. 64.

5 *cm* und wurde mit einem Braun'schen Elektrometer verbunden (1 Scalentheil = 100 Volt, Messbereich bis 1600 Volt), negativ geladen und durch Bogenlicht entladen; mittelst einer Secundenuhr wurde der zeitliche Abfall des Potentiales beobachtet.

Folgende Tabelle gibt die Mittelwerthe mehrerer Versuchsreihen unter je gleichen Bedingungen an; die verschiedenen Reihen der Mittelwerthe sind nicht vergleichbar.

	t				
V	I	II	III	IV	V
1600	—	—	0	0	0
1500	0	0	4·1	—	20·6
1400	—	—	8·6	11·2	41·4
1300	—	—	13·2	—	59·8
1200	7·2	7·7	17·4	20·3	78·7
1100	—	—	—	—	96·6
1000	11·3	13·0	24·4	29·1	114·2
900	—	—	29·4	—	134·8
800	17·0	19·5	33·4	38·1	158·0
700	—	—	38·9	43·4	182·0
600	23·4	27·0	44·1	49·5	217·4
500	26·0	31·0	50·1	56·2	250
400	32·5	34·8	—	64·7	—

Bei V war die Entladungsgeschwindigkeit durch Zuschaltung einer Capacität herabgesetzt.

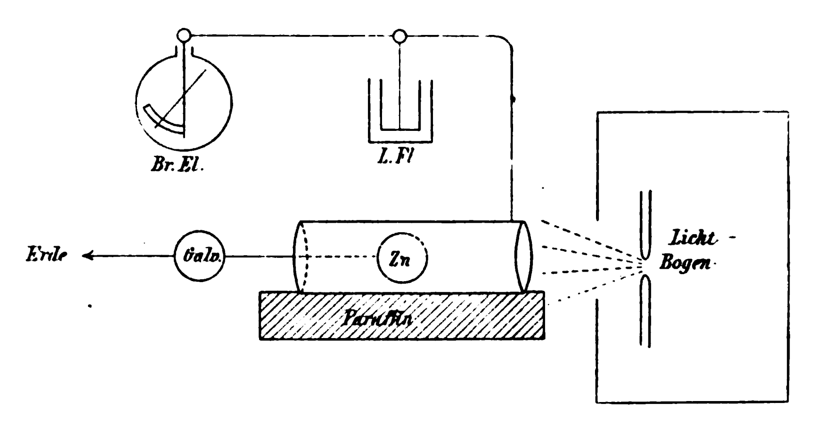
Da die Elektrometereinstellung durch Axenreibung beeinträchtigt wurde und die Einzelversuche sowohl in Folge dieses Umstandes, als in Folge der Schwankungen der Lichtintensität starke Abweichungen zeigten, messe ich diesen Resultaten nur geringe Bedeutung bei; immerhin zeigt sich deutlich, dass die Entladungsgeschwindigkeit im Intervalle von 1600 Volt bis 800 Volt (entsprechend einem Potentialgefälle von 640 bis $320 \frac{\text{Volt}}{cm}$ an der Oberfläche der Kugel) ziemlich constant ist.

Dieses Ergebniss entspricht der »saturation« Stoletow's.

Ich vermuthete aber, auch bei Luft normaler Dichte ein analoges Verhalten des Stromes zu finden, wie in den lichtelektrischen Zellen, wenn man zu Potentialdifferenzen, respective Feldintensitäten hinaufgeht, die sich der unteren Grenze für eine disruptive Entladung nähern.

Die Versuchsanordnung wird durch nachstehendes Schema erläutert.

Die obenerwähnte Zinkkugel ist durch ein Galvanometer (1 *mm* Ausschlag = $1 \cdot 00 . 10^{-9}$ Ampère) zur Erde abgeleitet.



Der sie umgebende Messingcylinder von 18 *cm* Länge und 6·5 *cm* Durchmesser ruht auf einer isolirenden Paraffinplatte und ist mit einer Leydnerflasche und einem Braun'schen Elektrometer (1 Scalentheil = 500 Volt, Messbereich bis 10.000 Volt) verbunden; wird dieses isolirte System positiv geladen und die Zinkkugel durch das offene Ende des Cylinders von den Strahlen der circa 30 *cm* entfernten Bogenlampe getroffen, so wird das positive System langsam (in mehreren Minuten) entladen, während gleichzeitig ein Strom das Galvanometer durchfliesst.

Eine Zusammenstellung der Stromstärken und der gleichzeitig abgelesenen Potentiale gibt folgendes Resultat:

V = 6000 Volt,	i = —	65	68	10^{-9} Ampère
5000	52	54	64	
4000	44	45	54	

$V = 3500$ Volt,	$i = 45$	47	42	10^{-9} Ampère
3000	42	40	42	
2500	37	—	—	
2000	35	40	—	

Dabei war ohne Belichtung (d. h. ohne Ausschluss diffusen Tageslichtes) bei $V = 6000$ Volt ein Strom von 30.10^{-9} Amp. vorhanden, der aber bald abnahm und bei $V = 5000$ Volt nur $1{\cdot}0.10^{-9}$ Amp. betrug. Bei ungefähr 8000 Volt trat Funkenentladung ein.

Eine andere Versuchsreihe lieferte folgendes Ergebniss:

Ohne Belichtung:

$V = 5000$ Volt;	$i = 5.10^{-9}$ Ampère.
2000	0

Mit Belichtung:

$V = 4000$ Volt;	$i = 56.10^{-9}$ Ampère.
3000	54
2500	47
2000	43
1500	38
5600	81
4900	73
4000	62
2000	40

(Graphische Darstellung Tafel, Fig. 6).

Wurde statt der Zinkkugel eine amalgamirte Zinkplatte von 6 *cm* Durchmesser verwendet, statt des Messingcylinders ein Drahtnetz, das der Platte parallel in einer Distanz von 1—3 *mm* gegenüberstand, so erhielt ich die Resultate:

I.

$V = 1600$ Volt,	$i = 22$—24.10^{-9} Ampère.
1500	23
1400	22
1200	17
600	13

II. (Tafel, Fig. 7.)

$V = 3000$ Volt,	$i = 22—25 . 10^{-9}$ Ampère.
1500	15—17
480	9
133	6

Auch diese Messungen haben nur den Charakter von orientirenden Vorversuchen; die Potentialmessung ist ungenau, da mir kein Mittel zur Verfügung stand, die Richtigkeit der Scale der beiden Braun'schen Elektrometer zu prüfen; die Beobachtung der Stromstärken leidet unter der Inconstanz der Lichtquelle.

Soviel geht aus den Messungen hervor, dass bei hohen Werthen der Feldintensität der Strom ungefähr eine lineare Function derselben ist und nicht nahezu constant bleibt, wie es bei mässigeren Werthen der Feldintensität der Fall zu sein scheint. Es rührt dies wieder davon her, dass bei einem bestimmten Massstabe der graphischen Darstellung das Ansteigen der Curve $i = f(V)$ bei höheren Werthen von V ein sehr flaches ist im Vergleich zu dem bei niedrigeren Werthen von V. Meine Vermuthung, in dieser Curve einen Wendepunkt zu finden, von dem an i rascher als V steigt, hat sich allerdings bisher nicht bestätigt.

Fernere Versuche mit vollkommenerer Versuchsanordnung bereite ich vor.

Anhang.

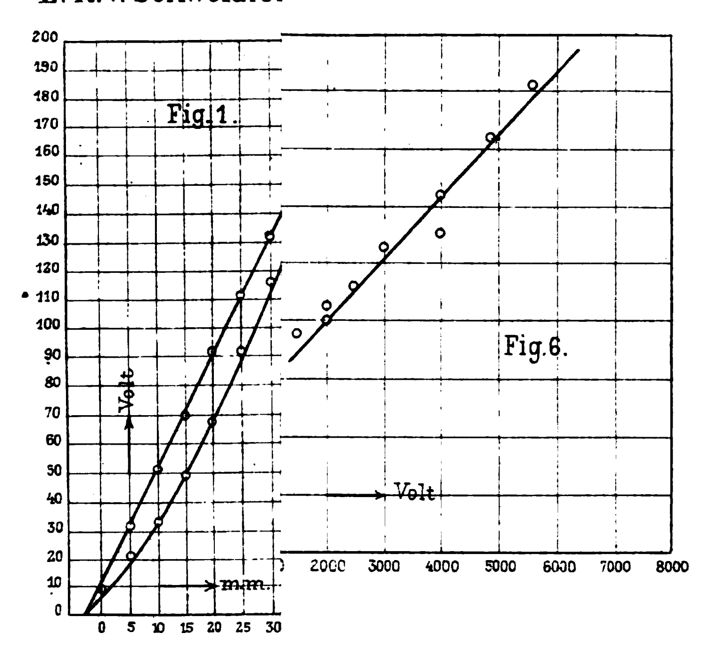
Verzeichniss der die lichtelektrischen Erscheinungen behandelnden Abhandlungen.

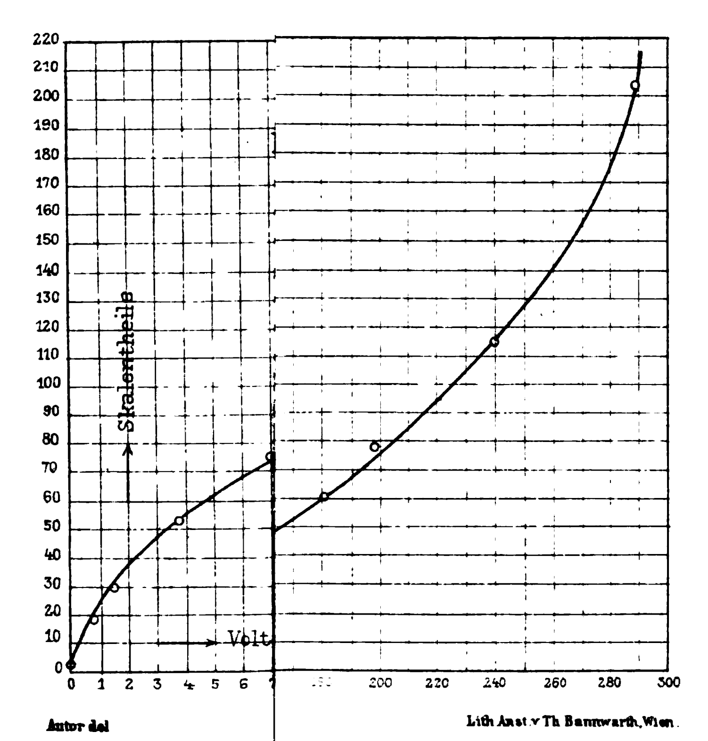
Die Abkürzungen sind die in den »Fortschritten der Physik« verwendeten; nach dem Citate folgt eine kurze Inhaltsangabe der betreffenden Abhandlung durch Schlagworte, oder es ist der Originaltitel angeführt.

1887.

1. Hertz, Wied. Ann. 31, S. 983; Einfluss des ultravioletten Lichtes auf die Funkenentladung.

E. R. v. Schweidler





Autor del.

Lith Anst. v Th Bannwarth, Wien.

1888.

2. E. Wiedemann und Ebert, Wied. Ann. 33, S. 241; Licht und elektrische Entladung.
3. Hallwachs, Wied. Ann. 33, S. 310; Einfluss des Lichtes auf elektrostatisch geladene Körper.
4. S. Arrhenius, Wied. Ann. 33, S. 638; Leitungsvermögen beleuchteter Luft.
5. Narr, Wied. Ann. 34, S. 712; Wirkung des Lichtes auf statische Ladungen.
6. Hallwachs, Wied. Ann. 34, S. 731; Elektrisirung durch Bestrahlung.
7. Wiedemann und Ebert, Wied. Ann. 35, S. 209; Entladungen in Gasen und Flammen.
8. Righi, Rend. Linc. 4; Durch Strahlung hervorgerufene elektrische Erscheinungen (Nota I—VI).
9. — Mem. di Bol., Ser. IV, B. IX; ditto (Memoria I).
10. — C. R. 107, S. 559; ditto (Auszug).
11. Stoletow, C. R. 106, S. 1149; Aktinoelektrische Ströme.
12. — C. R. 106, S. 1593; ditto (Lichtempfindlichkeit diverser Flüssigkeiten).
13. — C. R. 107, S. 91; Aktinoelektrische Ströme (in verschiedenen Gasen und bei verschiedenem Druck).
14. Bichat und Blondlot, C. R. 106, S. 1349; Unempfindlichkeit einer Wasserlamelle.
15. — — C. R. 107, S. 29; Wirkung eines Luftstromes.
16. Bichat, C. R. 107, S. 557; Aktinoelektrische Versuche.
17. M. Hoor, Wiener Ber. 97, S. 719; Einfluss des Lichtes auf negativ geladene Conductoren.
18. Borgmann, Phil. Mag. 26, S. 272; Einfluss des Lichtes auf elektrische Entladungen.

1889.

19. Hallwachs, Wied. Ann. 37, S. 666; Zusammenhang des Elektricitätsverlustes durch Belichtung und der Lichtabsorption.
20. — Tagebl. d. 62. Naturforschervers. Heidelberg; Lichtelektrische Versuche (Erzeugung hoher positiver Potentiale durch Belichtung).

21. Lenard und Wolf, Wied. Ann. 37, S. 443, Zerstäubung der Körper im ultravioletten Licht.
22. Elster und Geitel, Wied. Ann. 38, S. 40, 498; Entladung negativ elektrisirter Körper durch Sonnen- und Tageslicht.
23. Stoletow, C. R. 108, S. 1241; Aktinoelektrische Ströme (Abhängigkeit vom Potential).
24. — J. d. russ. phys.-chem. Ges. 21, S. 159; Zusammenfassung eigener Resultate.
25. Hoor, Ex. Rep. 25, S. 91; Einfluss des Lichtes auf negativ geladene Conductoren.
26. Righi, Atti Ist. Ven. 7; Durch Strahlung hervorgerufene elektrische Erscheinungen (Memoria II).
27. — Atti Ist. Ven. 7; ditto (Memoria III).
28. — Rend. Linc. 5, S. 331 und 860; Erzeugung positiver Ladungen durch Belichtung; Messung von Contactpotentialen.
29. — Ex. Rep. 25, S. 380; Polemik gegen Hoor.
30. Borgmann, C. R. 108, S. 733; Versuch über die Bestimmung der Zeit, die zur Ausbildung des aktinoelektrischen Stromes nöthig.
31. — J. d. russ. phys.-chem. Ges. 21, S. 23; Zusammenfassung eigener Resultate.
32. Bachmetjew, J. d. russ. phys.-chem. Ges. 21, S. 207; Einfluss elektrischer Funken auf die Entladungen in Gasen.
33. Nodon, C. R. 109, S. 219; Positive Ladungen durch Sonnenlicht.
34. Naccari, Lum. electr. 31, S. 339; Wirkung elektrischer Funken und Phosphors auf elektrische Entladungen.

1890.

35. Elster und Geitel, Wied. Ann. 39, S. 332; Hemmender Einfluss der Belichtung auf Funken- und Büschelentladung.
36. — — Wied. Ann. 41, S. 161; Anwendung von Natriumamalgam zu lichtelektrischen Versuchen.

37. Elster und Geitel, Wied. Ann. 41, S. 167; Hemmender Einfluss des Magnetismus auf lichtelektrische Entladungen in verdünnten Gasen.
38. — — Wiener Ber. 99, S. 1008; Elektrische Beobachtungen auf dem hohen Sonnblick.
39. R. Helmholtz und Richarz, Wied. Ann. 40, S. 161; Einwirkung chemischer und elektrischer Processe auf einen Dampfstrahl.
40. Branly, C. R. 110, S. 751 und 898; Zerstreuung beider Elektricitäten durch Belichtung.
41. Stoletow, J. de phys., Ser. 2, B. 9, S. 468; Aktinoelektrische Ströme (Abhängigkeit von Druck und Ladungsdichte).
42. Righi, Rend. Linc. 6, I. Sem., S. 151; Elektrische Convection.
43. — Rend. Linc. 6, II. Sem., S. 81; Trajectorien bei der Convection.
44. — Mem. di Bol., Ser. 4, B. 10; Photoelektrische Convection in verdünnter Luft (Memoria IV).
45. — Wied. Ann. 41, S. 405; Bemerkung persönlichen und historischen Inhalts.
46. Hallwachs, Wied. Ann. 40, S. 332; Fehlerquelle bei lichtelektrischen Versuchen. Demonstrationsversuch. Historisches.
47. Lampa, Wiener Anz. Nr. 9, S. 79; Unempfindlichkeit mineralischer und vegetabilischer Stoffe im Sonnenlicht.
48. Richarz, Sitz.-Ber. Niederrhein. Ges. Bonn, 1890. Demonstrationsversuch. Theoretisches über Ionen.
49. Mebius, Ex. Rep. 26, S. 221; Versuche mit einem Funken und einer kleinen Flamme.

1891.

50. Branly, Lum. electr. 41, S. 143; Zerstreuung beider Elektricitäten durch Funkenlicht.
51. — Séanc. soc. franç. de phys., 1891, S. 185; ditto.
52. Breisig, Dissertation Bonn 1891; Einwirkung des Lichtes auf elektrische Entladungen in verschiedenen Gasen und Dämpfen.

53. Elster und Geitel, Wied. Ann. 42, S. 564; Neue Form der Apparate für Entladung durch Tageslicht.
54. — — Lum. electr. 42, S. 545; ditto.
55. — — Wied. Ann. 43, S. 225; Abhängigkeit der Elektricitätszerstreuuung von der Natur der belichteten Oberfläche.
56. — — Wied. Ann. 44, S. 722; Elektrische Zerstreuung im Sonnenlichte von mineralischen Oberflächen.

1892.

57*a*. Elster und Geitel, Wiener Ber. 101, S. 703; Atmosphärisches Potentialgefälle und ultraviolette Sonnenstrahlung.
57. — — Wied. Ann. 46, S. 281; Lichtelektrische Versuche (an Vacuumzellen mit Alkalikathode).
58. Wanka, Mitth. der deutschen math. Ges. Prag (Ref. Beibl. 17, S. 1103); Neues Entladungsexperiment (Einfluss der Polarisation).
59. Branly, C. R. 114, S. 68; Zerstreuung beider Elektricitäten durch sehr brechbare Strahlen.

1893.

60. — C. R. 116, S. 741; Zerstreuung beider Elektricitäten im diffusen Licht und im Dunkeln.
61. — J. de phys., Ser. 3, B. 2, S. 300; Zerstreuung der Elektricität im Tageslicht.
62. Righi, Mem. di Bol. 3, S. 115.
63. Cantor, Wiener Ber. 102, S. 1188; Zerstreuung der Elektricität durch Licht (Zusammenhang mit chemischen Processen).
64. Elster und Geitel, Wied. Ann. 48, S. 625; Vergleich von Lichtstärken auf photoelektrischem Wege.
65. Precht, Wied. Ann. 49, S. 162; Über Spitzenentladung (u. a. Einfluss ultravioletten Lichtes darauf).

1894.

66. Elster und Geitel, Wied. Ann. 52, S. 433; Weitere lichtelektrische Versuche.

67. Elster und Geitel, Berl. Ber. 1894; Abhängigkeit des photoelektrischen Stromes von der Lage der Polarisationsebene.
68. — — Nature 50, S. 451; Zusammenfassung eigener Resultate.
69. Lodge, Nature 50, S. 406; Lichtelektrische Entladung.

1895.

70. Elster und Geitel, Wied. Ann. 55, S. 684; Lichtelektrische Untersuchungen an polarisirtem Licht.
71. — — Berl. Ber. 1895; Abhängigkeit des photoelektrischen Stromes von Azimut und Einfallswinkel des Lichtes.
72. Branly, C. R. 120, S. 829; Entladung von Halbleitern.
73. Swyngedauw, C. R. 121, S. 118 und 195; Einfluss des Lichtes auf statisches und dynamisches Entladungspotential.
74. Simon, Wiener Ber. 104, S. 565.
75. Jaumann, Wiener Ber. 104, S. 7; Inconstanz des Funkenpotentiales.
76. — Wiener Ber. 104, S. 747; Longitudinales Licht.
77. Dufour, Dutoit und Hofer, Arch. de Gen. 34, S. 294 (Ref. Nat. Rund. 10, S. 672); Entladung einer Zinkkugel durch Bogenlicht.

1896.

78. Elster und Geitel, Wied. Ann. 57, S. 23; Angebliche Zerstreuung positiver Elektricität durch Licht.
79. — — Wied. Ann. 57, S. 403; Einfluss des Lichtes auf die Form der Entladung einer Influenzmaschine.
80. — — Wied. Ann. 59, S. 487; Lichtelektrische Nachwirkung von Kathodenstrahlen.
81. Swyngedauw, C. R. 122, S. 131; Einfluss des Lichtes auf statisches und dynamisches Entladungspotential.
82. — C. R. 122, S. 1052; ditto.
83. Warburg, Wied. Ann. 59, S. 1; Wirkung des Lichtes auf die Funkenentladung.

84. Klemenčič, Wied. Ann. 59, S. 63; Gegenseitige Beeinflussung zweier Funkenstrecken.
85. Hallwachs, Phot. Arch. 1896, S. 289.
86. Sella und Majorana, Cim. 3, S. 238; Einfluss von ultraviolettem Licht und Röntgenstrahlen auf disruptive Entladungen.
87. Batelli und Garbasso, Cim. 3, S. 321; Einfluss ultravioletten Lichtes auf statische Ladungen (rasches Verschwinden der Leitungsfähigkeit).

1897.

88. Elster und Geitel, Wied. Ann. 61, S. 445; Abhängigkeit des photoelektrischen Stromes von Schwingungsrichtung und Einfallswinkel und Zusammenhang mit Absorption.
89. — — Wied. Ann. 62, S. 599; Verhalten von Salzen, die in Alkalimetalldämpfen gefärbt.
90. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 62, S. 407; Lichtelektrisches Verhalten von Flussspath und Selen.
91. Karoly, Wied. Ann. 62, S. 612; Demonstrationsversuch zum gegenseitigen Einfluss zweier Funkenstrecken.
92. Beattie und Smoluchowski, Phil. Mag. 43, S. 418; Leitungsfähigkeit von Luft durch Bestrahlung mit Uran-, Röntgen- und ultravioletten Strahlen.
93. J. Henry, Proc. Cambr. Phil. Soc. 9, S. 319.
94. Brillouin, Ciel et Terre 18, S. 359 (Ref. Met. Zeitschr. 1898, Heft 1); Lichtempfindlichkeit von trockenem Eis und Consequenzen für die Luftelektricität.
95. Warburg, Wied. Ann. 62, S. 385; Verzögerung der Funkenentladung.
96. Jaumann, Wied. Ann. 62. S. 396; Bemerkungen zu den Versuchen Swyngedauw's.

1898.

97. J. Zeleny, Phil. Mag. 45, S. 272; Elektrisirung von Luft mittelst ultravioletten Lichtes.
98. G. C. Schmidt, Wied. Ann. 64, S. 708; Beziehung zwischen Fluorescenz und Aktinoelektricität.

Zusammenstellungen und kritische Erörterungen der die lichtelektrischen Phänomene behandelnden Arbeiten finden sich in folgenden Werken und Abhandlungen:

Winkelmann, Handbuch der Physik, III/1.

J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism, Chapter II.

H. R., Zeitschr. für phys. Unterr. 5 (1891/1892), S. 36.

F. Meritt, Science 4 (1896), S. 853 und 890 (ausführliche Besprechung der meisten Arbeiten bis 1896).

O. Lehmann, Die elektrischen Lichterscheinungen oder Entladungen (1898), S. 208—214.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. VIII. HEFT.

JAHRGANG 1898. — OCTOBER.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 36 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1898.
AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 8. Heftes October 1898 des CVII. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 65 kr. = 5 Mk. 30 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. VIII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

GESAMMTSITZUNG VOM 11. OCTOBER 1898.

Die kaiserliche Akademie vereinigte sich Dienstag den 11. October 1898 zu einer besonderen Gesammtsitzung, um ihrer tiefen Trauer über das unter so entsetzlichen Umständen erfolgte Hinscheiden Ihrer Majestät der

KAISERIN ELISABETH

Ausdruck zu geben.

Der Präsident, Professor E. Suess, erinnerte, wie weder Ihre Krone die durchlauchtige Frau vor dem grauenhaften Verbrechen zu schützen vermochte, noch Ihre persönliche Anmuth, noch Ihre Barmherzigkeit, noch Ihre hohe Bildung, noch, was auch dem rohesten Menschen heilig und unantastbar ist, der nie gestillte Schmerz eines trauernden Mutterherzens. Kaum gebe es unter den Millionen im ganzen Reiche eine Familie, welche so schwer vom Schicksal betroffen wurde, wie das Kaiserhaus. Seine Majestät den Kaiser umgibt die tiefe Theilnahme Seiner Völker und der ganzen Welt.

Nach dieser Ansprache, welche die Mitglieder der kaiserlichen Akademie stehend angehört hatten, wurde die Sitzung geschlossen. Die Versammlung trennte sich in tiefer Bewegung.

XX. SITZUNG VOM 13. OCTOBER 1898.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 107, Abth. II. a, Heft III (März 1898), Heft IV—V (April—Mai 1898); Abth. II. b, Heft IV—VI (April—Juni 1898); Abth. III, Heft I—VII (Jänner—Juli 1898). — Monatshefte für Chemie, Bd. 19, Heft VI (Juni 1898); Heft VII—VIII (Juli—August 1898).

Der Vorsitzende, Präsident Prof. E. Suess, begrüsst die Classe bei Wiederaufnahme der akademischen Sitzungen und gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie durch das am 31. August l. J. erfolgte Ableben ihres wirklichen Mitgliedes, Herrn Hofrath und emerit. Universitäts-Professor Dr. Robert Zimmermann in Wien erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Über Einladung des Vorsitzenden übernimmt das w. M. Herr Prof. Franz Exner die Functionen des Secretärs für die heutige Sitzung.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank aus, und zwar Herr Prof. Dr. Friedrich Becke in Wien für die Wahl zum wirklichen Mitgliede, Prof. Dr. Gottlieb Haberlandt in Graz und Prof. Dr. Emil Zuckerkandl in Wien für die Wahl zu inländischen correspondirenden Mitgliedern dieser Classe.

Das c. M. Herr Custos Emil v. Marenzeller in Wien dankt für die ihm zur Vornahme von vergleichenden Studien der Korallen in Paris, Berlin und Stuttgart bewilligte Reisesubvention.

Herr Custos Ernst Kittl in Wien dankt für die ihm bewilligte Subvention zur Fortsetzung seiner Studien der Trias-Bildungen Bosniens.

Herr Heinrich Friese in Innsbruck dankt für die ihm zur Drucklegung seines Werkes: »Die Bienen Europas« bewilligte Subvention und legt die betreffenden Pflichtexemplare dieses Werkes vor.

Herr Prof. Dr. Alois Walter, d. Z. in Göttingen, dankt gleichfalls für die ihm zur Herausgabe seines Werkes: »Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung« gewährte Subvention unter Vorlage der Pflichtexemplare dieses Werkes.

Das w. M. Herr Hofrath L. Boltzmann übersendet folgende zwei Abhandlungen:

1. »Theoretische Untersuchungen über elastische Körper. Ebene Wellen mit Querschwingungen«, von Prof. Dr. Paul Glan in Berlin.
2. »Entwurf einer allgemeinen Theorie der Energieübertragung«, von Dr. Gustav Mie in Karlsruhe.

Das c. M. Herr Prof. H. Molisch in Prag übersendet eine Arbeit unter dem Titel: »Botanische Beobachtungen auf Java«, II. Abhandlung: »Über das Ausfliessen des Saftes aus Stammstücken von Lianen«.

Ferner ist eine Abhandlung eingelangt von Herrn Georg Nakovics in Kispest (bei Budapest) unter dem Titel: »Das gelöste Problem der allgemeinen algebraischen Auflösung einer Gleichung beliebigen Grades«.

Versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität sind eingelangt, und zwar von Herrn J. Gotsbacher in Wien mit der Aufschrift: »Erklärung der Herstellung einer selbstthätigen Maschine« (mit Skizze) und von Herrn Julius A. Reich in Wien mit der Aufschrift: »Beschreibung eines neuen Verfahrens zur Darstellung von Wasserstoff«.

Das w. M. Herr Hofrath Adolf Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. Leopold Kohn: »Einwirkung von Cyankalium auf aliphatische Aldehyde (Vorläufige Mittheilung)«.

Das w. M. Herr Hofrath V. v. Lang legt eine Mittheilung vor: »Über transversale Töne von Kautschukfäden«.

Interferenz der Kathodenstrahlen

(I. Mittheilung)

von

G. Jaumann.

Aus dem physikal.-chem. Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 26 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juli 1898.)

Einleitung.

§. 1. Zusammenfassung der vorläufigen Mittheilung.[1] Dort wurde constatirt, dass mitten zwischen zwei Kathoden eine hellblaue scharfe Fläche auftritt, wenn die Zuleitungen zu beiden Kathoden metallisch, ohne Contactfehler und in jeder Beziehung gleich sind, und dass die geringste Ungleichheit dieser Zuleitungen, z. B. ein Längenunterschied von 10 *cm*, diese hellblaue Fläche verbreitert, so dass sie bald den ganzen Raum zwischen den Kathoden mit Licht erfüllt.

Es war leicht zu erkennen, dass diese blaue Fläche durch Kathodenstrahlen erzeugt wird,[2] welche von beiden Kathoden ausgehen und in dem mittleren Orte[3] zusammentreffen. Dass die geringfügige Längenverschiedenheit der metallischen Zuleitungen eine so deutliche (verbreiternde) Wirkung auf die blaue Fläche hat, legt es nahe, als Ursache dieser Verbreiterung die durch die Längenverschiedenheit der Zuleitungen bewirkte Phasendifferenz der Hertz'schen Schwingungen der Kathoden anzunehmen. Denn alle anderen denkbaren, durch diese Längenverschiedenheit bewirkten Differenzen

[1] Mitth. der deutschen math. Gesellsch. zu Prag, S. 146, 1892; Wied. Ann., 57, S. 152, 1896.

[2] L. c. S. 154.

[3] L. c. S. 153.

des Zustandes der beiden Kathoden können nur klein sein und nur kleine Wirkungen haben, eine ebenso kleine Phasendifferenz kann aber sehr deutliche Effecte hervorrufen.

Ist diese Erscheinung wirklich eine Interferenzerscheinung der Kathodenstrahlen, so sind diese hienach für elektrische Strahlen von derselben Schwingungsdauer[1] wie die Hertz'schen Strahlen zu halten, obgleich sie so ganz andere Entstehung und ganz andere Eigenschaften haben. So wird man zu der Vermuthung geleitet, dass die Kathodenstrahlen longitudinale elektrische Strahlen sind, deren Schwingungsdauer dieselbe Grössenordnung hat wie jene der Hertz'schen Strahlen.

Diesen letzteren Gedanken habe ich zunächst zu einer Theorie entwickelt,[2] welche die Eigenschaften der Kathodenstrahlen mindestens ebenso gut darstellt als die Crookes'sche Emissionstheorie der Kathodenstrahlen und welche den Vorzug hat, von der Maxwell'schen Theorie auszugehen. Siehe hierüber w. u. §. 60.

§. 2. Verschiebung der Interferenzfläche. Der wesentliche Schritt obiger Schlussweise liegt darin, dass man sich begnügt, bei Längenverschiedenheit der Zuleitungen zu den Kathoden irgend eine Veränderung der blauen Fläche eintreten zu sehen, und davon absieht, dass diese Veränderung nicht jenen Charakter hat, welchen man erwarten muss, wenn sie durch eine Phasendifferenz der von beiden Kathoden ausgehenden und interferirenden Strahlen hervorgerufen werden soll. Die unverbreiterte Fläche hat, weil sie bei den verschiedensten Kathodenformen stets den mittleren Ort erfüllt, zwar ganz den Charakter einer Interferenzfläche. Im Falle einer Phasendifferenz sollte sie sich jedoch verschieben, nicht verbreitern.

Ich hatte damals nicht die Gelegenheit, dies weiter zu verfolgen, habe jedoch im Vorjahre gezeigt,[3] dass sich bei correcter Aufstellung die Interferenzfläche bei Einführung einer

[1] L. c. S. 155 und 157.

[2] Longitudinales Licht, diese Sitzungsberichte, Bd. 104, Juli 1895; Wied. Ann., 57, S. 147, 1896.

[3] Diese Sitzungsberichte, Bd. 106, Juli 1897; Wied. Ann., 64, S. 292, 1898.

Verschiedenheit der Zuleitungen verschiebt und nicht verbreitert. Letzteres tritt überhaupt nur bei speciellen, unreinen Aufstellungen ein.

§. 3. Programm der vorliegenden Arbeit. Nun fehlt noch Folgendes zum Beweise, dass man es hier mit einer Interferenzerscheinung zu thun hat:

1. Bei weiterer Verlängerung einer der Zuleitungen soll die Phasendifferenz der Kathoden weiter wachsen bis zum Betrage einer ganzen Schwingungsdauer. Dann muss die Interferenzfläche, welche längst an der Seite einer Kathode aus dem Felde gewandert ist, aus der anderen Kathode wieder austreten und nochmals durch das Feld gehen.

Dieses Experiment ist gelungen und wird w. u. beschrieben. Es ist ein Beweis, dass die Hertz'schen Schwingungen in den Drähten die letzte Ursache des Auftretens der hellen Fläche sind, aber noch kein Beweis, dass die Erscheinung eine Interferenzerscheinung ist, also noch kein Beweis für die Undulationstheorie der Kathodenstrahlen. Denn auch nach der Emissionstheorie der Strahlen müssten dieselben während jeder zweiten Halbperiode der Hertz'schen Schwingungen der Kathoden, nämlich dann, wenn dieselben negativ geladen sind, von denselben ausgehen und in einer Fläche von mittlerer, beziehungsweise verschobener Lage aufeinander prallen, wenn die Phase der Schwingungen beider Kathoden gleich, beziehungsweise etwas verschieden ist. Selbst wenn man die Wellenlänge der Strahlen so klein nimmt, dass mehrere helle Flächen gleichzeitig im Felde erscheinen und diese sich entsprechend verschiebbar zeigen würden, so wäre dies kein Beweis gegen die Emissionstheorie. Mit so kleinen Wellenlängen (von einigen Millimetern Länge) habe ich jedoch noch keinen Versuch gemacht, wohl aber mit nahezu so kleinen Wellenlängen. Siehe §. 50.

2. Der Beweis für die undulatorische Natur der Kathodenstrahlen kann nur in der Weise geführt werden, dass man zeigt, dass Kathodenstrahlen zu Kathodenstrahlen von entgegengesetzter Phase hinzugefügt in einer dunklen Fläche interferiren. Diese dunkle Fläche habe ich bei allen reinen Aufstellungen erhalten. Sie ist vollkommen schwarz, nicht ganz so schmal, sonst von genau

gleicher Form wie die helle Interferenzfläche, genau ebenso wie diese durch Längenverschiedenheiten etc. der Zuleitungen verschiebbar.

3. Schliesslich ist der Nachweis erforderlich, dass die Kathoden bei unsymmetrischer Zuleitung wirklich Hertz'sche Schwingungen von angebbarer Phasendifferenz ausführen, die Grösse dieser Phasendifferenz ist unabhängig von den Beobachtungen der Lichterscheinung im Vacuum zu bestimmen und zu zeigen, dass diese Grösse der Grösse der Verschiebung der hellen, beziehungsweise dunklen Interferenzfläche proportional ist. Dies läuft auf eine Untersuchung der Schwingungen in dem Drahtsystem hinaus: man befindet sich hiebei, was die rechnerische und experimentelle Seite betrifft, auf sicherem Boden, könnte also rasch fertig werden. Gerade hier wurde ich jedoch durch einen, wie sich endlich zeigte, ganz unrichtigen Schluss lange aufgehalten. Ich hielt es für unmöglich, dass zwei beliebige Punkte eines verzweigten Systems gut leitender Drähte mit einer merklich anderen Phasendifferenz als 0 oder einer halben Schwingungsdauer schwingen, falls die Schwingungen stehende sind. Ich widerstand deshalb der Überzeugung, dass es stehende Schwingungen des Drahtsystems sind, welche die Interferenzflächen bewirken, so lange es anging. Endlich schloss ich, dass auch stehende schwach gedämpfte Schwingungen gegen alles Vermuthen doch beliebige Phasendifferenzen haben können und liess mich auf die ausführliche Rechnung ein. Das Gesetz dieser Phasenverschiebungen ergab sich durch die Rechnung wirklich als ein sehr eigenthümliches. Es kommt auf die Dämpfung der Schwingungen und auf die Configuration, sowie die übrigen Constanten des Oscillators an, jedoch zeigt sich, dass gerade für den einfachsten, oft verwendeten Oscillator die Rechnung für ungedämpfte Schwingungen den Grenzfall der allgemeinen Rechnung für gedämpfte Schwingungen nicht vollständig darstellt. Lässt man nämlich die Dämpfung allmälig gegen Null abnehmen, so können die Phasendifferenzen φ, welche durch eine gegebene kleine Unsymmetrie u des Oscillators bewirkt werden, cet. par. immer grössere Werthe annehmen und für die Dämpfung 0 kann

das Verhältnis $\frac{\varphi}{n}$ (die Geschwindigkeit der Phasenverschiebung) sogar ∞ gross werden. Die directe Rechnung für die Dämpfung 0, welche für die Geschwindigkeit der Phasenverschiebung den Werth 0 ergibt, hat also keine physikalische Bedeutung.

I. Capitel.

Phasendifferenzen der verzweigten Oscillatoren.

§. 4. Brauchbarkeit der verzweigten Oscillatoren. Über die Schwingungsdauern verzweigter Oscillatoren besitzt man Messungen und Rechnungen von v. Geitler,[1] Fürst Galitzin, Oberbeck, Mazzotto u. A. Max Wien behandelt die Schwingungsdauern und Dämpfungen verkoppelter Systeme, erstere in der Absicht, die Schwingungen dieser verzweigten Systeme experimentell zu studiren, letzterer akustischer Analogien wegen.

Von mir rührt die erste Berechnung[2] der Schwingungen der verzweigten, ungedämpften Oscillatoren her, welche zeigte, dass ein System von n beliebig durch verzweigte Drähte verbundenen Capacitäten $(n-1)$ simultane incohärente Grundschwingungen von verschiedenen dort angegebenen Schwingungsdauern haben soll. Diese Rechnung steht in Übereinstimmung mit den oben angeführten Messungen von v. Geitler für einen Oscillator mit drei Capacitäten (Fig. 6). Ich habe seit dem Interferenzexperiment über Kathodenstrahlen und einem Verzweigungsexperiment[3] über elektrische Entladung von einer anderen Seite her Interesse für die Schwingungen verzweigter Oscillatoren gefasst. Dieselben sind ein sehr brauchbares Instrument zur Untersuchung der Entladung und der Kathodenstrahlen. Das Interesse, welches die Schwingungen dieser Systeme für den deducirenden Experimentator haben, wird übertroffen von der Brauchbarkeit, welche die Phasendifferenzen und Amplitudenverschiedenheiten der einzelnen

[1] Wied. Ann., 55, S. 514, 1895.

[2] Herr v. Geitler hatte die Freundlichkeit, diese Rechnung (ebenda S. 521) aufzunehmen.

[3] Diese Sitzungsberichte, Bd. 97, S. 88, 1888; Wied. Ann., 62, S. 397, 1897.

Zweige des Oscillators für das inductive Experimentiren besitzen.

Ziemlich gleichzeitig mit meinem ersten Experiment über die Interferenz der Kathodenstrahlen haben H. Ebert und E. Wiedemann in richtiger Erkenntniss, dass man zum Studium der Lichterscheinungen im Vacuum reine elektrische Schwingungen braucht, einen verzweigten Oscillator zu interessanten Versuchen angewendet.[1] Sie sind allerdings bei einer speciellen Form dieser Oscillatoren, nämlich dem Lecher'schen Oscillator, stehen geblieben. Dieser symmetrische Lecher'sche Oscillator zeigt keine Amplituden- und Phasenverschiedenheiten, und das Studium der Wirkung dieser Verschiedenheiten auf das Vacuum scheint mir förderlich zu sein.

Die Phasendifferenzen und Amplitudenverschiedenheiten verzweigter Oscillatoren sollen nun zunächst berechnet werden.

§. 5. Skizze der allgemeinen Rechnung. Es seien n Conductoren $(1, 2, \ldots n)$, deren Potentiale V_i und deren Capacitätscoëfficienten c_{ik} genannt werden, in allen $\frac{1}{2} \cdot n(n-1)$ Combinationen durch capacitätsfreie Drähte verbunden, deren Widerstände w_{ik}, Stromstärken J_{ik} und Inductionscoëfficienten p_{ik} seien, wobei die vier Indices die vier Endconductoren
$\varepsilon\eta$
der aufeinander wirkenden Drähte bezeichnen. Aus dieser Anordnung kann man jede specielle Form eines Oscillators ableiten, indem man einige der c, w und p gleich 0 oder ∞ setzt.

Es gelten die Kirchhoff'schen Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{k=n} J_{ik} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik} V_k \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} p_{\varepsilon\eta, ik} J_{ik} + w_{\varepsilon\eta} J_{\varepsilon\eta} = V_\varepsilon - V_\eta \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = 1, 2, \ldots n \\ \eta = 2, 3, \ldots n \end{pmatrix}$$

Aus den ersten Gleichungen lassen sich die $\frac{dV_\varepsilon}{dt}$ als lineare Functionen der J_{ik} bestimmen. Die Coëfficienten der J_{ik}

[1] H. Ebert und E. Wiedemann, Wied. Ann., 48, S. 549, 1893.

mögen $\underset{\varepsilon}{m_{ik}}$ heissen. Die zweiten Gleichungen nehmen hiedurch die Form an:

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} p_{\underset{ik}{\varepsilon\eta}} J_{ik} + w_{\varepsilon\eta} \cdot \frac{d}{dt} J_{\varepsilon\eta} = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} (\underset{\varepsilon}{m_{ik}} - \underset{\eta}{m_{ik}}) J_{ik}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon = 1, 2, \ldots n \\ \eta = 2, 3, \ldots n \end{pmatrix}$$

Von diesen Gleichungen ist

$$J_{ik} = A_{ik} e^{-\alpha t} \sin xt,$$

worin A, x und α reelle Constante sind, nur dann ein Integral, wenn für jede dieser $\frac{1}{2} n(n-1)$ Gleichungen gilt

$$w_{\varepsilon\eta} A_{\varepsilon\eta} = \alpha \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=n}^{k=n} p_{\underset{ik}{\varepsilon\eta}} A_{ik} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = 1, 2, \ldots n \\ \eta = 2, 3, \ldots n \end{pmatrix}$$

Diese Bedingungen müssen erfüllt sein, damit das System ohne andere Phasendifferenzen als 0 oder $\frac{\pi}{x}$ schwingt.

Die einfachste Art, diese Bedingungen zu erfüllen, ist der Fall

$$w_{\varepsilon\eta} = \alpha p_{\underset{\varepsilon\eta}{\varepsilon\eta}}, \qquad p_{\underset{ik}{\varepsilon\eta}} = 0,$$

d. h. wenn die Drähte keine gegenseitige Induction haben und ihre Selbstinductionen zu den Widerständen in constantem Verhältniss stehen.

Der Fall $w_{\varepsilon\eta} = 0$, $\alpha = 0$, welcher ebenfalls diese Bedingungen erfüllt, hat keine physikalische Bedeutung. Der Fall, dass sämmtliche $w_{\varepsilon\eta}$ sehr klein sind, muss nicht nothwendig die Bedingungen der Phasengleichheit mit Annäherung erfüllen.

Im allgemeinen Falle schwingen alle Drähte des Oscillators mit ganz verschiedenen Phasen. Es hat das Integral die Form:

$$J_{ik} = A_{ik} e^{\alpha t},$$

worin A_{ik} eine reelle, α eine complexe Zahl ist. Setzt man diese Lösung ein, so erhält man $\frac{1}{2} n(n-1)$ in den A homogene lineare Gleichungen, aus welchen man die Unbekannten, nämlich die Zahl α und die Amplitudenverhältnisse $\frac{A_{ik}}{A_{\epsilon\tau_i}}$, welche auch die Phasendifferenzen bestimmen, berechnen kann.

Es soll noch bemerkt werden, dass diese Phasendifferenzen, welche die frei schwingenden Oscillatoren zeigen, keine Verwandtschaft haben mit den Phasendifferenzen, welche Wechselströme mit aufgezwungener Periode in gekoppelten Systemen aufweisen. Die hier behandelten Phasendifferenzen hängen wesentlich von der Zahl α ab, wie man aus obiger Rechnung ersieht. Jede der n Schwingungsdauern desselben Oscillators hat eine andere Dämpfung und weist völlig individuelle Vertheilungen der Phasendifferenzen der einzelnen Zweige des Oscillators auf. Die Wechselstromsysteme hingegen schwingen überhaupt nicht mit einer Eigenschwingungsdauer, sondern haben eine durch die Umlaufsgeschwindigkeit der Wechselstrommaschine bestimmte Periode. Man kann die Phasendifferenzen der unfrei und langsam oscillirenden Wechselströme nicht einmal als einen Grenzfall der hier behandelten Phasendifferenzen betrachten.

§. 6. Wichtigste Formen der verzweigten Oscillatoren. Die für die nächsten Zwecke vorliegender Arbeit ver-

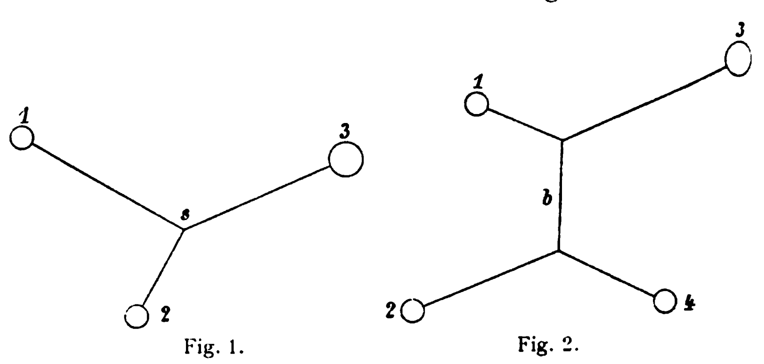


Fig. 1. Fig. 2.

wendeten Formen der Oscillatoren sind in Fig. 1 und 2 dargestellt, und zwar: der einfach verzweigte Oscillator

(Fig. 1), welcher aus drei Conductoren 1, 2, 3 besteht, welche durch Drähte mit einem mittleren Verzweigungspunkt s verbunden sind, und der zweifach verzweigte Oscillator, welcher aus vier Conductoren besteht, 1, 2, 3, 4 (Fig. 2), welche paarweise durch Drähte verbunden sind, über welche eine Brücke b gelegt ist.

Die Conductoren 1 und 2 mögen in beiden Fällen mit den zwei Kathoden kurz verbunden sein oder diese Kathoden selbst vorstellen.

Ich habe bisher vornehmlich den einfach verzweigten Oscillator in Verwendung genommen und beschränke deshalb vorläufig die weitere specielle Rechnung auf diesen Oscillator.

§. 7. Berechnung der Phasendifferenzen des einfach verzweigten Oscillators. Bezeichne der Index 0 die leitende Oberfläche des Zimmers, die Indices 1, 2, 3 die drei Conductoren des Oscillators, und zwar 1 und 2 die beiden Kathoden.

Die gesammte Capacität eines dieser vier Conductoren sei K_i, die Capacität zweier Conductoren gegen einander sei k_{ij}. Es ist dann

$$K_j = \sum_{i=0}^{i=3} k_{ij} \qquad (k_{ii} = 0).$$

V_1, V_2, V_3 bezeichne die Potentialdifferenz der drei Conductoren gegen 0; J_1, J_2, J_3 die Stromstärken in den Drähten $\overline{1s}$, $\overline{2s}$, $\overline{3s}$ (Fig. 1). Die Differentialquotienten dieser Variablen nach der Zeit werden durch Strichel bezeichnet.

Es handelt sich zunächst darum, $(V_3' - V_1')$ und $(V_3' - V_2')$ als Functionen von J_1 und J_2 darzustellen. Zu diesem Zwecke geben wir den ersten Kirchhoff'schen Gleichungen die Form:

$$\left.\begin{aligned} -K_1(V_3'-V_1') + k_{12}(V_3'-V_2') + k_{10}V_3' &= -J_1 \\ k_{12}(V_3'-V_1') - K_2(V_3'-V_2') + k_{20}V_3' &= -J_2 \\ k_{31}(V_3'-V_1') + k_{32}(V_3'-V_2') + k_{30}V_3' &= J_1 + J_2 \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

woraus man erhält:

$$\begin{aligned} V_3' - V_1' &= G_1 J_1 + H J_2 \\ V_3' - V_2' &= H J_1 + G_2 J_2 \end{aligned} \qquad 1')$$

Hierin ist:

$$M.G_1 = K_2 K_0 - k_{20}^2;\quad MG_2 = K_1 K_0 - k_{10}^2;\quad MH = K_0 k_{12} - k_{10} k_{20},$$

worin M die Determinante der Coëfficienten der Gleichungen 1) bedeutet.

Bezeichnen wir ferner mit p_{ij} den Inductionscoëfficienten des Drahtes i auf den Draht j und mit w_i den Widerstand des Drahtes i. Das Potential des Verzweigungspunktes s kann in drei verschiedenen Weisen (aus dem Potential jedes der drei Conductoren) abgeleitet werden, welche wir gleichsetzen können, wodurch wir folgende zwei Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} p_{11}J_1' + p_{12}J_2' + p_{13}J_3' + w_1 J_1 - V_1 &= \\ = p_{31}J_1' + p_{32}J_2' + p_{33}J_3' + w_3 J_3 - V_3 & \\ p_{21}J_1' + p_{22}J_2' + p_{23}J_3' + w_2 J_2 - V_2 &= \\ = p_{31}J_1' + p_{32}J_2' + p_{33}J_3' + w_3 J_3 - V_3 & \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Berücksichtigen wir, dass $J_3 + J_1 + J_2 = 0$ ist, differenziren die Gleichungen 2) nach der Zeit und setzen die Werthe für $(V_3' - V_1')$ und $(V_3' - V_2')$ aus 1') in 2) ein, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} P_1 J_1'' + Q J_2'' + W_1 J_1' + U J_2' + G_1 J_1 + H J_2 &= 0 \\ Q J_1'' + P_2 J_2'' + U J_1 + W_2 J_2' + H J_1 + G_2 J_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

worin ist:

$$P_1 = p_{11} + p_{33} - 2p_{13};\quad P_2 = p_{22} + p_{33} - 2p_{23};$$
$$Q = p_{12} + p_{33} - p_{13} - p_{23}$$
$$W_1 = w_1 + w_3;\quad W_2 = w_2 + w_3;\quad U = w_3.$$

Diese Gleichungen 3) bilden die Grundlage der weiteren Rechnung. Sie enthalten nur mehr die Variablen J_1 und J_2. Bei ihrer Ableitung wurde angenommen, dass die Stromstärke in jedem der drei Drähte nur von der Zeit abhängt, sich längs der Drähte nicht ändert, dass also die Capacität der Drähte sehr klein oder die Wellenlänge der Schwingungen in den Drähten sehr gross gegen die Länge der Drähte ist. Auf diese Vernachlässigung muss man beim Experiment Rücksicht nehmen, wenn es auf genaue Übereinstimmung ankommt. Man

muss dann die Drähte möglichst dünn und kurz, die Capacität der Conductoren aber gross wählen.

Ein Integral der Gleichungen 3) ist:

$$J_1 = E_1 e^{\alpha t}; \; J_2 = E_2 e^{\alpha t}.$$

Setzt man diese Lösung in 3) ein, so erhält man zur Bestimmung von α die biquadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} P_1\alpha^2 + W_1\alpha + G_1, & Q\alpha^2 + U\alpha + H \\ Q\alpha^2 + U\alpha + H, & P_2\alpha^2 + W_2\alpha + G_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad a)$$

Der einfach verzweigte Oscillator ist also nur zweier Grundschwingungen von völlig verschiedener Schwingungsdauer und Dämpfung fähig. Uns interessiren nämlich nur jene Fälle, in welchen von den vier Wurzeln dieser Gleichung je zwei conjugirt complex sind. Die Oscillatoren, welche aperiodische Schwingungen zeigen, lassen wir ausser Betracht.

Es sei für eine dieser zwei Schwingungen:

$$\alpha = \beta + i\gamma \quad \text{und} \quad \bar{\alpha} = \beta - i\gamma.$$

Setzen wir diese zwei Werthe in eine der Gleichungen 3) ein, so werden wir im Allgemeinen für $\frac{E_2}{E_1}$ zwei verschiedene Werthe erhalten, welche mit $\frac{E_2}{E_1}$ und $\frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_1}$ bezeichnet werden. Es wird ausreichen, die Bedingung dafür zu kennen, dass

$$\frac{E_2}{E_1} = \pm \frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_1}. \qquad b)$$

Im Falle das obere Zeichen gilt, finden die Schwingungen der beiden Kathoden mit gleicher oder entgegengesetzter Phase statt, im Falle das untere Zeichen gilt, finden diese Schwingungen mit der Phasendifferenz von $^1/_4$ oder $^3/_4$ der Schwingungsdauer statt.

Die Bedingung *b)* ist nach der ersten der Gleichungen 3) erfüllt, wenn

$$\frac{P_1\alpha^2 + W_1\alpha + G_1}{Q\alpha^2 + U\alpha + H} = \pm \frac{P_1\bar{\alpha}^2 + W_1\bar{\alpha} + G_1}{Q\bar{\alpha}^2 + U\bar{\alpha} + H},$$

was für das obere Vorzeichen sich in die Form bringen lässt.

$$(\beta^2+\gamma^2)(UP_1-QW_1)+2\beta(HP_1-QG_1)+(HW_1-UG_1)=0. \quad c)$$

Es ist gestattet, in dieser Gleichung den Index 1 mit 2 zu vertauschen, nachdem man den Werth von β und γ, welche nach *a)* bekannte Functionen der Constanten sind, eingesetzt hat.

β und γ können nach *a)* zwei verschiedene zusammengehörige Werthepaare besitzen. Dies gibt für jede der zwei Schwingungen des Oscillators eine Bedingung *c)*, welche durch die Constanten erfüllt sein muss, damit die Kathoden 1 und 2 mit gleicher oder genau entgegengesetzter Phase schwingen.

Im Falle symmetrischer Anordnung des Oscillators ist die Bedingung *c)* für beide Schwingungen erfüllt. Man kann von dieser Anordnung ausgehend eine der Constanten der Aufstellung beliebig ändern, muss aber dies durch entsprechende Änderung einer anderen Constanten compensiren, damit wieder *c)* erfüllt ist. Damit also Phasengleichheit, respective genau entgegengesetzte Phase eintritt, ist nicht gerade Symmetrie des Oscillators, sondern allgemeiner ein durch *c)* definirtes Gleichgewicht der Constanten des Oscillators erforderlich. Wenn z. B. die Zuleitung zu einer der Kathoden eine grössere Selbstinduction hat, so kann man dies durch Verkleinerung der Capacität dieser Kathode compensiren, so dass wieder Phasengleichheit eintritt.

Die Gleichung *c)* ist aber nicht eindeutig, sondern in Bezug auf jede der Constanten, so viel ich sehen kann, vom 32. Grade. Wenn alle Constanten des Oscillators bis auf eine gegeben sind, so gibt es hienach für jede der zwei Schwingungen des Oscillators 32 verschiedene Werthe dieser letzten Constanten, für welche Phasengleichheit oder genau entgegengesetzte Phase eintritt. Diese 32 Werthe müssen freilich nicht alle physikalisch realisirbar sein.

Verlangt man ausser der Phasengleichheit noch die Amplitudengleichheit, so legt dies dem Oscillator eine zweite Bedingung auf, welche im Symmetriefalle ebenfalls erfüllt ist. Sind alle Constanten des Oscillators bis auf zwei gegeben, so sind diese letzteren mehrdeutig bestimmt durch die Bedingung

dass Phasengleichheit, respective genau entgegengesetzte Phase und Amplitudengleichheit eintreten soll.

§. 8. Gleichungen für (J_1+J_2) und (J_1-J_2). Die obige Rechnung liesse sich nur mit der grössten Umständlichkeit bis zu völlig expliciten Resultaten führen. Wir beschränken uns deshalb auf die Fälle, in welchen die Schwingungen der Kathoden mit nahezu gleicher, respective entgegengesetzter Phase und nahezu gleicher Amplitude stattfinden. Es sind dies auch die wichtigsten und am besten beobachtbaren Fälle.

Für diese Fälle nimmt entweder (J_1+J_2) oder (J_1-J_2) einen sehr kleinen Werth an, welchen wir gegen endliche Grössen vernachlässigen können. Deshalb setzen wir in Gleichung 3)

$$2J_1 = (J_1+J_2)+(J_1-J_2)$$
$$2J_2 = (J_1+J_2)-(J_1-J_2)$$

Ferner können, müssen jedoch nicht, die Zuleitungen zu beiden Kathoden nahezu symmetrisch sein, so dass (P_1-P_2), (W_1-W_2), (G_1-G_2) sehr klein werden. Um diesen Vortheil nicht ausser Acht zu lassen, addiren wir die Gleichungen 3) und subtrahiren sie auch. So ergibt sich:

$$P(J_1''+J_2'')+\Delta P(J_1''-J_2'')+W(J_1'+J_2')+\Delta W(J_1'-J_2')+ \\ +G(J_1+J_2)+\Delta G(J_1-J_2)=0 \tag{4a}$$

$$p(J_1''-J_2'')+\Delta P(J_1''+J_2'')+w(J_1'-J_2')+\Delta W(J_1'+J_2')+ \\ +g(J_1-J_2)+\Delta G(J_1+J_2)=0. \tag{4b}$$

Hierin ist:

$$\left.\begin{aligned}
P &= P_1+P_2+2Q = p_{11}+p_{22}+2p_{12}+4(p_{33}-p_{13}-p_{23}) \\
p &= P_1+P_2-2Q = p_{11}+p_{22}-2p_{12} \\
W &= W_1+W_2+2U = w_1+w_2+4w_3 \\
w &= W_1+W_2-2U = w_1+w_2 \\
G &= G_1+G_2+2H = \frac{K_0}{M}(k_{13}+k_{23}+4k_{12})+\frac{k_{30}}{M}(k_{10}+k_{20}) \\
g &= G_1+G_2-2H = \frac{K_0}{M}(k_{13}+k_{23}+k_{10}+k_{20}) \\
\Delta P &= P_1-P_2 = p_{11}-p_{22}+2(p_{13}-p_{23}) \\
\Delta W &= W_1-W_2 = w_1-w_2 \\
\Delta G &= G_1-G_2 = -\frac{K_0}{M}(k_{13}-k_{23})-\frac{k_{30}}{M}(k_{10}-k_{20}) \\
M &\doteq k_{30}(K_1K_2-k^2) \text{ (annähernder Werth).}
\end{aligned}\right\} \tag{4c}$$

Die Grössen ΔP, ΔW, ΔG können beliebig gross sein. Der hier angegebene Werth von M gilt jedoch nur in dem Falle genau, dass $(\Delta G)^2$ gegen G zu vernachlässigen ist. Sonst hat man M nach §. 7 aus Gleichung 1) zu berechnen. M ist eine stets positive Constante.

§. 9. Die zwei Schwingungen des nahezu symmetrischen Oscillators. In jedem nahezu symmetrischen, einfach verzweigten Oscillator sind zwei Schwingungen von völlig verschiedener Schwingungsdauer und völlig verschiedener Dämpfung möglich, welche wir als Schwingung I) und Schwingung II) unterscheiden wollen.

Bei Schwingung I sind die Schwingungen der Kathoden nahezu gleich und nahezu von gleicher Phase. Die Schwingung des Conductors 3 hat hiebei nahezu doppeltes Ausmass und nahezu entgegengesetzte Phase wie die Schwingungen der Kathoden. Bei Schwingung II sind die Schwingungen der Kathoden nahezu gleich gross und nahezu entgegengesetzt gerichtet, d. h. ihre Phasendifferenz ist nahezu gleich einer halben Schwingungsdauer. In diesem Falle sind die Schwingungen des dritten Conductors nahezu Null, sein Einfluss auf den Verlauf der Schwingungen der Kathoden aber, wie man aus dem Folgenden ersieht, keineswegs unwichtiger als bei Schwingung I.

§. 10. Die nahezu amplitudengleichen und nahezu phasengleichen, respective nahezu entgegengesetztphasigen Schwingungen bei nicht symmetrischen Oscillatoren. Die Schwingungen I und II, §. 9 sind auch für viele nicht symmetrische Oscillatoren möglich. Jedoch sind nicht beide gleichzeitig in demselben Oscillator möglich, ausgenommen derselbe ist symmetrisch. Damit eine der Schwingungen I oder II auftritt, müssen die Constanten des Oscillators eine gewisse, w. u. §. 13 angegebene Bedingung erfüllen. Die zweite Schwingung, welche dieser Oscillator dann aufweist, hat im Allgemeinen nicht so einfachen Charakter, die Schwingungen der Kathoden sind weder amplituden-, noch phasengleich.

Wir setzen für:

Schwingung I

$$\begin{aligned} J_1 &= J - \delta J \\ J_2 &= J + \delta J \end{aligned} \qquad 5\,\mathrm{I})$$

es ist also: $J_1 + J_2 = 2J$

und $J_1 - J_2 = 2\delta J$.

und für:

Schwingung II

$$\begin{aligned} J_1 &= \quad J + \delta J \\ J_2 &= -J + \delta J \end{aligned} \qquad 5\,\mathrm{II})$$

es ist also: $J_1 + J_2 = 2\delta J$

und $J_1 - J_2 = 2J$.

Eine kleine Verschiedenheit der numerischen Werthe von J_1 und J_2 im Betrage von $2\delta J$ ist durch diesen Ansatz festgestellt, und das Vorzeichen von δJ wird sich besonders für jede der Schwingungen I und II aus der weiteren Rechnung ergeben.

Der Vortheil dieses Ansatzes ergibt sich daraus, dass $(J_1 + J_2)$ bei Schwingung I denselben Werth hat wie $(J_1 - J_2)$ bei Schwingung II und umgekehrt. Wenn man nun die symmetrische Gestalt der Gleichungen 4*a)* und 4*b)* in Bezug auf $(J_1 + J_2)$ und $(J_1 - J_2)$ berücksichtigt, so erkennt man, dass es nur nöthig ist, die Rechnung für einen Fall, z. B. für die Schwingung I, durchzuführen. Man erhält hieraus alle Gleichungen für die Schwingung II, wenn man beziehungsweise P, W und G mit p, w und g vertauscht und umgekehrt.

Sowohl die Schwingungen von J und δJ, als von ihren Differentialquotienten nach der Zeit J', $\delta J'$, J'' und $\delta J''$ lassen sich für jede der incohärenten Schwingungen I und II in je zwei gegen einander um eine Viertelwellenlänge verschobene Theilschwingungen zerlegen. Die Dämpfungszahl derselben sei α, die Schwingungszahl $\frac{x}{2\pi}$. Die Amplituden der zwei Theilschwingungen von J können beliebig angenommen werden.

Die Amplituden der zwei Theilschwingungen von δJ sind unendlich klein und mögen mit $\delta\varepsilon$ und $\delta\eta$ bezeichnet werden.

In folgender Tabelle sind die Amplituden aller dieser 12 Theilschwingungen angegeben.

Tabelle 6).

	$e^{-\alpha t} \sin xt$	$e^{-\alpha t} \cos xt$
J	1	0
J'	$-\alpha$	$+x$
J''	$\alpha^2 - x^2$	$-2\alpha x$
δJ	$\delta\varepsilon$	$\delta\eta$
$\delta J'$	$-\alpha\delta\varepsilon - x\delta\eta$	$x\delta\varepsilon - \alpha\delta\eta$
$\delta J''$	$(\alpha^2 - x^2)\delta\varepsilon + 2\alpha x\delta\eta$	$-2\alpha x\delta\varepsilon + (\alpha^2 - x^2)\delta\eta$

Hienach bedeutet $2\delta\varepsilon$ die Verschiedenheit der Amplitude der totalen Schwingungen der beiden Kathoden.

$\delta\eta$ bestimmt die Phasenverschiebung der Schwingungen beider Kathoden.

Es handelt sich um die Berechnung von $\delta\varepsilon$ und $\delta\eta$ aus den Gleichungen 4*a)* und 4*b)*.

§. 11. Beziehung zwischen $\delta\eta$ und der Phasenverschiebung der Schwingungen der beiden Kathoden.

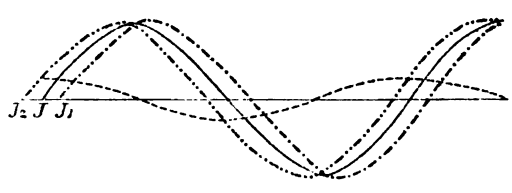


Fig. 3.

Um aus $\delta\eta$ die Zeit $\delta\tau$ zu bestimmen, um welche die Schwingung an der Kathode 2 gegen jene an der Kathode 1 zurückbleibt, müssen wir die Schwingung I und die Schwingung II gesondert betrachten.

In Fig. 3 stelle für den Fall Schwingung I die vollausgezogene Wellenlinie J als Function der Zeit dar, ihre

Amplitude ist 1. Die gestrichelte Curve stelle δJ vor, ihre Amplitude ist $\delta\eta$. $\left.\begin{matrix}\text{Subtrahiren}\\ \text{Addiren}\end{matrix}\right\}$ wir die Ordinaten dieser zwei Curven, so erhalten wir nach 5 I) die Schwingung $\left\{\begin{matrix}J_1\\ J_2\end{matrix}\right.$ in Fig. 3 dargestellt durch $\left\{\begin{matrix}-\cdot-\cdot-\\ -\cdots-\cdots-\end{matrix}\right.$.

Falls $\delta\eta$ positiv ist, bleibt also bei Schwingung I die Schwingung J_2 der Kathode 2 zurück um die Zeit $\delta\tau$, wobei sich leicht ergibt

$$\delta\tau = \frac{2\delta\eta}{x}. \tag{7 I}$$

In Fig. 4 stelle für den Fall Schwingung II die vollausgezogene Linie J vor, die .... Linie stelle $-J$ vor, die ----- Linie stelle δJ vor. Dann stellt die —.—.— Linie $(J+\delta J)$,

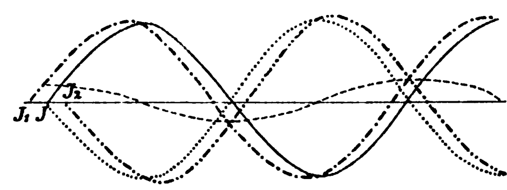


Fig. 4.

also nach 5 II) J_1 dar, und die —......— Linie stellt $(-J+\delta J)$ also nach 5 II) J_2 dar.

Falls $\delta\eta$ positiv ist, bleibt also bei Schwingung II die Schwingung J_2 der Kathode 2 zurück um die Zeit:

$$\delta\tau = -\frac{2\delta\eta}{x}, \tag{7 II}$$

d. h. sie eilt vor um die Zeit $+\frac{2\delta\eta}{x}$.

§. 12. Schwingungszahl und Dämpfung der nahezu amplituden- und phasengleichen, respective entgegengesetztphasigen Schwingungen. Führen wir die Werthe $(J_1+J_2) = 2J$ und $(J_1-J_2) = 2\delta J$ aus 5 I) in die Gleichung 4 *a)* ein, so enthält dieselbe endliche und unendlich kleine Glieder, welche letzteren wir vernachlässigen. So erhalten wir

$$PJ'' + WJ' + G = 0. \tag{4'a}$$

Hieraus bestimmt sich die Schwingungszahl x und Dämpfung α der Schwingung I des nahezu symmetrischen Oscillators, sowie jeder nahezu phasen- und amplitudengleichen Schwingung auch eines nicht symmetrischen Oscillators zu

$$\alpha = \frac{W}{2P} \qquad x^2 = \frac{G}{P} - \frac{W^2}{4P^2} \qquad 8\mathrm{I})$$

und es gilt somit nach Vertauschung der grossen mit den kleinen Buchstaben für die Schwingung II des symmetrischen Oscillators, sowie für jede Schwingung von nahezu gleichen Amplituden und nahezu entgegengesetzten Phasen auch eines nicht symmetrischen Oscillators:

$$\alpha = \frac{w}{2p} \qquad x^2 = \frac{g}{p} - \frac{w^2}{4p^2}. \qquad 8\mathrm{II})$$

§. 13. Bedingung für die Phasengleichheit bei einem unsymmetrischen Oscillator. Führen wir hingegen die Werthe $(J_1+J_2) = 2J$ und $(J_1-J_2) = 2\delta J$ aus 5I) in die Gleichung 4*b)* ein und vernachlässigen die unendlich kleinen Grössen, so ergibt sich

$$\Delta P . J'' + \Delta W . J' + \Delta G . J = 0. \qquad 4'b)$$

Setzen wir die Werthe von J'', J' und J aus Tabelle 6) ein, trennen die mit $\sin xt$, beziehungsweise $\cos xt$ behafteten Glieder und setzen die Werthe von x und α aus 8I) ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \Delta P . G - \Delta G . P = 0 \\ \Delta P . W - \Delta W . P = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 9\mathrm{I})$$

Nur wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, ist jeder einfach verzweigte Oscillator einer Schwingung I) fähig, bei welcher die Kathoden mit gleicher Amplitude und Phase

schwingen. Die zweite Schwingung dieses Oscillators ist im Allgemeinen nicht der Schwingung II gleich.

Nach Vertauschung der grossen und kleinen Buchstaben erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta P.g-\Delta G.p=0\\ \Delta P.w-\Delta W.p=0\end{array}\right\} \qquad 9\mathrm{II})$$

Nur wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, ist der Oscillator einer Schwingung II fähig, bei welcher die Kathoden mit entgegengesetzter Phase und gleicher Amplitude schwingen.

Gleichzeitig kann ein Oscillator die Bedingungen 9I) und 9II) nur erfüllen, wenn $\Delta P = \Delta G = \Delta W = 0$, d. h. wenn er symmetrisch ist, oder wenn $\frac{G}{g} = \frac{P}{p} = \frac{W}{w}$ ist, ein für uns uninteressanter Fall.

§. 14. Phasenverschiebung der Schwingungen der beiden Kathoden. Betrachten wir den Fall, dass nicht die Werthe ΔP, ΔW und ΔG, sondern die Werthe $\Delta P - \delta P$, $\Delta W - \delta W$ und $\Delta G - \delta G$ die Bedingungen 9I) erfüllen, worin δP, δW und δG unendlich klein sind, während ΔP, ΔW und ΔG wie bisher beliebig gross angenommen werden.

Setzen wir dies und die Werthe aus 5I) in Gleichung 4*b)* ein, so erhalten wir die Gleichung 4″*b)*, welche nur unendlich kleine Glieder enthält:

$$p.\delta J'' + J''.\delta P + w.\delta J' + J'.\delta W + g.\delta J + J.\delta G = 0. \qquad 4''b)$$

Nun setzen wir die Werthe von J, J', J'', δJ, $\delta J'$ und $\delta J''$ aus Tabelle 6) ein. Die folgende Tabelle 10I) stellt dann die 10 Summanden der Gleichung 4″*b)* dar, wenn man jedes Glied dieser Tabelle mit seinem Zeilen- und Columnentitel multiplicirt.

Tabelle 10I).

	δP	δW	δG	$\delta\varepsilon$	$\delta\eta$
$e^{-\alpha t}\sin xt$	$\alpha^2 - x^2$	$-\alpha$	1	$p(\alpha^2-x^2)-w\alpha+g$	$x(2p\alpha-w)$
$e^{-\alpha t}\cos xt$	$-2\alpha x$	$+x$	0	$-x(2p\alpha-w)$	$p(\alpha^2-x^2)-w\alpha+g$

Da diese Gleichung für jeden Werth von t gelten muss. so muss die Summe jeder Zeile der Tabelle für sich gleich 0 sein. Dies gibt zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten $\delta\varepsilon$ und $\delta\eta$.

Die Determinante D der Coëfficienten von $\delta\varepsilon$ und $\delta\eta$ stellt die Summe zweier Quadrate dar. So lange also x nicht imaginär ist, also für den Fall einer periodischen, ja sogar noch für eine nicht allzu weit über die Aperiodicität gedämpfte Schwingung. ist D immer positiv, und zwar ist, wenn man die Werthe z und x aus 8I) einführt,

$$D.P^3 = P(gP-Gp)^2 + W(gP-Gp)(pW-Pw) + \\ + G(pW-Pw)^2. \qquad 11\text{I})$$

Dies gilt für Schwingungen von nahezu gleicher Phase.

Für Schwingungen von nahezu entgegengesetzter Phase sei die analog gebildete Determinante d. Sie ist ebenfalls stets positiv und hat den Werth

$$d.p^3 = p(gP-Gp)^2 + w(gP-Gp)(pW-Pw) + \\ + g(pW-Pw)^2. \qquad 11\text{II})$$

Setzen wir in Tabelle 10I) $\delta W = \delta G = 0$, so ergibt sich aus den zwei Gleichungen, welche sie vorstellt, das Verhältniss $\delta\eta : \delta P$, welches wir $\frac{\partial\eta}{\partial P}$ schreiben, weil es ein partieller Differentialquotient ist. Ebenso ergibt sich $\frac{\partial\eta}{\partial W}$ für $\delta P = \delta G = 0$ und $\frac{\partial\eta}{\partial G}$ für $\delta P = \delta W = 0$.

Ferner setzen wir den Werth $\delta\tau$ statt $\delta\eta$ aus 7I) ein und erhalten das Schlussresultat:

die Phasenverschiebung für nahezu amplitudengleiche und nahezu gleichphasige Schwingungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\tau}{\partial P} &= \frac{2}{PD}(gW-Gw) \\ \frac{\partial\tau}{\partial W} &= \frac{2}{PD}(gP-Gp) \\ \frac{\partial\tau}{\partial G} &= \frac{2}{PD}(wP-Wp) \end{aligned}\right\} \qquad 12\text{I})$$

Vertauschen wir hingegen P, W und G mit p, w und g, was einen Zeichenwechsel bewirkt, und führen den Werth $\partial\tau$ aus 7II) ein, was einen nochmaligen Zeichenwechsel bewirkt, so erhalten wir:

die Phasenverschiebung für nahezu amplitudengleiche und nahezu entgegengesetztphasige Schwingungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\tau}{\partial P} &= \frac{2}{pd}(gW - Gw) \\ \frac{\partial\tau}{\partial W} &= \frac{2}{pd}(gP - Gp) \\ \frac{\partial\tau}{\partial G} &= \frac{2}{pd}(wP - Wp) \end{aligned}\right\} \qquad 12\text{II})$$

$\partial\tau$ ist sowohl in 12I), als in 12II) die Zeit, um welche die Schwingung an der Kathode 2 zurückbleibt gegen die Schwingung an der Kathode 1, wenn die Differenzen $P_1 - P_2 = \Delta P$, $W_1 - W_2 = \Delta W$ und $G_1 - G_2 = \Delta G$ um beziehungsweise δP, δW und δG grösser sind, als sie sein sollten, damit beziehungsweise 9I) oder 9II) erfüllt ist.

Die zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2\tau}{\partial P^2}$, $\frac{\partial^2\tau}{\partial W^2}$ und $\frac{\partial^2\tau}{\partial G^2}$ sind Null, falls $\Delta P - \delta P = \Delta W - \delta W = \Delta G - \delta G = 0$ ist, also für den nahezu symmetrischen Oscillator, denn in diesem Falle sind in obiger Rechnung nur Grössen, welche von zweiter Ordnung unendlich klein sind, gegen endliche vernachlässigt worden.

In derselben Weise wie die Gleichungen 12) für $\partial\tau$ berechnet man aus 10I) die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}$, $\frac{\partial\varepsilon}{\partial W}$ und $\frac{\partial\varepsilon}{\partial G}$. Da jedoch diese Werthe sich in complicirterer Form aus den Constanten des Oscillators bestimmen und uns weniger interessiren, so schreibe ich sie hier nicht an.

§. 15. Hauptresultate der Rechnung. Als solche Resultate, welche noch etwas über die speciellen Grundlagen der Rechnung Giltigkeit haben dürften, möchte ich folgende bezeichnen.

1. Die Zweige freischwingender Oscillatoren von beliebiger Complication schwingen mit grossen Phasendifferenzen, wenn in denselben dämpfende Ursachen verschiedener Art (Widerstände, Strahlungen) vorhanden sind, deren Verhältniss zu den Inductionen auf die Zweige für die verschiedenen Zweige ein verschiedener ist, doch können diese sämmtlichen dämpfenden Ursachen klein sein, ohne dass nothwendig die Phasendifferenzen ebenso klein werden.

2. Der einfach verzweigte Oscillator Fig. 1 ist, falls die Zweige 1 und 2 symmetrisch sind, zweier Schwingungen fähig, zufolge deren die Kathoden I) mit gleicher, beziehungsweise II) mit entgegengesetzter Phase schwingen. Schwingungszahl und Dämpfung dieser Schwingungen ist nach 8I) und 8II) verschieden. Beide Schwingungen sind incohärente Grundschwingungen des Oscillators. Welche davon eintritt oder ob beide eintreten, hängt ausschliesslich von der Anregung der Schwingungen ab.

3. Jede Unsymmetrie der Inductionscoëfficienten, der Capacitäten oder der dämpfenden Ursachen der Zweige 1 und 2 bewirkt eine Phasenverschiebung der Schwingungen I sowohl als II.

4. Diese Phasenverschiebung ist cet. par. für die Schwingungen I und II von gleicher Richtung und von gleicher Grössenordnung.

5. Die Grösse und Richtung dieser Phasenverschiebung kann für eine gegebene Symmetrieänderung des Oscillators für verschiedene Oscillatoren die verschiedensten Werthe haben, welche durch die Klammerausdrücke in Gleichung 12I), beziehungsweise 12II) bestimmt werden. Diese Phasendifferenzen hängen jedoch ausschliesslich von den Constanten des Oscillators, nicht von der Anregungsweise der Schwingungen ab.

6. Phasen- und Amplitudengleichheit tritt nicht ausschliesslich für den symmetrischen Oscillator ein, sondern für jeden Oscillator, welcher die Bedingungen 9I), beziehungsweise 9II) erfüllt.

7. Ausserdem kommt man bei weiterer Vergrösserung der Unsymmetrie der Zuleitungen 1 und 2 wieder zu Anordnungen, bei welchen die Kathoden mit gleicher, beziehungs-

weise entgegengesetzter Phase schwingen, doch ist die Amplitude ihrer Schwingungen dann im Allgemeinen nicht gleich gross. Diese mehrfache Wiederkehr der Phasengleichheit ist nicht periodisch, sondern algebraisch bestimmt und hat mit dem Auftreten von Knoten[1] der stehenden Schwingung in dem Drahtsystem nichts zu thun, sondern tritt auch in Oscillatoren auf, deren Drähte gegen die Wellenlänge kurz sind.

8. Gleichzeitig mit den Phasenverschiebungen treten bei Symmetrieänderung der Zuleitungen Amplitudenverschiedenheiten auf. Deshalb haben solche Oscillatoren experimentelles Interesse, welche die Bedingung $\frac{\partial \varepsilon}{\partial P} = 0$, d. h. die Bedingung:

$$W w \left(\frac{W}{w} - \frac{G}{g}\right) = 2 G p \left(\frac{P}{p} - \frac{G}{g}\right)$$

erfüllen. Bei diesen kann man die Phasenverschiebung $\frac{\partial \tau}{\partial P}$ für grössere Intervalle δP beobachten, ohne durch die auftretende Amplitudenverschiedenheit gestört zu werden.

Sonst sind noch wegen der Einfachheit, welche für sie die Gleichungen 12I) und 12II) annehmen, für quantitative Zwecke zu bevorzugen: 1. der für Widerstandsunsymmetrie unempfindliche Oscillator, für welchen $\frac{\partial \tau}{\partial W} = 0$ oder $\frac{P}{p} = \frac{G}{g}$ und 2. der für Capacitätsunsymmetrie-unempfindliche Oscillator, für welchen $\frac{\partial \tau}{\partial G} = 0$ oder $\frac{P}{p} = \frac{W}{w}$ ist. Die Empfindlichkeit des ersteren Oscillators $\left(\frac{P}{p} = \frac{G}{g}\right)$ für Längenverschiedenheiten, (δP) der Zuleitungen zu den Kathoden ist desto grösser, je besser leitend die Zuleitungen sind, er zeigt für sehr schwach gedämpfte Schwingungen ungemein rasche Phasenverschiebungen bei geringer Unsymmetrie der Inductionscoëfficienten oder Capacitäten der Zuleitungen zu den Kathoden.

---

[1] Dass das Auftreten von Knoten der stehenden Schwingung periodische Erscheinungen bei Verlängerung eines der Drähte bewirken muss, ist selbstverständlich, hier aber weniger wichtig.

II. Capitel.

Die Versuchsanordnungen.

§. 16. Der Recipient und die Kathoden. Es war nichts Anderes, als möglichste geometrische Einfachheit des Feldes zu berücksichtigen. Der Recipient hat cylindrische Form (Durchmesser 10 *cm*, Seitenlänge 5 *cm*). Die Basisflächen sind durch 7 *mm* starke, aufgeschliffene Spiegelglasplatten verschlossen. In zwei diametral gegenüberliegenden Schliffen treten die Zuleitungen zu den Kathoden $K_1 K_2$ (Fig. 5) ein.

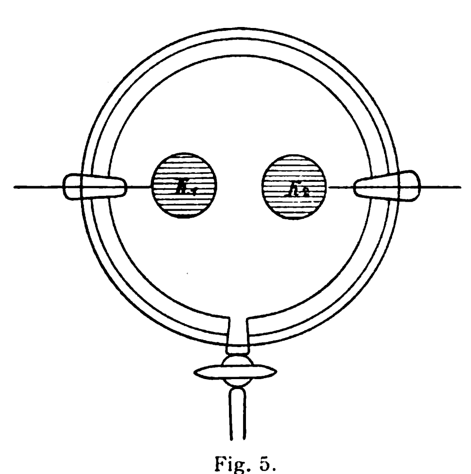


Fig. 5.

Die Kathoden sind Zinkcylinder von 25 *mm* Durchmesser und 30 *cm* Seitenlänge mit parallelen, auf den Spiegelglasplatten senkrechten Axen. In der Mitte hatten ihre Oberflächen einen Abstand von 0·5 bis 2 *cm*, gewöhnlich von 1 *cm*. Ausserdem tritt die Zuleitung zu der Quecksilberluftpumpe symmetrisch von unten in den Recipienten und ist knapp vor dem Eintritte durch einen Hahn zu schliessen. Dieser Hahn muss während der Versuche geschlossen werden, denn sonst tritt leuchtende Entladung in dem Zuleitungsrohr ein, welche einen störenden Einfluss hat. Anode war keine vorhanden.

Vielfach wurde auch ein doppelt so grosser glockenförmiger Recipient (Fig. 25 und 26, §. 59) verwendet, dessen Basisfläche von 20 *cm* Durchmesser durch eine 15 *mm* starke Spiegelglasplatte verschlossen und vertical gestellt wurde. Die Kathoden waren entsprechend grösser, sonst wie in Fig. 1 angeordnet. Hinter ihnen ist eine Hartgummiplatte *h*, Fig. 26, von 18 *cm* Durchmesser angebracht, welche mit der Spiegelglasplatte parallel ist und also ebenfalls einen cylindrischen Raum um die Kathoden schliesst. Die Zuleitungen zu den Kathoden

treten hier durch Schliffe in den hinteren glockenförmigen Raum des Recipienten und weiter durch die Hartgummiplatte in die Axe der Kathoden ein. Hinter der Hartgummiplatte tritt auch in der Mitte der Kuppe des Recipienten eine Anode durch einen Schliff ein, welche aber gewöhnlich isolirt blieb.

Die grosse Anzahl der Schliffe ermöglichte für specielle Versuche verschiedene Bewegungen im Vacuum auszuführen, z. B. Änderung der Entfernung der Kathoden, Auflegen einer Brücke auf die Kathoden, Schief- und Parallelstellen plattenförmiger Kathoden (mit welchen ich auch gearbeitet habe), Herumführen eines Probescheibchens im Felde etc.

Man muss einigermassen darauf sehen, dass die Kathoden gegen die Glaswand des Recipienten symmetrisch angeordnet sind und dass sie nicht mit Quecksilbermassen oder anderen Capacitäten unsymmetrisch verbunden sind.

Der Druck wurde mit Hilfe eines Mac-Leod'schen Manometers gemessen. Er betrug zwischen 2·0 und 0·1 *mm* Hg gewöhnlich 1·2 *mm* und 0·5 *mm* Hg.

§. 17. Die Oscillatoren. Anregung der elektrischen Schwingungen. Die verwendeten Oscillatoren: der einfach und der zweifach verzweigte Oscillator wurden schon w. o. §. 6 beschrieben. Die Constanten derselben wurden sehr verschieden gewählt und werden bei den einzelnen Versuchen angegeben.

Man darf nie bei kleinerem Druck und mit stärkeren Schwingungen arbeiten, als nöthig ist, damit die betreffende Erscheinung sich überhaupt anregen lässt und dann ruhig bestehen bleibt. Oft habe ich bei so schwachem Leuchten erfolgreich gearbeitet, dass dasselbe erst nach Gewöhnung der Augen an die Dunkelheit wahrgenommen werden konnte. Die Vacuumerscheinungen bei sehr schwachen Schwingungen folgen augenscheinlich einfacheren Gesetzen. Bei stärkeren Schwingungen sind die Erscheinungen nur heller, aber weniger regelmässig und complicirter. Die helle Interferenzfläche freilich braucht etwas stärkere Anregung und kleineren Druck.

Die excitirenden Funken sollen aus gleichem Grunde, nur wenn es nicht zu umgehen ist, in Vaselinöl überspringen. Die Zahl der Funken steigert man jedoch mit Vortheil möglichst.

Die Verwendung eines Ruhmkorff ist ein wenig unvortheilhafter als die einer Influenzmaschine. Die Zuleitungen von diesen primären Elektricitätsquellen werden durch zwei 20 *cm* lange feuchte Schnüre (z, Fig. 6 und 7) an die excitirende Funkenstrecke f angeschlossen.

§. 18. Directe (Hertz'sche) Anregung der Oscillatoren. Der excitirende Funke f wird in einen Zweig des Oscillators geschaltet, und zwar in den Zweig 3 bei dem einfach verzweigten Oscillator (Fig. 1), in den Zweig 3 oder 4 des zweifach verzweigten Oscillators (Fig. 2). Die einfachste

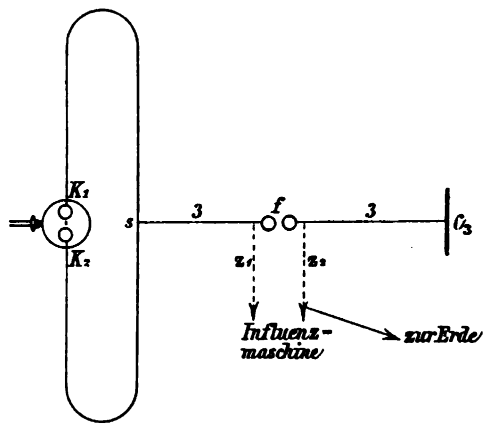


Fig. 6.

Versuchsanordnung ist in Fig. 6 dargestellt. Der Funke f ist in den Zweig 3 eingeschaltet. s ist der Schleifcontact, von welchem die Zuleitungen zu den Kathoden K_1 und K_2 ausgehen. C_3 ist eine Platte von der Capacität k_{30} gegen die Erde. Man kann auch den Zweig sC_3 so biegen, dass C_3 in die Nähe von K_1K_2 kommt und kann dann den Kathoden leicht durch Anschluss zweier Platten eine grössere Capacität k_{13}, beziehungsweise k_{23} gegen C_3 geben. Dann muss jedoch aus elektrostatischen Gründen z_2 zur Erde führen, damit C_3 die Vacuumerscheinungen nicht direct stört.

§. 19. Magnetische (Blondlot'sche) Anregung der Oscillatoren. Die Funkenstrecke f regt die Schwingung eines Oscillators a_1a_2 (Platten 30 *cm*, Verbindungsdraht 1 *m*) an. Der

Oscillator $a_3 a_4$ schwingt durch ein Solenoid, welches das Solenoid S inducirt, welches direct in einen Zweig des Oscillators geschaltet ist, z. B. in den Zweig 3 des einfach verzweigten Oscillators. Derselbe verliert hiedurch freilich seine Einfachheit, da das ganze angekoppelte System $a_1 a_2 a_3 a_4$ sich an seinen Schwingungen betheiligt. Das Plattenpaar $a_2 a_4$ kann auch fortgelassen werden, so dass die eine Funkenelektrode direct mit dem einen Ende des Solenoids verbunden ist. Die Einschaltung von $a_2 a_4$ rührt meines Wissens von Ebert her.

Die beiden Solenoide S sind wohlisolirt von einander um dasselbe Glasrohr von 4 *cm* Durchmesser gewunden, so dass

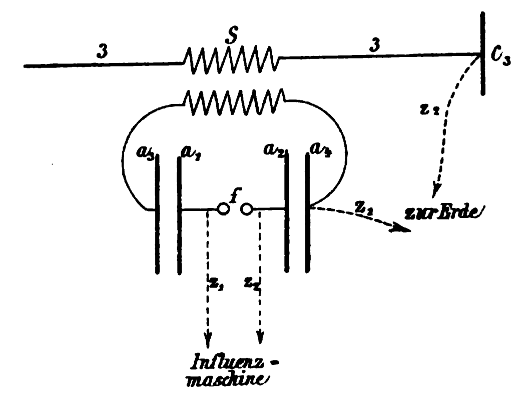


Fig. 7.

sie eine doppelläufige Schraubenlinie bilden von 24 Windungen und 1 *cm* Windungsabstand. Jedes Solenoid hat also 12 Windungen und 2 *cm* Ganghöhe. Dieses Doppelsolenoid ist in Vaselinöl getaucht.

§. 20. Elektrische (Lecher'sche) Anregung der Oscillatoren. Eine Platte eines direct angeregten einfachen Oscillators wirkt elektrisch inducirend auf die nahe gegenüberstehende Platte C_3 des einfach verzweigten Oscillators Fig. 6.

Öfter wurde diese Anregung für den zweifach verzweigten Oscillator angewendet. Derselbe ist dann völlig der Lecher'sche Oscillator, nur mit dem Unterschiede, dass er nicht seitlich symmetrisch zu sein braucht, sondern gerade die Wirkung einer Unsymmetrie studirt wurde.

§. 21. Vier Paralleldrähte mit Stegen. Bei manchen Versuchen wurden mit Vortheil statt der Zweige 1 und 2 der Oscillatoren vier 10 *m* lange parallele Drähte d_1 bis d_4, Fig. 8 und Fig. 9 verwendet, welche etwas über Kopfhöhe isolirt von einer Wand des Zimmers zur anderen gespannt sind. Sie haben 10 *cm* Abstand von einander und sind paarweise überbrückt durch die Stege s_1 und s_2, welche von dem Beobachter aus mittelst Schnurläufen längs der Drähte verschoben werden können. Man verbindet die Kathoden durch kurze gleichlange

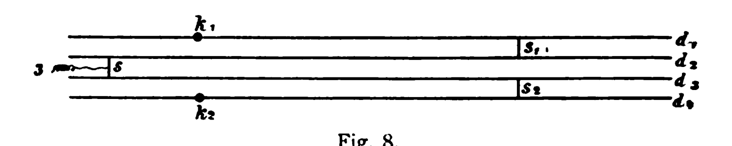


Fig. 8.

Drähte mit den Punkten $k_1 k_2$ der Drähte. Überbrückt man dann $d_2 d_3$ bei s und führt von der Mitte dieser Brücke einen Draht fort, so ist dieser der Zweig 3 eines einfach verzweigten Oscillators, dessen Kathodenzweige $s s_1 k_1$ und $s s_2 k_2$ durch Verschieben von s_1 und s_2 beliebig geändert werden können.

Verbindet man hingegen $c_3 c_4$ kurz mit zwei Platten C_3, C_4 und legt noch die Brücke b über, so hat man den doppelt

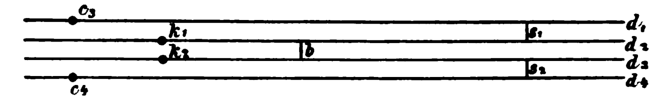


Fig. 9.

verzweigten Oscillator. Man kann dann die Lecher'sche Anregung wählen und auf $C_3 C_4$ oder die directe Anregung bei C_4 wirken lassen. Die Brücke b kann ebenfalls durch einen Schnurlauf verschoben werden. Sonst kann man die Blondlot'sche Anregung in b oder besser zwischen C_3 und C_4 einschalten, übrigens auch noch eine zweite Brücke über d_2 und d_3 oder über d_1 und d_4 legen.

In allen Fällen kann man durch Verschieben der Stege s_1 und s_2 die Zuleitungen zu den Kathoden unsymmetrisch

machen. Sollen die Zweige 1 und 2 (Fig. 2) verändert werden, so muss b über d_1 und d_4 gelegt werden.

Ein Nachtheil, welcher mit der Verwendung dieser vier Paralleldrähte verbunden ist, liegt in dem Einflusse, welchen die frei übrig bleibenden Drahtenden s_1d_1, s_1d_2 u. s. w. auf die Schwingung nehmen. Da die Capacität dieser Drahtenden jedoch nicht sehr gross ist, so stören sie bei vielen Versuchen nicht. Dafür ermöglicht diese Anordnung rasche und sehr genaue Messungen. Die Sicherheit derselben wird dadurch erhöht, dass der Beobachter bei den Einstellungen nur die Schnurläufe in der Hand hat und niemals weiss, wo die Stege stehen. Neben den vier Drähten wurde ein Bandmass aus nichtleitendem Material ausgespannt, um rasche Längenmessungen vornehmen zu können.

Anfangs fürchtete ich, dass auch die schlechten Contacte an den Stegen stören würden. Dies ist jedoch bei Kupfer-, Messing- und selbst Neusilberdrähten nicht der Fall. Wahrscheinlich verbessert die starke Cohererwirkung den Contact. Sichtbare Fünkchen müssen allerdings vermieden werden. Aluminiumcontacte sind stets einigermassen und oft ganz schlecht. Es empfiehlt sich deshalb nicht, die Kathoden aus Aluminium zu machen. Meine Kathoden bestehen aus Zinkblech, welches bei höheren Drucken (0·1 bis 1 *mm* Hg) durchaus nicht zerstäubt.

§. 22. Elektrostatisches Anzünden der Kathodenstrahlen. Diese Erscheinung ist lange bekannt,[1] wird aber nicht befriedigend gedeutet. Es soll dieses Anzünden w. u. §. 58 noch discutirt und hier nur soweit erwähnt werden, als dasselbe ein experimentelles Hilfsmittel für die folgenden Versuche ist.

Versorgt man die Kathoden mit nicht allzu starken reinen Schwingungen, so bleibt das Vacuum zunächst völlig dunkel. Nun nähert man einen geriebenen Glasstab oder einen Hartgummikamm, mit welchem man einmal durch die Haare

[1] Vergl. z. B. H. Ebert, Wied. Ann., 64, S. 257, 1898. Es ist mir leider nicht bekannt, wer diese Erscheinung zum erstenmale beobachtet hat. Jedenfalls wurde dieselbe kurz nach Hertz gleichzeitig mit den elektrodenlosen Vacuumröhren schon verwendet.

gefahren ist, einen Augenblick lang dem Recipienten bis auf 50 *cm* und entfernt ihn dann. Sofort leuchtet das Vacuum dauernd auf, und man kann nun so lange die Lichterscheinungen beobachten und beliebig an der Aufstellung variiren, alle Theile derselben zur Erde ableiten etc., als der excitirende Funke springt. Setzt derselbe einige Secunden lang aus, so erlischt die Strahlung dauernd, und man muss dieselbe wieder durch Nähern eines elektrischen Körpers anzünden. Auch das Auflegen der Hand, das vorübergehende Ableiten der Anode zündet die Strahlung an, jedoch nur bei Recipienten, welche schon vor Kurzem geleuchtet haben.

Man wähle die Anregung für die folgenden Versuche so stark, dass das elektrostatische Anzünden leicht gelingt, aber nicht so stark, dass die Strahlung von selbst, ohne dieses Anzünden, auftritt. Es ist zu empfehlen, den Schleifcontact s, respective die Stege $s_1 s_2$ vor dem elektrostatischen Anzünden etwas aus der Mitte, respective der symmetrischen Stellung zu verschieben. Ist das Leuchten des Vacuums einmal etablirt, so kann man zu der symmetrischen Anordnung zurückkehren, ohne das Auslöschen der Erscheinung §. 25 befürchten zu müssen.

III. Capitel.

Übersicht der Lichterscheinungen.

§. 23*a)*. Die dritte Schichte Goldstein's. Goldstein trennt das blaue Licht an der Kathode mit Recht in zwei superponirte Antheile, die »zweite Schicht« und die »dritte Schicht« der Kathodenstrahlen. Es muss jedoch noch hervorgehoben werden, dass diese dritte Schichte nichts Anderes ist als das blaue Ende der Entladung. Diese Schicht unterscheidet sich nach Goldstein dadurch von der zweiten Schicht (welche von den eigentlichen Kathodenstrahlen gebildet wird), dass sie nicht geradlinige Fortpflanzung hat, keine Schatten wirft, weder Fluorescenz erregt noch Deflexion zeigt. Hiezu muss man noch fügen, dass die dritte Schichte oft, die zweite Schichte nie durch eine scharfe Grenzfläche von dem dunkleren Raum an der Kathode geschieden ist. Dass die dritte Schicht

die negative Hälfte des Entladungsbogens ist, erkennt man bei Nähern der Anode (siehe Fig. 10 und 11).

Damit, dass ich dafür eintrete, dass die dritte Schichte vor Allem zur Entladung gerechnet werden muss, will ich keineswegs leugnen, dass sie mit den Kathodenstrahlen eine wesentliche Verwandtschaft hat, während das rothe Ende des Entladungsprocesses eine wesentlich andere Erscheinung ist.

§. 23*b)*. Das blaue Kathodenlicht oder die zweite Schichte Goldstein's. Dieses ist die blaue Luminescenz der

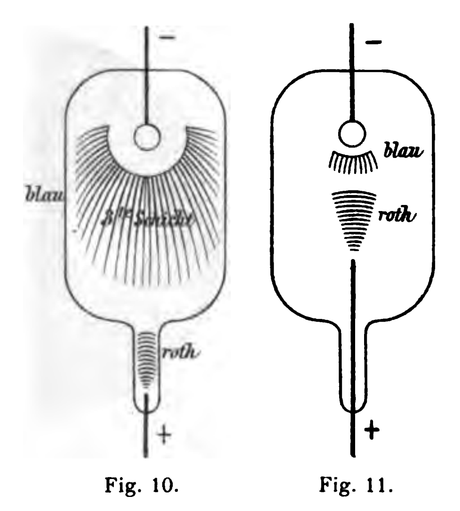


Fig. 10. Fig. 11.

Luft unter dem Einflusse der eigentlichen Kathodenstrahlen. Dieses blaue Kathodenlicht bildet die Grundlage der folgenden Interferenzexperimente. Es ist übrigens dieses blaue Licht keine einheitliche Erscheinung, sondern kann noch aus mehreren von einander unabhängigen Theilen bestehen, welche sich superponiren und bei den Interferenzexperimenten verschiedenes Verhalten zeigen.

§. 24. Die helle Interferenzfläche. Diese habe ich schon früher[1] ausreichend beschrieben. Nicht jede helle blaue Fläche inmitten zwischen den Kathoden ist identisch mit meiner Interferenzfläche. Bei scharfer Ausbildung hat die letztere einen

[1] Wied. Ann. 64, S. 263, 1898.

unverkennbaren Typus. Siehe Fig. 12. Doch hat sie dieses Aussehen nur bei hinreichend kräftiger (directer) Anregung (§. 18). Sonst hat sie dasselbe Aussehen wie andere helle Flächen, die sich zwischen den Kathoden einstellen, aber kurz und unscharf sind, und ist von diesen nur durch ihr Verhalten bei unsymmetrischer Zuleitung zu den Kathoden zu unterscheiden.

§. 25. Die dunkle Interferenzfläche, welche hier zum erstenmale beschrieben wird, ist schon bei schwächerer Anregung und höherem Druck zu erhalten als die helle Interferenzfläche. Letztere erfordert starke Anregung, ist bei 0·5 *mm*

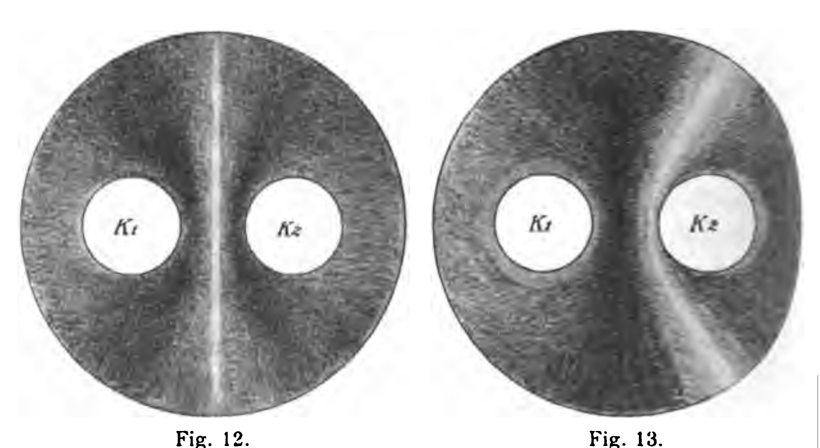


Fig. 12.
Zuleitungen symmetrisch.

Fig. 13.
Zuleitung zu K_2 um 30 *cm* länger.

Druck am schönsten, bei niedrigem Druck, bei welchem die blaue Luminescenz der Luft schon sehr schwach wird, noch an der Fluorescenz des Glases zu erkennen, welches längs der Schnittlinie mit der hellen J-Fläche in einer scharfen grünen Linie leuchtet. Die dunkle Interferenzfläche ist bei 1·2 *mm* Druck am schönsten, weil sie schon voll entwickelt ist und die blaue Luminescenz der Luft noch sehr stark ist. Bei niedrigerem Druck verändert sie sich nicht, aber das blaue Leuchten wird schwächer und deshalb die dunkle J-Fläche nicht mehr so gut sichtbar. Doch habe ich sie selbst bei 0·02 *mm* Druck eben noch sehen können. Die dunkle Fläche ist, wie dies in Fig. 14 und 15 dargestellt ist, nicht so scharf wie die helle J-Fläche. Bei unsymmetrischer Zuleitung verschieben

sich beide Flächen (die helle und dunkle) im gleichen Sinne und nehmen hiebei genau hyperbolische Form an. Die Zweige der hyperbolischen Flächen reichen bei kräftiger Anregung bis an die Glaswand, durch welche sie abgeschnitten und sonst nicht merklich beeinflusst werden. (Vergl. Fig. 13 und 15.)

Auch hier darf man nicht jeden dunklen Zwischenraum zwischen den blauen Kathodenhüllen schon für die dunkle Interferenzfläche ansehen. Diese gewöhnlichen dunklen Zwischenräume werden bei Herabsetzung des Druckes schmäler und verschwinden ganz, indem die blauen Kathodenhüllen, welche

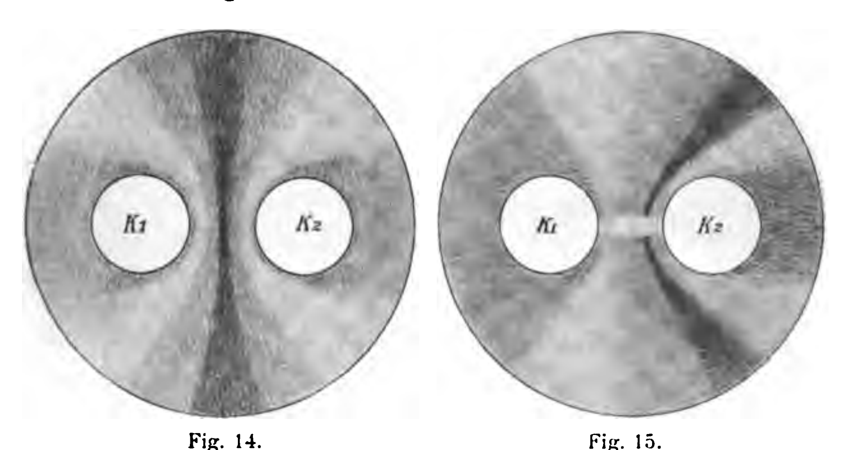


Fig. 14. Zuleitungen symmetrisch.

Fig. 15. Zuleitung zur K_2 um 30 *cm* länger.

meist incohärent sind, sich einfach ausbreiten und durchdringen.

Die blauen cohärenten Kathodenhüllen, welche die helle Interferenzfläche bilden, lassen bei sehr hohem Druck auch einen dunklen Zwischenraum in der Mitte frei, welcher keine Interferenzerscheinung ist. Bei niedrigerem Druck erreichen sich diese cohärenten blauen Schichten, durchdringen sich aber dann nicht einfach, sondern bilden die helle, durch Verschiebungen des Schleifcontactes verschiebbare *J*-Fläche.

Die blauen Kathodenschichten, welche in einer dunklen *J*-Fläche interferiren, erreichen sich bei demselben Druck (circa 2 *mm*) so weit, dass sie die dunkle *J*-Fläche bilden. Diese wird aber bei Herabsetzung des Druckes nicht schmäler, sondern etwas breiter. Dadurch, durch ihre Erstreckung bis

zur Glaswand, und durch ihre Verschiebbarkeit unterscheidet sich die dunkle Interferenzfläche von den gewöhnlichen dunklen Zwischenräumen in der Mitte des Feldes.[1]

§. 26. Helle und dunkle elliptische Ringe. Bei vielen Aufstellungen (z. B. Fig. 8 Anregung kräftig, Funke in Vaseline, Ruhmkorff oder Influenzmaschine als primäre Quelle) erhält man einen, manchmal zwei äquidistante conaxiale elliptische Ringflächen, welche beide Kathoden einschliessen und entweder hell auf dunklem Felde oder dunkel auf hellem Felde erscheinen. Die Axen der cylindrischen Kathoden

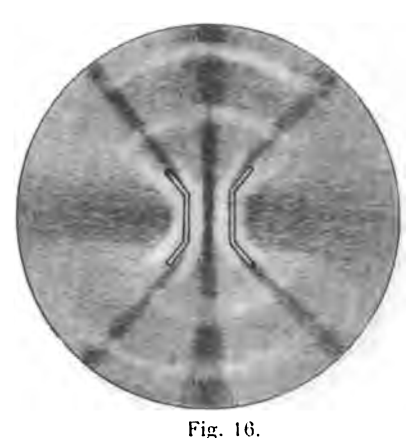


Fig. 16.
Zuleitungen symmetrisch.

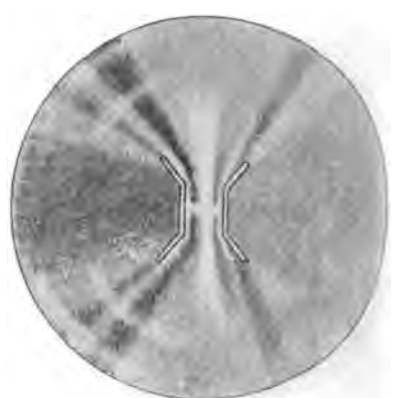


Fig. 17.
Zuleitung zur linken Kathode um 30 *cm* länger.

bilden ungefähr die Brennlinien dieser elliptischen Ringe, Fig. 16 und Fig. 17. Zusammengenommen mit der dunklen Interferenzfläche und den dunklen gegenseitigen Schatten der Kathoden geben sie ein Bild, welches sehr abweicht von dem Typus der Vacuumerscheinungen, wie man ihn gewohnt ist, und an die bekannte Interferenzfigur von Krystallen im Polarisationsapparat erinnert.

Während jedoch die Interferenzflächen sehr ruhig sind, flackern diese Ringe ziemlich stark, weil sie elektrostatisch stark beeinflussbar sind. Das Anlegen der Hand an den Recipienten verzerrt sie stark im Sinne einer Anziehung durch die Hand.

---

[1] Siehe weiteres hierüber: §. 37.

Ferner sind diese Ringe viel unbeständiger als die J-Flächen. Schon ganz kleine Änderungen des anregenden Funkens, der Ladungsrichtung der primären Elektricitätsquelle u. A. bringen sie zum Entstehen oder zum Verlöschen.

Würde man den cylindrischen Mantel des Recipienten mit einem Metallband belegen und dieses durch passende Zuleitungen ebenfalls zur Kathode machen, so würde man Interferenzflächen ungefähr von der Form dieser Ringe erhalten. Ich halte diese Ringe für Interferenzflächen von Strahlen, welche einerseits von den Kathoden, anderseits von der Glaswand des Recipienten ausgehen. Vielleicht ist es die Interferenz zwischen der directen und der von der Glaswand reflectirten Strahlung, welcher diese Ringe ihre Entstehung verdanken.

Eine wichtige Stütze für diese Annahme ist, dass die Ringe ihren Radius vergrössern bei Verschiebung des Schleifcontactes. Sie sind also verschiebbare Interferenzflächen. Auch begreift sich der starke Einfluss der elektrostatischen Ladung der Glaswand aus obiger Annahme.

In vorliegender Arbeit komme ich auf diese Ringe nicht mehr zurück, doch werde ich mich demnächst wieder mit denselben beschäftigen.

§. 27. Dunkle Flächen an den Kathoden. Oft gehen unmittelbar an den Kathoden (in Fig. 16 und 17 sehr gut zu sehen) dunkle Interferenzflächen aus und reichen bis an die Glaswand. Sie sind in derselben Richtung wie die dunkle und die helle J-Fläche durch Verschiebungen der Schleifcontacte verschiebbar, ohne jedoch hiebei ganz aus den Kathoden auszutreten. Nur die hyperbolischen Äste dieser dunklen Flächen drehen sich nach einer Seite bei Verschiebung des Schleifcontactes (siehe Fig. 17). Diese seitlichen dunklen Flächen werden wahrscheinlich von denselben Strahlen gebildet, welche die helle J-Fläche in ihrer Mitte bilden und könnten also die zu dieser hellen J-Fläche gehörigen seitlichen, um eine halbe Wellenlänge abstehenden Minima sein. Hiefür spricht der Umstand, dass bei Näherung der Kathoden bis zur Berührung die dunkle mittlere J-Fläche völlig verschwindet, die helle J-Fläche und die dunklen seitlichen Flächen aber deutlicher werden. Hierüber siehe §. 37. Auch diese seitlichen dunklen

Flächen, sowie der gegenseitige Schatten der Kathoden, welcher ebenfalls mit der Verschiebung des Schleifcontactes sich ändert, werden im Folgenden nicht mehr erwähnt.

Während die in §. 24—27 beschriebenen Erscheinungen neu sind, sind die in §. 28—30 zu beschreibenden Lichterscheinungen bekannt und von mir nur ihre Abhängigkeit von der Verschiebung des Schleifcontactes noch zu constatiren. Der Übersichtlichkeit wegen möge gleich hier mitgetheilt werden, dass ich die Veränderung der Erscheinungen §. 24—27 inclusive, welche zufolge der Verschiebung des Schleifcontactes eintritt, durch Phasenverschiebungen verursacht ansehe, während die bei Verschiebung des Schleifcontactes eintretenden Veränderungen der Erscheinungen §. 28—30 durch Veränderung des Amplitudenverhältnisses der Schwingungen der beiden Kathoden bewirkt werden dürften.

§. 28. Incohärente Parallelschichten um die Kathoden. Es ist bekannt, dass das blaue Ende der Entladung auch in verdünnter Luft oft nur eine Schichte Glimmlicht über die Kathode bildet, welche sich bei Vorschaltung eines Fünkchens theilt, so dass zwei parallele, dünne, blaue Schichten um die Kathode liegen. O. Lehmann z. B. beschreibt und bildet dies mehrfach ab.

Diese einfachen, respective doppelten Parallelschichten sieht man auch bei meinen Aufstellungen und hat hier noch Folgendes zu beobachten: Die einfachen blauen Hüllen um beide Kathoden verändern sich bei Verschiebung des Schleifcontactes aus der Mitte des Feldes, aber ganz anders als die J-Flächen. Bei einer Verschiebung des Schleifcontactes um 50 *cm*, wobei die J-Flächen durch das ganze Feld wandern, schieben sich die Parallelschichten symmetrisch ein wenig auseinander, so dass der dunkle Raum zwischen ihnen ein wenig breiter wird. Bei weiterer Verschiebung des Schleifcontactes spaltet sich die Schichte, welche der einen Kathode anliegt, in zwei parallele Schichten, von welchen eine an der Kathode liegen bleibt, die andere sich desto mehr von der Kathode entfernt, je mehr man den Schleifcontact verschiebt.

Die zweite Kathode hat gar keinen Einfluss auf Form und Stellung dieser verschieblichen Parallelschichte.

abgesehen davon, dass sie einen Theil derselben abschneidet, indem sie in dieselbe hineinragt. In Fig. 18 stellt $F_1 F_2$ die ursprünglichen Schichten, F_3 die abgespaltene Parallelschichte dar. Die Zuleitung zur Kathode K_2 ist 400 *cm* länger als die zur Kathode K_1.

Das Aussehen dieser Schichten hängt im Übrigen sehr von der Anregung ab. Ich halte sie ohnehin mit der dritten Schichte Goldstein's (§. 22) für verwandt. Wenn ein sichtbares Entladungsband zu einer der Kathoden geht, so verschmilzt es mit diesen Schichten und bezeugt damit deren Verwandtschaft mit dem blauen Ende der Entladung.

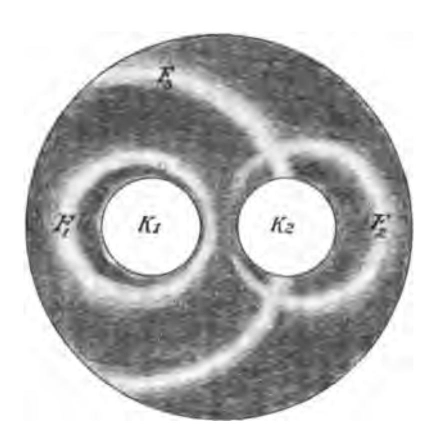


Fig. 18.
Zuleitung zu K_2 um 400 *cm* länger.

§. 29. Der rothe Ballen. Bei 1·2 *mm* Druck und symmetrischen Zuleitungen nimmt die dunkle Interferenzfläche die Mitte des Feldes ein. Aber schon bei einer Verschiebung des Schleifcontactes um 10 *cm* tritt, je nach den Constanten des Oscillators und der Anregung, entweder der blaue Querstrich (§. 30) oder der rothe Ballen auf,[1] während sich die dunkle *J*-Fläche etwas seitwärts geschoben hat. Der rothe Ballen tritt besonders bei starken Anregungen auf.[2] Zunächst ist er ein feiner carminrother Strich, der ganz die Lage der unverschobenen hellen *J*-Fläche einnimmt, jedoch von dieser sich nicht nur durch seine Farbe, sondern auch durch sein Auftreten bei 1·2 *mm* Druck, bei welchem die helle *J*-Fläche noch lange nicht sichtbar ist, unterscheidet. Dieser rothe Strich bewahrt bei weiterer Verschiebung des Schleifcontactes seine Lage, aber verbreitert sich sehr rasch zu

[1] Nach Hertz treten unter ähnlichen Bedingungen, aber in freier Luft, Fünkchen zwischen den Kathoden auf.

[2] Man wählt am besten die Aufstellung Fig. 6, ohne den Funken *f*, aber mit elektrischer Anregung (§. 20, Anfang).

einem rothen Ballen. Dann ist unmittelbar an den Kathoden blaues Licht und von diesem durch zwei dunklere Räume getrennt in der Mitte des Feldes der rothe Ballen. Diese Erscheinung erinnert einerseits an das rothe und blaue Ende des Entladungsbogens, anderseits dürfte sie identisch sein mit jener Erscheinung, welche E. Wiedemann und H. Ebert[1] als typische Erscheinung, welche bei Einwirkung reiner elektrischen Schwingungen auf das Vacuum auftritt, beschreiben. Diese Erscheinung ist nach Obigem nur charakteristisch für entgegengesetzte Schwingungen der Kathoden, sie tritt jedoch nicht immer und nicht für sich allein, nie aber bei anderen als entgegengesetzten Schwingungen auf.

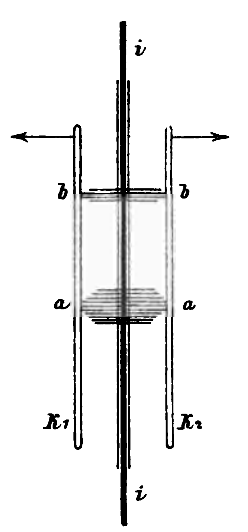


Fig. 19.

§. 30. Der blaue Querstrich. In den meisten Fällen tritt statt der in §. 29 beschriebenen Erscheinung bei geringer Unsymmetrie der Zuleitungen ein blauvioletter Querstrich (in Fig. 15 u. 17 erkennbar) zwischen den Kathoden auf. Das Aufspringen dieses Querstriches erfolgt plötzlich bei einer Längenverschiedenheit von $\pm$ 9 *cm* der Zuleitungen. Bei grösserer Verschiebung des Schleifcontactes nimmt der Querstrich rasch an Helligkeit und Breite zu.

Von Interesse ist das Verhalten dieses Querstriches zwischen grossen parallelen Kathodenplatten.

Versuchsanordnung Fig. 6, Funke $f = 1$ *cm*, Anregung mittelst Ruhmkorff. Kathodenplatten 10 *cm* lang, 4 *cm* breit, 2 *cm* von einander entfernt.

Es erscheinen ausser der hellen J-Fläche *i*, Fig. 19, ein bis zwei blaue Querstriche *a* und *b*. Neigt man die Platten ein wenig gegen einander, so bewegen sich die Querstriche sehr rasch nach der Seite der Divergenz hin und verschwinden dort. Bringt man die Platten in kleine Pendelschwingungen um

[1] Wied. Ann., Bd. 50, S. 1, 1893.

eine zur Zeichnungsebene senkrechte Kante derselben, so machen entsprechend der Schiefstellung der Platten die Querstriche diese Pendelschwingungen in sehr vergrössertem Massstabe mit, indem sie sich stets nach der Seite der Divergenz bewegen.

Diese Querstriche können unter Umständen durch die Erscheinung §. 29 ersetzt werden. Der Umstand, dass diese beiden Erscheinungen §. 29 und §. 30 in freier Luft auch durch Fünkchen ersetzt werden können und ihre Lage zwischen zwei Elektroden legt es nahe, diese beiden Erscheinungen für eine Art Entladung zu halten. Diese Auffassung ist aber vielleicht ein Umweg. Weiter unten ergibt sich, dass das carminrothe Leuchten der Luft nur das Zeichen des Vorhandenseins starker elektrischer Kraftschwingungen ist, welche den Maxwell'schen Gleichungen folgen, also die Laplace'sche Gleichung erfüllen. Die wesentliche Grundlage der Erscheinung §. 29 (des Ebert und Wiedemann'schen rothen Ballens) und §. 30 (des blauen Querstriches) sind jedoch echte Kathodenstrahlen, welche die Luft zum blauen Leuchten bringen. Nur dort, wo die Kathodenstrahlen sich durch Interferenz auslöschen, kann der rothe Ballen auftreten. Hierüber siehe §. 62.

Die blauen Querstriche erregen bei niedrigem Druck Fluorescenz der Glaswand, sind magnetisch verschiebbar und ferner elektrostatisch sehr stark verschiebbar, und zwar vorübergehend ganz wie Kathodenstrahlen. Bei Näherung eines negativen Stabes von unten werden sie nach oben gestossen, kehren aber trotz der Nähe des negativen Körpers sogleich wieder in ihre Lage zurück. Beim Entfernen des negativen Körpers machen sie den entgegengesetzten Ausschlag (nach unten). Ein +Stab wirkt umgekehrt. Durch Berühren der Glaswand mit der Hand kann man die Querstriche dauernd anziehen. Es ist also zweifellos, dass die blauen Querstriche Kathodenstrahlen sind.

Schaltet man zwei grosse Leydnerflaschen zu den Kathoden und verbindet ihre äusseren Belegungen mit einander, so tritt statt des blauen Querstriches ein runder Bauch von 1·5 *cm* Durchmesser inmitten der weisslichen *J*-Fläche auf

welcher sich in Bezug auf seine Verschiebbarkeit in jeder Beziehung wie der blaue Querstrich verhält.

IV. Capitel.

Entstehung der Interferenzflächen durch elektrische Schwingungen der Kathoden.

§. 31. Dunkle Fläche bei dem unverzweigten Oscillator. Den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bildete ein Einwurf von E. Wiedemann und G. C. Schmidt, welche angeben, meine helle Interferenzfläche auch dann erhalten zu haben, wenn die beiden Kathoden mit den Endcondensatoren des Lecher'schen Oscillators verbunden wurden, obwohl doch diese nicht nur nicht gleichphasige, sondern sogar entgegengesetzte Schwingungen ausführen.[1]

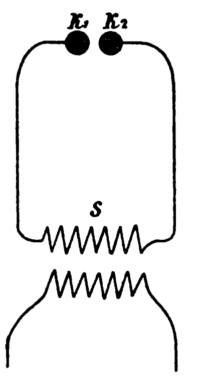


Fig. 20.

Wahrscheinlich war die unverschiebliche helle Fläche, welche die genannten Herren erhalten haben, der feine rothe Strich (§. 29) oder eine blaue Fläche (§. 28), welche mit der hellen Interferenzfläche durchaus nicht verwandt sind. Diese habe ich niemals bei Lecher'scher Anregung erhalten.

Im Gegentheile sollte man erwarten, dass bei entgegengesetzten Schwingungen der Kathoden eine dunkle Fläche zwischen ihnen auftritt. Ich fürchtete nur anfangs, dass dieses Minimum stets zu flach sein würde, um wahrnehmbar zu sein.

Um die Kathoden in entgegengesetzte Schwingungen zu versetzen, verwendete ich zunächst einen unverzweigten Oscillator (Fig. 20). Thatsächlich erhält man damit eine dunkle Mittelfläche, den rothen Ballen (§. 29) oder den blauen Querstrich (§. 30), aber sämmtlich sehr undeutlich, auch ist die dunkle Fläche nicht verschiebbar.

Diese Aufstellung ist zwar einfach, aber sehr ungünstig. Die directe Anregung durch einen in den Oscillator geschalteten

[1] E. Wiedemann und G. C. Schmidt, Wied. Ann., 60, S. 514, 1897.

Funken (§. 17) ist hier unmöglich, da der Funke überhaupt nicht überspringen würde, sondern die Entladung der primären Elektricitätsquelle durch das Vacuum zwischen den Kathoden ginge. Man muss deshalb zu der Blondlot'schen Anregung greifen (§. 18). Das Solenoid S, welches in den unverzweigten Oscillator geschaltet wird, besitzt jedoch eine grosse Capacität. Zufolge dessen ist der Oscillator nicht mehr ein einfacher, sondern besteht aus drei Capacitäten und hat zwei von einander unabhängige Grundschwingungen von etwas verschiedener Schwingungsdauer. Die Schwingungen der Kathoden sind zufolge dessen zwar nahezu, aber nicht völlig entgegengesetzt und unregelmässig.

Um reine entgegengesetzte Schwingungen zu erhalten, muss man noch eine Brücke über die beiden Zweige des unverzweigten Oscillators legen, also zu dem Blondlot'schen Oscillator übergehen.

§. 32. Dunkle Interferenzfläche bei dem Lecher'schen und Blondlot'schen Oscillator. Da die beabsichtigte unsymmetrische Verlängerung der Zweige dieser Oscillatoren ohne besondere Vorkehrungen unbequem ist, bediente ich mich der vier Paralleldrähte (§. 21). Die Aufstellung wurde nach Fig. 9 getroffen. Wenn die Stege s_1 und s_2 gleich weit von den Kathoden bei k_1 und k_2 entfernt sind, so hat man genau den Lecher'schen Oscillator.

Ein Geissler'sches Rohr statt meines Recipienten an $k_1 k_2$ angeschlossen leuchtet gerade sehr stark, weil die Potentialschwingungen von k_1 und k_2 und die Stromschwingungen in $\overline{k_1 s_1}$ und $\overline{k_2 s_2}$ stark und entgegengesetzt sind, und ich verlange Auslöschen des Leuchtens wenigstens in der Mitte zwischen den Kathoden.

Ein Geisslerrohr hat kleine, weit von einander entfernte Elektroden und ein enges Glasrohr, welches elektrostatisch mitwirkt. Da ferner die Schwingungen des Lecher'schen Oscillators mit einer Brücke niemals rein sind, sondern sich bei der geringsten Unsymmetrie zwei von einander unabhängige nahezu gleiche Grundschwingungen etabliren, so findet kein Auslöschen statt, sondern helles Leuchten.

Mein Recipient ist jedoch sehr von einem Geisslerrohr verschieden. Die Kathoden sind gross, nahe aneinander, weit von dem cylindrischen Mantel des Recipienten entfernt. Ferner ist es gut, den Druck ziemlich hoch (1·2 *mm* Hg) zu wählen.

Bei dieser Aufstellung (Fig. 9) bleibt der Recipient zunächst vollkommen dunkel, und man muss die Strahlung elektrostatisch anzünden (§. 22).

Bei dem symmetrischen Lecher'schen Oscillator beschränkt sich jedoch auch nach diesem Anzünden das Leuchten des Vacuums auf einen elliptischen Raum unmittelbar um die Kathoden und erlischt sehr leicht von selbst. Inmitten dieses blassblauen Raumes sieht man die dunkle Interferenzfläche.

Verschiebt man einen der Stege s_1 oder s_2, so verschiebt sich die dunkle J-Fläche nach der Kathode mit längerer Zuleitung hin, das Leuchten dehnt sich immer mehr aus und wird stabil. Endlich schlagen die hyperbolischen Zweige der J-Fläche über der einen Kathode zusammen und sie verschwindet. Zwischen den Kathoden ist mittlerweile ein heller violetter Querstrich (§. 30) aufgetreten. Zu alledem ist nur eine Verschiebung des Steges um 15 bis 20 *cm* erforderlich. Die Erscheinung ist durchaus nicht brillant, sondern sehr dunkel. Die weiteren Erscheinungen, namentlich das Wiederauftreten der dunklen J-Fläche in prächtiger Entwicklung bei grosser Verschiebung der Stege, siehe w. u. §. 52.

Mit dem Blondlot'schen Oscillator verlaufen die Erscheinungen ganz ähnlich. Die Spule S, Fig. 7, wurde dabei zwischen die Punkte $c_3 c_4$, Fig. 9, geschaltet.

§. 33. Dunkle Interferenzfläche bei dem einfach verzweigten Oscillator. Der einfach verzweigte symmetrische Oscillator (Fig. 1 und 6) ist nach Capitel I ausser der einen Grundschwingung, zufolge welcher die Kathoden mit gleicher Phase schwingen, noch einer zweiten unabhängigen Grundschwingung fähig, zufolge welcher die Kathoden entgegengesetzte Schwingungen ausführen. Da nach §. 32 die dunkle J-Fläche bei 1·2 *mm* Druck am schönsten ist und bei diesem Druck sich die helle Fläche noch nicht bildet, so musste erstere bei diesem Druck aufgesucht werden. Ich erwartete

aus weniger wichtigen Gründen sie nicht zu finden, täuschte mich jedoch hierin.

Die dunkle Interferenzfläche ist mit dem einfach verzweigten Oscillator (Fig. 1) sowohl bei directer Anregung (Fig. 6), als bei Blondlot'scher Anregung (Fig. 7) und Lecher'scher Anregung (§. 20) ebensogut zu erhalten, als bei dem zweifach verzweigten Oscillator. Ja sie ist bei dem einfach verzweigten Oscillator (bei 1·2 *mm* Druck) sogar noch viel schöner, weil das Leuchten des Vacuums viel heller ist und den ganzen Recipienten erfüllt und sie sich doch bei guter Aufstellung vollkommen schwarz und geradlinig, beziehungsweise hyperbolisch durch den ganzen Recipienten bis an die Glaswand erstreckt (siehe Fig. 14, beziehungsweise 15). Sie kann für Verschiebungen des Schleifcontactes s (Fig. 6) sehr empfindlich gemacht werden.

§. 34. Unabhängigkeit der hellen und der dunklen Interferenzfläche bei dem einfach verzweigten Oscillator. Es entsteht zunächst die Frage, ob diese beiden J-Flächen von einander unabhängige Erscheinungen sind oder nur die Formen derselben Erscheinung bei verschiedenem Drucke. Wenn letzteres der Fall wäre, so müsste man bei allen Aufstellungen, bei welchen man bei höherem Druck die dunkle J-Fläche erhält, bei niedrigem Druck die helle J-Fläche erhalten und umgekehrt. Dies ist jedoch nicht der Fall. Bei dem zweifach verzweigten Oscillator habe ich nur die dunkle J-Fläche, nie die helle J-Fläche erhalten, auch nicht bei niedrigem Druck. Bei dem einfach verzweigten Oscillator erhält man beide J-Flächen zwar oft, aber nicht immer mit derselben Aufstellung bloss bei verschiedenem Druck. Bei directer Anregung (Fig. 6) ist die helle Fläche leicht, die dunkle schwerer zu erhalten. Man kann die Constanten des Oscillators leicht so wählen, dass die helle J-Fläche sehr schön auftritt und doch (auch bei 1·2 *mm* Druck) keine Andeutung der (durch den ganzen Recipienten sich erstreckenden verschiebbaren) dunklen J-Fläche (nicht zu verwechseln mit dem gewöhnlichen kurzen unverschiebbaren dunklen Zwischenraum zwischen den incohärenten Lichtschichten §. 28) auftritt.

Umgekehrt habe ich bei der speciellen[1] Aufstellung §. 48 (einfach verzweigter Oscillator mit Solenoidanregung) auch bei beliebig niedrigem Druck keine Andeutung der hellen J-Fläche erhalten, wohl aber die dunkle Fläche bei jedem Druck zwischen 0·2 bis 1·5 *mm* sehr deutlich und verschiebbar. Sie ist bei niedrigem Druck etwas breiter, nicht schmäler als bei höherem Druck.

Ein Oscillator, welcher beide J-Flächen zeigt, zeigt sie bei 0·9 *mm* Druck gleichzeitig, so dass die helle J-Fläche bei symmetrischer Zuleitung inmitten der breiteren dunklen Fläche liegt. Bei Verschiebung des Schleifcontactes verschieben sich beide J-Flächen in gleichem Sinne, aber mit etwas verschiedener Geschwindigkeit. Man sieht die (kürzere) helle J-Fläche hiebei besser in der Nähe der Verbindungslinie der Kathoden, die zwei Zweige der dunklen J-Fläche besser ausserhalb der unmittelbaren Nähe der Kathoden.

Da man also, ohne an dem Recipienten etwas zu ändern, bei jedem Druck zwischen 0·5 und 1·0 *mm* bloss durch Änderungen an dem Oscillator entweder die helle oder die dunkle J-Fläche für sich oder beide zusammen erhalten kann, so sind diese beiden J-Flächen nicht Formen derselben Erscheinung bei verschiedenem Druck, sondern von einander unabhängige Erscheinungen, die sich, wenn sie gelegentlich zusammen auftreten, über einander legen, ohne sich zu stören.

Es bleibt noch zu erklären, warum die helle J-Fläche am deutlichsten bei 0·5 *mm* Druck ist, während die dunkle J-Fläche schon bei 1·2 *mm* Druck am deutlichsten ist. Es wirken da mehrere Umstände zusammen. Die helle Interferenzfläche findet im Felde ungünstige elektrostatische Bedingungen vor (siehe hierüber §. 57), sie braucht deshalb eine stärkere Anregung und niedrigeren Druck. Freilich ist bei niedrigerem Druck auch die Luminescenz der Luft schwächer, dies hat aber für die helle Fläche wenig zu bedeuten, da sie ein scharfes Luminescenzmaximum ist.

[1] Überhaupt ist die helle J-Fläche bei einfach verzweigtem Oscillator mit Solenoidanregung niemals so schön entwickelt als bei directer Anregung §. 18.

Für das Auftreten der dunklen Fläche, d. h. für das Ausbleiben der Kathodenstrahlen in der Mitte des Feldes, sind diese elektrostatischen Bedingungen günstig (siehe §. 57), sie braucht deshalb nur schwache Anregung und tritt schon bei höherem Druck auf, umsomehr als auch die Luminescenz der Luft bei höherem Druck stärker ist, was hier sehr ins Gewicht fällt, da die dunkle Fläche ein weniger scharfes Luminescenzminimum ist.

§. 35. Beide Interferenzflächen werden durch langsame elektrische Schwingungen verursacht. Dass diese J-Flächen ihr Entstehen den stehenden Hertz'schen Schwingungen der Oscillatoren verdanken, ist fast ohne besondere Auseinandersetzungen klar. Es wurde ja darauf gesehen, diese Schwingungen möglichst gut anzuregen, und das w. u. beschriebene Verhalten der J-Flächen zeigt sogar, dass die Leuchterscheinungen im Vacuum dieselbe Schwingungsperiode haben wie die Hertz'schen Grundschwingungen des Oscillators (siehe §. 43, S. 60 und ff.).

An dieser Stelle wollen wir noch nicht so weit gehen, sondern nur zeigen, dass die stehenden Hertz'schen Schwingungen des Oscillators die wesentliche Ursache der Leuchterscheinungen und der J-Flächen sind.

Zu diesem Nachweise muss man alle anderen Ursachen des Leuchtens des Vacuums ausschliessen. Es darf also, abgesehen von dem ersten elektrostatischen Anzünden (§. 22) der Strahlen, kein elektrostatischer Einfluss auf das Vacuum wirken. Es wurde mit dem einfach verzweigten Oscillator mit Solenoidanregung Fig. 7 gearbeitet. Die Anode wurde metallisch zur Erde abgeleitet, die Kathoden wurden bei C_3 (Fig. 7) metallisch zur Erde abgeleitet, endlich wurde auch eine der Platten $a_3 a_4$ (Fig. 7) metallisch zur Erde abgeleitet. Trotzdem tritt das Leuchten des Vacuums und die J-Flächen in genau derselben Weise auf, als wenn man elektrostatische Einflüsse nicht verhindert.

Umgekehrt kann man ohne elektrische Schwingungen auch bei starken elektrostatischen Wirkungen die J-Flächen nicht erhalten. Verbindet man die Anode mit dem +Pol der Influenzmaschine, den Vereinigungspunkt s (Fig. 1) ohne Einschaltung

eines Funkens oder besser mit Zwischenschaltung einer feuchten Schnur mit dem —Pol, so erhält man zwar ein unbedeutendes Leuchten des Vacuums, aber keineswegs eine Andeutung der J-Flächen oder anderer in Capitel III beschriebener Erscheinungen.

Nun ist noch zu zeigen, dass die elektrischen Schwingungen beider Kathoden zusammenwirken müssen, um die J-Flächen zu erzeugen. Dies folgt vor Allem aus der hyperbolischen Form (Fig. 13 und 15) der verschobenen J-Flächen. Im Gegensatze hiezu vergleiche man die hellen Flächen Fig. 18. Diese sind der einen, beziehungsweise anderen Kathodenoberfläche ungefähr parallel, man sieht, dass die einen (F_1 und F_3) nur durch die Kathode k_1, die andere (F_2) nur durch die Schwingungen der Kathode k_2 verursacht werden. Die hyperbolischen J-Flächen hingegen können ihrer Form wegen nur durch das Zusammenwirken der Schwingungen beider Kathoden entstehen.

Man erkennt ein Gleiches, wenn man einen Glimmerschirm zwischen die Kathoden bringt. Derselbe bringt die J-Flächen so weit zum Verschwinden, als er reicht und stört sie in dem übrigen Theile des Feldes weniger.

§. 36. Die helle Interferenzfläche wird durch gleichgerichtete Schwingungen der Kathoden verursacht. Die Kathoden wurden beweglich gemacht, so dass man sie durch Drehung eines Schliffes während der Strahlung nähern und entfernen konnte.

Nun kann man sehr einfach beweisen, dass die helle J-Fläche durch gleichgerichtete Schwingungen an den Kathoden verursacht wird. Man nähert die Kathoden während der Strahlung so weit, dass sie sich berühren. Hiebei verlässt die helle J-Fläche ihre mittlere Stellung nicht und wird etwas heller, länger und schärfer.

Während der Berührung haben die Kathoden gewiss gleichgerichtete Potentialschwingungen, also sind allgemein solche gleichgerichtete Potentialschwingungen, genauer gleichgerichtete Kraftschwingungen[1] in den Normalen an den

[1] Beziehung zwischen den Kraftschwingungen, Potential- und Stromschwingungen. Unter $\left.\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{entgegengesetzt}\end{matrix}\right\}$ gerichteten

einander zugekehrten Flächen der Kathoden die Ursache des Auftretens der hellen Interferenzfläche in mittlerer Lage.

Hiebei ist daran zu erinnern, dass ich die helle Interferenzfläche ja zuerst in einspringenden Winkeln einer Kathode sah[1] und von da erst zu zwei Kathoden überging.

§. 37. Die dunkle Interferenzfläche wird durch entgegengesetzte Schwingungen der Kathoden verursacht. Man führt den Beweis in derselben Weise wie vorhin. Es wurde zunächst die dunkle Fläche recht klar zu erhalten gesucht und dann wurden die Kathoden genähert. Je mehr man sie nähert, desto undeutlicher wird die dunkle Fläche. Schon bei 5 *mm* Entfernung der Kathodenoberflächen ist nur wenig von ihr zu sehen, bei völliger Berührung verschwindet sie völlig. Siehe hier auch §. 27.

Schwingungen zweier Oberflächenelemente der Kathoden verstehe ich im Folgenden solche, bei welchen die elektrische Kraft im Vacuum unmittelbar an den Oberflächenelementen nach aussen gezählt stets $\left.\begin{matrix}\text{gleiche}\\ \text{entgegengesetzte}\end{matrix}\right\}$ Richtung hat.

Nun haben die Kathoden bei diesen langsamen elektrischen Schwingungen mit Annäherung ein Potential, d. h. die elektrischen Kräfte sind in der Nähe der Kathoden, also im ganzen Recipienten, mit Annäherung so vertheilt, als hätten sie ein Potential und als wären die Kathodenoberflächen Niveauflächen.

Kennt man die Potentialschwingungen sämmtlicher Conductoren des Oscillators und ihre Stellung gegen die Kathoden, so kennt man auch den variablen Kraftfluss, welcher von den Kathoden nach diesen verschiedenen Conductoren geht, und weiss, ob die Schwingungen aller Elemente derselben Kathode gleichgerichtet sind oder nicht.

In meinem Recipienten geht der ganze Kraftfluss von den Kathoden zur Erde oder zu einander, aber nicht zu anderen Conductoren des Oscillators. Sowohl wenn die Schwingungen der Potentialdifferenz der Kathoden gegen die Erde gleich und gleichgerichtet, als wenn sie nahezu gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, sind die Schwingungen aller Elemente derselben Kathode gleichgerichtet und haben keine Phasenverschiedenheit. In diesen Fällen sind auch die Stromschwingungen in dem Zuleitungsdraht mit der Potentialschwingung der Kathode gleichphasig.

Im Falle beliebiger Phasendifferenzen der Schwingungen der Kathoden muss man jedoch zwischen Potential- und Stromschwingungen derselben unterscheiden und sind auch die Kraftschwingungen an der inneren (der anderen Kathode zugewendeten) Seite einer Kathode nicht gleichphasig mit den Kraftschwingungen an der äusseren Seite derselben Kathode.

[1] Wied. Ann., 57, S. 153, 1896.

Hiemit ist der Beweis hergestellt, dass die Potentialschwingungen der Kathoden, welche die dunkle Interferenzfläche verursachen, nicht gleichgerichtet sind. Es lässt sich jedoch noch ein Einwand hiegegen machen. Wenn man von den übrigen Experimenten, welche die dunkle Fläche als Interferenzfläche charakterisiren, hier absieht und nicht zugibt, dass dieselbe überhaupt durch Interferenz entsteht; wenn man absieht von der geradlinigen, beziehungsweise hyperbolischen Erstreckung derselben durch den ganzen Recipienten und sie für nichts hält als einen gewöhnlichen dunklen Zwischenraum zwischen den blauen Hüllen um die Kathoden, dann könnte man auch die Beweiskraft obigen Experimentes bezweifeln und annehmen, dass bei Näherung der Kathoden die blauen Hüllen einfach genähert werden und deshalb der dunkle Zwischenraum zwischen ihnen schmäler werden und endlich ganz verschwinden muss.[1]

Hiezu ist zu bemerken, dass diese gewöhnlichen dunklen Zwischenräume wirklich existiren, sich aber bei Entfernungsänderung der Kathoden ganz anders verhalten als die dunkle Interferenzfläche. Die Dicke der blauen Hüllen, welche durch einen gewöhnlichen dunklen Zwischenraum von einander geschieden werden, ist zwischen den Kathoden bedeutend kleiner als an den äusseren Theilen der Kathoden und hängt von der Entfernung der Kathoden ab. Bei Näherung der Kathoden werden ihre zwischen den Kathoden verlaufenden Theile immer schmäler. Dies hindert nicht, dass der dunkle Zwischenraum zwischen ihnen abnimmt und schliesslich verschwindet. Bei Entfernung der Kathoden nimmt der dunkle Zwischenraum aber auch die Dicke der blauen Hüllen zu. Ganz anders verhält sich die dunkle Interferenzfläche. Bei Entfernung

---

[1] Deshalb habe ich auch, statt die Kathoden zu nähern, während der Strahlung eine (ganz kurze!) Brücke aus dünnem Blech zwischen sie eingeschoben, respective entfernt. Das Einschieben der Brücke bringt die dunkle J-Fläche zum Verschwinden. Eine längere Brücke bringt die J-Fläche nur an ihrer äusseren Seite zum Verschwinden. Brücken, welche ausserhalb des Recipienten über d_1 und d_1 (Fig. 8) gelegt werden, schädigen die dunkle J-Fläche nur, wenn sie sehr nahe an $k_1 k_2$ (Fig. 8) liegen, weiter ab begünstigen sie sogar begreiflicherweise die dunkle J-Fläche.

der Kathoden nimmt ihre Breite rascher zu als die Entfernung der Kathoden. Das matte blaue Licht, welches den ganzen Recipienten erfüllt und in dessen Mitte die dunkle *J*-Fläche auftritt, dehnt sich also bei Entfernung der Kathoden nicht zwischen denselben aus wie die blauen Hüllen, sondern zieht sich zu Gunsten der dunklen *J*-Fläche zusammen. Bei 3 *cm* Entfernung der Kathoden füllt die dunkle *J*-Fläche den ganzen Zwischenraum zwischen den Kathoden aus. Es ist dann zwischen den Kathoden keine Spur von blauem Licht (Fig. 21).

Um es kurz zu wiederholen: 1. Die blauen, sich nicht erreichenden Hüllen bilden Schichten um die Kathoden, der ganze übrige Raum ist dunkel, die Dicke der Schichten wächst bei Entfernung der Kathoden. 2. Das mattblaue Licht, welches die dunkle *J*-Fläche bildet, erfüllt den ganzen Recipienten, die dunkle Fläche ist nur ein schmaler ebener, respective hyperbolischer Raum, das mattblaue Licht zieht sich bei Entfernung der Kathoden[1] zu Gunsten der dunklen *J*-Fläche zusammen, so dass diese bald den ganzen Zwischenraum zwischen den Kathoden verdunkelt.

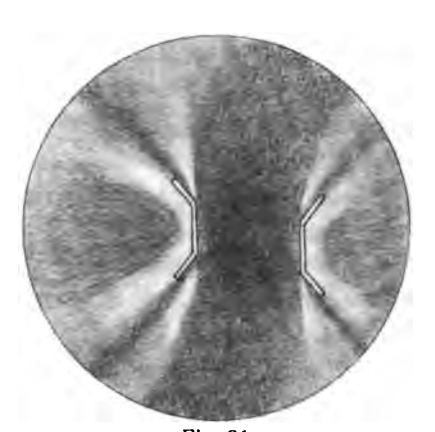


Fig. 21.
Zuleitungen symmetrisch.

Hiemit allein ist schon nachgewiesen, dass die dunkle Interferenzfläche nicht bloss ein dunkler Zwischenraum ist. Die Ursache, warum sie verschwindet bei Näherung der Kathoden, ist die, dass die Schwingungen, welche sie verursachen bei grosser Nähe oder gar Berührung der Kathoden nicht auftreten können. Es sind diese Potentialschwingungen der Kathoden also jedenfalls nicht gleichgerichtete Potentialschwingungen.

Nun sind sämmtliche verwendete Oscillatoren symmetrisch, wenn die dunkle *J*-Fläche in der Mitte zwischen

[1] und bei Herabsetzung des Druckes, siehe S. 960.

den Kathoden steht. Wegen dieser Symmetrie können die Schwingungen der Kathoden nicht anders als gleichgerichtet oder entgegengesetzt gerichtet sein (vergl. z. B. §. 9). Da nachgewiesen wurde, dass die Schwingungen der Kathoden, welche die dunkle Interferenzfläche verursachen, nicht gleichgerichtet sind, so sind sie also genau entgegengesetzt gerichtet, wenn die dunkle J-Fläche in der Mitte des Feldes steht.

Ein zweiter schwerwiegender Beweis hiefür liegt darin, dass die dunkle Interferenzfläche allein auftritt bei Anwendung des Lecher'schen und des Blondlot'schen Oscillators, welche Oscillatoren nur entgegengesetzte Schwingungen der Kathoden verursachen können, da die Anregung gleichgerichteter Schwingungen bei ihnen ganz undenkbar ist. Hingegen tritt bei Anwendung des einfach verzweigten Oscillators, welcher nach §. 9 ff. ebensowohl gleichgerichtete, als entgegengesetzte Schwingungen der Kathoden bewirken kann, und bei welchem nach §. 38 auch beide Schwingungsarten angeregt werden können, je nach den Constanten des Oscillators und der Anregung bloss die dunkle Interferenzfläche (siehe §. 34) oder bloss die helle Interferenzfläche oder beide J-Flächen gleichzeitig auf.

§. 38. Anregung der entgegengesetzten Schwingungen [Schwingung II), §. 9] bei dem einfach verzweigten Oscillator. Dass der einfach verzweigte Oscillator der entgegengesetzten Schwingungen [Schwingung II), §. 9] fähig ist, geht aus der Rechnung Capitel I klar hervor. Aufzuklären bleibt jedoch, wieso die directe oder Solenoidanregung (Fig. 6 oder 7) in dem Zweige 3 im Stande ist, eine Schwingung in den Zweigen 1 und 2 anzuregen, an welcher der Zweig 3 nicht oder nur in sehr geringem Masse theilnimmt. Spricht nicht die Symmetrie dieses Oscillators gegen die Möglichkeit der Anregung entgegengesetzter Schwingungen der Kathoden vom Zweige 3 aus?

Hiezu ist zu bemerken, dass die Configuration des Oscillators allerdings stets soweit symmetrisch ist, um andere als gleich- oder entgegengesetzte Schwingungen nach §. 9 auszuschliessen, dass aber doch gewöhnlich diese Symmetrie dann, wenn die dunkle J-Fläche in der Mitte des Feldes steht,

keine vollkommene, sondern ein Gleichgewichtsfall der Constanten des Oscillators nach 9II (§. 13) ist. Selten steht der Schleifcontact *s* (Fig. 6) wirklich in der Mitte der Schlinge, wenn die dunkle *J*-Fläche in der Mitte des Feldes steht, sondern der Schleifcontact steht dann um einige Centimeter ausserhalb der Mitte (nach der Seite jener Kathode hin, welche zufälligerweise eine etwas grössere Capacität hat). Ferner ist die Phase der verwendeten Oscillatoren äusserst empfindlich für Verschiebungen des Schleifcontactes (siehe §. 50), so dass schon bei ganz geringen Verschiebungen des Schleifcontactes (um 30 *cm*, §. 50) die Schwingung I) sowohl, als die Schwingung II) den Kathoden Schwingungen von $^1/_4$, beziehungsweise $^3/_4$ Schwingungsdauer Phasenunterschied ertheilt, so dass bei Verschiebungen über 30 *cm* die Schwingung I) schwerer anregbar wird als die Schwingung II). Endlich können die Oscillatoren nur in Bezug auf ihre Configuration annähernd symmetrisch gemacht werden, nicht in Bezug auf die vor Eintritt des excitirenden Funkens in dem Recipienten auftretenden Entladungserscheinungen. Das oft sichtbare Entladungsband sitzt stets ganz einseitig auf einer der Kathoden, die Ladung der Glaswand ist zufolge dessen nicht ganz symmetrisch, ebenso also auch die Strahlung zu Beginn der Hertz'schen Schwingungen nach Eintritt des excitirenden Funkens *f* (was aber durch die ladende Wirkung der Strahlung bald ausgeglichen wird [vergl. §. 59]).

Ferner wird nicht behauptet, dass die Schwingung II) kräftig erzeugt wird, sondern nur sehr schwach. Die ganze Lichtentwicklung um die dunkle *J*-Fläche ist (trotz der besseren Luminescenz der Luft bei etwas höherem Druck) kleiner als die gesammte Lichtentwicklung der hellen *J*-Fläche.

Der beste Beweis dafür, dass es wirklich kleine Unsymmetrien des Oscillators sind, welche die Anregung der Schwingung II) ermöglichen, ist es, dass das blassblaue Licht, in welchem die *J*-Fläche erscheint, bei möglichst symmetrischer Anordnung des Oscillators in auffallendster Weise zum Auslöschen neigt. Es ist dann schwer, dasselbe elektrostatisch anzuzünden (§. 21) und es erlischt schon

nach einigen Funken wieder von selbst. Man braucht jedoch nur den Schleifcontact um 10 *cm* zu verschieben, um dieses Leuchten viel heller, leicht elektrostatisch anzündbar und stabil zu erhalten. Es ist deshalb (wie §. 22 bemerkt wurde) zu empfehlen, das Anzünden überhaupt nur bei etwas unsymmetrischer Stellung des Schleifcontactes vorzunehmen. Die helle Interferenzfläche zeigt keine Neigung, bei symmetrischer Stellung des Schleifcontactes auszulöschen. Würde man nicht zugeben, dass die Schwingung II) bei dem einfach verzweigten, nahezu symmetrischen Oscillator, wenn auch nur mit geringer Amplitude, angeregt wird, so müsste man annehmen, dass nur die Schwingung I) auftritt, denn einer weiteren Schwingung ist der Oscillator nicht fähig, und es wäre dann durchaus nicht einzusehen, warum das Leuchten bei symmetrischem Oscillator weniger stabil sein sollte als bei unsymmetrischem.

Ferner kann man das Vorhandensein der Schwingung II) objectiv nachweisen. Die Kathoden wurden mit den Platten eines Bjerknes'schen Elektrometers kurz verbunden. Man erhält, wenn man den Oscillator auch möglichst symmetrisch macht, stets einen, wenn auch kleinen und etwas zuckenden Ausschlag des Elektrometers, dessen mittlerer Betrag einer statischen Ladung der Platten auf 12 Volt entspricht. Die Verschiebung des Schleifcontactes macht diesen Ausschlag nicht um Bedeutendes grösser, aber etwas ruhiger. Eine statische Potentialdifferenz können die Platten des Elektrometers nicht haben, da sie metallisch durch die Schleife $k_1 s k_2$ des Oscillators verbunden sind. Die Kathoden haben also eine oscillatorische Potentialdifferenz, welche ich unter Berücksichtigung der Funkenzahl und wahrscheinlichen Dämpfung der Schwingung auf 500 Volt in der Amplitude schätze. Es ist ausgeschlossen, dass die Kathoden des möglichst symmetrischen Oscillators zufolge der Schwingung I) diese oscillatorische Potentialdifferenz haben, daher ist dieselbe der Beweis für das Vorhandensein der Schwingung II).

Der anschaulichste Beweis für das Vorhandensein der Schwingung II) ist das Auftreten des rothen Ballens (§. 29) bei jedem nur einigermassen unsymmetrischen, einfach

verzweigten Oscillator mit elektrischer Anregung (vergl. §. 29, S. 953, Anmerkung [2]). Man kann das plötzliche Auftreten von Fünkchen, des blauen Querstriches, beziehungsweise des rothen Ballens bei kleinen Verschiebungen des Schleifcontactes s aus der Mitte der Schlinge $k_1 s k_2$ (Fig. 6) in zweifacher Weise erklären: *a)* durch die hiebei auftretende Amplitudenverschiedenheit der Schwingung I), §. 9 oder *b)* durch die hiebei günstiger werdende Anregung der Schwingung II), §. 9.

Der rothe Ballen ist nun für entgegengesetzte Schwingungen der Kathoden nach §. 29 charakteristisch, nicht bloss für eine oscillatorische Potentialdifferenz der Kathoden. Der Typus der Leuchterscheinungen hängt nämlich von dem Typus der Kraftvertheilung im Felde ab, also von den oscillatorischen Potentialdifferenzen der Kathoden gegen die Erde, nicht bloss von ihrer gegenseitigen Potentialdifferenz. Der rothe Ballen tritt nach §. 29 nur auf, wenn die Kraftlinien in der Nähe der Verbindungslinie der Kathoden zwischen denselben direct übergehen und in der Mitte des Feldes ein Kraftmaximum ist, nicht aber, wenn die Kraftlinien von beiden Kathoden gegen die Mitte des Feldes laufen und dort ein Kraftminimum ist, d. h. er tritt nicht auf zufolge Schwingung I), wenn auch eine kräftige Schwingung I) nach *a)* dieselbe kleine oscillatorische Potentialdifferenz der Kathoden bewirken kann, als eine schwache Schwingung II) nach *b)*.

Das Auftreten des rothen Ballens schon bei kleinen Verschiebungen des Schleifcontactes aus der Mitte der Schlinge $k_1 s k_2$ (Fig. 6) zeigt also anschaulich, dass die Schwingung II) ziemlich kräftig entwickelt ist. Solange der Schleifcontact in der Mitte der Schlinge steht, tritt wohl die dunkle J-Fläche, der rothe Ballen aber nicht auf, weil dann die Anregung der Schwingung II nur eine sehr schwache ist.

V. Capitel.

Verschiebung der Interferenzflächen bei continuirlicher Änderung der Constanten des Oscillators.

§. 39. Vorbemerkungen. Die folgenden Experimente sind insofern leicht zu wiederholen, als das Arbeiten mit

elektrischen Wellen überhaupt ein leichtes ist. Sie sind insofern leichter als optische Interferenzexperimente, als alle Einstellungen verhältnissmässig grob sind. Sie haben aber die Schwierigkeit, dass man nicht ohneweiters die gewünschten Schwingungen rein und von der gewünschten Stärke erhält. Je länger man mit demselben Oscillator und Recipienten arbeitet, desto mehr lernt man die kleinen Hilfen (Wahl der Constanten des Oscillators, der Anregung, des Druckes, der elektrostatischen Hilfen) kennen, welche der Reinheit der Erscheinung dienen. Wenn man dann zu einer neuen Aufstellung übergeht, hat man immer wieder diese Schwierigkeit zu überwinden und muss eine Zeit lang nach den günstigsten Bedingungen suchen. Doch ist es mir niemals misslungen, die J-Flächen schliesslich rein zu erhalten und wenn man einmal die Eigenheiten einer Aufstellung kennt, so kann man zu jeder Zeit mit einer neuen, nur einigermassen ähnlichen Aufstellung sofort richtig umgehen.

§. 40. Verschiebung der Interferenzflächen. Wenn man von dem symmetrischen Fall ausgehend eine der Constanten des Oscillators (z. B. die Selbstinduction eines Drahtes oder eine Capacität) continuirlich ändert, so verschiebt sich jede Interferenzfläche aus der Mitte des Feldes sehr bald bis an eine Kathode, wo sie verschwindet. Sie nimmt hiebei nach und nach die Form eines Astes aller hyperbolischen Cylinder an, deren Brennlinien die Axen der Kathoden sind.

Die Mitte der Interferenzflächen verschiebt sich dabei sehr langsam und deutlich proportional der Verschiebung des Schleifcontactes s (Fig. 6). Die äusseren Zweige der J-Flächen bewegen sich dementsprechend ungleichförmig, und zwar so lange noch die Zuleitungen zu beiden Kathoden nahezu symmetrisch sind, ebenso langsam wie die Mitte der J-Flächen, bei weiterer Verschiebung des Schleifcontactes aber immer rascher, bis sie endlich rasch über einer Kathode zusammenschlagen.

Man ersieht hieraus mit hinreichender Genauigkeit, dass die Differenz der Wege von den Axen der Kathoden (oder auch von ihren Oberflächen aus im Radius) gemessen für die ganze Erstreckung der Interferenzflächen

ungefähr constant und der Verschiebung des Schleifcontactes ungefähr proportional ist.[1]

Bei unrichtiger Aufstellung wird diese Verschiebung der *J*-Flächen vertreten durch eine Verbreiterung oder sonstige verschwommene Erscheinungen oder durch ein unregelmässiges Springen der *J*-Flächen. Dann hat man zunächst die Länge, dann die Stärke des excitirenden Funkens zu variiren, dann die elektrostatischen Verhältnisse im Recipienten zu corrigiren, die Ableitung der Anode anzubringen oder aufzuheben, eventuell eine Stelle der Glaswand abzuleiten, wenn das elektrostatische Anzünden zu schwierig ist. Dabei kann man auch versuchen, welcher Anregungsmodus (§. 18, 19 oder 20) der beste ist. Der günstigste Druck für die dunkle Fläche ist 1·2 *mm*, für die helle Fläche 0·5 *mm* Hg. Endlich ändere man die Constanten des Oscillators ab, mit dem Ziele $\frac{P}{p} = \frac{G}{g}$ zu machen [siehe §. 15, 8)].

Der blaue Querstrich §. 30 ist bei unsymmetrischer Zuleitung zu den Kathoden schwer zu vermeiden. Bei symmetrischer Zuleitung darf er jedoch nicht auftreten. Sein Auftreten ist dann ein Zeichen eines Contactfehlers in den Zuleitungen oder eines sonstigen verborgenen Symmetriefehlers.

§. 41. Allgemeines über Richtung und Grösse der Verschiebung der *J*-Flächen. Je nach den Constanten des Oscillators ist die Richtung und Grösse der einer bestimmten Symmetrieänderung entsprechenden Verschiebung der Interferenzflächen verschieden.

Für einen gegebenen einfach verzweigten Oscillator (Fig. 6) mit Solenoidanregung (Fig. 7) ist die Richtung der Verschiebung der dunklen Interferenzfläche jener der

---

[1] Um diese Formen rein zu erhalten, sind die cylindrischen Recipienten §. 16 unerlässlich, auch müssen die Kathoden knapp an die Glasplatten heranragen. Bei kleinen Kathoden in einem grossen Recipienten stülpen sich die *J*-Flächen nicht nur oben und unten, sondern auch vor und hinter der Kathode zurück. Man kann dann nicht durch die *J*-Flächen hindurchvisiren, weil sie nicht cylindrisch sind, und bemerkt fast nur ihren Schnitt mit der Glaswand als hellen oder dunklen Strich, welcher sich bei starken Verschiebungen der *J*-Fläche auf die eine Kathode oder selbst hinter dieselbe projicirt.

hellen Interferenzfläche fast immer gleichgerichtet und von gleicher Grössenordnung.

Der Luftdruck hat in ziemlich weiten Grenzen auf die Verschiebbarkeit der Interferenzflächen keinen Einfluss. Ebenso auch die Anregung, ausgenommen bei directer Anregung (Fig. 6) des mehrfach verzweigten Oscillators, wo die Länge des Funkens f zu den Constanten des Oscillators zu zählen ist und den grössten Einfluss auf Richtung und Grösse der Verschiebung der J-Flächen hat.

§. 42. Verschiebung der J-Flächen bei Änderung der Selbstinduction der Zuleitungen. Wenn man, ohne die Länge der Zuleitungen zu den Kathoden zu ändern, eine derselben zu einem Solenoid aufrollt, so verschieben sich die Interferenzflächen, und zwar sowohl die helle, als die dunkle J-Fläche stets in jenem Sinne, in welchem sie sich bei dem betreffenden Oscillator verschieben, wenn man, statt diese Zuleitung einzurollen, dieselbe verlängert.

Man merkt schon, wenn man in die Zuleitung 2 bis 3 Windungen von 4 *cm* Durchmesser und 1 *cm* Ganghöhe rollt, die Verschiebung der J-Flächen, bei 10 Windungen sind dieselben schon aus dem Felde gewandert.

Längenänderungen der Zuleitungen kann man vornehmen durch Einsetzen eines neuen Drahtes, besser aber durch Verschiebung des Schleifcontactes s (Fig. 6) oder der Stege s_1 und s_2 (Fig. 8 und 9). Bei guten Aufstellungen muss ein Längenunterschied von 1 *cm* der beiden Zuleitungen schon eine eben sichtbare Verschiebung der Interferenzflächen bewirken. Bei 30 bis 100 *cm* Längenunterschied (je nach den Constanten des Oscillators und der Dicke der Drähte) sind die J-Flächen schon durch das ganze Feld gewandert.

Was die Richtung dieser Verschiebung der J-Flächen betrifft, so soll dieselbe im Folgenden rechtläufig genannt werden, wenn die J-Fläche sich von der Kathode, deren Zuleitung kleinere Selbstinduction erhält, entfernt, hingegen rückläufig, wenn die J-Fläche sich zu der Kathode mit kürzerer Zuleitung bewegt.

Aufstellungen, bei welchen die J-Flächen rechtläufig sind, sind leicht zu finden. Beispiele hiefür sind:

Einfach verzweigter Oscillator (helle oder dunkle J-Fläche):

a) Directe Anregung (Fig. 6), Drähte 1 und 2 lang und dick, Draht 3 lang und dünn, Funke f möglichst klein.

b) Solenoidanregung (Fig. 5), Aufstellung Fig. 8, Paralleldrähte von Kupfer 1 *mm* stark, Solenoid kurz an s angeschlossen.

Zweifach verzweigter Oscillator (bloss dunkle J-Fläche):

c) Aufstellung Fig. 9. Paralleldrähte von Kupfer 1 *mm* stark.

Seltener erhält man die rückläufige Verschiebbarkeit der J-Flächen. Beispiele hiefür sind:

Einfach verzweigter Oscillator (helle oder dunkle J-Fläche):

d) Directe Anregung (Fig. 6), Aufstellung wie unter *a)*, jedoch Funke f etwas länger.

e) Solenoidanregung (Fig. 5), Drähte 1 und 2 von Messing, 0·4 *mm* stark, 200 *cm* lang; Draht 3 ebenso oder stärker, 300 *cm* lang; bei C_3 keine Capacität angehängt, neben k_1 und k_2, wenn nöthig, zwei kleine Stanniolblätter symmetrisch angehängt. Kleiner Recipient.

Zweifach verzweigter Oscillator (nur dunkle J-Fläche).

f) Aufstellung wie unter *c)*, Steg s_1 oder s_2 weit entfernt. Zweiter Durchgang der dunklen J-Fläche rückläufig und sehr langsam (siehe §. 52).

§. 43. Beweis, dass die Hertz'schen Grundschwingungen die J-Flächen hervorrufen. *a)* Messung kleiner Selbstinductionen mit Hilfe der J-Flächen. Die Empfindlichkeit der J-Flächen für unsymmetrische Selbstinductionen der Zuleitungen kann so gross gemacht werden, dass man dieselbe zur Messung kleiner Selbstinductionen verwenden kann

Man schaltet die zu messende Selbstinduction in den Zweig 1 (Fig. 6, Solenoidanregung Fig. 7) ein und verschiebt dann den Schleifcontact s nach der Kathode 1 hin, bis die J-Fläche wieder in der Mitte steht. Die Selbstinduction des vom Schleifcontact durchlaufenen Drahtstückes ist dann gleich per Hälfte der zu messenden Selbstinduction. Es hat keine

Schwierigkeit, auf diese Weise die Selbstinduction von Drähten von verschiedenem Material (Eisen, Kupfer etc.) oder verschiedener Stärke und von 20—100 *cm* Länge zu vergleichen. Man kann auch grössere Selbstinductionen (Solenoide u. dgl.) auf beiden Seiten einschalten, ohne dass die J-Flächen undeutlich werden und kann also mit Hilfe des Schleifcontactes s die (kleine) Differenz der Selbstinductionen dieser zwei Solenoide bestimmen. Man bedient sich bei diesen Messungen mit einigem Vortheil der dunklen statt der hellen J-Fläche.

Der verschiedene Widerstand, welchen die beiden Zweige 1 und 2 hiebei erhalten können, stört die Messung nicht, da es überhaupt nicht möglich zu sein scheint, eine Aufstellung zu erhalten, welche für Selbstinductionsänderungen empfindlich ist und auch Widerstandsänderungen empfindlich anzeigt.

Jedoch setzt die Empfindlichkeit der Aufstellung für Capacitätsverschiedenheiten der Genauigkeit dieser Messungen sehr bald eine Grenze. Man kann mit voller Genauigkeit nur die Selbstinduction von Drähten oder Solenoiden von gleicher oder abgeglichener Capacität vergleichen. Die Capacität der Drähte setzt der Messung auch insofern eine Grenze, als sie die Wellenlänge der Schwingung in dem Draht verkleinert. Man kann selbstverständlich nach dieser Methode nur Differenzen der Selbstinduction der Drähte 1 und 2 messen, welche, in Drahtlängen ausgedrückt, gegen die Wellenlänge klein sind.

Wie weit man hiebei gehen kann, ersieht man aus den folgenden Messungen: Es wurden in einem der Zweige 1 und 2 zwei Selbstinductionen nebeneinander geschaltet. Die reciproke Selbstinduction beider zusammen ist gleich der Summe der reciproken Selbstinductionen derselben, vorausgesetzt, dass es sich um stehende Schwingungen handelt und die Wellenlänge derselben sehr gross ist.

Es wurde hiebei Gebrauch gemacht von den vier Paralleldrähten (Fig. 8) (von Kupfer, 1 *mm* stark, 10 *m* lang, 10 *cm* Distanz). Die zu messende Selbstinduction Σ wurde zwischen die Punkte σ_3 und σ_4 (Fig. 22) geschaltet. Neben diese Selbstinduction Σ ist also die Drahtschleife $\sigma_3 s_2 \sigma_4$ geschaltet, deren Länge gleich $2a_2+s$ ist, wenn s die Länge des Steges s_2 (oder s_1) ist ($s = 10\,cm$). Wenn in der Fig. 22

gezeichneten Stellung der Stege die (dunkle) J-Fläche in der Mitte des Feldes ist, so ist die reciproke Selbstinduction der Schleife $\sigma_1 s_1 \sigma_2$ gleich der Summe der reciproken Selbstinductionen von Σ und der Schleife $\sigma_3 s_2 \sigma_4$.

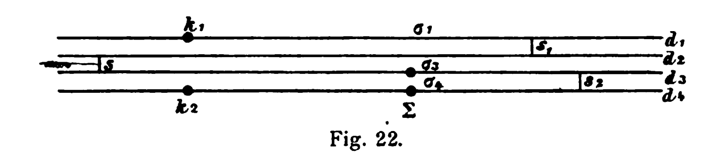


Fig. 22.

Es gilt also, wenn a_2 die Länge von $\overline{\sigma_4 s_2}$ und a_1 die Länge von $\overline{\sigma_1 s_1}$ bedeutet,

$$\frac{1}{\Sigma} = \frac{1}{2a_1+s} - \frac{1}{2a_2+s}, \qquad 13)$$

vorausgesetzt, dass die Schwingung, welche die J-Fläche erzeugt, eine stehende und ihre Wellenlänge sehr gross ist.

Σ ergibt sich aus Gleichung 13) in einer Einheit gemessen, welche gleich ist der Selbstinduction eines Stückes von $^1/_2$ *cm* Länge zweier paralleler Drähte von 1 *mm* Stärke und 10 *cm* Distanz.

Ganz genau ist die Gleichung 13) nicht. Man sollte in derselben für s nicht die wirkliche Länge (10 *cm*) der Stege einsetzen, sondern eine auf obige Einheit reducirte Zahl. Dies fällt jedoch wenig ins Gewicht. Ferner wäre die gegenseitige Induction der Schleifen $\sigma_1 s_1 \sigma_2$ und $\sigma_3 s_2 \sigma_4$ zu berücksichtigen. Dieselbe könnte auch durch Verwendung zweier verschiedener Schaltungen experimentell eliminirt werden. Hiezu habe ich keine Zeit gefunden. Nicht zu vergessen ist auch, dass die Capacität von Σ und der freien Enden der Paralleldrähte stören muss.

Trotz alledem ist die Übereinstimmung, wie man aus den folgenden Tabellen und aus Fig. 23 ersieht, eine so weitgehende, dass man vorläufig sehr zufrieden sein muss.

a) Σ ist ein Kupferdraht, 1 *mm* stark, 80 *cm* lang, und zwar ein Doppeldraht von 35 *cm* Länge, 10 *cm* Distanz, senkrecht von den Punkten $\sigma_3 \sigma_4$ herabhängend (die Zeichnungs-

ebene in Fig. 22 ist horizontal zu denken) und dieselben verbindend.

Beobachtet			Berechnet	
a_2	a_1	Σ aus Gl. 13)	a_1 für Σ = 80 *cm*	Diff. Beob.—Rechn.
0 *cm*	— 1 *cm*	— *cm*	— 0·5 *cm*	—0·5 *cm*
12	6	62	7·3	—1·3
24	11	72	12 2	—1·2
51	17	73	17·7	—0·7
94	24	82	23·8	+0·2
110	26	88	2·50	+1·0
200	28	78	29·0	—1·0
390	33	84	31·9	+1·1
∞[1]	36	82	35·0	+1·0
	Mittel...	78 *cm*		

In Fig. 23 ist die beobachtete und die aus Gleichung 13) berechnete Curve dargestellt. Die Differenzen Beobachtung—Rechnung entsprechen völlig der Sicherheit, mit welcher man die *J*-Fläche in die Mitte des Feldes stellen kann.

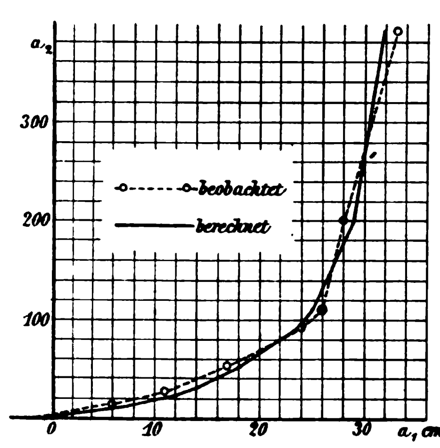


Fig. 23.

Es ist hiemit der Beweis geführt, dass es stehende Schwingungen sind, welche die *J*-Fläche erzeugen und dass ihre Wellenlänge gegen 100 *cm* gross ist, denn nur unter diesen Bedingungen gilt Gleichung 13). Es sind

[1] $a_2 = \infty$ bedeutet, dass der Steg s_2 ganz abgehoben wurde.

also die stehenden Grundschwingungen des Oscillators, welche die *J*-Flächen erzeugen (siehe hier auch §. 35).

b) Σ ist ein 300 *cm* langer, 1 *mm* starker Kupferdraht und zwar ein Doppeldraht von 145 *cm* Länge und 10 *cm* Distanz. Die Schleife Σ ist senkrecht zu den Paralleldrähten und reicht weit zum Fussboden herab.

Beobachtet			Berechnet	
a_2	a_1	Σ aus Gl. 13)	a_1 für Σ = 300 *cm*	Diff. Beob.—Rechn.
0 *cm*	0 *cm*	— *cm*	— 0·2 *cm*	+ 0·2 *cm*
40	30	315	30	0
124	65	325	64	+ 1·0
189	80	300	80	0
289	97	320	93	+ 4
389	109	327	104	+ 5
489	122	342	110	+12
576	133[1]	362[1]	114	+19[1]
	Mittel...	322 *cm*		

Die Übereinstimmung ist selbst hier, wo schon die Schleifen sehr lang sind, noch eine befriedigende, wenngleich man ein Anwachsen des beobachteten Werthes Σ bei grossen Werthen von a_2 bemerkt.

c) Σ ist derselbe 80 *cm* lange Kupferdraht, welcher unter *a)* verwendet wurde zu einem Solenoid von 11 Windungen vom Radius 1·2 *cm* und nahezu 1 *cm* Ganghöhe gerollt und zwischen σ_3 und σ_4, Fig. 22, gespannt.

	a_2	a_1	Σ aus Gl. 13)	
$\overline{k_2\sigma_4} = 140$ *cm*	50	20[1]	182[1]	Mittel = 272 *cm*
	250	46	256	
	450	53	266	
$\overline{k_2\sigma_4} = 10$ *cm*	80	33	271	
	280	47	256	
	480	62	308	
	680	86[1]	370[1]	

[1] *J*-Fläche undeutlich, bei der Mittelbildung fortgelassen.

Man erkennt die bedeutende Vergrösserung der Selbstinduction (im Verhältniss 272 *cm* : 78 *cm* = 3·5), welche der Draht zufolge des Aufrollens in ein Solenoid erfahren hat. Obgleich aber die Selbstinduction desselben auch nach dem Aufrollen nicht einmal so gross ist wie die unter *b)* gemessene, sind hier die Messungen viel weniger übereinstimmend. Die Ursache dürfte in der völlig geänderten Capacität von Σ nach dem Aufrollen liegen.

d) Σ ist der unter *b)* verwendete Kupferdraht von 300 *cm* Länge, jedoch zu einem Solenoid von 40 Windungen von 1·2 *cm* Radius, nahezu 1 *cm* Ganghöhe und gekrümmter Axe aufgerollt, welches zwischen die Punkte σ_3 und σ_4, Fig. 22. gespannt wurde.

	a_2	a_1	Σ nach Gl. 13)
$k_2\bar{\sigma}_4 = 140$ *cm*	0·5 *cm*	1·5 *cm*	— *cm*
	40	32	852
	100	68	956
	200	95	776
	300	134	1032
	400	152	1024
	500	172	1086
	570	194	1220
		Mittel...	992 *cm*

Die Übereinstimmung ist nur mehr der Grössenordnung nach vorhanden. Die Gleichung 13) ist also nicht mehr gut anwendbar. Die Wellenlänge der Schwingung darf gegen 1000 *cm* nicht mehr als gross angenommen werden. Durch das Aufrollen hat sich die Selbstinduction des Drahtes im Verhältniss (992 *cm* : 322 *cm* = 3·1) vergrössert.

§. 44. Verschiebung der *J*-Flächen bei Änderung der Capacität der Kathoden. Das einseitige Anlegen einer Capacität auf Seite einer der Kathoden bewirkt eine Verschiebung der *J*-Flächen, deren Grösse und Richtung von den

Constanten des Oscillators abhängt und welche der Grösse der angelegten Capacität ungefähr proportional ist.

Man kann diese Verschiebung durch Anlegen einer gleichgrossen Capacität an die zweite Kathode genau compensiren.

Die Richtung der Verschiebung ist bei den meisten Oscillatoren dieselbe, als hätte man, statt eine Capacität an die eine Kathode anzulegen, die Selbstinduction der Zuleitung zu dieser Kathode vergrössert. Deshalb lässt sich die verschiebende Wirkung der angelegten Capacität auf die J-Fläche compensiren durch Verkürzung der Zuleitung zu dieser Kathode. Die J-Flächen kommen hiedurch zwar wieder in die Mitte des Feldes, sind dann aber nicht mehr so schön entwickelt.

Die Grössenordnung der Verschiebung bei für Capacitätsänderungen gut empfindlichen Oscillatoren ist ungefähr 1 *cm* für je 50 *cm* (elektrostatisches Mass) angelegter Capacität. Merkbar ist bereits die Wirkung einer angelegten Capacität von 5—10 *cm* (elektrostatisches Mass). Ein einseitig angehängtes Stanniolblatt von $(40\,cm)^2$ Fläche drängt die J-Fläche ganz aus dem Felde.

Verbindet man jede der Kathoden mit einer Metallplatte von 10—30 *cm* Durchmesser und stellt diesen in $^1/_2$ bis 10 *cm* Distanz Platten gegenüber, welche möglichst kurz zur Wasserleitung abgeleitet sind, so kann man bei continuirlicher Veränderung der Distanz der Platten eines dieser Condensatoren die J-Flächen continuirlich durch das Feld verschieben, doch ist diese Verschiebung der J-Flächen nicht der Distanz der Platten verkehrt proportional. Es begreift sich dies leicht, da die eine Platte trotz ihrer möglichst kurzen Erdleitung während der Schwingung keineswegs das Potential Null behält, sondern die Schwingung zum guten Theile mitmacht.

Ähnliche Wirkung wie die Veränderung der Capacität der Kathoden gegen die Erde hat die Veränderung der Capacität der Kathoden gegen C_3 (Fig. 6), also die Änderung von k_{13}, beziehungsweise k_{23} (§. 7). Vergl. hiezu §. 18.

Die helle J-Fläche und die dunkle J-Fläche verschieben sich (Oscillatoren mit directer Anregung §. 18

manchmal ausgenommen) im selben Sinne für einen gegebenen Oscillator und eine gegebene Änderung der Capacität einer der Kathoden.

Beispiele für die rechtläufige Verschiebung der *J*-Flächen. d. h. für ihre Verschiebung von der Kathode mit kleinerer Capacität sind leicht zu finden.

a) Einfach verzweigter Oscillator (helle und dunkle *J*-Fläche). Aufstellung Fig. 8. Kupferdrähte 1 *mm* stark. Solenoidanregung Fig. 7.

Anhängen eines Condensators von 30 *cm* Durchmesser, 10 *cm* Distanz der Platten verschiebt die helle *J*-Fläche (Druck 0·5 *mm* Hg) sowohl, als die dunkle *J*-Fläche (Druck 1·2 *mm* Hg) auf die Seite derjenigen Kathode, an welche der Condensator angehängt wurde. Diese Verschiebung kann compensirt werden durch Näherung des Steges s_1 oder Entfernung des Steges s_2 um 32 *cm*, wenn der Condensator an die Kathode 1 gehängt wurde.

Beispiele für die rückläufige Verschiebung der *J*-Flächen sind folgende:

b) Einfach verzweigter Oscillator (helle *J*-Fläche, Druck 0·5 *mm*). Directe Anregung (Fig. 6), Funke *f* 4·5 *mm* lang. Die Schleife $k_1 s k_2$ ist ein 2×285 *cm* langer, 1·5 *mm* starker Kupferdraht. Auf Seite beider Kathoden sind Stanniolblätter von (15 *cm*)^2 Fläche angehängt.

Je weiter man das Stanniolblatt auf dem Zweige 2 gegen den Schleifcontact *s* hin verschiebt, desto mehr verschiebt sich die helle *J*-Fläche gegen die Kathode 2. (Gleiche Wirkung wie diese Verschiebung hat die Verkleinerung des Stanniolblattes.) Steht das Stanniolblatt um 200 *cm* von *s* (also um 80 *cm* von k_2) entfernt, so kann man die Verschiebung der *J*-Fläche rückgängig machen durch Verschiebung des Schleifcontactes um 45 *cm* gegen k_1. Hebt man das Stanniolblatt ganz vom Zweige 2 ab, so kann man die starke Verschiebung der *J*-Fläche gegen k_2 compensiren durch eine Verschiebung des Schleifcontactes *s* um 105 *cm* gegen k_1.

c) Einfach verzweigter Oscillator mit Solenoidanregung (Fig. 6 und 7). Dunkle *J*-Fläche (Druck 1·3 *mm* Hg). Die Schleife $k_1 s k_2$ ist ein Messingdraht von 2×190 *cm*

Länge und 0·4 *mm* Stärke. Der Zweig 3 besteht aus gleichem Draht von 300 *cm* Länge.

Das Anhängen eines Stanniolblattes von (10 *cm*)^2 Fläche unmittelbar neben Kathode 1 drängt die dunkle *J*-Fläche zur Kathode 2. Diese Verschiebung kann compensirt werden durch Verschiebung des Schleifcontactes *s* um 25 *cm* gegen die Kathode 1 hin.

§. 45. Verschiebung der *J*-Flächen zufolge Änderung des Widerstandes der Zuleitungen. Mit Versuchen nach dieser Richtung habe ich mich noch sehr wenig beschäftigt, will dies aber demnächst nachholen. Ich habe noch nicht nach einem Oscillator gesucht, welcher für Widerstandsänderungen so empfindlich ist, dass z. B. die einseitige Einschaltung eines Widerstandes von 1 Ω schon eine Verschiebung der *J*-Flächen bewirken würde. Vergleiche hiezu §. 15, Schluss.

Die meisten Oscillatoren sind jedoch für die Einschaltung sehr kleiner elektrolytischer Widerstände empfindlich. Es wurden kurze Glasröhrchen von 10 *mm*^{2} Querschnitt mit Elektroden von 9 *mm*^{2} Fläche und 0·1 bis 50 *mm* Distanz, welche mit nahezu concentrirter Kupfer- oder Salmiaklösung gefüllt waren, in die Zuleitung zu einer Kathode geschaltet. Bei demselben Oscillator, welcher in §. 44, *c)* beschrieben ist, geht bei Einschaltung eines Kupfervitriolröhrchens auf Seite der Kathode 1 die dunkle *J*-Fläche desto mehr gegen die Kathode 1, je grösser die Distanz der Elektroden des Röhrchens ist. Diese Verschiebung kann durch entsprechende Verschiebung des Schleifcontactes *s* gegen die Kathode 2 compensirt werden, und zwar erfordert eine Distanz der Elektroden des Röhrchens von 0·1, 1, 3, 5 *cm* zur Compensation eine Verschiebung des Schleifcontactes um beziehungsweise 7, 11, 24, 60 *cm*. Auch für diese Compensation gilt dasselbe, was §. 44 für die Compensation einer Capacitätsänderung durch Verschiebung des Schleifcontactes gesagt wurde. Nach derselben steht die *J*-Fläche zwar wieder in der Mitte des Feldes, ist aber nicht mehr so klar entwickelt.

Die dämpfende Wirkung dieser kleinen Röhrchen ist wahrscheinlich nicht so gross, als es ihrem galvanischen Widerstand entspricht. Sie sind kleine Condensatoren, welche mit

einem Elektrolyten von sehr hoher dielektrischer Constanten gefüllt sind. Der grösste Theil des Stromes geht wahrscheinlich als dielektrischer Strom durch sie hindurch und ist deshalb ungedämpft. Würde man einen kleinen Condensator von sehr kleiner Plattendistanz, mit einem isolirenden Medium gefüllt, in die Zuleitung schalten, so würde derselbe fast keine Wirkung, jedenfalls aber keine dämpfende Wirkung haben, obwohl sein galvanischer Widerstand unendlich gross ist.

Dass jedoch die eingeschalteten elektrolytischen Zellen nicht bloss als Condensatoren wirken, erkennt man daran, dass bei obigem Experiment ihre Zuschaltung wie eine Verkleinerung der Selbstinduction des betreffenden Zweiges wirkt.

§. 46. Vollkommene Compensation einer Widerstandsänderung durch eine Capacitäts- und Inductionsänderung. Es wurde auf Seite der Kathode 1 das Kupfervitriolröhrchen von 5 *cm* Elektrodendistanz eingeschaltet. Derselbe erfordert zur Compensation eine Verschiebung des Schleifcontactes s um 60 *cm* gegen die Kathode 2, doch ist dann die J-Fläche zwar in der Mitte des Feldes, aber undeutlicher geworden. Hängt man, statt den Schleifcontact zu verschieben, ein Stanniolblatt von $(15\ cm)^2$ Fläche auf Seite 1 an und verschiebt dasselbe noch etwas gegen den Schleifcontact hin, so kann man auch damit die J-Fläche wieder in die Mitte des Feldes bringen, doch ist sie dann noch undeutlicher. Hängt man jedoch ein Stanniolblatt von $(8\ cm)^2$ Fläche auf Seite der Kathode 1 an und verschiebt den Schleifcontact um 40 *cm* gegen die Kathode 2, so erreicht man eine vollkommene Compensation. Die dunkle J-Fläche ist dann ebenso schön entwickelt wie bei dem symmetrischen Oscillator, auch sind die übrigen Lichterscheinungen an beiden Kathoden symmetrisch.

§. 47. Umkehrung der Verschiebungsrichtung der J-Flächen durch Änderung der Länge des excitirenden Funkens bei directer Anregung (Fig. 6). Im Allgemeinen hängt die Rechtläufigkeit oder Rückläufigkeit[1] der J-Flächen nur von den Constanten des Oscillators und nicht von

[1] Die Definition dieser Ausdrücke findet sich §. 42.

der Länge des excitirenden Funkens, überhaupt nicht von der Anregung oder dem Druck im Recipienten ab. Die Rechtläufigkeit, beziehungsweise Rückläufigkeit der J-Flächen ist bei gegebenem Oscillator durchaus keine unsichere Erscheinung, sondern vollkommen constant. Eine Ausnahme bildet ausschliesslich der einfach verzweigte Oscillator mit directer Anregung (Fig. 6). Hiebei ist nämlich der excitirende Funke in den Oscillator selbst geschaltet, und deshalb zählt hier die Funkenlänge zu den Constanten des Oscillators und hat den grössten Einfluss auf die Verschiebungsrichtung der J-Flächen.

a) Helle Interferenzfläche. Einfach verzweigter Oscillator mit directer Anregung (Fig. 6). Die Schleife k_1sk_2 ist ein Kupferdraht von 2 × 150 *cm* Länge und 1·6 *mm* Stärke. Der Zweig 3 ist ein 500 *cm* langer, 0·5 *mm* starker Messingdraht. Die Kathoden sind zwei Platten von 10 × 5 *cm* Seitenlänge und 2 *cm* Distanz in dem grossen Recipienten §. 16. Druck 0·5 *mm* Hg.

Bei 1 *mm* Funkenlänge ist die helle J-Fläche rechtläufig, d. h. sie verschiebt sich bei Verschiebung des Schleifcontactes von der Kathode mit kürzerer Zuleitung. Der Funke ist weiss.

Bei 3 *mm* Funkenlänge ist der Funke matt und die J-Fläche unverschiebbar.

Bei 5 *mm* Funkenlänge ist der Funke hell und die J-Fläche ist rückläufig.

Bei 8 *mm* Funkenlänge ist der Funke matt und die J-Fläche unverschiebbar.

Bei 11 *mm* Länge ist der Funke hell und die J-Fläche wieder rechtläufig.

Bei 16 *mm* Funkenlänge ist die J-Fläche unverschiebbar und bei 20 *mm* Funkenlänge ist sie wieder rückläufig.

b) Dunkle J-Fläche. Einfach verzweigter Oscillator mit directer Anregung (Fig. 6). Die Schleife k_1sk_2 ist ein Messingdraht von 2 × 190 *cm* Länge und 0·4 *mm* Stärke. Zweig 3 beliebig. Kathoden und Recipient cylindrisch, 1 *cm* Distanz. Kleiner Recipient §. 16. Druck 1·5 *mm* Hg.

Bei 0·3 *mm* und bei 5 *mm* Funkenlänge ist die dunkle J-Fläche rechtläufig, bei 1·5 *mm* Funkenlänge ist sie rück-

läufig. Dazwischen ist sie unverschiebbar, doch merkt man die Symmetriestellung des Schleifcontactes ebenso deutlich wie bei verschiebbarer J-Fläche. Der blaue Querstrich §. 30 springt nämlich bei der kleinsten Verschiebung des Schleifcontactes aus der Symmetriestellung auf.

Ungeachtet dieser leichten Umkehrbarkeit der Verschiebungsrichtung der J-Flächen bei directer Anregung ist eine Unsicherheit ihrer Verschieblichkeit bei gegebener Funkenlänge bei guten Aufstellungen nicht vorhanden, wie man am besten daraus erkennt, dass die J-Flächen für gewisse Funkenlängen unverschiebbar sind. Wäre ihre Verschieblichkeit nur unsicher bestimmt, so müssten sie für diese Funkenlängen bald rückläufig, bald rechtläufig sein, nicht aber unverschiebbar, wie es der Fall ist.

Zur Erklärung dieser Umkehrung der Verschiebungsrichtung beachten wir, dass ein Funke bekanntlich bei Änderung seiner Länge periodisch seine Natur ändert. Damit ändert sich einerseits sein Widerstand, anderseits seine anregende Wirkung. Ist der Widerstand des Funkens gross, aber seine anregende Wirkung klein, also die Strahlung in dem Recipienten und daher die Dämpfung in den Zweigen 1 und 2 klein, so ist das Verhältniss $\frac{W}{w}$ [Gleichung 12 I), beziehungsweise Gleichung 12 II), §. 14] gross; ist der Widerstand des Funkens klein, aber seine excitirende Wirkung gross, so ist das Verhältniss $\frac{W}{w}$ klein. Da die Grösse des Verhältnisses $\frac{W}{w}$ bei gegebener Grösse von $\frac{G}{g}$ den Werth $\frac{\partial\tau}{\partial P}$, also die Verschiebungsrichtung der J-Flächen bestimmt, so erklären sich hieraus obige Experimente.

§. 48. Umkehrung der Verschiebungsrichtung der J-Flächen bei anderer Wahl einer der Constanten des Oscillators. Um einen schlagenden Beweis zu gewinnen, dass die J-Flächen sich so verschieben, wie es den in Gleichung 12 I) und 12 II) berechneten Phasendifferenzen entspricht, habe ich versucht, durch eine rasch und während der Strahlung vorzunehmende Abänderung einer einzigen Constanten des

Oscillators die Rechtläufigkeit der J-Flächen in Rückläufigkeit zu verwandeln. Dies ist nicht leicht und gelang mir so lange nicht, als ich nicht sorgfältig von der Rechnung (Capitel I) aus deducirte, wie folgt:

Die directe Anregung durch einen in den Oscillator geschalteten Funken ist nach §. 47, der leichten Umkehrung der Verschiebungsrichtung der J-Flächen wegen, nicht geeignet, wenn man nach einer unzweifelhaften Übereinstimmung mit der Rechnung sucht. Für die Solenoidanregung habe ich jedoch die Rechnung noch nicht geführt. Hiebei ist das ganze System Fig. 7 an den einfach verzweigten Oscillator angekoppelt und nimmt an der Schwingung theil. Man muss also bei Deductionen aus Gleichung 12I) und 12II) für diesen Fall etwas vorsichtig sein. Deshalb beschränke man sich zunächst auf die Untersuchung der dunklen J-Fläche, denn für die Schwingung II) nimmt der Zweig 3, in welchem die störende Solenoidanregung sich befindet, fast gar nicht an der Schwingung theil.

Ferner weiss man gegenwärtig bei Solenoidanregung über das Verhältniss $\frac{P}{p}$ nichts, als dass es gewiss nicht den Werth hat, welchen es nach Gleichung 4*c)*, §. 8 für den freien, einfach verzweigten Oscillator hat.

Das Verhältniss $\frac{W}{w}$ ist auch unsicher, denn die dämpfenden Ursachen habe ich noch fast gar nicht untersucht.

Es bleibt also das Verhältniss $\frac{G}{g}$, um durch dessen Änderung die Rechtläufigkeit der dunklen J-Fläche in Rückläufigkeit zu verwandeln. Über dieses Verhältniss $\frac{G}{g}$ lässt sich glücklicherweise etwas Sicheres sagen. Es bestimmt sich aus Gleichung 4*c)*, §. 8 zu:

$$\frac{G}{g} = 1 + \frac{(k_{10}+k_{20})^2}{Mg}(4\rho^2+4\rho-1),$$

worin ist:

$$\rho = \frac{k_{12}}{k_{10}+k_{20}}. \qquad 14)$$

Man sieht, dass der Werth ρ von entscheidendem Einfluss auf den Werth $\frac{G}{g}$ ist. Je kleiner die gegenseitige Capacität k_{12} der Kathoden gegen ihre Capacität $(k_{10}+k_{20})$ gegen die Erde ist, desto kleiner ist ρ und desto kleiner ist $\frac{G}{g}$. Dies ist eine Beziehung, welche von der Solenoidanregung gewiss nicht gestört wird.

Nun bestimmt sich die Phasenverschiebung $\delta\tau$ der Kathoden bei Verschiebung des Schleifcontactes (δP) nach Gleichung 12II) zu

$$\frac{\partial\tau}{\partial P} = \frac{2wg}{pd}\left(\frac{W}{w} - \frac{G}{g}\right).$$

$\delta\tau$ ist die Zeit, um welche die Schwingung an der Kathode 2 zurückbleibt, wenn man die Selbstinduction der Zuleitung zu der Kathode 1 grösser macht, als es [den Bedingungen 9II), also im einfachsten Fall] der Symmetrie entspricht. Der Factor vor der Klammer ist stets positiv.

Wenn also $\frac{W}{w} > \frac{G}{g}$ ist, so muss die J-Fläche rückläufig sein; wenn $\frac{W}{w} < \frac{G}{g}$ ist, so muss die J-Fläche rechtläufig sein.

Man vergrössere also bei einem Oscillator, der rückläufige Interferenzflächen zeigt, die Constante k_{12}, d. h. die gegenseitige Capacität der Kathoden, was durch Nebenschaltung eines Condensators leicht zu erreichen ist. Hiedurch müssen die J-Flächen rechtläufig werden.

Es wurde ein einfach verzweigter Oscillator (Fig. 6) mit Solenoidanregung (Fig. 7) verwendet, dessen Schleife $k_1 s k_2$ aus 0·4 *mm* starkem Messingdraht besteht und 2×300 *cm* lang ist. Der Zweig 3 besteht aus Neusilberdraht von gleicher Stärke und 300 *cm* Länge. Recipient und Kathoden sind klein, Distanz derselben 2 *cm*, Druck 1·2 *mm* Hg.

Die dunkle J-Fläche ist sehr schön entwickelt und rückläufig, und zwar entspricht einer Verschiebung des Schleifcontactes von +35 *cm* eine Wegdifferenz der Kathodenstrahlen von 1 *cm*.

Schaltet man während der Strahlung einen Condensator neben die Kathoden (derselbe besteht aus zwei Platten von 10 *cm* Durchmesser und 0·5 *cm* Distanz), so wird die dunkle Fläche rechtläufig, und zwar entspricht einer Verschiebung des Schleifcontactes um —25 *cm* eine Wegdifferenz der Kathodenstrahlen von 1 *cm*.

Durch Nähern und Entfernen der Platten dieses Condensators kann man die Rückläufigkeit der J-Flächen continuirlich, also über eine Unempfindlichkeitsstelle hinweg, in die Rechtläufigkeit übergehen lassen.

Hiemit ist zur Evidenz bewiesen, dass man durch Vergrösserung von $\frac{G}{g}$ das Vorzeichen von $\frac{\partial \tau}{\partial P}$ aus dem positiven in das negative verwandeln kann, und damit ist die Anwendbarkeit der Gleichungen 12) sichergestellt.

Es ist jedoch noch der Beweis zu erbringen, dass die Verschiebung der J-Flächen durch $\delta\tau$, d. h. durch die Phasendifferenz der Schwingungen der Kathoden und nicht durch $\delta\varepsilon$, d. h. nicht durch die Amplitudenverschiedenheit dieser Schwingungen bewirkt wird, denn $\frac{\partial \varepsilon}{\partial P}$ bestimmt sich durch ähnliche Klammerausdrücke $\left(\text{in welchen } \frac{W}{w} \text{ und } \frac{G}{g} \text{ vorkommt}\right)$ wie $\frac{\partial \tau}{\partial P}$. Dieser noch fehlende Beweis wird w. u. §. 53 erbracht.

VI. Capitel.

Wiederkehr der Interferenzflächen bei starker Unsymmetrie der Zuleitungen.

§. 49. Unterscheidung zwischen periodischer und algebraischer Wiederkehr der J-Flächen. Die periodische Wiederkehr der J-Flächen bei fortgesetzter Verlängerung der Zuleitung zu einer Kathode muss ganz selbstverständlich eintreten, wenn sich Knoten der stehenden Schwingung in dem Drahtsystem bilden und hat nur Interesse zur Bestimmung der Wellenlänge dieser Schwingung in dem Drahtsystem. Diese periodische Wiederkehr der J-Flächen liefert den Beweis, dass die Leuchterscheinung im Vacuum

und die J-Fläche durch die diesen stehenden Wellen im Drahtsystem entsprechenden Schwingungen der Kathoden wesentlich verursacht werden, nicht aber einen Beweis, dass die Leuchterscheinung oder die Kathodenstrahlen selbst ein wesentlich periodischer Process sind, also keinen Beweis für die undulatorische Natur der Kathodenstrahlen und die Entstehung der J-Flächen durch Interferenz.[1]

Dass die letzte Ursache der J-Flächen stehende Hertz'sche Schwingungen sind, deren Wellenlänge die Grössenordnung 1 *m* besitzt, kann nach §. 35 und §. 43*a)*, sowie allen übrigen Experimenten Capitel V nicht in Abrede gestellt werden. Deshalb hat die periodische Wiederkehr der J-Flächen kein principielles Interesse.

Die algebraische Wiederkehr der J-Flächen ist viel wichtiger. Es soll nach §. 7 bei dem einfach verzweigten Oscillator bei fortgesetzter Verlängerung eines der Zuleitungsdrähte ohne Änderung einer anderen Constanten der Aufstellung die Phasengleichheit, beziehungsweise die genau entgegengesetzte Phase vielfach (bis 32 mal) wiederkehren, da sich der hiezu erforderliche Inductionscoëfficient des veränderten Zuleitungsdrahtes durch eine algebraische Gleichung höheren Grades bestimmt.

Damit jedoch mit der Wiederkehr der Phasengleichheit, respective der entgegengesetzten Phase auch die Wiederkehr der J-Flächen beobachtbar wird, ist nöthig, dass zufälligerweise nahezu gleichzeitig auch die Wiederkehr der Amplitudengleichheit erfolgt. Denn wenn die Amplituden der Schwingungen der Kathoden nicht nahezu numerisch

---

[1] Die Leuchterscheinung im Vacuum hat selbstverständlich die Periode der Schwingungen der Kathoden, welche sie verursachen; aber ob diese Periode zu ihrem Wesen gehört, erfährt man aus der periodischen Wiederkehr der J-Flächen nicht. Wenn man z. B. einen Lichtspalt durch eine Stimmgabel periodisch öffnet und schliesst, so ist der durchtretende Lichtstrahl selbstverständlich eine periodische Erscheinung von der Periode der Stimmgabel. Diese Periode gehört aber nicht zu seinem Wesen. Der aus einer Sirene austretende Schall ist selbstverständlich eine periodische Erscheinung von der Periode der Sirenen, diese Periode gehört, was nicht selbstverständlich ist, zu seinem Wesen.

gleich sind, können die J-Flächen nur so undeutlich entwickelt sein, dass man sie schwerlich beobachten kann. Da jedoch die Forderung der Amplitudengleichheit ebenfalls den Inductionscoëfficienten des veränderten Zuleitungsdrahtes durch eine algebraische Gleichung höheren Grades bestimmt, so ist es gar nicht unwahrscheinlich, dass zwei Wurzeln dieser zwei algebraischen Gleichungen auch bei bedeutender Unsymmetrie der Länge der Zuleitungen nahe genug zusammenfallen, dass ein wiederholter Durchgang der J-Flächen beobachtbar ist. Zwischen diesem Durchgang und dem ersten Durchgang der J-Fläche werden im Allgemeinen eine ganze Reihe unbeobachtbarer Durchgänge liegen, bei welchen zwar die Phasengleichheit, beziehungsweise entgegengesetzte Phase eintritt, aber die Amplituden der Schwingungen der Kathoden ganz verschieden sind.

Von besonderem Interesse sind deshalb die unmittelbar aufeinanderfolgenden algebraischen Durchgänge der J-Flächen, welche dann auftreten, wenn für irgend einen Werth P des Inductionscoëfficienten des veränderten Zuleitungsdrahtes die Amplitudengleichheit eintritt und gleichzeitig $\frac{\partial \varepsilon}{\partial P}$ möglichst klein ist, d. h. die Amplitudengleichheit nicht nur für den discreten Werth P, sondern für ein grösseres Längenintervall des Zuleitungsdrahtes erhalten bleibt. Die in diesem Längenintervall vorkommenden Fälle der Phasengleichheit, respective der entgegengesetzten Phasen müssen sämmtlich beobachtbar sein.

Deshalb hat auch der symmetrische Oscillator, welcher die Bedingung $\frac{\partial \varepsilon}{\partial P} = 0$ erfüllt, ein besonderes experimentelles Interesse. Welche Bedingung die Constanten des Oscillators erfüllen müssen, damit derselbe die Eigenschaft $\frac{\partial \varepsilon}{\partial P} = 0$ hat, wurde in §. 15, Punkt 8) angegeben. Der Quotient $\frac{\partial \tau}{\partial P}$ muss dabei möglichst gross sein, damit der zweite Durchgang der J-Fläche möglichst nahe liegt und also die Amplituden noch möglichst gleich sind.

§. 50. Unmittelbar aufeinanderfolgende Durchgänge der hellen Interferenzfläche. Es wurde der einfach verzweigte Oscillator Fig. 8, directe Anregung und der grosse Recipient verwendet. Die Kathoden sind klein und haben 2 *cm* Distanz. Die helle Interferenzfläche (Druck 0·5 *mm* Hg) erscheint nicht sehr lang (höchstens 5 *cm* lang). Ihre Verschiebung zwischen den Kathoden wird mit einer Loupe von 14 *cm* Brennweite beobachtet. Die helle *J*-Fläche dringt bei ihrer Verschiebung durch die blauen Hüllen §. 28 hindurch bis in den dunklen Raum an der Kathode und wird erst bei völliger Berührung mit der Kathodenfläche undeutlich.

Die Stege s_2 und s_1 müssen ungefähr 250 *cm* von den Kathoden entfernt sein, der Funke *f* muss eine bestimmte Grösse (2—3 *mm*) haben.

Die helle *J*-Fläche ist rechtläufig. Nähert man den Steg s_2 um 26 *cm*, so bewegt sich die *J*-Fläche bis an die Kathode 1 und verschwindet dort. Nähert man den Steg noch weiter um 4 *cm* (also schon bei einer Näherung von 30 *cm*), so tritt eine zweite helle *J*-Fläche ganz von demselben Aussehen wie die erste an der Kathode 2 auf und wandert bei weiterer Näherung des Steges s_2 bis auf 82 *cm* durch das ganze Feld, welches sie auf Seite der Kathode 1 verlässt. Das Minimum zwischen diesen beiden hellen Flächen ist natürlich deutlich, doch zur Entwicklung einer scharfen dunklen Fläche in ihrer Mitte kommt es nicht.

Bei Näherung des Steges s_1 statt s_2 erfolgt der doppelte Durchgang der hellen *J*-Fläche in derselben Weise rechtläufig, also im entgegengesetzten absoluten Sinne.

Bei Entfernung eines der Stege um circa 60 *cm* aus der Symmetriestellung sieht man einen dritten Durchgang der hellen *J*-Fläche, jedoch bei weitem nicht mit derselben Deutlichkeit, wie die anderen zwei Durchgänge.

Der Oscillator erfüllt also die Bedingung $\frac{\partial \varepsilon}{\partial P} = 0$ am besten, wenn einer der Stege um circa 25 *cm* genähert ist. Der erste Durchgang der *J*-Fläche liegt von diesem Werth um $+25$ *cm* ab und ist sehr deutlich, der zweite Durchgang liegt

um —31 *cm* ab und ist fast ebenso deutlich, der dritte Durchgang aber liegt bereits um +85 *cm* ab und ist darum so undeutlich, weil die Amplitudenverschiedenheit schon gross ist.

§. 51. Wiederkehr der dunklen J-Fläche. Es wurden wieder die vier Paralleldrähte Fig. 8, jedoch Solenoïdanregung Fig. 7 verwendet. Recipient und Kathoden waren wie in §. 50, der Druck war 1·1 *mm*.

a) Die eine Kathode k_1 wurde mit dem Verzweigungspunkt direct verbunden durch einen 72 *cm* langen Kupferdraht von gleicher Stärke wie die der Paralleldrähte. Diese wurden hintereinander vor die Kathode k_2 geschaltet, so dass die Zuleitung zu dieser Kathode über beide Stege s_1 und s_2 hintereinander führt und bis auf 40 *m* durch möglichste Entfernung beider Stege verlängert werden konnte. Bezeichnen wir mit b_1 und b_2 die Entfernung der Stege von den Kathoden.

Der erste Durchgang der dunklen, prachtvoll entwickelten J-Fläche erfolgt für $b_1 = 0$, $b_2 = 10$ *cm* oder $b_2 = 10$ *cm*, $b_1 = 0$.

Der zweite Durchgang der dunklen J-Fläche erfolgt für

b_1	b_2	Längendifferenz der Zuleitungen zu den Kathoden in Centimeter Doppeldraht	
5 *cm*	585 *cm*	570	Mittel = 605
358	265	613	
642	5	632	

Dass die in der letzten Colonne angeführten Differenzen, welche gleich (b_1+b_2-10) *cm* sind, nicht constanten Werth haben, erklärt sich durch die bei diesen drei Anordnungen sehr verschiedene gegenseitige Induction der Paralleldrähte und Capacität der freien Drahtenden.

Immerhin ist damit gezeigt, dass die dunkle J-Fläche bei ganz beträchtlich unsymmetrischen Zuleitungen (der Längenunterschied der beiden Zuleitungen ist circa 12 *m*) nochmals durch das Feld geht. Doch ist sie bei diesem Durchgang zwar der geometrischen Form nach ebenso wie bei dem ersten Durchgang entwickelt, aber nicht so tiefschwarz, sondern so

undeutlich, dass man die Drähte genau absuchen muss, um sie zu finden.

b) Das Experiment *a)* wurde mit besserer Aufstellung wiederholt, und zwar mit der Anordnung Fig. 22, jedoch unter Fortlassung des Steges s_2. Zwischen σ_3 und σ_4 wurde ein Solenoid Σ eingeschaltet, und zwar das in §. 43, Exp. *d)* verwendete Solenoid von 40 Windungen und circa 992 (Halbcentimeter Doppeldraht) Induction.

Wir bezeichnen mit a_1 wieder die Entfernung $\overline{s_1\sigma_1}$ des Steges s_1 von der Stellung von Σ und mit e_1, respective e_2 die Entfernungen $\overline{\sigma_1 k_1}$, respective $\overline{\sigma_2 k_2}$ des Steges s_1, respective Σ von den Kathoden.

Das Fortlassen des Steges s_2 hat die Wirkung $a_2 = \infty$, d. h. als würde man denselben sehr weit entfernen. Schätzen wir den scheinbaren Werth von Σ nach der letzten Colonne der Tabelle §. 43*d)*, welche bis $a_2 = 5 \cdot 70$, $\Sigma = 1220$ reicht, durch Extrapolation für den Fall $a_2 = \infty$, so erhalten wir $\Sigma > 1500$. Es ist also nicht zu erwarten, dass man nach Fortlassung von s_2 den ersten Durchgang der *J*-Fläche noch innerhalb des Bereiches findet, in welchem sich s_1 verschieben lässt, jedenfalls nicht näher als die $a_1 = 750$ *cm*, was nicht mehr auf den Paralleldrähten liegt.

Desto besser ist der zweite Durchgang der dunklen *J*-Fläche zu beobachten. In der folgenden Tabelle sind die zusammengehörigen Werthe von e_1 und e_2 zusammengestellt, für welche die auf ihrem zweiten Durchgange befindliche dunkle *J*-Fläche in der Mitte des Feldes steht.

Solenoid Σ von 40 Windungen, §. *d)*.

$\overline{k_2\sigma_4} = e_2$	$\overline{k_1 s_1} = e_1$	Interferenzfläche
10 *cm*	131 *cm*	minder deutlich
60	163	sehr deutlich
110	190	
160	223	
210	235	
260	233	undeutlich
310	213	sehr undeutlich
360	160	
410	128	

Fig. 24.

c) In ganz ähnlicher Weise verläuft das Experiment bei Einschaltung des Solenoides Σ mit 11 Windungen §. 43*c)* zwischen die Punkte σ_3 und σ_4 in der Entfernung e_3 von den Kathoden.

$\overline{k_2\sigma_4} = e_2$	$\overline{k_1 s_1} = e_1$	Interferenzfläche	e_1	Interferenzfläche
10 *cm*	70 *cm*	minder deutlich		
60	109			
110	155	sehr schön		
160	198			
210	231			
260	234	recht deutlich		
270	218	äusserst undeutlich	—	
280	217		—	
290	215		415 *cm*	undeutlich
310	185		370	
320	145		410	minder undeutlich
360	130		420	undeutlich

In Fig. 24 sind diese beiden Tabellen graphisch dargestellt, und zwar die für das Solenoid von 40 Windungen beobachteten Punkte durch Kreuzchen, die für das Solenoid von 11 Windungen beobachteten Punkte durch Ringel. Man sieht, dass bei continuirlicher Entfernung von Σ von den Kathoden (Vergrösserung von e_2) die Entfernung e_1 des Steges s_1 ein Maximum erreicht, welches für beide Solenoide fast gleiche Lage hat und für welches e_1 nahezu e_2 wird. Bis dahin sind die *J*-Flächen sehr deutlich und die Curven Fig. 24 glatt. Vergrössert man e_2 noch weiter, so erhält man die *J*-Fläche plötzlich nicht mehr deutlich und die Messungen werden völlig unregelmässig. Für das kürzere Solenoid wurden für grosse Werthe von e_2 je zwei Stellungen e_1 des Steges s_1 gefunden, für welche die dunkle *J*-Fläche rechtläufig, aber sehr undeutlich durch das Feld ging.

Betrachten wir nur die in beiden Tabellen als sehr deutlich bezeichneten Durchgänge der dunklen *J*-Fläche. Dieselbe

ist bei dieser Wiederkehr nicht so scharf und dunkel entwickelt wie bei dem ersten Durchgang, der blaue Querstrich zwischen den Kathoden ist breit und verschwindet nicht, wenn die J-Fläche in der Mitte des Feldes steht. Die incohärenten Lichthüllen (§. 28) um die Kathoden sind vollkommen unsymmetrisch entwickelt, derart, dass die Lichthülle um die Kathode 1, welche kürzere Zuleitung hat, mehr als doppelt so grosse Dicke hat als die Lichthülle um die Kathode 2. Obwohl also bei diesem zweiten Durchgange die Phase der Schwingungen der Kathoden gerade entgegengesetzt ist, wenn die dunkle J-Fläche in der Mitte des Feldes steht, sprechen doch alle Anzeichen dafür, dass die Amplituden derselben einigermassen verschieden sind, doch können sie nicht sehr verschieden sein, weil sonst die J-Fläche nicht beobachtbar wäre. Dass trotzdem die incohärenten Lichthüllen sehr verschieden entwickelt sind, wundert mich gar nicht, da dieselben zur Entladung gehören und diese, wenn ihr zwei symmetrische Kathoden zur Wahl stehen, sich nicht nach dem Verhältniss der Amplituden der Schwingungen auf dieselben vertheilt, sondern sich gänzlich auf die stärker schwingende wirft. Vergl. hiezu das Verzweigungsexperiment. Wied. Ann., Bd. 62, S. 397.

Dass man es bei obigen Experimenten wirklich nicht mit dem ersten Durchgang der J-Fläche, sondern mit einer Wiederkehr derselben zu thun hat, kann man evident machen bei folgender Anordnung:

d) Man setzt ausser dem Solenoid Σ beide Stege s_1 und s_2 auf, kehrt also ganz zu der Aufstellung Fig. 22 zurück. Man kann nun eine ganze Reihe von Stellungen von Σ, s_1 und s_2 finden, welche die Bedingung erfüllen, dass die dunkle J-Fläche in der Mitte des Feldes steht und auch dann, wenn man den Steg s_2 abhebt, in der Mitte des Feldes erscheint. Wenn man berücksichtigt, dass die kleinste Verschiebung des Steges s_2 schon die auf ihrem ersten Durchgange befindliche J-Fläche ganz aus dem Felde treibt, und dass die nach dem völligen Abheben des Steges s_2 wieder vorhandene J-Fläche durch die kleinsten Verschiebungen des Steges s_1 wieder ganz aus dem Felde getrieben werden

kann, so muss man zugeben, dass die nach Abhebung des Steges s_2 bei enormer Verschiedenheit der Zuleitungen zu den Kathoden auftretende J-Fläche auf ihrer Wiederkehr und nicht auf ihrem ersten Durchgange befindlich ist.

Solche zusammengehörige Stellungen von Σ, s_1 und s_2 sind beispielsweise folgende vier Anordnungen:

Σ	$\overline{k_2\sigma_4} = e_2$	$\overline{k_1 s_1} = e_1$	$\overline{\sigma_4 s_2} = a_2$ (erster Durchgang)	
Solenoid von 11 Windungen	10 *cm*	70 *cm*	370 *cm*	oder s_2 abgehoben
	140	180	380	(zweiter Durchgang)
Solenoid von 40 Windungen	10	131	295	oder s_2 abgehoben
	140	203	310	(zweiter Durchgang)

§. 52. Wiederkehr der dunklen J-Fläche bei dem zweifach verzweigten Oscillator. Noch schöner als bei dem einfach verzweigten Oscillator sind die mehrfachen Durchgänge der dunklen J-Fläche bei starker Änderung der Symmetrie des doppelt verzweigten Oscillators (Fig. 2 und Fig. 9). Die Wiederkehr der dunklen J-Fläche liegt innerhalb des Bereiches der Paralleldrähte Fig. 9. Es bezeichne b die Entfernung der Brücke b von den Kathoden, e_1 und e_2 wie bisher die Entfernung der Stege s_1 und s_2 von den Kathoden.

a) Für $b = 160$ *cm*, $e_1 = 280$ *cm*, $e_2 = 280$ *cm* ist der Oscillator symmetrisch und steht die dunkle J-Fläche in der Mitte des Feldes. Entfernt man den Steg s_2 von den Kathoden (vergrössert man e_2), so geht die J-Fläche sehr rasch rechtläufig durch das Feld und verlässt dasselbe an der Seite der Kathode 2 für $e_2 = 295$ *cm*. Die Strahlung wird bei weiterer Entfernung von s_2 immer stärker. Bei $e_2 = 310$ *cm* tritt an der Seite der Kathode 2 eine schöne dunkle J-Fläche aus und bewegt sich ausserordentlich langsam rückläufig durch das Feld. Erst bei $e_2 = 715$ *cm* steht sie in der Mitte zwischen den Kathoden und geht für $e_2 > 715$ *cm* langsam zur Kathode 1.

b) Wir gehen von der Stellung $b = 160$ *cm*, $e_1 = 280$ *cm*, $e_2 = 715$ *cm* aus. Die rückläufige dunkle J-Fläche steht dann in der Mitte des Feldes. Nähert man nun die Brücke b an den

Recipienten, verkleinert man die Entfernung *b)*, so geht die dunkle *J*-Fläche ziemlich rasch rechtläufig durch das Feld und verlässt dasselbe für $b = 108\,cm$ auf Seite der Kathode 2. Gleich darauf für $b = 80\,cm$ tritt sie auf derselben Seite wieder in das Feld und bewegt sich ziemlich rasch rückläufig durch das Feld. Für $b = 30\,cm$ steht sie in der Mitte des Feldes und bewegt sich bei weiterer Näherung gegen die Kathode 1 weiter.

VII. Capitel.

Natur der Interferenzflächen.

§. 53. Wird die Verschiebung der Interferenzflächen 1. durch die Phasendifferenz oder 2. durch die Amplitudenverschiedenheit der Schwingungen beider Kathoden verursacht? Wir wollen diese beiden Annahmen als Annahme 1) und als Annahme 2) bezeichnen. Die Entscheidung zwischen diesen beiden Annahmen ist von principieller Wichtigkeit für vorliegende Untersuchung. Die folgenden Überlegungen zeigen, dass nur die Annahme 1) zulässig ist.

a) Die Annahme 2) erklärt das Auftreten der hellen und dunklen *J*-Fläche nicht. Um das Auftreten der dunklen *J*-Fläche ohne Annahme einer Interferenz zu erklären, müsste man annehmen, dass die Strahlen bei höherem Druck ($1 \cdot 2\,mm$) sich abstossen und darum den dunklen Zwischenraum frei lassen, während sie bei niedrigerem Druck ($0 \cdot 5\,mm$) sich anziehen müssten, um so in der hellen *J*-Fläche zusammenzufliessen. Über die sonstige Zulässigkeit dieser Annahmen, ob man sie nun wörtlich oder bloss als Vergleich nimmt, ist hier keine Entscheidung nöthig. Genug, dass sie das Auftreten der dunklen *J*-Fläche nicht richtig darstellen. Es müsste danach die dunkle Fläche stets nur bei höherem, die helle Fläche stets nur bei niedrigem Druck auftreten, was nach §. 34 nicht der Fall ist. Man kann nach §. 34, ohne in dem Recipienten etwas zu ändern (bei $0 \cdot 5\,mm$ Druck), nur durch Änderungen an dem Oscillator die helle *J*-Fläche zum Verschwinden und die dunkle zum Auftreten bringen.

Ferner könnte man annehmen, dass die dunkle J-Fläche bloss ein Zwischenraum ist, in welchem sich die leuchtenden Schichten bei schwachen Schwingungen einfach nicht erreichen. Dies wurde jedoch schon §. 37 widerlegt.

b) Die Annahme 2) erklärt die Verschiebung der J-Flächen nicht. Die Lichthüllen um eine stärker schwingende Kathode, z. B. um eine Kathode, vor welche man einen Funken schaltet, sind bekanntlich stärker ausgebreitet, als an einer schwächer schwingenden Kathode. Man könnte deshalb annehmen, dass die J-Flächen hiedurch von der stärker schwingenden Kathode abgedrängt werden. Dies widerlegt sich durch Beachtung des zweiten Durchganges der J-Flächen (§. 50 und §. 51). Übrigens reicht das blosse Aussehen der Lichterscheinungen bei dem zweiten Durchgang der dunklen J-Fläche hin, um diese Annahme zu widerlegen. Die blauen Lichthüllen sind dabei sehr verschieden entwickelt und doch lässt sich die dunkle J-Fläche in die Mitte des Feldes stellen und ganz normal rechtläufig durch die blauen Hüllen hindurchschieben.

c) Die Annahme 2) erklärt die Form der J-Flächen und das Gesetz ihrer Verschiebung nicht. Die J-Flächen nehmen bei ihrem Durchgange durch das Feld nach §. 40 die Form hyperbolischer Cylinder an, deren Wegdifferenz der Verschiebung des Schleifcontactes ungefähr proportional ist. In der Verbindungslinie der Kathodenmitten bewegen sie sich proportional der Verschiebung des Schleifcontactes, die äusseren Zweige der Hyperbeln verschieben sich in der Mitte des Feldes ebenso langsam und schlagen dann rasch über der Kathode zusammen. Dies stimmt völlig mit der Annahme 1).

Die Annahme 2) würde einen ganz anderen Durchgang der J-Flächen fordern. Es müsste dann nicht die Wegdifferenz, sondern ungefähr das Verhältniss der im Radius gezählten Entfernungen jedes Punktes einer verschobenen J-Fläche von den Kathodenoberflächen constant sein, und dieses Verhältniss müsste der Verschiebung des Schleifcontactes ungefähr proportional sein. Die J-Flächen müssten also: *a)* bei ihrem Durchgange durch das Feld nicht die Form aller Flächen einer Schaar von hyperbolischen Cylindern

annehmen, sondern ungefähr eines Büschels von Kreiscylindern (beziehungsweise bicyclischen Cylindern), und es müsste: *b)* ihre Mitte sich nicht proportional der Verschiebung des Schleifcontactes durch das Feld bewegen, sondern in der Mitte des Feldes rasch, bald aber langsamer, und es könnte die J-Fläche die eine Kathode nur erreichen, wenn die Amplitude der Schwingung dieser Kathode völlig verschwindet gegen die Amplitude der Schwingung an der anderen Kathode.

Wenn diese geometrischen Angaben auch nicht vollkommen genau genommen werden dürfen, sondern nur als ein kurzer Ausdruck des Typus der Verschiebungsweise und der Formen der J-Flächen, wie sie aus Annahme 1) und aus Annahme 2) sich ergeben, so ist doch dieser Typus für beide Annahmen so charakteristisch, dass man nicht zweifeln kann, welcher der Vorzug zu geben ist.

d) Die Annahme 1) erklärt das Vorzeichen der Verschiebung der J-Flächen besser. Die Amplitudenverschiedenheit $2\delta\varepsilon$ und die Phasendifferenz $\delta\tau$, welche für eine bestimmte Verschiebung des Schleifcontactes δP eintreten, lassen sich nach Capitel I berechnen. Da die Ausdrücke für $\delta\varepsilon$ complicirter sind als für $\delta\tau$, beschränken wir uns hier auf den einfachsten und interessantesten Oscillator, welcher auch wohl am häufigsten angewendet wurde. Dieser Oscillator erfüllt die Bedingung

$$\frac{P}{p} = \frac{G}{g}$$

möglichst annähernd und ist daran zu erkennen, dass er nach §. 15, Punkt 8) für Verschiebungen des Schleifcontactes (δP) sehr empfindlich, für Widerstandsänderungen (δW) aber sehr unempfindlich ist.

Für die Schwingung I) dieses Oscillators gilt nach Capitel I

$$\frac{2\,\partial\varepsilon}{\partial P} = -\frac{W}{Wp - Pw}; \qquad \frac{\partial\tau}{\partial P} = +\frac{2P}{Wp - wP}. \tag{15I}$$

Für die Schwingung II) desselben gilt hingegen

$$\frac{2\,\partial\varepsilon}{\partial P} = +\frac{w}{Wp - Pw}; \qquad \frac{\partial\tau}{\partial P} = +\frac{2p}{Wp - wP}. \tag{15II}$$

Man könnte wegen Punkt *a)* zugeben, dass die Schwingung I) die helle, die Schwingung II) die dunkle *J*-Fläche erzeugt oder umgekehrt und doch annehmen, dass die Verschiebung dieser Flächen durch die Amplitudenverschiedenheiten $2\delta\varepsilon$ und nicht durch die Phasendifferenzen $\delta\tau$ bestimmt wird. In diesem Fall entscheiden die Gleichungen 15I) und 15II). Nach derselben ist die Phasenverschiebung für beide *J*-Flächen für einen gegebenen Oscillator und eine gegebene Verschiebung δP des Schleifcontactes gleichgerichtet, die Amplitudenverschiebungen $2\delta\varepsilon$ aber für die Schwingung I) entgegengesetzt wie bei der Schwingung II).

Die Annahme 1) erklärt es also, dass in allen Oscillatoren, in welchen die helle *J*-Fläche $\left\{\begin{matrix}\text{rechtläufig}\\ \text{rückläufig}\end{matrix}\right.$ ist, auch die dunkle *J*-Fläche $\left\{\begin{matrix}\text{rechtläufig}\\ \text{rückläufig}\end{matrix}\right.$ ist. Die Annahme 2) leistet hier nichts.[1]

e) Die Annahme 1) gibt für die Grösse der Verschiebung der *J*-Flächen zutreffendere Werthe. Wir halten uns an denselben Oscillator, welcher in Punkt *d)* betrachtet wurde. Es ergibt sich aus 15I) und 15II)

$$\alpha \frac{\partial \tau}{\partial P} = \pm \frac{2\,\partial \varepsilon}{\partial P}. \qquad 16)$$

Hierin bedeutet α die Dämpfungsconstante (§. 13) der Schwingung I), respective II) und gilt das obere Vorzeichen für die Schwingung I), das untere für die Schwingung II).

Nach Gleichung 16) verhält sich die Amplitudenverschiedenheit $2\delta\varepsilon$ stets zu der ganzen Amplitude wie die Phasen-

---

[1] Der Punkt *d)* hat insofern keinen Werth für die Beweisführung, als aus ihm allein nicht gefolgert werden kann, dass die Annahme 2) unzulässig ist. Er hat aber insofern grossen Werth für die Beweisführung, weil, wenn das Vorzeichen der Gleichungen 12I) und 12II) zu Ungunsten der Annahme 1) entscheiden würde, diese unzulässig erscheinen würde. Ich hatte bei Vornahme der Rechnung Capitel I einen Vorzeichenfehler (in §. 11) gemacht und war bestürzt, als die Gleichungen 12I) und 12II) verschiedene Vorzeichen zu haben schienen. Dies hätte bedeutet, dass die Annahme 1) nur dann zulässig sei, wenn die helle und die dunkle *J*-Fläche sich cet. par. in entgegengesetztem Sinne verschieben, was nicht der Fall ist.

verschiebung $\delta\tau$ zu der Dämpfungszeit $\frac{1}{\alpha}$, d. h. zu der Zeit, in welcher die Amplitude der Schwingung zufolge der Dämpfung im Verhältniss $e:1$ abnimmt. Nehmen wir an, dass die Verschiebung des Schleifcontactes so gross sei, dass nach Gleichung 15) die Phasenverschiebung gleich einer halben Schwingungsdauer ist, und dass die Dämpfungszeit bloss 100mal so gross als die Schwingungsdauer ist. Dann ist die zufolge dieser grossen Verschiebung des Schleifcontactes eintretende Amplitudendifferenz $2\delta\varepsilon$ nach Gleichung 16) gleich $^1/_{200}$ der ganzen Amplitude der Schwingung. Nach Annahme 1) muss also bei dieser Verschiebung des Schleifcontactes die J-Fläche durch das ganze Feld wandern und auf Seite einer Kathode austreten. Nach Annahme 2) müsste die J-Fläche für dieselbe Verschiebung des Schleifcontactes um $^1/_{400}$ der Entfernung der Kathoden sich aus der Mitte des Feldes verschieben. Man sieht deutlich, dass die Annahme 2) nicht geeignet ist, die starken Verschiebungen der J-Flächen zu erklären. Der gewählte Oscillator ist zwar mathematisch ein sehr specieller, physikalisch nähert er sich jedoch den wichtigsten verwendeten Oscillatoren.

f) Wünschenswerth wäre es, die in der Überschrift dieses §. 53 aufgeworfene Frage direct mit dem Elektrometer zu entscheiden. Es erfordert dies jedoch vorher die Ausbildung einer speciellen Methode zur elektrometrischen Messung der Phasendifferenzen Hertz'scher Schwingungen. Hingegen wird auch die Ausbildung dieser Methode durch die gleichzeitige Beobachtung der J-Flächen sehr unterstützt, welche an sich, wenn die Grundlagen vorliegender Arbeit sich bewähren, ein einfaches Mittel bilden, um Phasendifferenzen Hertz'scher Schwingungen zu messen.

Das naheliegendste Elektrometer zur Messung dieser Phasendifferenzen würde aus vier im Quadrat stehenden Platten bestehen, in deren Mitte die isolirte Hertz'sche Nadel an einem Quarzfaden hängt. Zwei nicht gegenüberliegende Platten 1 und 2 sind je mit den zwei Kathoden, die anderen Platten 3 und 4 ganz kurz mit dem leitenden Schutzkasten, in welchem die Aufstellung sich befindet, verbunden. Die Nadel muss sich bei

gleichgerichteten Schwingungen der Kathoden in die Halbirungsebene der Platten 1 und 2, bei entgegengesetzten Schwingungen in die andere Diagonalebene zu stellen suchen. Für dazwischenliegende Phasendifferenzen dreht und verkleinert sich die Richtkraft. Ich werde wenn ich Zeit finde demnächst mit einem solchen Elektrometer Messungen versuchen.

§. 54. Werden die Interferenzflächen durch Kathodenstrahlen erzeugt? Dass dieselben durch Strahlen erzeugt werden, wird man wohl nicht bestreiten. Dass diese interferirenden Strahlen nicht völlig identisch sind mit jenen Kathodenstrahlen, welche bei sehr niedrigem Druck und starken Schwingungen der Kathode zu erhalten sind, ist leicht zu erkennen. Doch wird in den folgenden §. 55 bis §. 59 der experimentelle Nachweis erbracht, dass die Strahlen, welche die *J*-Flächen bilden, alle Eigenschaften haben, welche die Kathodenstrahlen unterscheiden von dem Licht (und von den Röntgenstrahlen). Sie unterscheiden sich von den Hittorf'schen Kathodenstrahlen viel weniger, als sich das ultrarothe Licht von dem gelben Licht unterscheidet.

§. 55. Fluorescenzwirkung der interferirenden Strahlen. Dieselben bringen die Luft zu derselben blauen, mit abnehmendem Druck schwächer werdenden Luminescenz, welche die Hittorf'schen Kathodenstrahlen hervorrufen, und erregen bei niedrigem Druck die grüne Fluorescenz des Glases. Die helle *J*-Fläche zeichnet sich dann als ein scharfer grüner Strich auf die Glaswand. Die grüne Fluorescenz des Glases, welche das blassblaue Licht um die dunkle *J*-Fläche bei niedrigem Druck ersetzt, ist begreiflicherweise sehr matt, mehr grau als grün.

§. 56. Magnetisches Verhalten der interferirenden Strahlen. Beide *J*-Flächen werden durch magnetische Kräfte abgelenkt, und zwar in jenem Sinne, in welchem Kathodenstrahlen abgelenkt werden, welche längs der *J*-Flächen von dem Mittelpunkte des Feldes nach allen Seiten nach aussen verlaufen würden.

§. 57. Elektrostatisches Verhalten der interferirenden Strahlen. Die elektrostatische Ablenkbarkeit derselben ist, wie zu erwarten, nur eine kleine, denn ihre Selbst-

streckung durch Ladung der Glaswand ist entsprechend der Stärke der anregenden Schwingungen sehr gross. Hierüber siehe §. 58 und §. 59. Die an früherem Orte[1] nachgewiesene Selbststreckung der Kathodenstrahlen wird noch zu wenig beachtet.

Die Abhängigkeit der Strahlen, welche die J-Flächen bilden, von der elektrostatischen Kraft des Feldes sieht man jedoch aus folgenden Thatsachen deutlich:

Wenn man mit dem einfach verzweigten Oscillator mit directer Anregung (Fig. 6) und dem kleinen anodenlosen Recipienten (§. 16) arbeitet und ferner den Conductor C_3 (Fig. 6) zur Erde ableitet, so muss man den anderen Pol des Funkens f und also auch die Kathoden mit dem positiven Pol der Influenzmaschine verbinden, damit Kathodenstrahlen und J-Flächen auftreten. Dieses paradoxe Resultat erklärt sich sehr einfach. Vor Eintritt des anregenden Funkens f laden sich die Kathoden und (da das Vacuum, ehe Kathodenstrahlen vorhanden sind, zufolge der eintretenden Entladungen keine grossen Potentialdifferenzen erträgt) mit den Kathoden auch die Glaswand des Recipienten sehr stark positiv. Im Augenblick des Funkens werden die Kathoden auf das Potential Null entladen und gleichzeitig die Schwingungen und also die Kathodenstrahlen angeregt. Diese Kathodenstrahlen finden also die Kathoden auf dem Potential Null und die Glaswand des Recipienten stark positiv geladen vor, d. h. sie finden starke negative, von den Kathoden ausgehende elektrostatische Kraftlinien vor und können sich also kräftig entwickeln. Man sieht auch, dass es umgekehrt unmöglich sein muss, Kathodenstrahlen bei dieser Aufstellung zu erhalten, wenn man die Kathoden mit dem negativen Pol der Maschine verbindet.

Die bei diesem Experiment scheinbar von Anoden, in Wirklichkeit aber von Kathoden ausgehenden Strahlen dürfen nicht verwechselt werden mit den von mir a. O.[2] aufgewiesenen echten Anodenstrahlen, d. h. mit jenen Kathodenstrahlen, welche von der Glaswand des Recipienten

[1] G. Jaumann, Elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen. Diese Sitzungsber., Bd. 105, S. 304, 1896; Wied. Ann., 59, S. 265, 1897.

[2] Wied. Ann., 64, S. 277, 1898.

ausgehen und sich zu der echten Anode hin krümmen, auf dieser sammeln und dieselbe zur Fluorescenz bringen.

Hier möge auch der elektrostatische Theil der Erklärung Platz finden, warum die hellen *J*-Flächen, wenn sie auftreten, bei niedrigerem Druck (0·5 *mm* Hg) am deutlichsten sind, während die dunklen *J*-Flächen bei 1·2 *mm* Hg Druck am deutlichsten sind. (Siehe §. 34.)

Die Kathoden sind durch den Oscillator metallisch verbunden, sie haben also, was ihre statische Ladung betrifft, dieselbe hohe Potentialdifferenz gegen die Glaswand. Wie die Kraftlinien eines derartigen statischen Feldes verlaufen, ist sehr bekannt. In der Mitte zwischen den Kathoden ist die statische Kraft Null und hat die Kraftlinie einen Doppelpunkt. Die helle *J*-Fläche wird nun von Kathodenstrahlen gebildet, welche gerade in der Mitte des Feldes, wo die statische Kraft Null ist, sie also sehr ungünstige Bedingungen für ihre Entwicklung finden, am stärksten auftreten sollen. Die dunkle *J*-Fläche wird hingegen von Strahlen gebildet, welche in der Mitte des Feldes, wo die Bedingungen für die Entwicklung von Kathodenstrahlen ohnehin schlechte sind, sich auslöschen sollen. Zufolge dessen kann sich die dunkle *J*-Fläche leichter ausbilden als die helle *J*-Fläche und erscheint schon bei höherem Druck.

Ferner ist die helle *J*-Fläche häufig nicht in ganzer Ausdehnung gleichmässig entwickelt, sondern hat in der Mitte zwischen den Kathoden ein dunkleres Loch. Dies hat seinen Grund eben in den ungünstigen elektrostatischen Bedingungen für die Entwicklung von Kathodenstrahlen in der Mitte des Feldes.[1]

§. 58. Elektrostatisches Anzünden der interferirenden Strahlen. Das von mehreren Beobachtern beschriebene elektrostatische Anzünden der Kathodenstrahlen, wirkt in derselben Weise auch auf die Strahlen, welche die *J*-Flächen bilden, ja diese sind hiefür sogar oft ausserordentlich empfindlich (siehe §. 21).

Den Ansichten, welche sich frühere Beobachter über dieses elektrostatische Anzünden gebildet haben, möchte ich

[1] Auch die Schärfe der *J*-Flächen dürfte eine elektrostatische Wirkung sein.

mich nicht anschliessen. Nach denselben soll die durch die Näherung des geriebenen Stabes in dem verdünnten Gas zweifellos hervorgerufene Entladung die chemische Natur desselben ändern, dasselbe in einen allotropen Zustand versetzen, wonach es erst möglich sein soll, dass Kathodenstrahlen auftreten.[1] Meiner Meinung nach erfordert das elektrostatische Anzünden überhaupt keine neue Annahme zur Erklärung. Reine elektrische Schwingungen allein erzeugen erfahrungsgemäss keine Kathodenstrahlen. Man muss noch mit einem geriebenen Stab in die Nähe kommen oder sonst irgend welche statische Kraft in das Feld einführen, damit sie auftreten können. Aus dem elektrostatischen Anzünden scheint mir nichts Anderes hervorzugehen, als dass die Kathodenstrahlen zu ihrem Fortkommen eine elektrostatische Kraft brauchen und dies steht für mich ohnehin über jedem Zweifel.

Aus dem ruhigen Fortleuchten der einmal angezündeten Strahlen und aus dem Umstande, dass es ganz gleichgiltig ist, welche Richtung die künstlich eingeführte statische Kraft hat, ist zu schliessen, dass die Kathodenstrahlen, wenn sie nur einmal an irgend einem Punkt des Feldes in irgend einer Richtung aufgetreten sind, sofort vermöge ihrer elektromotorischen Wirkung dasjenige elektrostatische Feld selbst schaffen und erhalten, in welchem sie am besten fortkommen.

Dieser Satz ist auch nichts Neues, sondern ich habe ihn aus ganz anderen, directen Gründen an früherem Ort[2] schon aufgestellt.

§. 59. Elektromotorische Wirkung der Strahlen. Es ist bekannt, dass die Hittorf'schen Kathodenstrahlen elektromotorische (ladende) Wirkung haben, während das Licht und die Röntgenstrahlen[3] bloss entladende Wirkung oder wenigstens nur sehr schwache ladende Wirkung haben.

---

[1] Siehe H. Ebert, Wied. Ann., 64, S. 257, 1898.

[2] Wied. Ann., Bd. 64, S. 276, 1898; diese Sitzungsber., Bd. 106, Juli 1897.

[3] Röntgen (zweite Mittheilung): E. Dorn, Naturf. Ges. zu Halle, Bd. 21, S. 55, 1896; v. Geitler, diese Sitzungsber., 1898.

Doch wird selbst in neuerer Zeit[1] angegeben, dass die Kathodenstrahlen ausschliesslich negativ ladende Wirkungen haben. Dem kann ich nicht zustimmen. Die echten Hittorf'schen Kathodenstrahlen können sowohl negativ, als positiv ladende Wirkung besitzen, letzteres sogar häufiger als ersteres. Die Ladung der Glaswand des Recipienten rührt zum grössten Theile von der elektromotorischen Wirkung der Kathodenstrahlen her und wird durch die Entladungsvorgänge in dem Recipienten nur modificirt. Die Entladungsvorgänge sind nicht elektromotorisch, sie können nur einen Ausgleich von Potentialdifferenzen bewirken. Sie können also nur dadurch eine Ladung der Glaswand bewirken, dass sie das Potential der Elektroden ganz oder theilweise auf die nächstliegenden Stellen der Glaswand übertragen. Findet man also eine Stelle der Glaswand, deren Potential nicht zwischen dem Potential Null und dem Potential der nächstliegenden Elektrode liegt, so kann es nur die elektromotorische Wirkung der Kathodenstrahlen sein, welche diese Stelle der Glaswand geladen hat. Es ist nun in den meisten Recipienten jene Stelle der Glaswand, auf welche die Kathodenstrahlen treffen und welche fluorescirt, kräftig positiv geladen, wenn auch die Anode weit entfernt oder zur Erde abgeleitet ist. Die Kathodenstrahlen laden also in diesen Recipienten die Glaswand positiv, verstärken hiedurch die negativen statischen Kräfte, welche von der Kathode ausgehen und verbessern also hiedurch die Bedingungen ihres eigenen Fortkommens im Felde.

Wenden wir uns nun zu den elektromotorischen Wirkungen der Strahlen, welche die J-Flächen bilden. Es wurde in dem grossen Recipienten §. 16 ein Probescheibchen (p, Fig. 25 und 26) von 1 *cm* Durchmesser angebracht, welches nach hinten (bei q, Fig. 26) eine Drahtleitung aus dem Recipienten heraussendet. Der Schliff 2 setzt sich in eine gebogene Glasröhre fort, welche das Probescheibchen p trägt. Dieses konnte durch Drehen des Schliffes hart an der Wand des Recipienten um die Kathoden herumgeführt werden, soweit

[1] Lenard, Wied. Ann., 64, S. 279, 1898.

die Zuleitungen zu den Kathoden diese Bewegung nicht aufhalten.

Die Kathoden sind metallisch mit einander durch die Oscillatordrähte verbunden. Es handelt sich um die Messung der statischen Potentialdifferenz und des statischen (nicht oscillatorischen) Stromes zwischen den Kathoden und dem Probescheibchen.

Zu diesen Messungen müssen Apparate verwendet werden, deren Ausschlag durch die erste Potenz der zu messenden Grösse bestimmt wird, also ein Tripolar- (Quadrant-) Elektrometer und ein Galvanometer. Dann ist man von den Potential-

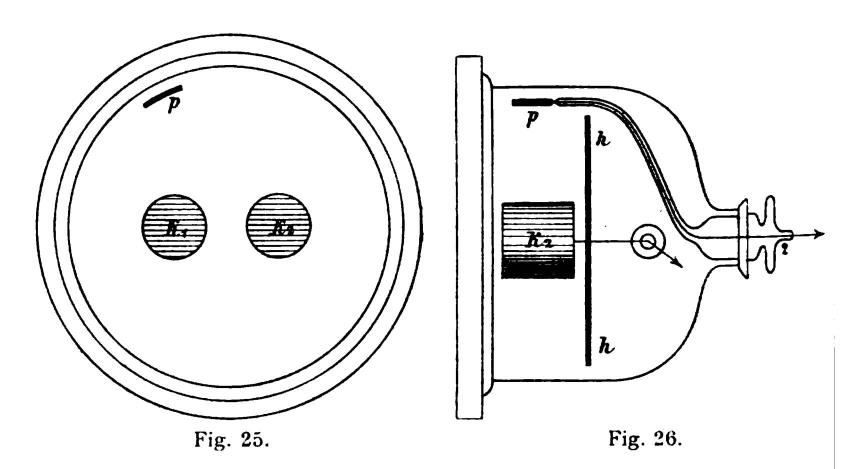


Fig. 25. Fig. 26.

und Stromschwingungen in dem Recipienten ganz unabhängig und misst ausschliesslich die statischen Potentialdifferenzen und die einseitigen Strömungen im Recipienten.

Das Probescheibchen wurde bei den elektrometrischen Messungen mit der Nadel eines Quadrantelektrometers verbunden, das eine Quadrantenpaar wurde zur Erde abgeleitet und beiden Quadrantenpaaren gegeneinander eine constante Potentialdifferenz von 16 Volt mittelst einer kleinen Batterie ertheilt. Die Kathoden sind zur Erde abgeleitet.

Als Galvanometer wurde ein Rosenthal'sches verwendet und der Reductionsfactor desselben vor jeder Messung controlirt.

a) Die Stellung des Probescheibchens p kann cet. par. bei allen Versuchen durch Drehen des Schliffes 2 beliebig geändert werden, ohne dass hiedurch eine deutliche Änderung der Potentialdifferenz zwischen p und den Kathoden auftritt. Hieraus folgt, dass die cylindrische Glaswand des Recipienten, welcher das Probescheibchen stets sehr nahe bleibt, nahezu eine Potentialniveaufläche der statischen Kräfte ist.

b) Man leitet den Verzweigungspunkt s (Fig. 6), also die Kathoden metallisch zur Erde ab und verwendet die Solenoidanregung (Fig. 7).

Nun setzt man den Funken f (Fig. 7) in Gang, regt also die elektrischen Schwingungen an. Das Elektrometer zeigt dann nur eine sehr geringe und unruhige Potentialdifferenz zwischen k_1k_2 und p an (von höchstens 40 Volt).

Nun zündet man die Strahlung elektrostatisch an, ohne an der Anregung der Schwingungen etwas zu ändern. Sofort zeigt das Elektrometer eine ziemlich ruhige grosse Potentialdifferenz (von 600 bis 1200 Volt) an, und zwar ist das Probescheibchen p gegen die Kathoden k_1k_2 negativ. Da die Kathoden metallisch zur Erde abgeleitet sind und auch sonst keine Elektrode in das Vacuum taucht, so erkennt man, dass diese Potentialdifferenz ausschliesslich durch die elektromotorische Wirkung der Strahlung zu Stande kommt.

c) Führt man nun dem Probescheibchen durch einen feuchten Faden von einer kleinen Influenzmaschine her fortwährend positive oder negative Ladung zu, so ändert dies das negative Potential des Probescheibchens, welches durch die Strahlung bestimmt wird, nicht wesentlich. Die elektromotorische Wirkung der Strahlung ist also sehr ausgiebig, geht jedoch bloss bis zur Herstellung einer gewissen bestimmten Potentialdifferenz von k_1k_2 und p.

d) Lässt man die Kathoden metallisch mit der Erde verbunden und leitet man das Probescheibchen p durch das Galvanometer zur Erde ab, so zeigt dieses während der Strahlung einen ziemlich constanten negativen Strom von 5 bis 10 Millionstel Amp. an.[1]

[1] Leitet man p direct zur Erde ab, hingegen k_1k_2 durch das Galvanometer zur Erde ab, so zeigt dieses einen ungefähr doppelt so grossen positiven Strom

Die elektromotorische Wirkung der Kathodenstrahlung ist also nach Experiment *b)*, *c)* und *d)* am einfachsten so zu beschreiben, dass man sagt, sie ist ungefähr so beschaffen wie die elektromotorische Wirkung einer galvanischen Batterie von circa 1000 Volt Spannung und circa $10^8\,\Omega$ innerem Widerstand. Diese Zahlen ändern sich jedoch mit der Stärke der Anregung und der Anordnung des Oscillators.

e) Obige Experimente *b)*, *c)*, *d)* wurden angestellt für den symmetrischen, einfach verzweigten Oscillator und die dunkle *J*-Fläche. Verschiebt man den Schleifcontact *s* (Fig. 6) aus der symmetrischen Stellung, so sinkt die elektromotorische Wirkung der Strahlung rasch ab. Bei noch weiterer Vergrösserung der Unsymmetrie kehrt sie ihr Vorzeichen um und wächst in dieser Richtung bei weiterer Vergrösserung der Unsymmetrie weiter an. Dann ist also, wie bei einem gewöhnlichen Recipienten, die Glaswand und also das Probescheibchen positiv gegen die Kathoden $k_1 k_2$.

Am einfachsten zeigt man diese Umkehrung der elektromotorischen Wirkung der Strahlung für einen unsymmetrischen Oscillator, indem man bei symmetrischer Stellung des Schleifcontactes, wobei das Probescheibchen ein negatives Potential von circa 1000 Volt hat, ein Leydnerfläschchen, dessen äussere Belegung zur Erde abgeleitet ist, an eine der Kathoden legt. Es zeigt dann sofort das Probekörperchen ein positives Potential von 800 bis 1500 Volt.

VIII. Capitel.

Schlüsse auf die Natur der Kathodenstrahlen.

§. 60. Erinnerung an einige Folgerungen der Theorie des Verfassers.[1] Diese Theorie beruht ausschliesslich auf einer einzigen sehr wahrscheinlichen Annahme, dass nämlich der Zustand des Vacuums sich in

---

an. Ein Theil dieses Stromes entspringt jedoch nicht der elektromotorischen Wirkung der Strahlung, sondern geht von dem primären Solenoid (Fig. 7) auf das secundäre über.

[1] G. Jaumann, Longitudinales Licht, diese Sitzungsber., Bd. 104, Juli 1895; Wied. Ann., Bd. 57, S. 147, 1896; The Electrician 1896.

jenen Punkten ändert, in welchen die elektrischen Kräfte die Laplace'sche Gleichung nicht erfüllen. Welche Eigenschaft σ des Vacuums es ist, die sich hiebei primär ändert, hierüber wird keine Entscheidung getroffen. Die Änderungsgeschwindigkeit dieser Eigenschaft σ soll proportional der Laplace'schen Function der Kräfte sein und die Maxwell'schen Constanten ε und μ sollen beliebige unbekannte Functionen dieser Eigenschaft σ sein. Im Übrigen sollen die Maxwell'schen Gleichungen für Nichtleiter für das Vacuum ihre Giltigkeit behalten, und sie sollen genau giltig sein für Luft von normaler Dichte.

Aus diesen Angaben kann jeder Mathematiker meine ganze Theorie construiren. Die Strahlen kleiner Amplitude dieser Theorie verhalten sich wie Kathodenstrahlen. Sie erklärt mindestens ebensoviel wie die Crookes'sche Emissionstheorie der Kathodenstrahlen.[1]

Hier handelt es sich um folgende zwei Folgerungen aus meiner Theorie:

a) Charakteristisch für dieselbe ist, dass nach ihr die Kathodenstrahlen als elektrische Longitudinalstrahlen erscheinen, welche (bei kleiner Amplitude) einer Differentialgleichung erster Ordnung folgen. Die allgemeinste Form einer Strahlengleichung erster Ordnung ist:

$$k\frac{\partial\theta}{\partial t}+X_0\frac{\partial\theta}{\partial x}+Y_0\frac{\partial\theta}{\partial y}+Z_0\frac{\partial\theta}{\partial z}=0,$$

worin θ eine Variable des Strahles bedeutet. X_0, Y_0, Z_0 müssen hierin Componenten eines gegebenen Vectors und k eine diesem Vector proportionale Geschwindigkeit sein. Dieser Vector ist nach meiner Theorie die statische elektrische Kraft des Feldes. Die Geschwindigkeit der Longitudinalstrahlen ist dieser statischen elektrischen Kraft proportional. Sie gehen von der Kathode mit positiver Geschwindigkeit aus, können aber

[1] Niemand würde heute unternehmen, die Emissionstheorie des Lichtes wieder zu Ehren bringen zu wollen. Dennoch merkt man an dem Anklang, welchen die Crookes'sche Theorie gegenwärtig selbst in Deutschland findet, dass die heute wohl nicht mehr zeitgemässe Neigung zur Bildung von Emissionstheorien den Physikern immer noch im Blute steckt.

von der Anode nicht ausgehen, weil in der Normale derselben ihre Geschwindigkeit negativ ist. Sie haben im homogenen Medium, entsprechend der statischen Kraftvertheilung, krummlinigen Verlauf. Die elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen wurde auf Grund dieser Theorie aufgefunden.[1] Dass die Theorie die magnetische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen darstellt, wurde zwar bestritten. Jedenfalls aber habe ich auch in diesem Punkte und in Bezug auf die Erklärung der elektromotorischen Wirkung der Kathodenstrahlen Vertrauen zu dieser Theorie und erkenne die Berechtigung der Einwürfe nicht an.

Hier interessirt uns hauptsächlich die Folgerung der Theorie, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kathodenstrahlen ausser von der statischen Kraft noch in weiten Grenzen von dem Luftdruck abhängen soll, so zwar, dass ihre Geschwindigkeit bei normalem Luftdruck nahezu Null ist und bei Herabsetzung des Druckes bis zu einem Grenzwerth ansteigt, den sie für das äusserste Vacuum erreicht.

b) So wie die Schallstrahlen, welche freilich einer Differentialgleichung zweiter Ordnung folgen, Strahlen sind, welche einen longitudinalen variablen Vector (die Geschwindigkeit der Luft) und eine scalare Variable (die Luftdichte) haben, deren Änderungsgeschwindigkeit der Laplace'schen Function dieses Vectors proportional ist, so haben auch die Kathodenstrahlen meiner Theorie einen longitudinalen variablen Vector (die variablen elektrischen Kräfte des Strahles) und eine scalare Variable (die Eigenschaft σ oder mit Annäherung der Maxwell'sche Coëfficient ε), deren Änderungsgeschwindigkeit der Laplace'schen Function dieses Vectors (also der variablen elektrischen Kräfte) proportional ist.

§. 61. Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kathodenstrahlen aus Interferenzexperimenten. Man kann dieselbe auf zwei principiell verschiedenen Wegen bestimmen:

[1] Compt. rend., 122, Mai 1896; diese Sitzungsber., 105, S. 291, April 1896; Wied. Ann., 59, S. 252, 1896; The Electrician, Mai 1896.

a) aus dem Abstand zweier Interferenzflächen im Felde, wenn die Schwingungsdauer der Hertz'schen Schwingung der Kathoden bekannt ist;

b) aus der Verschiebungsgeschwindigkeit einer Interferenzfläche, wenn die Geschwindigkeit der Phasenänderung der Schwingungen beider Kathoden direct gemessen oder wenigstens berechnet werden kann.

Vorläufige Bestimmung nach der Methode *a)*. Es wurden zwar bisher noch nicht zwei helle *J*-Flächen gleichzeitig im Felde erhalten. Doch tritt bei dem Experiment §. 50 die zweite *J*-Fläche auf Seite der einen Kathode ein, fast unmittelbar nachdem die erste Interferenzfläche das Feld auf Seite der anderen Kathode verlassen hat. Die Verschiebung beider Flächen ist der Verschiebung des Steges merklich proportional, man kann sie beobachten für jede Stellung des Steges von +26 *cm* bis —26 *cm* und von —30 *cm* bis —82 *cm*. Die Annahme, dass diese Verschiebung auch in dem Intervall von —26 *cm* bis —30 *cm*, in welchem man keine der *J*-Flächen sieht, ungefähr proportional der Verschiebung des Steges ist, ist sonach gestattet.

Da die Kathoden 2 *cm* von einander entfernt sind, beträgt die Entfernung der beiden *J*-Flächen von einander wenig über 2 *cm*, und zwar $2\,cm\left(1+\frac{4\,cm}{52\,cm}\right)=2\cdot 2\,cm$. Die Schwingungsdauer des Oscillators bestimmt sich nach Gleichung 91) ungefähr zu 10^{-8} sec. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Kathodenstrahlen hat hienach bei $0\cdot 5\,mm$ Hg Druck (und einer statischen Kraft von ungefähr 100 Volt pro Centimeter) den Werth:

$$c=\frac{2\cdot 2\,cm}{10^{-8}\,\text{sec.}}=\frac{2}{300}\ \text{der Lichtgeschwindigkeit.}$$

b) Vorläufige Bestimmung nach der Methode *b)*. Halten wir uns an den einfachen Oscillator, für welchen

$$\frac{P}{p}=\frac{G}{g}$$

ist und nehmen wir an, dass die dämpfenden Ursachen (die Strahlung im Recipienten) hauptsächlich in den Zweigen

1 und 2, nicht in dem Zweige 3 wirken, so dass mit Annäherung gilt: $\frac{W}{w} = 1$ (vergl. Gleichung $4c$).

Dann ist nach Gleichung 15II), §. 53

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial P} = \frac{1}{p-P} \qquad 15'II)$$

und nach Gleichung 16)

$$\frac{\partial \tau}{\partial P} = \frac{\alpha}{P-p}. \qquad 16'II)$$

Für eine Verschiebung des Schleifcontactes, für welche ∂P der zehnte Theil von $P-p$ ist, bewegt sich die dunkle J-Fläche der Grössenordnung nach beobachtungsgemäss um 1 *cm*.

Es kommt nun darauf an, wie gross die Dämpfungszeit $\frac{1}{\alpha}$ ist, um $\delta\tau$ berechnen zu können. Die Dämpfungszeit liegt sicher zwischen 10^{-7} und 10^{-6} sec., es ergibt sich also aus 16′II)

$$\delta\tau = 10^{-7} \text{ bis } 10^{-8} \text{ sec.}$$

Dieser Zeitdifferenz entspricht eine Verschiebung der dunklen J-Fläche um circa 1 *cm*. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Kathodenstrahlen bei 1·2 *mm* Druck ergibt sich hienach der Grössenordnung nach zu

$$c = \frac{1\,cm}{10^{-7}\,\text{sec.}} \text{ bis } \frac{1\,cm}{10^{-8}\,\text{sec.}} =$$

$$= \frac{1}{300} \text{ bis } \frac{1}{3000} \text{ der Lichtgeschwindigkeit.}$$

Bisher wurde von verschiedenen Autoren die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kathodenstrahlen (bei sehr niedrigem Druck und entsprechend höherer elektrischer Kraft) zu $^1/_3$ bis $^1/_9$ der Lichtgeschwindigkeit angegeben. Wenn eine dieser Bestimmungen richtig ist, so wäre dieser Werth als dem Grenzwerth naheliegend anzusehen, welchen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kathodenstrahlen nach meiner Theorie

zufolge möglichster Verdünnung der Luft und zufolge des Grenzwerthes, welchen hiebei die statische elektrische Kraft des Feldes annimmt, erreichen soll.

§. 62. Nachweis einer scalaren Variablen der Kathodenstrahlen. Die Interferenzflächen haben nicht den Charakter, als würden sie durch die Interferenz longitudinaler elektrischer Strahlen bewirkt, wenn man voraussetzen wollte, dass es die Schwingungen der elektrischen Kraft sind, welche die letzte Ursache des blauen Leuchtens der verdünnten Luft sind.

Wenn die Schwingungen der Kathoden gleichgerichtet sind (Schwingung I), so heben sich die von ihnen ausgehenden Kräfte der Strahlung in der Mitte zwischen den Kathoden auf und verstärken sich in der Mittelfläche des Feldes weiter ausserhalb der Verbindungslinie der Kathoden.

Wenn hingegen die Schwingungen der Kathoden entgegengesetzt gerichtet sind (Schwingung II), so verstärken sich die elektrischen Kräfte der Strahlung in der Mitte zwischen den Kathoden und heben sich erst weiter ausserhalb in der Mittelfläche auf.

Die J-Flächen haben jedoch nicht diesen Charakter. Die helle J-Fläche hat zwar oft in der Mitte ein dunkleres Loch, was sich aber aus elektrostatischen Ursachen erklärt (vergl. §. 57). Die dunkle J-Fläche hat hingegen in der Mitte keine blaue Stelle, wie man am besten aus dem Experiment Fig. 21 ersieht.

Es sind also die Schwingungen der elektrischen Kraft in irgend einem Punkte des Vacuums nicht die letzte Ursache des blauen Leuchtens. In der beobachteten Weise, in geschlossenen Interferenzflächen, kann kein vectorischer Strahl interferiren, sei er nun longitudinal oder transversal. So interferiren nur Strahlen mit scalarer Variablen, und zwar dann, wenn die resultirenden Schwingungen dieser scalaren Variablen direct beobachtbar sind und wenn die Orte gleicher Amplitude dieser scalaren Variabeln also die Interferenzflächen bilden.

Aus dem Umstande, dass die J-Flächen ohne Unterbrechung zwischen den Kathoden durchgehen, folgt somit, dass es eine scalare Variable der Kathodenstrahlen ist

deren Schwingungen die letzte Ursache des blauen Leuchtens der verdünnten Luft sind.

Thatsächlich muss jeder longitudinale vectorische Strahl auch eine charakteristische scalare Variable besitzen, schon deshalb, weil sein variabler Vector nothwendig die Laplace'sche Gleichung nicht erfüllt und die Laplace'sche Function scalar ist.

Es ist ferner eine bekannte Thatsache, dass die verdünnte Luft überall dort carminroth leuchtet, wo starke elektrische Schwingungen,[1] aber keine Kathodenstrahlen vorhanden sind. Diese bewirken blaues Leuchten und drängen das rothe Leuchten vollständig zurück, wo sie auch auftreten. Wenn man z. B. die Anode an das Ende eines langen Rohres setzt, so erfüllt sich dieses mit dem rothen positiven Licht. Berührt man die Röhre an einem beliebigen Punkt mit dem Finger, so wird diese Stelle der Glaswand auf das Potential 0 gebracht, also gegen die Anode negativ, es gehen von dort blaue Kathodenstrahlen aus. Es bildet sich dadurch ein blauer Stöpsel in der Röhre, vor und hinter demselben behauptet das rothe Licht in der Röhre seinen Platz.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen, welche meine experimentellen Arbeiten unterstützt, auch an dieser Stelle meinen Dank zu sagen.

[1] welche die Laplace'sche Gleichung erfüllen. Man ersieht diese Bedingung aus dem Nachsatze, dass keine Kathodenstrahlen vorhanden sein dürfen.

Zur Theorie der Transversalschwingungen eines von Wirbeln durchzogenen Körpers

(I. Mittheilung)

von

Dr. **Fritz Hasenöhrl.**

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Juni 1898.)

Die Erscheinungen der magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes sowohl, als auch das jüngst entdeckte Zeemann'sche Phänomen scheinen darauf hinzudeuten, dass im magnetischen Felde gewisse Rotationen der kleinsten Theilchen stattfinden. Maxwell hat eine solche Hypothese der Rechnung unterzogen und so eine Theorie der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes im magnetischen Felde gegeben. In seinem »Treatise« leitet er die betreffenden Differentialgleichungen ganz allgemein aus den Energiegleichungen des Feldes ab, ohne den verschiedenen dort vorkommenden Grössen eine specielle mechanische Deutung zu geben. In der Abhandlung »On physical lines of force« finden wir jedoch diese Ideen näher ausgeführt; doch gelingt es auch hier schwer oder überhaupt nicht, sich eine präcise Vorstellung des Mechanismus zu bilden, der den Maxwell'schen Annahmen zu Grunde liegt. (Mit der den fundamentalen elektromagnetischen Erscheinungen zu Grunde liegenden Theorie der Molecularwirbel und Frictionsrollen etc. hat diese Theorie wenig gemein.)

Es schien daher wünschenswerth, ein klar definirtes mechanisches Modell, in dem transversale Schwingungen durch interne Wirbelbewegungen alterirt werden, einer detaillirten Rechnung zu unterziehen.

Wie weit die Analogie zwischen dem Modell und den in der Natur auftretenden Erscheinungen reicht, kam erst in zweiter Linie in Betracht.

Da es sich nun herausgestellt hat, dass eine consequente Durchführung des Calcüls Resultate liefert, die nicht recht ohne Rechnung vorausgesehen werden können und zu denen auch die allgemeine Schlussweise von Maxwell nicht führt, so will ich im Folgenden die rechnerische Untersuchung eines solchen Modells mittheilen.

1.

Wir denken uns eine massenlose Hohlkugel, in deren Innerem sich ein Kreisel befindet, derart, dass die Kreiselaxe ein Durchmesser der Kugel ist; die Endpunkte dieses Durchmessers nennen wir die Pole der Kugel.

Unser Modell besteht nun aus n solchen Kugeln, die an den Polen durch vollkommen elastische Schnüre von der Länge l verbunden sind, so dass in der Ruhelage alle Kreiselaxen und Schnüre auf einer Geraden liegen. Die Spannung aller dieser Schnüre sei in der Ruhelage p. Die erste und letzte Kugel denken wir uns durch eine gleiche Schnur von der Länge l mit fixen Punkten verbunden (siehe Fig. 1).

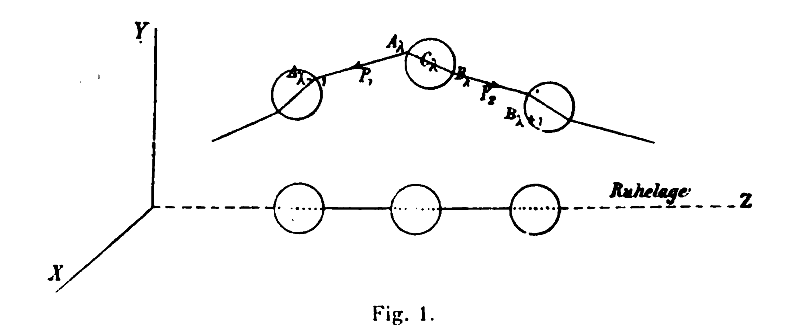


Fig. 1.

Die Masse einer solchen Kugel (gleich der des enthaltenen Kreisels, da die Schale massenlos gedacht ist) sei $= m$; ihr Radius $= \rho$

Wird das System aus der Ruhelage entfernt, so wird es in Folge der elastischen Kräfte Schwingungen ausführen; dadurch

wird die Rotationsebene der Kreisel geändert, und die dabei auftretenden Kräfte modificiren die Schwingungen.

Die Gerade, auf der das System in der Ruhelage angeordnet ist, sei die Z-Axe. Senkrecht dazu liegt die X-und Y-Axe in der in Fig. 1 angegebenen Weise.

Wir bringen also das System in beliebiger Weise aus der Ruhelage. Die Coordinaten des Centrums der λ^{ten} Kugel C_λ seien $x_\lambda y_\lambda z_\lambda$; die Richtungscosinus der Kreiselaxe in der λ^{ten} Kugel seien $\varphi_\lambda \psi_\lambda \chi_\lambda$.

Auf die Pole A_λ und B_λ dieser Kugel wirken die Kräfte P_1 und P_2 in der Richtung des Pfeiles. Da wir uns die Schnur vollkommen elastisch denken, so ist ihre Spannung proportional der jeweiligen Länge. Es ist also

$$P_1 = -\frac{p}{l} \cdot \overline{A_{\lambda-1} A_\lambda}; \quad P_2 = \frac{p}{l} \overline{B_\lambda B_{\lambda+1}}.$$

Die rechtwinkeligen Componenten ergeben sich leicht:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{p}{l}[x_{\lambda-1} - x_\lambda + \rho(\varphi_{\lambda-1} + \varphi_\lambda)]; & X_2 &= \frac{p}{l}[x_{\lambda+1} - x_\lambda - \rho(\varphi_{\lambda+1} + \varphi_\lambda)] \\ Y_1 &= \frac{p}{l}[y_{\lambda-1} - y_\lambda + \rho(\psi_{\lambda-1} + \psi_\lambda)]; & Y_2 &= \frac{p}{l}[y_{\lambda+1} - y_\lambda - \rho(\psi_{\lambda+1} + \psi_\lambda)] \quad (1) \\ Z_1 &= \frac{p}{l}[z_{\lambda-1} - z_\lambda + \rho(\chi_{\lambda-1} + \chi_\lambda)]; & Z_2 &= \frac{p}{l}[z_{\lambda+1} - z_\lambda - \rho(\chi_{\lambda+1} + \chi_\lambda)] \end{aligned}$$

für die translatorische Bewegung des Schwerpunktes der Kugel ist $(X_1 + X_2)\ldots$ massgebend; für die Drehung der Kugel jedoch $(X_2 - X_1)\ldots$

Um letztere berechnen zu können, führen wir das Coordinatensystem $\xi\eta\zeta$ ein, das mit dem Kreisel fest verbunden sein soll, derart, dass die Kreiselaxe zur ζ-Axe wird, und dessen Lage in Bezug auf das fixe Coordinatensystem wir durch die Euler'schen Winkel ABC bestimmen. Setzen wir zur Kürze $\cos A = a$; $\sin A = \alpha$; $\cos B = b$; $\sin B = \beta$; $\cos C = c$; $\sin C = \gamma$, so sind die Richtungscosinus der $\xi\eta\zeta$-Axen in Bezug auf das xyz-System durch folgendes Schema bestimmt:

	X	Y	Z
ξ	$ab+\alpha\beta c$	$\alpha b-a\beta c$	$-\beta\gamma$
η	$a\beta-\alpha bc$	$\alpha\beta+abc$	$+b\gamma$
ζ	$\alpha\gamma=\varphi$	$-a\gamma=\psi$	$c=\chi$

Die Winkelgeschwindigkeiten des Kreisels in Bezug auf die $\xi\eta\zeta$-Axen seien $\lambda\mu\nu$, dann ist

$$\begin{aligned} \lambda &= -\beta\gamma\dot{A}+b\dot{C} \\ \mu &= b\gamma\dot{A}+\beta\dot{C} \\ \nu &= c\dot{A}-\dot{B} \end{aligned} \tag{2}$$

(wobei $\dot{A}=\frac{dA}{dt}$ u. s. w.).

Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Kreisels in Bezug auf die Rotationsaxe mit J, in Bezug auf eine dazu senkrechte Axe mit G, ferner mit DEF die Drehungsmomente. welche die elastischen Kräfte in Bezug auf die $\xi\eta\zeta$-Axen erzeugen, so lauten die Euler'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} G\frac{d\lambda}{dt} &= (G-J)\mu\nu+D \\ G\frac{d\mu}{dt} &= -(G-J)\lambda\nu+E \\ J\frac{d\nu}{dt} &= F \end{aligned} \tag{3}$$

(Eigentlich sollte den Grössen $ABC\lambda\mu\nu\ldots$ der Index λ hinzugefügt werden; solange aber kein Missverständniss zu fürchten ist, soll er der Kürze wegen fortgelassen werden.)

Die Grössen DEF sind leicht zu bilden. Die Gleichungen (3) im Verein mit den sich für die translatorische Bewegung des Schwerpunktes ergebenden drei Differentialgleichungen hätte man für jede der n Kugeln zu bilden. Dann hätte man $6n$ Differentialgleichungen mit $6n$ dependenten Variabeln $x_\lambda y_\lambda z_\lambda A_\lambda B_\lambda C_\lambda$, welche die Bewegung unseres Systems vollständig bestimmen.

Da jedoch sehr wenig Aussicht vorhanden ist, dass die Integration dieser Differentialgleichungen gelinge, wollen wir gleich jetzt ein particuläres Integral suchen, welches circularen

Schwingungen entspricht. Dadurch, dass wir dann die sich hieraus ergebenden Werthe der Variabeln in unsere allgemeinen Differentialgleichungen einsetzen, können wir uns überzeugen dass diese circularen Schwingungen mit den mechanischen Bedingungen unseres Systems nicht in Widerspruch sind.

Wir wollen also sehen, ob eine Bewegung möglich ist, bei der folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Mittelpunkte und Kreiselaxen sämmtlicher Kugeln sollen in einer Ebene liegen, welche auch die Ruhelage der Saite enthält.

2. Diese Ebene soll sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit um die Z-Axe drehen.

3. Jede Kreiselaxe soll mit der Z-Axe einen Winkel einschliessen, der sich nicht mit der Zeit ändert.

4. Die Z-Coordinate jedes Kugelcentrums soll constant sein. Bezeichnen wir den Winkel, den die unter 1. definirte Ebene mit der YZ-Ebene einschliesst, etwa mit ω, den senkrechten Abstand des Centrums der λ^{ten} Kugel von der Z-Axe mit R_λ, so ist der mathematische Ausdruck unserer Bedingungen:

$$x_\lambda = R_\lambda \sin\omega;\quad y_\lambda = R_\lambda \cos\omega;\quad z_\lambda = \text{const.}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \text{const.} \tag{4}$$

$$C = \text{const};\quad A = 180-\omega,\ \text{also}\ \alpha = \sin\omega$$

$$a = -\cos\omega.$$

(Von der Richtigkeit der letzten drei Gleichungen überzeugt man sich am sichersten, wenn man ein neues Coordinatensystem einführt, etwa $X'Y'Z'$, derart, dass die Z'-Axe der Z-Axe im Abstand R_λ parallel läuft, während die Y'-Axe in die Verlängerung von R_λ fällt und sich also gleichzeitig mit diesem mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $\dot\omega$ um die Z-Axe dreht.)

Dann werden die Grössen $\lambda\mu\nu$:

$$\lambda = \beta\gamma\dot\omega,\quad \mu = -b\gamma\dot\omega,\quad \nu = -c\dot\omega - \dot B$$

und die Drehungsmomente, wenn wir wieder den Index λ beifügen:

$$D_\lambda = \frac{\rho p}{l} b_\lambda \{[R_{\lambda+1} - R_{\lambda-1} - \rho(\gamma_{\lambda-1} + \gamma_{\lambda+1})] c_\lambda - $$
$$- [z_{\lambda+1} - z_{\lambda-1} - \rho(c_{\lambda-1} + c_{\lambda+1})] \gamma_\lambda \}$$

$$E = \frac{\rho p}{l} \beta_\lambda \{[R_{\lambda+1} - R_{\lambda-1} - \rho(\gamma_{\lambda-1} + \gamma_{\lambda+1})] c_\lambda - $$
$$- [z_{\lambda+1} - z_{\lambda-1} - \rho(c_{\lambda-1} + c_{\lambda+1})] \gamma_\lambda \}$$

$$F = 0.$$

Die beiden ersten Euler'schen Gleichungen (1) werden identisch:

$$G \gamma_\lambda c_\lambda \dot{\omega}^2 + J \gamma_\lambda \dot{\omega} \nu_\lambda = \frac{\rho p}{l} \{[z_{\lambda+1} - z_{\lambda-1} - \rho(c_{\lambda-1} + c_{\lambda+1})] \gamma_\lambda -$$
$$- [R_{\lambda+1} - R_{\lambda-1} - \rho(\gamma_{\lambda-1} + \gamma_{\lambda+1})] c_\lambda \}. \quad (5)$$

Die dritte wird:

$$\nu = \text{const.}$$

Für das Zustandekommen dieser circularen Schwingungen ist aber ausserdem noch nothwendig, dass in der Richtung der Z-Axe keine translatorische Kraft auf das Kugelcentrum wirkt und dass die Centrifugalkraft den Spannkräften das Gleichgewicht hält; es muss also:

$$(Y_1 + Y_2) \cos \omega + (X_1 + X_2) \sin \omega = -m R_\lambda \dot{\omega}^2$$
$$Z_1 + Z_2 = 0$$

sein.

Setzt man die Werthe für $X_1 X_2 \ldots$ aus den Gleichungen (1) ein, so erhält man durch Substitution der Werthe (4):

$$\frac{p}{l} [R_{\lambda-1} + R_{\lambda+1} - 2 R_\lambda + \rho(\gamma_{\lambda-1} - \gamma_{\lambda+1})] = -m R \dot{\omega}^2. \quad (6)$$

$$z_{\lambda-1} + z_{\lambda+1} - 2 z_\lambda + \rho(c_{\lambda-1} - c_{\lambda+1}) = 0. \quad (7)$$

Die zwei letzten Gleichungen hätte man im Vereine mit Gleichung (5) für $\lambda = 1, 2 \ldots n$ zu bilden und erhielte so $3n$ Gleichungen mit den $3n$ Unbekannten

$$z_\lambda R_\lambda C_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots n).$$

Nach Elimination dieser $3n$ Unbekannten würde man eine Endgleichung für $\dot{\omega}$ erhalten, welche erfüllt werden muss, damit unsere circularen Schwingungen möglich seien.

Da jedoch die Gleichungen in Bezug auf C nicht einmal rational sind (es kommt ja $c_\lambda = \cos C_\lambda$; $\gamma_\lambda = \sin C_\lambda$ vor), so dürfte die Durchführung dieser Rechnungen wohl unmöglich sein.

Wir wollen uns daher folgende Beschränkung auferlegen: Es sollen die Excursionen R_λ klein gegen die Länge der Saite sein; und ebenso sollen die Winkel C_λ kleine Grössen $= \varepsilon_\lambda$ sein, derart, dass man

$$c_\lambda = \cos C_\lambda = 1; \quad \gamma_\lambda \doteq \sin C_\lambda = C_\lambda = \varepsilon_\lambda$$

setzen kann.

Aus Gleichung (7) folgt dann sofort

$$z_{\lambda-1} + z_{\lambda+1} - 2 z_\lambda = 0;$$

wir können also

$$z_{\lambda+1} - z_{\lambda-1} = 2l + 4\rho$$

setzen.

Benützen wir dies, so werden die Gleichungen (5) und (6):

$$(G\dot{\omega}^2 + J\dot{\omega}\nu)\varepsilon_\lambda = \frac{\rho p}{l}\{2(l+\rho)\varepsilon_\lambda - (R_{\lambda+1} - R_{\lambda-1}) + \rho(\varepsilon_{\lambda-1} + \varepsilon_{\lambda+1})\} \quad (8)$$

und

$$\frac{p}{l}[R_{\lambda-1} + R_{\lambda+1} - 2R_\lambda + \rho(\varepsilon_{\lambda-1} - \varepsilon_{\lambda+1})] = -mR\dot{\omega}^2 \quad (9)$$

$$(\lambda = 1, 2 \ldots n).$$

Jetzt haben wir nur mehr $2n$ linear homogene Gleichungen, deren Resultante wir leicht bilden können; sie lautet, wenn wir zur Kürze

$$A = \frac{l}{p}\left(G\dot{\omega}^2 + J\nu\dot{\omega} - 2\frac{\rho p}{l}(l+\rho)\right)$$

$$B = \frac{l}{p}\left(m\dot{\omega}^2 - 2\frac{p}{l}\right)$$

setzen,

$$0=\begin{vmatrix} A & 0 & -\rho^2 & \rho & & & & & \\ 0 & B & -\rho & 1 & & & & & \\ -\rho^2 & -\rho & A & 0 & -\rho^2 & \rho & & & \\ \rho & 1 & 0 & B & -\rho & 1 & & & \\ & & -\rho^2 & -\rho & A & 0 & -\rho^2 & \rho & \\ & & \rho & 1 & 0 & B & -\rho & 1 & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}$$

(an die nicht ausgefüllten Stellen sind Nullen zu denken).

Man findet, dass diese Determinante den Werth

$$\frac{1}{\mu-\nu}[8\rho^2(\mu^n-\nu^n)+\mu^{n+1}-\nu^{n+1}]$$

hat, wobei μ und ν die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2-x(2AB-8\rho^2)+4(A-B\rho^2)^2=0$$

sind.

Für ω erhält man auf diese Weise eine Gleichung $(4n)^{\text{ten}}$ Grades.

2.

Die Auflösung dieser Gleichung stösst jedoch sehr bald auf unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten.

Wir wollen uns daher gleich dem Falle zuwenden, dass eine unendliche Zahl solcher Kugeln vorhanden sei, deren jede unendlich klein sein soll. Um diesen Fall mathematisch behandeln zu können, müssen wir annehmen, dass zu Anfang der Zeit die Grössen R_λ und ε_λ, welche die Lage jeder Kugel bestimmen, sich continuirlich von Ort zu Ort verändern; dann wird dies offenbar auch im Verlauf der Bewegung der Fall sein, und wir erhalten statt des Systems von $2n$ algebraischen Gleichungen zwei Differentialgleichungen. Ist L die Gesammtlänge der Saite, so ist jetzt

$$\frac{L}{n}=l+2\rho$$

eine gegen L sehr kleine Grösse. Wir setzen also:

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon; \quad \varepsilon_{\lambda-1} = \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \cdot \frac{L}{n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \cdot \frac{L^2}{n^2};$$

$$\varepsilon_{\lambda+1} = \varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \frac{L}{n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \frac{L^2}{n^2}$$

$$R_\lambda = R; \quad R_{\lambda-1} = R - \frac{\partial R}{\partial z} \frac{L}{n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \frac{L^2}{n^2};$$

$$R_{\lambda+1} = R + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{L}{n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \frac{L^2}{n^2}.$$

Wir haben nun die anderen in (8) und (9) vorkommenden Grössen in einer Weise auszudrücken, dass ihre Grössenordnung zu Tage tritt.

Da $l+2\rho = \frac{L}{n}$, können wir

$$\rho = \alpha \frac{L}{n}; \quad l = (1-2\alpha) \frac{L}{n}$$

setzen, wobei

$$\frac{1}{2} > \alpha > 0.$$

Führen wir die Liniendichte der Seite σ ein, so ist $nm = L\sigma$ oder $m = \sigma \frac{L}{n}$.

Die Trägheitsmomente G und J sind gewiss von der Grössenordnung $m\rho^2$; wir setzen etwa:

$$J = im\rho^2 = i\sigma\alpha^2 \frac{L^3}{n^3}$$

$$G = gm\rho^2 = g\sigma\alpha^2 \frac{L^3}{n^3}.$$

Führen wir dies in (8) und (9) ein, so erhalten wir

$$\varepsilon \left[g\sigma\alpha^2 \frac{L^3}{n^3} \dot{\omega}^2 + i\sigma\alpha^2 \frac{L^3}{n^3} \nu\dot{\omega} - 2p \frac{\alpha}{1-2\alpha} \frac{L}{n} \right] =$$

$$= -2p \frac{\alpha}{1-2\alpha} \frac{L}{n} \frac{dR}{dz} + \frac{\alpha^2 p}{1-2\alpha} \frac{L^3}{n^3} \frac{d^2\varepsilon}{dz^2}$$

und

$$\frac{p}{1-2\alpha}\,\frac{L}{n}\,\frac{d^2R}{dz^2}-2p\,\frac{\alpha}{1-2\alpha}\,\frac{L}{n}\,\frac{d\varepsilon}{dz}=-\sigma\frac{L}{n}R\dot{\omega}^2.$$

In der zweiten dieser Gleichungen kann man sofort $\frac{L}{n}$ wegdividiren; dann steht auf beiden Seiten nur Endliches. In der ersten würden die Glieder, die mit $\frac{L^3}{n^3}$ multiplicirt sind, gegen die übrigen verschwinden; damit also die Wirbelbewegung einen merkbaren Einfluss hat, muss ν sehr gross von der Ordnung $\frac{1}{\frac{L^2}{n^2}}$ sein; wir setzen also etwa:

$$\nu=\frac{N}{\frac{L^2}{n^2}}\,.$$

Das Glied mit g als Factor fällt weg.

Wir erhalten also die zwei Differentialgleichungen:

$$\varepsilon\left(i\sigma\alpha^2N\dot{\omega}-2p\frac{\alpha}{1-2\alpha}\right)+\frac{2p\alpha}{1-2\alpha}\,\frac{dR}{dz}=0$$

$$\frac{p}{1-2\alpha}\,\frac{d^2R}{dz^2}-\frac{2p\alpha}{1-2\alpha}\,\frac{d\varepsilon}{dz}+\sigma\dot{\omega}^2R=0.$$

Ihr Integral ist, wenn wir uns auf den Fall beschränken, dass die Saite als Ganzes schwingt, wenn wir also nur den »Grundton« untersuchen:

$$R=R_0\sin\frac{\pi}{L}z;\quad \varepsilon=\frac{R_0}{1-\dot{\omega}\,\frac{Ni\sigma\alpha(1-2\alpha)}{2p}}\,\frac{\pi}{L}\cos\frac{\pi}{L}z. \qquad (9a)$$

Der für das Bestehen dieser Integrale nothwendige Zusammenhang zwischen L und den Coëfficienten der Differentialgleichungen liefert für $\dot{\omega}$ die Gleichung dritten Grades:

$$\dot{\omega}^3-\frac{2p}{Ni\sigma\alpha(1-2\alpha)}\dot{\omega}^2-\frac{p\pi^2}{\sigma L^2(1-2\alpha)}\dot{\omega}+\frac{2p^2\pi^2}{L^2\sigma^2\alpha iN(1-2\alpha)}=0.$$

(Würden die Kugeln keine Wirbel enthalten, so würde sich unser Problem nicht wesentlich von dem classischen Beispiel unterscheiden, das Lagrange zur Erläuterung der Theorie der schwingenden Saiten berechnet hat; wir würden also zwei entgegengesetzte gleiche Werthe für $\dot{\omega}$ erhalten; enthalten die Kugeln Kreiseln, so würde man von vorneherein zwei entgegengesetzt ungleiche Werthe für $\dot{\omega}$, also eine vollständige Gleichung zweiten Grades erwarten; die Gleichung dritten Grades, die wir da erhalten haben, liess sich eigentlich nicht recht voraussehen.)

Setzen wir:

$$\frac{2p}{i\sigma\alpha(1-2\alpha)} = C_1; \quad \frac{p\pi^2}{L^2(1-2\alpha)\sigma} = C_2,$$

so wird Gleichung (10), die wir vielleicht mit $f(\dot{\omega}) = 0$ bezeichnen:

$$f(\dot{\omega}) = \dot{\omega}^3 - \frac{C_1}{N}\dot{\omega}^2 - C_2\dot{\omega} + \frac{C_1 C_2}{N}(1-2\alpha) = 0.$$

Es ist nun

$$f(-\infty)<0;\ f(0)>0;\ f(+\sqrt{C_2}) = -2\alpha\frac{C_1 C_2}{N}<0;\ f(+\infty)>0;$$

daher besitzt unsere Gleichung lauter reelle Wurzeln, von denen eine negativ, die anderen positiv sind.

Wir haben es also mit dem sogenannten casus irreducibilis zu thun und können daher die Wurzeln der Gleichung nicht in geschlossener algebraischer Form angeben.

Dagegen gelingt es leicht, die Grenzen der Wurzeln anzugeben.

Wir bezeichnen die Wurzeln unserer Gleichung mit $\dot{\omega}_1 < \dot{\omega}_2 < \dot{\omega}_3$. Betrachten wir zuerst die Grenzfälle.

Ist $N = 0$, so ist

$$\dot{\omega}_1^0 = -\sqrt{C_2(1-2\alpha)}; \quad \dot{\omega}_2^0 = +\sqrt{C_2(1-2\alpha)}; \quad \dot{\omega}_3^0 = \infty.$$

(Von der Richtigkeit des letzten Werthes überzeugt man sich dadurch, dass $f\left[\frac{C_1}{N}\right] = -2\alpha\frac{C_1 C_2}{N} < 0$ ist, die letzte Wurzel also grösser als $\frac{C_1}{N}$ sein muss; da aber $\frac{C_1}{N}$ für $N = 0$ unendlich wird, so muss dies umso mehr von $\dot{\omega}_3^0$ gelten.)

Ist $N = \infty$, so ist

$$\dot{\omega}_1^\infty = -\sqrt{C_2}; \quad \dot{\omega}_2^\infty = 0; \quad \dot{\omega}_3^\infty = +\sqrt{C_2}.$$

Nun ergibt sich aber leicht, dass

$$f(\dot{\omega}_1^0) = 2\alpha C_2\sqrt{C_2(1-2\alpha)} > 0; \quad f(\dot{\omega}_2^0) = -2\alpha C_2\sqrt{C_2(1-2\alpha)} < 0$$

$$f(\dot{\omega}_1^\infty) = -2\alpha\frac{C_1 C_2}{N} < 0; \quad f(\dot{\omega}_3^\infty) = -2\alpha\frac{C_1 C_2}{N} < 0.$$

Es liegt also

$\dot{\omega}_1$ zwischen $\dot{\omega}_1^\infty$ und $\dot{\omega}_1^0$,
$\dot{\omega}_2$ zwischen 0 und $\dot{\omega}_2^0$,
$\dot{\omega}_3$ zwischen $\dot{\omega}_3^\infty$ und ∞,

und zwar durchlaufen die drei Wurzeln die hier angegebenen Bereiche vollständig, wenn N von 0 bis ∞ lauft. (Man kann sich auch in mathematisch strenger Weise davon überzeugen, wenn man die Differentialquotienten von $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$ und $\dot{\omega}_3$ nach N bildet; dann ergibt sich nämlich, dass letztere innerhalb der oben angegebenen Bereiche nicht verschwinden können.)

Man sieht ferner, dass immer

$$|\dot{\omega}_3| > |\dot{\omega}_1| > |\dot{\omega}_2|.$$

Endlich kann man noch $\frac{C_1}{2N} + \sqrt{\frac{C_1^2}{4N^2} + C_2}$ als obere Grenze der positiven Wurzeln angeben.

Wir können uns jetzt eine Vorstellung über den Verlauf circularer Schwingungen unserer Saite bilden. Sei etwa die Wirbelgeschwindigkeit N Anfangs $= 0$. Die Saite soll ebene transversale Schwingungen ausführen; wir können in bekannter Weise diese Schwingung durch zwei in entgegengesetztem Sinne vorsichgehende circulare Schwingungen ersetzen. Nimmt nun N einen von Null verschiedenen Werth an, so wird die Rotationsgeschwindigkeit der letzteren in verschiedener Weise geändert.

Die in negativem Sinne rotirende Schwingung (den Sinn von N positiv vorausgesetzt) erlangt die Geschwindigkeit $\dot{\omega}_1$.

Die in positivem Sinne rotirende kann die Geschwindigkeit $\dot{\omega}_2$ oder $\dot{\omega}_3$ erlangen, oder sie kann sich weiters in zwei Schwingungen zerlegen, die mit den Rotationsgeschwindigkeiten $\dot{\omega}_2$ und $\dot{\omega}_3$ vor sich gehen. Im ersten und zweiten Fall bleibt die Schwingung eben, aber ihre »Polarisationsebene« wird sich drehen, und zwar in entgegengesetztem Sinne, je nachdem der erste oder zweite Fall eintritt. Im dritten Fall jedoch ergibt sich kein einfaches Resultat; es resultirt vielmehr eine Bewegung, die sich aus einer ebenen Schwingung von veränderlicher Polarisationsebene und aus einer circularen Schwingung zusammensetzt. Wie gross die Amplituden dieser Componenten ausfallen, in welchem Sinne die Rotationen vor sich gehen, kann man nicht allgemein angeben, da die theoretische Möglichkeit für jede der drei Wellen die gleiche ist. Wahrscheinlich hängt dies auch von der Art der Anregung der Kreisel ab, ob zum Beispiele N erst allmälig einen von Null verschiedenen Werth erlangt, oder ob N plötzlich sehr gross gemacht wird.

Wir wollen noch einen Blick auf die den verschiedenen Werthen von $\dot{\omega}$ entsprechenden Stellungen der Kreiselaxe werfen. Sie liegt, wie wir gesehen haben, in einer Ebene mit der Ruhelage der Saite (der Z-Axe) und schliesst mit der Z-Axe den (kleinen) Winkel ε ein. Letzterer ist durch Gleichung (9a) gegeben:

$$\varepsilon = \frac{1}{1-\dot{\omega}\dfrac{Ni\sigma\alpha(1-2\alpha)}{2p}} \cdot \frac{dR}{dx},$$

oder in der früher bereits angewandten Bezeichnungsweise:

$$\varepsilon = \frac{1}{1-\dot{\omega}\dfrac{N}{C_1}} \frac{dR}{dx}.$$

Da R und somit auch $\frac{dR}{dx}$ klein vorausgesetzt sind, so ist $\frac{dR}{dx}$ der Winkel, den die Tangente an die Seite mit der Ruhelage einschliesst. Wir bezeichnen die den Werthen $\dot{\omega}_1 \dot{\omega}_2 \dot{\omega}_3$ entsprechenden Werthe von ε mit $\varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_3$.

Da nun $\dot{\omega}_1 < 0$; ferner stets $f\left(\frac{C_1}{N}\right) < 0$, also $0 < \dot{\omega}_2 < \frac{C_1}{N} < \dot{\omega}_3$ ist, so sehen wir dass:

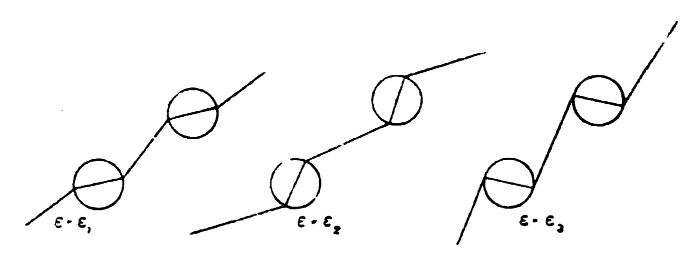


Fig. 2.

ε_1 und ε_2 dasselbe Vorzeichen haben wie $\frac{dR}{dx}$, und dass

$$\varepsilon_1 < \left|\frac{dR}{dx}\right| < \varepsilon_2,$$

dagegen ε_3 das entgegengesetzte Vorzeichen von $\frac{dR}{dx}$ hat.

Figur 2 repräsentirt diese Fälle.

3.

Es ist bekannt, dass durch Interferenz von zwei entgegengesetzt rotirenden, sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzenden, fortschreitenden, circularen Wellen eine stehende circulare Schwingung entsteht. Man kann sich also auch umgekehrt eine stehende circulare Welle durch zwei fortschreitende Wellenzüge entstanden denken. Ist $\dot{\omega}$ die Rotationsgeschwindigkeit der ersteren, sind c und $-c$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der letzteren, so ist:

$$c = \frac{\lambda \dot{\omega}}{2\pi}. \tag{11}$$

Wir können uns auch unsere wirbelerfüllte Seite nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert denken, und fragen uns, ob wir auch hier die stehende Schwingung, deren Rotationsgeschwindigkeit wir berechnet haben, auf diese Weise entstanden denken dürfen. Dann wäre auch die Möglichkeit fortschreitender circulärer Wellen gegeben, deren Geschwindigkeit

mit dem früheren $\dot{\omega}$ in dem durch (11) angegebenen Zusammenhang steht. Von vorneherein lässt sich die Frage nicht beantworten. Wir haben ja unsere bisherigen Rechnungen nur unter der Voraussetzung durchgeführt, dass sich die Kreiselaxen nicht aus der Ebene herausbewegen, die den betreffenden Kugelmittelpunkt und die Z-Axe enthält; und bei dieser Art von Wellen kann diese Bedingung nicht erfüllt bleiben.

Hingegen gelingt es jetzt leicht, auch direct die Möglichkeit solcher fortschreitenden circularen Wellen nachzuweisen. Natürlich müssen wir gleich Anfangs annehmen, dass die Saite unendlich lang sei und dass Grösse und Abstand unserer Kreisel gegen die Einheit verschwindend sei.

Behalten wir dieselbe Bezeichnungsweise wie früher, so erhält man für die elastischen Kräfte:

$$X_2-X_1=\frac{2p}{l}dz\left(\frac{\partial x}{\partial z}-2\alpha\varphi\right)$$

$$Y_2-Y_1=\frac{2p}{l}dz\left(\frac{\partial y}{\partial z}-2\alpha\psi\right)$$

$$Z_2-Z_1=\frac{2p}{l}dz(1-2\alpha\chi)$$

und

$$X=X_1+X_2=\frac{p}{l}dz\left(dz\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-2\rho\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$Y=Y_1+Y_2=\frac{p}{l}dz\left(dz\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-2\rho\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)$$

$$Z=Z_1+Z_2=0.$$

Da alle Winkelgeschwindigkeiten, wie wir schon wissen, gegen ν verschwinden, werden die Winkelbeschleunigungen

$$\dot{\lambda}=\mu\nu \quad\text{und}\quad \dot{\mu}=-\lambda\nu,$$

und daher die Euler'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned}J\nu(bC\dot{A}+\beta\dot{C})&=D\\ J\nu(\beta C\dot{A}-b\dot{C})&=E\\ \nu&=\text{const.}\end{aligned}\tag{12}$$

Fortschreitenden circularen Schwingungen würden folgende Werthe von x und y entsprechen:

$$x = R_0 \cos\left(\frac{t}{\tau} - j\frac{x}{\lambda}\right)2\pi; \quad y = kR_0 \sin\left(\frac{t}{\tau} - j\frac{x}{\lambda}\right)2\pi.$$

Hierin sollen die Grössen k und j gleich ± 1 sein; sie sind eingeführt, um die verschiedenen Arten circularer Schwingungen gleichzeitig in Rechnung zu ziehen; offenbar ist j für die Richtung der Fortpflanzung, k für den Sinn der Drehung massgebend.

Ferner setzen wir noch

$$a = \cos A = f \cos\left(\frac{t}{\tau} - j\frac{z}{\lambda}\right)2\pi$$

$$\alpha = \sin A = g \sin\left(\frac{t}{\tau} - j\frac{z}{\lambda}\right)2\pi,$$

wobei gleichfalls f und g gleich ± 1 sein sollen.

Die elastischen Kräfte haben wieder der Centrifugalkraft das Gleichgewicht zu halten; es muss also

$$X \cos\vartheta + kY \sin\vartheta = -mR_0 \frac{4\pi^2}{\tau^2} \tag{13}$$

sein.

Führt man die angegebenen Substitutionen ein, so liefern die Gleichungen (12):

$$\dot{C} = 0$$

$$k.J\nu C\frac{2\pi}{\tau} - \frac{2\rho p}{l} dz\left(j\frac{2\pi}{\lambda}R_0 - C\right) = 0. \tag{14}$$

Dabei musste aber $fg = k$ gesetzt werden, sonst erhält man kein einfaches Resultat.

Die Gleichung (13) liefert:

$$mR_0 \frac{4\pi^2}{\tau^2} = \frac{p\,dz}{l}\left\{\frac{4\pi^2}{\lambda^2}R_0 dz - 2j\rho C\frac{2\pi}{\lambda}\right\}. \tag{15}$$

Setzen wir wieder:

$$J\nu = i\sigma\alpha^2 N dz; \; \rho = \alpha dz; \; l = (1 - 2\alpha)dz; \; m = \sigma dz$$

(α hat hier natürlich nicht die Bedeutung sin A, sondern $\frac{\rho}{2l+\rho}$), eliminiren aus den sich ergebenden Gleichungen die Gröse C und setzen wir noch etwa

$$\frac{2\pi}{\tau} = q,$$

so erhalten wir die Gleichung:

$$-q^3 k - q^2 \frac{2p}{i\sigma\alpha(1-2\alpha)N} + qk\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{p}{\sigma(1-2\alpha)} + \\ + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{2p^2}{i\sigma^2\alpha N(1-2\alpha)} = 0.$$

Setzen wir endlich $\frac{\lambda}{2} = L$ und vergleichen wir dieses Resultat mit Gleichung (10).

Sind $q_1 q_2 q_3$ die Wurzeln der letzten Gleichung, so ist offenbar:

$$\text{für } k = -1;\ q_1 = \dot{\omega}_1,\quad q_2 = \dot{\omega}_2,\quad q_3 = \dot{\omega}_3;$$
$$\text{für } k = +1;\ q_1 = -\dot{\omega}_1,\ q_2 = -\dot{\omega}_2;\ q_3 = -\dot{\omega}_3.$$

(Es ist zu beachten, dass das Vorzeichen j keinen Einfluss auf das Resultat hat.)

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der circularen Wellen ist

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{q\lambda}{2\pi}.$$

Beachten wir, dass $\dot{\omega}_1 < 0$ ist, so sehen wir, dass sich nach jeder Richtung drei circulare Wellen fortpflanzen, deren Geschwindigkeiten den absoluten Betrag c_1, c_2, c_3 haben. Und zwar sind die Wellen, deren Geschwindigkeit c_2 und c_3, rechts, die, deren Geschwindigkeit c_1 ist, links circular polarisirt.

Dabei ist

$$c_1 = \left|\frac{\omega_1\lambda}{2\pi}\right|;\ c_2 = \left|\frac{\omega_2\lambda}{2\pi}\right|;\ c_3 = \left|\frac{\omega_3\lambda}{2\pi}\right|.$$

4.

Um nun eine, wenn auch sehr entfernte Analogie mit den Erscheinungen der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes im magnetischen Felde herzustellen, denken wir uns die Wirbelgeschwindigkeit N in der ganzen Saite gleich Null, mit Ausnahme eines Stückes D, längs dessen sie einen von Null verschiedenen Werth haben soll.

Es soll nun eine planpolarisirte Welle die Begrenzung dieses Stückes D treffen. Wir können sie schon vorher in zwei entgegengesetzt rotirende circulare Wellen zerlegen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten innerhalb D alterirt werden. Die eine erhält die Geschwindigkeit c_1; die andere dagegen entweder die Geschwindigkeit c_2 oder c_3, oder sie zerlegt sich wieder in zwei Wellen, die beide mit den Geschwindigkeiten c_2 und c_3 fortschreiten. Im ersten Falle ist die Polarisationsebene nach Austritt aus dem Stück D um den Winkel:

$$\delta_1 = \frac{D\pi}{\tau}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right), \tag{16}$$

im zweiten Falle um den Winkel:

$$\delta_2 = \frac{D\pi}{\tau}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3}\right) \quad (17[1])$$

gedreht. (Man beachte, dass diese Grössen entgegengesetztes Vorzeichen haben, da $c_3 > c_1 > c_2$.)

Im dritten Falle ist das Resultat wieder kein einfaches, indem nach Austritt der Welle aus dem Stück D sowohl eine geradlinig, als auch eine circular polarisirte Welle erscheinen, deren Amplituden wir nicht angeben können, da wir ja nicht wissen, in welchem Verhältniss sich die Welle bei Eintritt in das »drehende Medium« spaltet.

Statt (16) und (17) können wir auch schreiben

$$\delta_1 = \frac{2D\pi^2}{\tau\lambda}\left(\frac{1}{|\dot{\omega}_1|} - \frac{1}{\dot{\omega}_2}\right) = \frac{2D\pi^2 c}{\lambda^2}\left(\frac{1}{|\dot{\omega}_1|} - \frac{1}{\dot{\omega}_2}\right)$$

$$\delta_2 = \frac{2D\pi^2}{\tau\lambda}\left(\frac{1}{|\dot{\omega}_1|} - \frac{1}{\dot{\omega}_3}\right) = \frac{2D\pi^2 c}{\lambda^2}\left(\frac{1}{|\dot{\omega}_1|} - \frac{1}{\dot{\omega}_3}\right),$$

---

[1] Siehe etwa F. Neumann, Vorles. über Optik, herausgegeben von Dorn. S. 250.

wenn c die Geschwindigkeit der Welle an den Orten der Saite bedeutet, $N = 0$ ist.

Wir wollen noch den ersten Fall betrachten, unter der Voraussetzung, dass N sehr klein ist; dann ist, wie wir gesehen haben, $\dot{\omega}_3$ sehr gross; wir können daher näherungsweise

$$\frac{1}{|\dot{\omega}_1|} - \frac{1}{\dot{\omega}_2} = -\frac{1}{\dot{\omega}_1} - \frac{1}{\dot{\omega}_2} = -\frac{1}{\dot{\omega}_1} - \frac{1}{\dot{\omega}_2} - \frac{1}{\dot{\omega}_3}$$

setzen; und dieser letzte Ausdruck lässt sich als symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung (10) leicht durch ihre Coëfficienten ausdrücken. Er ist gleich

$$-\frac{\dot{\omega}_1\dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_1\dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_2\dot{\omega}_3}{\dot{\omega}_1\dot{\omega}_2\dot{\omega}_3} = \frac{\alpha i \sigma N}{2p}.$$

Dann würde also

$$\delta_1 = \frac{D\pi^2 c\alpha i\sigma . N}{\lambda^2 . 2p} = A . \frac{N}{\lambda^2}.$$

Die Drehung der Polarisationsebene ist also dann in erster Annäherung proportional der Wirbelgeschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge. (Es würde dies auch in erster Annäherung mit der Erfahrung übereinstimmen, wenn man N der Magnetisirung proportional setzt, was man ja zu thun pflegt.)

Das Eintreffen von Fall 1 ist physikalisch am wahrscheinlichsten, da die hier vorkommenden Geschwindigkeiten mit wachsendem N continuirlich aus ihren für $N = 0$ geltenden Werthen entstehen. Mathematisch sind aber auch hier alle drei Fälle gleichberechtigt.

Ich beabsichtige, die Erscheinungen in einem sich nach Art dieser Saite dreidimensional erstreckenden Medium zu untersuchen. Es ist möglich, dass man dann aus den Grenzbedingungen einen Schluss auf die Grösse der Amplituden machen kann, die den einzelnen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten entsprechen. Es ist ja wohl sehr wahrscheinlich, dass sich auch in einem solchen Medium drei verschiedene Geschwindigkeiten ergeben.

Jedenfalls dürfte aber die vorliegende Arbeit beweisen, dass die Erscheinungen, zu deren Erläuterung unser Modell dienen soll, verwickelter sind, als es von vorneherein scheint.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Hofrath Prof. Boltzmann unternommen. Es sei mir auch an dieser Stelle gestattet, demselben dafür, wie auch für seine gütige Hilfe meinen wärmsten Dank auszudrücken.

Über den Rückstand und die Leitfähigkeit von Paraffin und Schwefel

von

Dr. **Fritz Hasenöhrl.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juli 1898.)

Es ist durch neuere Arbeiten wohl ausser Zweifel gesetzt, dass es nicht möglich ist, alle Erscheinungen des diëlektrischen Rückstandes der Condensatoren durch Inhomogeneitäten der Nichtleiter zu erklären.[1] Bekanntlich hat Maxwell[2] eine Theorie des geschichteten Dielektricums gegeben, welche sich aus der von ihm aufgestellten Hypothese ergibt, dass sich im Nichtleiter Änderung der Polarisation und galvanische Leitung addiren. Da sich nun eine solche, dem Ohm'schen Gesetze gehorchende Leitung — besonders in festen Isolatoren — sehr schwer nachweisen lässt, wäre es interessant, ganz abgesehen von der Erklärung der übrigen Rückstandserscheinungen, diese Theorie an einem gegebenen geschichteten Diëlektricum zu prüfen, um dann, wenn möglich, einen Schluss auf die Leitfähigkeit seiner Bestandtheile zu ziehen.

Um aber den in Folge Inhomogeneität entstehenden Rückstand sicher constatiren zu können, ist es nöthig, dass die einzelnen Bestandtheile vollkommen oder wenigstens nahezu rückstandsfrei seien, und dies war bei den vor mir untersuchten Substanzen nur bei Paraffin und Schwefel der Fall.

---

[1] Siehe vor Allem die Abhandlung von L. Houllevigue; Annales de l'université de Lyon, 1897; Journ. de Physique, 1897, in der auch eine sehr interessante neue Theorie der Rückstandserscheinungen gegeben ist.

[2] Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus; deutsche Ausgabe, I, S. 471.

(Geeignete Kalkspathplatten, deren Rückstandsfreiheit Rowland und Nichols nachgewiesen haben, standen mir nicht zur Verfügung.) Diese beiden Körper sind aber so ausgezeichnete Isolatoren, dass es auch auf diese Weise bei Paraffin gar nicht, bei Schwefel nur unsicher gelingt, eine Leitfähigkeit nachzuweisen. Die obere Grenze, die sich dagegen mit ziemlicher Sicherheit für die Leitfähigkeit des Schwefels aufstellen lässt, liegt noch unterhalb des Werthes, den Fousserau[1] für diese Grösse angegeben hat, daher es sich vielleicht doch lohnt, meine Versuche wenigstens in Kürze mitzutheilen.

Die Versuchsanordnung war die gewöhnliche. Der zu untersuchende Condensator wird eine bestimmte Zeit hindurch mittelst einer 40elementigen Accumulatorenbatterie mit 85 Volt geladen. Die eine Platte ist stets am Potential der Erde. Dann wird der Condensator mit Hilfe eines eigens dazu construirten Fallpendels während der sich immer gleichbleibenden Zeit von circa 0·4 Secunden kurz geschlossen und darauf sofort mit einem Quadrantenelektrometer verbunden, an dem der Ausschlag abgelesen wird. Die dazu nothwendigen Contacte fielen direct auf die Platten des Condensators, so dass nur der Rückstand des letzteren beobachtet wurde; also der der Zuleitungsdrähte etc. nicht noch eigens eliminirt werden musste. Das Elektrometer gab auf 1 Volt 53 Theilstriche Ausschlag. In dem kleinen Bereich, in den meine Messungen fallen, kann die Capacität constant, der Ausschlag dem Potential proportional gesetzt werden.

Die Maxwell'sche Theorie ist von Arons[2] in eine solchen Beobachtungen angepasste Formel gebracht worden.

Zwischen den Platten eines Condensators befinde sich, der abgeleiteten Platte anliegend, eine diëlektrische Schichte, der allein die Capacität c_2, der Widerstand w zukommt. Hierauf folgt eine Luftschichte, der die Capacität c_1 entspräche; dann die zweite Condensatorplatte. (Letztere wurde bei meinen Versuchen durch drei Paraffinstützen getragen, die etwa 1 mm^2 Querschnitt hatten und gar keinen Rückstand zeigten.) Diese

[1] Landolt und Börnstein, S. 473.

[2] Wied. Ann., 35, S. 291.

zweite Condensatorplatte wird während der Zeit τ auf dem Potential E gehalten, während der Zeit ϑ abgeleitet und dann mit einem Elektrometer von der Capacität γ verbunden. Der Rückstand erzeugt dann auf letzterem nach der Zeit t ein Potential φ, und zwar ist:

$$\varphi = E . \frac{c_1}{c_1 + c_2} \frac{c_1}{\gamma + c_1} \cdot \left(1 - e^{\frac{-\tau}{(c_1+c_2)w}}\right) e^{-\frac{\vartheta}{(c_1+c_2)w}} \left(1 - e^{-\frac{(\gamma+c_1)t}{w(c_2 c_1 + \gamma(c_1+c_2))}}\right).$$

Bei meinen Versuchen war $E = 85$ Volt, $c_1 = 26$ *cm*, $\gamma = 38 \cdot 5$ *cm*, $\vartheta = 0 \cdot 4$ Secunden. Der Radius der Condensatorplatten war $2 \cdot 9$ *cm*.

Paraffin wurde durch Leinwand filtrirt und zwischen den Metallplatten gepresst. Hier war $c_2 = 18 \cdot 8$ *cm*. So präparirt gab Paraffin gar keinen Rückstand. Darauf wurde ein Condensator untersucht, der diese Paraffinschichte und eine Luftschichte von $0 \cdot 8$ *mm* enthielt. Auch dieser Condensator gab gar keinen Rückstand, obwohl die Ladungszeit bis auf 8 Tage erstreckt wurde. (Arons hat einen ähnlichen Versuch gemacht, dabei aber nur 57^m lang geladen. Er erhielt dabei gleichfalls ein negatives Resultat. Ein Blick auf obige Formel lehrt aber, dass bei so geringer Leitfähigkeit die lange Ladungsdauer nicht überflüssig ist.) Der Rückstand blieb also unterhalb der Grenze der Beobachtungsfehler. Da ich einen Ausschlag von 5 Theilstrichen nach 30^m sicher gemerkt hätte, so ist der specifische Widerstand des von mir untersuchten Paraffins bestimmt nicht kleiner als 50000 elektrostatische Einheiten, oder bezogen auf Quecksilber circa $5 . 10^{20}$. (Es ist dies nicht zu verwundern, kann vielmehr als Bestätigung des noch grösseren Werthes dienen, den Braun[1] zu circa $3 . 10^{22}$ angegeben hat.)

Schwefel wurde in heissem Zustande zwischen die Platten gegossen. (Nachträglich konnte ich mich überzeugen dass dabei keine Luftblasen entstanden sind.) Die Leitfähigkeit des festen Schwefels ist allerdings bei höherer Temperatur von

[1] Landolt und Börnstein, S. 473.

Foussereau[1] zu circa 5.10^{-19}, bezogen auf Quecksilber, bestimmt worden, demnach sein specifischer Widerstand in elektrostatischem Maass circa = 200. Danach wäre bei meiner Versuchsanordnung nach 30m ein Ausschlag von circa 12 Volt zu erwarten. Schwefel ist bekanntlich nicht gänzlich rückstandsfrei. Ich habe mehrere solche Platten untersucht und führe die Messungen an, die ich an der Platte ausgeführt habe, die am wenigsten Rückstand zeigte. Es ergab sich $c_2 = 14$ *cm*.

Nach 24stündiger Ladungszeit ergab sich der Rückstand in Scalentheilstrichen (Th. Str.):

	Schwefel	Schwefel und Luftschichte von 8 *mm*
nach 0·5m	6 Th. Str.	3 Th. Str.
1	9	4·8
2	13·2	7
3	16	8·5
4	18·8	9·9
5	20·5	10·9
10	27·2	15
15	32	18
20	36·6	21
30	41·8	24·6

(Es sind dies Durchschnittswerthe aus je vier Beobachtungsreihen, die keine grössere Abweichung als 8% zeigten.)

Die erstangegebene Zahlenreihe lässt es als unwahrscheinlich erscheinen, dass der Rückstand des Schwefels eine Folge von Inhomogeneitäten sei. (Bei so kleinen Werthen würde die Maxwell'sche Theorie ein der Zeit proportionales Anwachsen des Rückstandes fordern.) Es ist daher wahrscheinlich gestattet, diesen Rückstand etwa als elastische Nachwirkung oder dergleichen aufzufassen, d. h. von der Stärke des den Condensator durchfliessenden Stromes unabhängig. Nehmen wir dies an, so entwickelt sich der Rückstand im Schwefel gleich, ob der Condensator noch eine Luftschichte enthält oder nicht. Hat man dann im letzteren Fall am Elektrometer das Potential V_1

[1] L. c.

abgelesen, so wird man in Folge dieses Rückstandes im ersteren Fall das Potential

$$V_2 = V_1 \frac{(c_2+\gamma)c_1^2}{(c_1+c_2)(c_1c_2+\gamma(c_1+c_2))} = 0\cdot49 \,.\, V_1$$

ablesen. (Es wird ja einmal das auf den Schwefel fallende Potentialgefälle geringer, und dann fliesst die durch den Rückstand erzeugte Elektricitätsmenge nicht direct in das Elektrometer, sondern wirkt nur inducirend auf die mit letzterem verbundene Condensatorplatte.)

Der Rückstand, der sich an einem Condensator zeigt, der eine Luft- und eine Schwefelschichte enthält, verdankt demnach sein Entstehen sowohl der Inhomogeneität im Maxwell'schen Sinne, als auch dieser letzteren Ursache.

Wollen wir den in Folge der Inhomogeneität enstandenen Rückstand kennen, so haben wir offenbar die erste Colonne der vorigen Tabelle mit 0·49 zu multipliciren und von der zweiten zu subtrahiren. Dadurch erhält man folgende Reihe:

nach $0\cdot5^m$	0·1 Th. Str.
1	0·4
2	0·5
3	0·7
4	0·7
5	0·9
10	1·7
15	2·3
20	3·1
30	4·1

Die Theorie würde für diese Zahlen fast genaue Proportionalität mit der Zeit fordern. Sie sind jedoch zu unsicher, um einen sicheren Schluss zu gestatten. Es ist dies nicht zu verwundern, da die Grössen ja an der Grenze der Beobachtungsfehler liegen und nur als Durchschnittswerthe vielleicht einige Berechtigung haben.

Die frühere Annahme, dass sich diese aus verschiedenen Ursachen entwcikelnden Rückstände einfach addiren, ist ja auch nicht exakt, wenn auch wahrscheinlich damit ungefähr das Richtige getroffen ist.

Wir wollen auch hier diese Werthe nur als obere Grenze ansehen. Aus dem letzten Werth nach 30 *m* 4·1 Th. Str. = 0·074 Volt wollen wir noch einen Schluss auf die Leitungsfähigkeit des Schwefels ziehen. Es ergibt sich der specifische Widerstand des Schwefels in elektrostatischem Maasse zu 12.000. Die Leitfähigkeit bezogen auf Quecksilber wäre dann circa $= 8.10^{-21}$; welcher Werth aber auch nur als obere Grenze Berechtigung hat. (Also etwa 60 mal so klein, als der Werth von Foussereau; da aber letzterer bei 69°, ich bei Zimmertemperatur gearbeitet habe, ist dies leicht vereinbar.)

Es ist endlich zu bemerken, dass Schwefel anfangs einen viel bedeutenderen Rückstand zeigte; erst durch langes Laden und Entladen sank der Rückstand so tief.

Über transversale Töne von Kautschukfäden

von

Victor v. Lang,

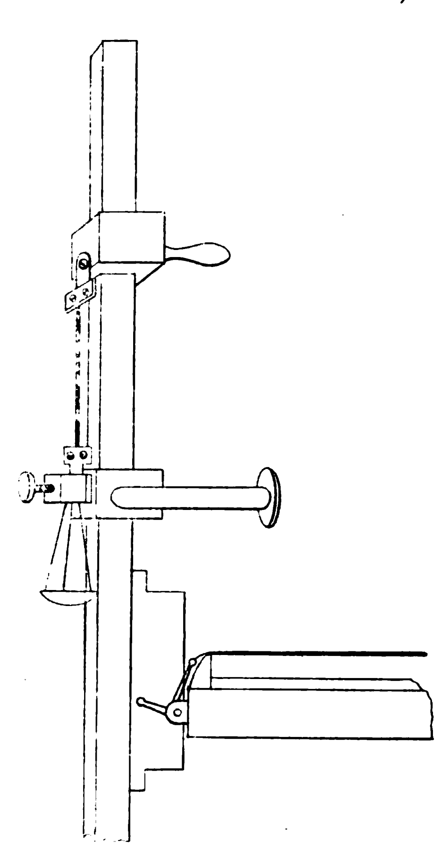
w. M. k. Akad.

(Mit 1 Textfigur.)

1. Spannt man einen Kautschukfaden mit beiden Händen und bringt ihn vor dem Ohre durch Zupfen zum Tönen, so bemerkt man, dass sich sein Ton von einem gewissen Punkte an durch stärkeres Spannen nur sehr wenig mehr ändert. Dieses anderen Fäden entgegengesetzte Verhalten überrascht, wird aber begreiflich, wenn man die bisherigen Beobachtungen über die Dehnung von Kautschukfäden nachsieht. In jeder solchen Beobachtungsreihe gibt es nämlich immer ein längeres Intervall, in welchem die Gesammtlänge des Fadens proportional dem spannenden Gewichte ist. Setzt man nun die Giltigkeit der Taylor'schen Formel voraus, nach welcher die Tonhöhe proportional der Quadratwurzel aus dem Verhältniss der Spannung zur Länge ist, so ergibt sich sogleich die Constanz des Tones für jenes Intervall.

Es schien mir nicht ohne Interesse, das angegebene Experiment messend zu verfolgen, besonders auch, um zu sehen, wie weit die Taylor'sche Formel auf dasselbe anwendbar ist. Zu den Versuchen wurden käufliche Kautschukfäden benützt, die aber alle quadratischen Querschnitt haben, ferner schwarze Kautschukröhrchen, wie sie zu den Ventilen der Velocipeds benützt werden, endlich auch ein runder Faden aus vulcanisirtem Kautschuk, welchen ich der Güte des Herrn Dr. E. Herbst, Director der Gummiwaarenfabrik Breitensee, verdanke.

2. Beistehender Holzschnitt zeigt die angewandte Spannvorrichtung, welche aus einem verticalen starken Prisma aus Holz mit zwei ebenfalls hölzernen Schlitten besteht. Um namentlich die äusserst schwachen Töne bei geringer Spannung der Fäden wahrnehmen zu können, ist an dem unteren Schlitten, der ein- für allemal festgeklemmt wurde, ein hölzerner Arm angebracht, an welchen das Ohr bequem angelegt werden kann. Ferner war das Holzprisma auch in Berührung mit einem Ende des Monochords, womit die Tonhöhe bestimmt wurde. Dasselbe war mit einer blanken und einer übersponnenen Stahlsaite versehen. Die Tonhöhe der ersteren wurde durch Resonanz einer $\bar{a}$-Stimmgabel bestimmt und schwankte um 90. Die Tonhöhe der übersponnenen Saite, welche nur für die tiefsten Töne benützt wurde, war ungefähr 35.



Die Enden der Kautschukfäden wurden zwischen zwei Paar Messingplatten eingeklemmt, von denen das eine an den oberen Schlitten angeschraubt ist und mit demselben in geeigneter Höhe festgestellt wurde. Das andere, untere Paar trägt eine Wagschale für die spannenden Gewichte und wurde erst nach der Belastung, eventuell nach vollständiger Ausfädelung des Fadens an den unteren Schlitten festgeklemmt.

Bei Bestimmung der Länge der gespannten Fäden konnte hier nicht die genaue Methode angewandt werden, bei der nur

die Entfernung zweier Punkte der Fäden berücksichtigt wird, die näher als die Befestigungsstellen aneinanderliegen: es sollte ja auch die Tonhöhe der Fäden ermittelt werden. Um nun die Fäden beim Einklemmen möglichst zu schonen, wurden die Enden derselben vorher mit Kautschukband umwickelt; freilich bleibt dann immer eine kleine Unsicherheit bei Bestimmung der Länge.

3. Ich gebe nun zuerst eine Beobachtungsreihe, welche an einem Röhrchen (s. o.) derart ausgeführt wurde, dass man den Kautschuk niemals entlastete und jede Beobachtung unmittelbar an die vorhergehende anschloss. Das Zeitintervall zwischen zwei Beobachtungen beträgt daher nur ungefähr 4 Minuten.

S	*l*	*n*	*TF*
0 *g*	50 *mm*	—	—
30	53	104	78
40	60	107	84
60	62	127	102
80	63	127	117
100	64·5	132	129
120	68	139	137
140	72·5	147	143
160	77	147	148
180	89	150	147
200	90·5	150	154
220	97	150	156
240	106	151	156
260	119·5	150	153
280	123·5	148	156
300	133	147	155
320	141·5	147	155
340	151	146	155
360	159·5	145	155
380	167·5	145	156

S	l	n	TF
400 g	177 mm	145	156
440	191	144	163
480	235	145	164
520	218	143	160
560	231	143	161
600	243	144	159
640	254	146	164
680	263·5	148	166
720	276·5	149	167
760	279·5	151	170
800	290	151	172
840	298	152	173
880	306	153	175
920	313	149	177
960	325·5	151	178
840 ?	318	140	168
740	318	140	158
640	314	132	148
540	310	124	136
440	302	112	125
340	291	101	112
240	257	95	100

In dieser Tabelle bedeutet S das spannende Gewicht in Gramm, natürlich mit Einschluss der Fassung und der Wagschale, l ist die zugehörige Länge des Kautschuks in Millimeter und n die Schwingungszahl seines Transversaltones. Die letzte Reihe enthält die nach der Taylor'schen Formel $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{l}\cdot\frac{g}{G}}$ berechneten Schwingungszahlen, wobei das Gewicht G des Fadens gleich $0\cdot 227\,g$ war. Die ersten zwei Beobachtungen für n sind naturgemäss sehr unsicher, später konnte n mit grosser Genauigkeit ermittelt werden, da der Kautschukfaden sehr deutliche Schwebungen mit der Monochordsaite gab. Beide Töne wurden durch Zupfen hervorgerufen.

Betrachten wir zuerst die bei steigenden Belastungen angestellten Versuche, so sehen wir, dass der Ton des Fadens in der That von der $1^1/_2$fachen Verlängerung angefangen bis zur 6fachen ziemlich gleich blieb. Die nach der Taylor'schen Formel berechneten Zahlen steigen jedoch merklich an, es steigt also auch das Verhältniss der Spannung zur Länge und ist nur etwa von der 1·8fachen bis zur 3·5fachen Verlängerung constant. Bei der Belastung von ungefähr 170 *g* stimmen die beobachteten und berechneten Werthe ziemlich überein.

Dieses scheint auch für die bei abnehmenden Belastungen ausgeführten Beobachtungen zu gelten. Letztere Messungen zeigen aber deutlich, wie sehr die Werthe von n von der vorhergegangenen Behandlung des Kautschukfadens abhängen, und es ist kein Zweifel, dass wenn die Beobachtungen in einem langsameren Tempo ausgeführt worden wären, ganz andere Zahlen zum Vorschein gekommen wären.

4. Um den Einfluss der Zeit zu zeigen, will ich aus Beobachtungen, die an einem ähnlichen Velocipedröhrchen angestellt wurden, zwei Reihen herausheben. Die ursprüngliche Länge des Röhrchens war 60 *mm*, sein Gewicht 0·335 *g*. Bei der Belastung von 140 *g* wurde beobachtet:

	l	n	TF
	83 *mm*	107·6	111·1
13^h später	85	111·6	109·9
3^h »	85	112·8	109·8

In der Zeit zwischen zwei Beobachtungen war natürlich das untere Ende des Kautschuks frei und wurde nur während der Ablesungen fest geklemmt. Bei der Belastung von 1240 *g* wurde gefunden:

	l	n	TF
	438 *mm*	144·5	144·0
13^h später	444	142·9	143·0
7^h »	445·5	142·1	142·7
17^h »	447	142·1	142·5

Wir sehen aus diesen Zahlen, dass während bei constanter Belastung die Länge mit der Zeit wächst, die Tonhöhe dagegen

grösser oder kleiner wird. Ersteres tritt allerdings nur bei sehr geringen Belastungen ein. Die Unterschiede in der Tonhöhe sind aber hier viel beträchtlicher als bei den grossen Belastungen, wo dafür die Länge sich nur langsam einer constanten Grösse nähert. Man muss also auch bei geringen Spannungen eine längere Zeit vor der Beobachtung der Tonhöhe verfliessen lassen, wenn man endgiltige Zahlenwerthe erlangen will. Leider wurde in den nachfolgenden Beobachtungen diesem Umstande nicht in vollem Masse Rechnung getragen, da er zu spät erkannt wurde, dagegen wurden die Beobachtungen bei höheren Belastungen immer nach so langer Zeit angestellt, dass eine weitere bemerkbare Änderung der Länge nicht mehr zu erwarten war: einzelne Beobachtungsreihen nahmen daher bis zu 4 Tage in Anspruch, obwohl nur bei ungefähr zwölf, immer steigenden Belastungen abgelesen wurde.

5. Ich gebe zuerst die Resultate der Beobachtungen, die an vier Stücken eines Velocipedröhrchens angestellt wurden. Dieselben hatten die Längen von 70, 60, 50 und 52 *mm*. Die erhaltenen Zahlen lassen gar keinen Zweifel darüber, dass sowie die Längen der verschiedenen Stücke bei einer und derselben Belastung immer proportional ihren ursprünglichen Längen sind, die Töne derselben sich verkehrt wie diese Längen verhalten. Rechnet man nämlich nach dieser Regel die vier Beobachtungsreihen auf die Länge von 100 *mm* um, so stimmen die Zahlen meist bis auf wenige Procente überein. Ich gebe daher gleich die Mittel dieser Zahlen.

B	*S*	*l*	*n*	*TF*	*n'*	*n—n'*
	0 *g*	100 *mm*	—	—	—	—
4	40	108	54·6	40·3	54·9	—0·3
4	80	124	61·8	53·7	62·0	—0·2
4	140	144	69·4	66·0	70·3	—0·9
4	240	215	72·8	70·6	73·0	—0·2
4	340	317	71·3	69·2	71·1	+0·2
4	440	432	69·3	67·4	69·0	+0·3
3	540	554	67·3	66·1	67·3	0·0
3	640	619	69·3	68·0	69·0	+0·3
3	740	650	72·7	70·5	72·1	+0·6

B	*S*	*l*	*n*	*TF*	*n'*	*n—n'*
3	840 *g*	689 *mm*	75·4	73·8	74·4	+1·0
2	940	704	77·5	75·5	77·7	—0·2
2	1040	737	79·5	79·5	79·7	—0·2

In der Columne *B* ist angegeben, aus wie vielen Beobachtungen das Mittel abgeleitet ist; es wurden nämlich nicht alle vier Beobachtungsreihen gleich weit fortgeführt, auch wurde gelegentlich durch Versehen eine Beobachtung ausgelassen. Die Schwingungszahlen *n* zeigen keine continuirliche Zunahme. Dieselben haben bei der zweifachen Verlängerung ein relatives Maximum, bei der $5^1/_2$ fachen ein solches Minimum. Denselben Gang zeigte die nach der Taylor'schen Formel mit $G = 0 \cdot 549\, g$ berechnete Zahlenreihe und demzufolge auch das Verhältniss der Länge zur Spannung. Die Übereinstimmung beider Zahlenreihen ist im Anfange schlecht, wird aber mit steigender Belastung besser und scheint bei extremen Spannungen vollkommen zu sein, wie wir dies auch schon an dem früheren Beispiele sahen.

Eine bessere Übereinstimmung erzielt man natürlich, wenn man in der Taylor'schen Formel die Grössen *S* und *l* um constante Werthe vermehrt. Man erhält die letzte Zahlenreihe, wenn man setzt:

$$n' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G}{g} \cdot \frac{S+54}{l+31 \cdot 5}} = 66 \cdot 83 \sqrt{\frac{S+54}{l+31 \cdot 5}}.$$

6. Ganz ähnliche Verhältnisse zeigen auch die Beobachtungen an Kautschukfäden mit quadratischem Querschnitte. Solche Fäden wurden hauptsächlich zu den Vorversuchen angewandt. Später, als grössere Übung erlangt war, wurden noch zwei Versuchsreihen mit Stücken von 64 und 75 *mm* Länge eines Fadens angestellt, dessen Querschnitt beiläufig 1·5 *mm* Seitenlänge hatte. Die Gewichte der beiden Stücke waren 0·13 und 0·14 *g*, so dass das Gewicht für 100 *mm* dieses Fadens im Durchschnitte gleich 0·194 *g* wird. Die Mittel der beiden Beobachtungsreihen sind nun folgende:

S	*l*	*n*	*TF*	*n'*	*n — n'*
0 *g*	100 *mm*	—	—	—	—
40	125	66·6	63·6	67·1	—0·5
80	177	76·9	75·6	76·8	+0·1
140	302·5	77·3	77·4	77·2	+0·1
240	534·5	76·2	75·3	75·8	+0·4
340	650·5	81·7	81·3	81·5	+0·2
440	685	89·1	90·1	90·1	—1·0
540	723·5	98·1	97·1	96·9	+1·2
640	752	103·0	103·7	103·4	—0·4
740	781·5	108·8	109·4	109·0	—0·2

Der Gang der Zahlenwerthe von n ist derselbe wie in dem vorhergehenden Falle, dieselben werden durch die Taylor'sche Formel nur näherungsweise dargestellt. Eine bessere Übereinstimmung wird erzielt, wenn man wieder in dieser Formel Spannung und Länge um constante Grössen vermehrt. Für letztere wurden durch Probiren die Werthe 10·8 und 17·8 gefunden, so dass die vorletzte Zahlenreihe sich aus folgender Formel ergibt:

$$n' = 112\cdot43\sqrt{\frac{S+10\cdot8}{l+17\cdot5}}.$$

7. Zum Schlusse gebe ich noch die Resultate der an dem runden Kautschukfaden angestellten Beobachtungen. Es wurden fünf Stücke untersucht, welche die Längen von 50, 80, 66, 40 und 61 *mm* und die Gewichte von 0·219, 0·340, 0·283, 0·170 und 0·257 *g* hatten. An den zwei ersten Stücken wurde auch der Durchmesser *(d)* bestimmt mit Hilfe eines Fernrohres, das mit einer Ocular-Mikrometerschraube versehen ist. Auf die Länge von 100 *mm* reducirt, geben die angestellten Beobachtungen folgende Mittelwerthe:

B	*S*	*l*	*d*	*n*	*TF*	*n'*	*n — n'*
	0 *g*	100 *mm*	2·20 *mm*	—	—	—	—
5	40	111	2·02	55·3	45·5	55·5	—0·2
5	80	123	1·97	66·7	61·1	68·2	—1·5
5	140	146	1·84	78·8	74·2	79·2	—0·4

B	S	l	d	n	TF	n'	$n-n'$
5	240 *g*	206 *mm*	1·58 *mm*	84·6	81·7	85·0	—0·4
5	340	285	1·32	85·5	82·7	85·1	+0·4
5	440	350	1·23	86·9	84·9	86·8	+0·1
5	540	422	1·13	88·0	85·7	87·2	+0·8
3	640	482	1·03	89·4	87·3	88·6	+0·8
4	740	541	0·96	90·2	88·6	89·7	+0·5
3	840	610	—	89·9	88·9	89·9	0·0

Die Berechnung der Zahlen n' erfolgte hier nach der einfacheren Formel

$$n = 75\cdot 73\sqrt{\frac{S+19\cdot 7}{l}},$$

indem das Hinzufügen einer Constanten zur Länge l keine wesentliche Verkleinerung der Differenzen $n-n'$ bewirkte.

Die Tonhöhe n zeigt aber jetzt kein Maximum und Minimum mehr wie in den vorhergehenden zwei Fällen. Doch scheint noch immer eine Andeutung davon vorhanden zu sein. Betrachtet man nämlich n als Function der Länge oder Spannung und construirt man eine Curve mit n als Ordinate und etwa l als Abscisse, so ist die Krümmung derselben abwechselnd convex, concav, convex. Der erste Wendepunkt, dessen Lage freilich sehr schwer zu bestimmen ist, liegt bei einer ungefähr 3·5maligen Verlängerung, während er bei dem quadratischen Faden auf eine 4fache, bei dem Röhrchen auf eine 3·8malige Verlängerung entfällt.

Theoretische Untersuchungen über elastische Körper. Ebene Wellen mit Querschwingungen

von

Paul Glan †.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. October 1898.)

Ich will die folgende Wellenbewegung in Betracht ziehen:

$$\rho = \omega + g \varepsilon^{-j\mathfrak{g}:4l + j'(\mathfrak{g}:l-ht):4} \iota S \tau^{\mathfrak{g}:l-ht}.$$

Diese Gleichung stellt verlöschende ebene Wellen dar mit Querschwingungen in der Richtung des Einheitsvectors ι, welche in der Richtung des Einheitsvectors τ fortschreiten. Die Formvariabelen sind dann, wenn Glieder mit höherer als der zweiten Potenz der Weite $g\varepsilon^{-j\mathfrak{g}:4l+j'(\mathfrak{g}:l-ht):4}$ fortbleiben,

$$m_1 = n_1^2 : 2,\ m_2 = o = m_3,$$

$$n_1 = -g\varepsilon^{-j\mathfrak{g}:+j'(\mathfrak{g}:l-ht):4}\left[\left(\frac{j-j'}{4l}\right)\cos\frac{\pi}{2}(\mathfrak{g}:l-ht) + \frac{\pi}{2l}\sin\frac{\pi}{2}(\mathfrak{g}:l-ht)\right].$$

$$n_2 = o = n_3.$$

Die Gleichung des Ellipsoids der Formänderung ist

$$d\rho_{d\omega} = xo'\tau + (xn_1 + y)o'\iota + zo'\nu \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

es entstand aus der Kugel mit dem sehr kleinen Radius o', deren Mittelpunkt das Theilchen ist, welches nach der Formänderung den Mittelpunkt dieses Ellipsoids bildet, und in der Vector $\partial\omega$ ein Radius ist. Ein Kreisschnitt mit dem Radius o' ist senkrecht zum Vector τ; er hat keine Formänderung erlitten, da alle Theilchen einer Ebene normal zu τ, für welche $\mathfrak{g}$ denselben Werth hat, sich in gleicher Weise verschieben. Da hier die Wellenebenen senkrecht zu τ keine Formänderung erleiden, muss ein centraler Schnitt des Ellipsoids der Formänderung

senkrecht zu τ ein Kreisschnitt sein, und er ohne Dehnung ist, muss für beide Kreisschnitte die Dehnung eines Radiusvector $T\rho : o' - 1$ verschwinden. Dies führt zur Gleichung:

$$xyn_1 + \frac{x^2}{2} n_1^2 - \frac{x^2}{2} y^2 n_1^2 = O.$$

Sie hat für beliebige Werthe der Verdrehung n_1 erstlich zur Lösung $x = O$; sie ergibt als einen Kreisschnitt den centralen Schnitt parallel der Wellenebene senkrecht zu τ. Als zweite Lösung folgt, wenn in der vorigen Gleichung der andere Factor $\left(y + \frac{xn_1}{2} - \frac{x}{2} y^2 n_1\right)$ nullirt wird und Glieder mit höherer als der zweiten Potenz der Weite fortbleiben, da x, y zwischen $+1$ und -1 dem Werthe nach liegen müssen,

$$y = -\frac{x}{2} n_1.$$

Dies ist der Werth von y für den zweiten Kreissschnitt, dessen Gleichungen

$$\rho = \left(x\tau + \frac{x}{2} n_1 \iota + z\nu\right) o' \quad \text{und} \quad x^2 + \frac{x^2}{4} n_1^2 + z^2 = 1$$

sind. Die Gleichung der Ebene des ersten Kreisschnittes ist

$$\rho = y\iota + z\nu,$$

die der des zweiten

$$\rho = x\left(\tau + \frac{n_1}{2} \iota\right) + z\nu,$$

in denen x, y, z beliebige Werthe haben können und zwischen diesen Scalaren keine Bedingungsgleichung besteht. Ihnen gemeinschaftlich, ihr Durchschnitt, ist ersichtlich die Linie $z\nu$. Die Richtung der mittleren Hauptaxe des Ellipsoids der Formänderung gibt also an der Einheitsvector

$$\beta_2 = \nu.$$

Die Einheitsvectoren $\tau(1 - n_1^2 : 8) + n_1 \iota : 2$ und ι liegen in den Ebenen der Kreisschnitte und stehen auf ihrer Schnittlinie senkrecht; die Einheitsvectoren, welche den von ihnen

gebildeten Winkel und seinen Supplementwinkel halbiren, liegen in der Richtung der beiden anderen Hauptaxen. Sie fallen in die Diagonalen der Rhomben mit den Seiten $\tau(1-n_1^2:8)+n_1\iota:2$ und ι, und $\tau(1-n_1^2:8)+n_1\iota:2$ und $-\iota$, welche von der Schnittlinie der Ebenen der Kreisschnitte ausgehen, und sind danach

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}[(\tau+\iota)(1-n_1:4-n_1^2:32)+\iota n_1:2]$$

und

$$\beta_3 = \sqrt{\frac{1}{2}}[(\tau-\iota)(1+n_1:4-n_1^2:32)+\iota n_1:2].$$

Die mittlere Hauptaxe ohne Dehnung liegt in der Wellenebene senkrecht zur Verschiebung, die beiden anderen Hauptaxen fallen in die Normalebene der Wellenebene durch die geradlinige Querverschiebung und bilden mit dem Wellenloth nahezu Winkel von 45° nach entgegengesetzten Seiten.

Ein Centralschnitt des Ellipsoids der Formänderung durch die letzteren beiden Hauptaxen, der in der Ebene der Vectoren τ, ι liegt, wird danach sich ergeben, wenn ich in der Gleichung dieses Ellipsoids z Null nehme. Die beiden Hauptaxen seien $o'o_1^{-1/2}\beta_1$ und $o'c_3^{-1/2}\beta_3$; für sie als Vectoren dieser Ellipse folgt

$$o'c_1^{-1/2}\beta_1 = o'x\tau+(y+xn_1)o'\iota$$

oder

$$o'c_3^{-1/2}\beta_3 = o'x\tau+(y+xn_1)o'\iota$$

und

$$x^2+y^2 = 1.$$

Indem β_1 oder β_3 ersetzt wird durch die für sie gefundenen Ausdrücke und y nach der dritten Gleichung in den beiden ersten durch x ersetzt wird, erhält man aus jeder zwei Gleichungen, da die Coëfficienten von τ oder ι auf beiden Seiten jeder Gleichung gleich sein müssen. Man eliminirt x aus einem solchen Paar von Gleichungen und erhält aus dem Paar, das sich aus der vorigen ersten Gleichung ergibt, den Werth von $c_1^{-1/2}$, aus dem der zweiten vorigen Gleichung entspringenden Paare $c_3^{-1/2}$. Es wird:

$$c_1^{-1/2} = 1+n_1:2+n_1^2:8$$
$$c_3^{-1/2} = 1-n_1:2+n_1^2:8.$$

Da o' die Länge aller dieser Linien im Stoffe vor der Formänderung ist, bezeichnen $c_1^{-1/2}-1$ und $c_3^{-1/2}-1$ die Dehnungen in der Richtung der Hauptaxen $o'c_1^{-1/2}\beta_1$ und $o'c_3^{-1/2}\beta_3$. Der mittleren Hauptaxe $o'c_2^{-1/2}\beta_2$ Dehnung ist Null, da alle ihre Punkte dieselbe Verschiebung erfahren, weil sie in einer Wellenebene liegen. Die thermischen Ausdehnungsindices in der Richtung der Hauptaxen des Ellipsoids der Formänderung sind nun

$$a+(a'-a'')n_1:2+(a'+a'')n_1^2:8=a_1$$

$$a+a''n_1^2:4=a_2 \qquad a-(a'-a'')n_1:2+(a'+a'')n_1^2:8=a_3,$$

und die thermischen Dehnungsindices nach den Richtungen der Vectoren $d\rho_\tau$, $d\rho_\iota$, $d\rho_\nu$ werden

$$a+[(a'+a''):8+3(a'-a''):4]n_1^2=a_{d\rho_\tau},$$
$$a+[(a'+a''):8+(a'-a''):4]n_1^2=a_{d\rho_\iota},$$
$$a+a''n_1^2:4=a_{d\rho_\nu}.$$

Es sind dann die Änderungen der Formvariabeln nur durch eine Veränderung der Temperatur um dt

$$d_t m_1 = adt+[a:2+(a'+a''):8+3(a'-a''):4]n_1^2 dt,$$
$$d_t m_2 = adt+[(a'+a''):8+(a'-a''):4]n_1^2 dt,$$
$$d_t m_3 = adt+a''n_1^2 dt:4,$$
$$d_t n_1 = (a'-a'')n_1 dt = -b_v n_1 dt, \quad d_t n_2 = O = d_t n_3.$$

Da die Temperatur hier allein durch die Formänderungen bei diesen ebenen Wellen und die Wärmeleitung geändert wird, muss sie in den in einer Wellenebene liegenden Theilchen stets die gleiche sein. Denn durch die Formänderungen allein ändert sie sich nur von einer Wellenebene zur anderen, und die Wärmeleitung kann nur senkrecht zu diesen Ebenen erfolgen. Eine solche Ebene wird durch einen Werth von $\mathfrak{g}$, ihrem Abstande vom Vectorenanfangspunkte, bestimmt; die Temperatur kann nur von $\mathfrak{g}$ und der Zeit t abhängen, und die Gleichung zur Bestimmung der Temperatur bei dieser Wellenbewegung ist

$$D_t\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{T}}{sc_g\mathfrak{a}}\left\{D_t(S\alpha_1 U d\rho_\tau)D_t\frac{n_1^2}{2}+D_t(S\alpha_1 U d\rho_\iota)D_t n_1\right\}$$
$$+\left[\frac{k}{sc_g}+\frac{(k'-k'')}{sc_g}\frac{n_1}{2}+\frac{(k'+k'')}{sc_g}\frac{n_1^2}{8}\right]D_{\mathfrak{g}}^2\mathfrak{T},$$

und $\mathfrak{T}$ ist die absolute Temperatur. Da nun $D_t(S\alpha_1 Ud\rho_\tau)$ gleich $SUd\rho_\tau D_t\alpha_1$, weil ρ von der Temperatur t nicht abhängt und $D_t\alpha_1$ der Zuwachs des Vectors der elastischen Kraft α_1 bei alleiniger Änderung der Temperatur um dt getheilt durch dt ist, wird

$$D_t\alpha_1 = \left[\frac{e}{r}(1-w^2)\,d_t m_1 - \frac{e}{r}(w-w^2)(d_t m_2 + d_t m_3)\right] Ud\rho_\tau : dt$$
$$+ v d_t n_1 Ud\rho_\iota : dt.$$

und bei Wegfall von Gliedern, die eine höhere Potenz der Weite g als die zweite enthalten, dann

$$D_t\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{T}}{sc_g\mathfrak{a}}\left(b_v v - \frac{2ae}{(3-e:v)}\right) D_t \frac{n_1^2}{2} +$$
$$+ \left[k + (k'-k'')\frac{n_1}{2} + (k'+k'')\frac{n_1^2}{8}\right] D_{\mathfrak{g}}^2 \mathfrak{T} : sc_g.$$

Es soll nun die Bewegung dadurch verändert werden, dass zu der Querschwingung eine geradlinige Verrückung um ihre Weite hinzutritt, die nach beiden Seiten von der Ruhelage aus stattfinden kann. Es ist dann der variable Vector

$$\rho = \omega + g\varepsilon^{-j\mathfrak{g}:4l + j'\frac{h}{4}(\mathfrak{g}:lh - t)}\,\iota\left[\pm 1 + S\tau^{\mathfrak{g}:l - ht}\right]$$

und die Formvariabeln sind

$$m_1 = n_1^2 : 2,\quad m_2 = m_3 = n_2 = n_3 = 0$$
$$n_1 = -g\varepsilon^{-j'\mathfrak{g}:4l + j'(\mathfrak{g}:l - ht):4}\left[\pm\left(\frac{j-j'}{4l}\right) + \left(\frac{j-j'}{4l}\right)\cos\frac{\pi}{2}(\mathfrak{g}:l - ht\right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{2l}\sin\frac{\pi}{2}(\mathfrak{g}:l - ht)\right].$$

Da zwischen den Formvariabeln hier ganz dieselben Beziehungen bestehen und ihre Ordnung in Bezug auf die Anfangsweite g der Schwingungen dieselbe ist, wie bei der zuvor betrachteten reinen Querschwingung, bleiben die vorigen Entwicklungen auch in diesem Falle anwendbar, da auch der Ausdruck für das Ellipsoid der Formänderung derselbe wie zuvor ist. Der Ausdruck für die absolute Temperatur $\mathfrak{T}$ ist:

$$\mathfrak{T} = b_0\varepsilon^{f(\mathfrak{g},t)},$$

in welchem

$$f(\mathfrak{g}, t) = (sc_g \mathfrak{a})^{-1}\left(\frac{1}{2} b_v v - ae(3-e:v)^{-1}\right)\left[n_1^2 + \frac{k}{sc_g}\int D_{\mathfrak{g}}^2 n_1^2 dt + \left(\frac{k}{sc_g}\right)^2 \int dt \int D_{\mathfrak{g}}^4 n_1^2 dt + \ldots\right]$$

ist und Glieder fortgelassen sind, welche von höherer als der zweiten Ordnung in Betreff der Anfangsweite g der Schwingungen sind. Die Zunahmen der Vectoren der elastischen Kräfte in einem Zeittheilchen dt, welche in der Bewegungsgleichung für das Innere

$$sD_t^2 \rho dt = -d(\Delta\alpha_1)_\tau - d(\Delta\alpha_2)_\iota - d(\Delta\alpha_3)_\nu$$

vorkommen, werden bis zu den in g quadratischen Gliedern in Rechnung gestellt

$$\Delta\alpha_1 = -\frac{v(4-e:v)}{3-e:v} D_t \frac{n_1^2}{2} dt\tau + \frac{ae}{3-e:v} D_t \mathfrak{T} dt\tau - vD_t n_1 dt\iota,$$

$$\Delta\alpha_2 = \frac{v(2-e:v)}{3-e:v} D_t \frac{n_1^2}{2} dt\iota + \frac{ae}{3-e:v} D_t \mathfrak{T} dt\iota - vD_t n_1 dt(\tau + n_1\iota),$$

$$\Delta\alpha_3 = \frac{v(2-e:v)}{3-e:v} D_t \frac{n_1^2}{2} dt\nu + \frac{ae}{3-e:v} D_t \mathfrak{T} dt\nu.$$

Ich will zunächst nur die Glieder mit der ersten Potenz der Anfangsweite g der Schwingungen berücksichtigen. Dann ergibt sich aus der Bewegungsgleichung für das Innere elastischer Körper

$$sD_t^2 \rho = vD_{t,s}^2 n_1 \iota.$$

Aus dieser Gleichung, die für alle Werthe der Zeit t gelten muss, ergeben sich, weil die Factoren von $\varepsilon^{-j'ht:4}$ allein, die von $\varepsilon^{-j'ht:4} \cos\frac{\pi}{2}(\mathfrak{g}:l-ht)$ und von $\varepsilon^{-j'ht:4} \sin\frac{\pi}{2}(\mathfrak{g}:l-ht)$ danach einzeln Null werden müssen, die drei Gleichungen, in denen abkürzend der Verlöschungsindex $j'h:4$ mit J' und der Vernichtungsindex $(j-j'):4l$ durch J bezeichnet sind,

$$sJ'^3 = vJ'J^2$$

$$-sJ'^3 + 3s\pi^2 \frac{h^2}{4} J' = -v[J'(J^2 - \pi^2 : 4l^2) + \pi^2 hJ : 2l]$$

$$3s\pi \frac{h}{2} J'^2 - s\pi^3 \frac{h^3}{8} = -v\left[\frac{\pi h}{2}(\pi^2 : 4l^2 - J^2) + J'J\pi : l\right].$$

Eine reelle Lösung dieser drei Gleichungen für J', J und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit G oder hl mit nicht negativen Werthen für diese Grössen ist

$$J' = 0 = J, \qquad G = \sqrt{v : s}.$$

Die Wellen werden nicht absorbirt beim Fortschreiten und verlöschen an einer Stelle nicht; die Temperatur ergibt sich bei diesem Grade der Annäherung unveränderlich.

Ich werde nun auch die Glieder in Rechnung ziehen, welche das Quadrat der Schwingungsweite g als Factor enthalten. Es treten dann zu den Gliedern mit den Factoren $g\varepsilon^{-J't}$, $g\varepsilon^{-J't} \cos \frac{\pi}{2}(\mathfrak{g} : l - ht)$, $g\varepsilon^{-J't} \sin \frac{\pi}{2}(\mathfrak{g} : l - ht)$ hinzu Glieder mit den Factoren $g^2\varepsilon^{-2J't}$, $g^2\varepsilon^{-2J't} \cos \pi(\mathfrak{g} : l - ht)$, $g^2\varepsilon^{-2J't} \sin \pi \cdot (\mathfrak{g} : l - ht)$. Sie führen, da die Bewegungsgleichung für das Innere für alle Werthe der Zeit t gelten muss, ausser zu den vorigen drei Gleichungen, die die obigen Werthe von J', J, G ergeben, mit diesen Werthen des Vernichtungsindex J, des Verlöschungsindex J' und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit G zu den weiteren Gleichungen

$$\left\{\left[\frac{v(4 - e : v)}{3 - e : v} - \frac{aeC_0}{3 - e : v}\left(b_v \frac{v}{2} - \frac{ae}{3 - e : v}\right) : sc_g \mathfrak{a}\right] \tau g^2 \frac{\pi^4 h^4}{8G^3} - \frac{aeC_0}{(3 - e : v)}\right.$$

$$\left.\left(b_v \frac{v}{2} - \frac{ae}{3 - e : v}\right)(sc_g \mathfrak{a})^{-1} \frac{k^2}{s^2 c_g^2} \tau g^2 \frac{\pi^6 h^6}{8G^7}\right\} = 0$$

$$\frac{aeC_0}{3 - e : v}\left(b_v \frac{v}{2} - \frac{ae}{3 - e : v}\right)(sc_g \mathfrak{a})^{-1} \frac{k}{sc_g} \tau g^2 \frac{\pi^5 h^5}{8G^5} = 0.$$

Sie werden nicht erfüllt und Glieder mit $g^2 \cos \pi(\mathfrak{g} : l - ht)\tau$ und $g^2 \sin \pi(\mathfrak{g} : l - ht)\tau$ sind dem Vector der Verschiebung hinzuzufügen. Es muss also eine Grundquerschwingung von einer

Längsschwingung in der Octave begleitet sein, wenn auch die Quadrate der Schwingungsweite berücksichtigt werden.

Ich werde nun in den früher entwickelten Reihen für die elastischen Coëfficienten auch das zweite Glied in Betracht ziehen und einen bestimmten Werth dieser Coëfficienten sich in gleicher Weise wie die Welle fortpflanzend setzen. Es ist dann im vorigen statt e zu nehmen

$$e+e' \sin \frac{\pi}{2}(\mathfrak{g}:l-ht)+e'' \cos \frac{\pi}{2}(\mathfrak{g}:l-ht),$$

und für v

$$v+v' \sin \frac{\pi}{2}(\mathfrak{g}:l-ht)+v'' \cos \frac{\pi}{2}(\mathfrak{g}:l-ht).$$

Es sollen e', e'' klein gegen e und v', v'' klein im Vergleich mit v betrachtet werden.

Es ergeben sich dann aus der Bewegungsgleichung für das Innere elastischer Körper, wenn zunächst nur die Glieder mit der ersten Potenz der Schwingungsweite g berücksichtigt werden, die drei Gleichungen:

$$\mp sJ'^3 = \mp vJ'J^2 - \frac{v'}{2}\left(\frac{J'.J\pi h}{2G} - J^2\frac{\pi h}{2}\right) - \frac{v''}{2}\left(J'J^2 + \frac{J\pi^2 h^2}{4G}\right)$$

$$-sJ'^3 + 3s\frac{\pi^2 h^2}{4}J' = -v\left(J'J^2 + \frac{J\pi^2 h^2}{2G} - \frac{J'\pi^2 h^2}{4G^2}\right) \pm \frac{v'\pi J'Jh}{2G} \pm v''J'J^2$$

$$3s\frac{\pi h}{2}J'^2 - s\frac{\pi^3 h^3}{8} = -v\left(J'J\frac{\pi h}{G} - J^2\frac{\pi h}{2} + \frac{\pi^3 h^3}{8G^2}\right) \mp v'J'J^2 \mp v''\frac{\pi J'Jh}{2G}.$$

Aus der ersten Gleichung, die eine cubische Gleichung in j' ergibt, folgt mit Nichtberücksichtigung kleinerer Glieder, dass der Verlöschungsindex

$$J' = J\sqrt{\frac{v}{s}}$$

ist. Er ist umso grösser, je stärker die Absorption und proportional der Quadratwurzel aus dem durch die Dichte dividirten Verdrehungsindex.

Aus der letzten der vorigen drei Gleichungen ergibt sich, wenn kleinere Glieder als die im Folgenden gegebenen fortgelassen werden, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$G = \sqrt{\frac{v}{s}}\left[1 + \frac{(j-j')^2}{2\pi^2} + \frac{(j-j')j'}{2\pi^2}\right]^{1/2}.$$

Wenn sich bei geringer Zunahme der Schwingungsdauer die Absorption stark vermehrt, wüchse die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Aus der zweiten der drei vorigen Gleichungen folgt mit Benützung der ersten als Ausdruck für den Vernichtungsindex

$$J = \pi h\left[\mp \frac{s}{2v''} \mp \frac{v}{v''G}\left(\sqrt{\frac{s}{v}} - \frac{1}{2G}\right)\right]^{1/2} + \frac{\pi h}{4}\frac{v'}{v''}\left(\frac{3}{G} - \sqrt{\frac{s}{v}}\right),$$

wenn kleinere Glieder als die gegebenen fortgelassen werden. Die Absorption würde für jeden Stoff im Allgemeinen mit der Schwingungszahl wachsen. Es würden nach dem Vorigen die rascheren Schwingungen auch schneller verlöschen. Für so schnelle Querschwingungen, dass ihre Schwingungszahlen von der Ordnung derjenigen der Lichtschwingungen sind, ist die Absorption nach dem Vorigen für alle Stoffe sehr stark.

Über die Zunahme der Dichtigkeit, Abplattung und Schwere im Innern der Erde auf Grundlage einer neuen Hypothese

von

E. Oekinghaus

Lehrer a. d. Königl. Baugewerksschule zu Königsberg i. Pr.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juni 1898.)

Seit der Entdeckung des Gravitationsgesetzes durch Newton ist die Frage nach der Gestalt, Dichtigkeit, Schwere, und Abplattung der Erde bis zu unseren Zeiten Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen, die zu fördern die Astronomie, Geologie und Physik gleich viel Veranlassung und Antheil hatten. Daher finden wir auch in der Geschichte dieser Wissenschaften die hervorragendsten Vertreter derselben in dieser Richtung thätig, die einen mehr nach der rein mathematisch-speculativen, die andern nach der empirisch-praktischen Richtung des Versuches oder der Beobachtung. Da letztere immer die positive Grundlage aller wissenschaftlichen Forschungen zu bilden hat, ohne welche alle Theorien problematisch oder doch unbewiesen bleiben, so hatte ganz naturgemäss bei der Erforschung der Dichtigkeitsverhältnisse der Erde die Beobachtung und Messung vor der reinen Theorie den Vortritt und damit die Aufgabe und Verpflichtung, zunächst diejenigen Zahlenwerthe oder Constanten des Erdkörpers zu ermitteln, deren man bei astronomischen und anderen Berechnungen am dringendsten bedurfte. Übersieht man die neueren, oft unter der angestrengtesten Thätigkeit verschiedenster Forscher nach den verschiedensten Methoden gewonnenen Resultate, so erhält man den Eindruck, dass die zum Theil astronomisch, zum Theil geodätisch-physikalisch ermittelten Zahlenwerthe der Dichtigkeit, Abplattung, Schwere etc. einen

hinreichenden Grad von Genauigkeit besitzen, um einer mathematischen Theorie zu Grunde gelegt werden zu können. Sind die ermittelten Zahlenwerthe hinreichend gesichert, so tritt die Theorie an die Stelle der Erfahrung und versucht unter der sicheren Annahme, dass alle Naturvorgänge zu allen Zeiten gesetzmässig verlaufen sind und verlaufen werden, das allgemeine Gesetz aufzustellen, aus welchem die inductiv ermittelten Erfahrungsresultate, sowie diejenigen, die sich einer directen Untersuchung physischer Umstände halber unzugänglich zeigen, mathematisch abgeleitet und bewiesen werden können.

Freilich werden in sehr vielen Fällen, wie auch bei dem vorliegenden Gegenstand, alle Gesetze mehr oder weniger hypothetisch sein und bleiben, weil der strenge Beweis ihrer Richtigkeit der Unzugänglichkeit des Gegenstandes wegen nicht völlig unzweideutig erbracht werden kann. Will man also nicht vollständig Verzicht leisten, so muss man sich eben mit einer ersten Annäherung an das Gegebene begnügen, wie man sich ja auch z. B. beim Mariotte'schen Gesetz u. A. mit einer ersten Annäherung behelfen muss.

In diesem Sinne mögen denn auch die nachfolgenden Entwicklungen beurtheilt werden, die nicht etwa den Anspruch erheben, den schwierigen Gegenstand zum Abschlusse zu bringen, sondern nur einen anderen Weg zur Lösung zu ermitteln suchen unter Annahme einer Hypothese, deren Einfachheit und Allgemeinheit sie zur Einführung in die Theorie empfahl.

Die Grundlagen der mathematischen Theorie der Gestalt des Erdkörpers und der damit verknüpften Fragen bilden in erster Linie die von Clairaut schon 1743 aus der Attractionstheorie abgeleiteten Theoreme in seiner Théorie de la figure de la terre tirée des Principes de l'Hydrostatique, worin er ausser den Gleichgewichtsbedingungen flüssiger, aus homogenen Schichten gebildeter Rotationsellipsoide auch noch die Differentialgleichungen der Abplattung jener Schichten in ihrer Abhängigkeit von der Dichtigkeitsänderung und damit das nach ihm genannte merkwürdige Gesetz, das wegen seiner Universalität sehr wohl den Rang eines Naturgesetzes bean-

spruchen kann, ausspricht und nachweist, dass es für alle Arten gesetzmässiger Massenlagerung der Erdschichten giltig ist (siehe l. c. S. 226 u. ff.). Daher müssen alle Annahmen über die Art der Dichtigkeitsänderung von Schicht zu Schicht immer wieder zu jenem Gesetz oder Theorem hinführen, mag man mit Legendre die Dichtigkeitsformel

$$\rho(b) = \frac{K \sin Lb}{b}$$

oder mit Laplace die Relation $dP = C\Theta d\Theta$ zwischen Druck und Dichtigkeit[1] oder mit Lipschitz die Hypothese

$$\rho(b) = D - Eb^{\lambda}$$

in die Theorie einführen.

Hinsichtlich der letzteren Grundlage findet Lipschitz in seiner ausführlichen Abhandlung[2] unter der Annahme $\Theta_0 = 2 \cdot 5$, $\Theta_m = 5 \cdot 58$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} = \frac{1}{288}$ die Formel

$$\Theta = 9 \cdot 45 - 6 \cdot 95 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{2 \cdot 39}.$$

Zu einer anderen Gleichung gelangte Roche (Compt. rend., 1854):

$$\Theta = \frac{25}{13} \Theta_m \left(1 - 0 \cdot 8 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2\right).$$

Tumlirz (Wiener Sitzungsber., 1892, Abth. II.a, S. 1528)[3] wählt eine Reihe mit drei Gliedern

$$\Theta = \Theta_0 - M\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 - N\left(\frac{a}{a_0}\right)^4$$

[1] Man vergl. hierüber das Lehrbuch der math. u. phys. Geographie von Ed. Schmidt, S. 348.

[2] Versuch zur Herleitung eines Gesetzes, das die Dichtigkeit für die Schichten im Innern der Erde annähernd darstellt, aus den gegebenen Beobachtungen. Crelle's Journal, Bd. 62, und im Anschluss daran: Gleichgewicht eines flüssigen rotirenden Sphäroids. Bd. 63.

[3] Diese Abhandlung gab mir den ersten Anstoss zu der vorliegenden Bearbeitung.

und findet unter Vernachlässigung des letzten Gliedes für $\Theta_0 = 2 \cdot 5$ und den Pouillet'schen Werthen der Schwerebeschleunigung

$$\Theta_c = 10 \cdot 864, \qquad \Theta_m = 5 \cdot 846$$

und für die von Listing gegebenen 12·929, beziehungsweise 6·672.

Helmert leitet in seinem Werke: »Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, II, S. 487 die Formeln ab:

$$O = 11 \cdot 3 \left(1 - 1 \cdot 04 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0 \cdot 275 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4\right)$$

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{372} \left(1 + 0 \cdot 178 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0 \cdot 054 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 + 0 \cdot 016 \left(\frac{a}{a_0}\right)^6\right)$$

und erhält mit $\Theta_0 = 2 \cdot 66$ die Werthe $\Theta_c = 11 \cdot 3$ und $\mathfrak{a}_0 = \frac{1}{298}$.

E. Wiechert in seiner Abhandlung: Über die Massenvertheilung im Innern der Erde schliesst aus verschiedenen Daten, dass die Erde einen Metallkern enthält, und dass an der Grenze des Kernes sehr wahrscheinlich ein jäher Sprung der Dichte stattfindet. S. Gött. Nachr. 1897, S. 221.

Aus diesen und anderen Arbeiten ist das Interesse zu ersehen, auf allen nur möglichen Wegen die Constitution des Erdballes zu ergründen, um eine feste Grundlage und die unveränderlichen Maasse zu gewinnen, ohne welche ein gesicherter Fortschritt unmöglich ist.

Es war der Gedanke an die exponentielle Form der barometrischen Höhenformel, welcher mich bestimmte, versuchsweise einen ähnlich gebauten Ausdruck für das Dichtigkeitsgesetz der Erdschichten, und zwar für Rotationsellipsoide in der Form

$$\Theta = \Theta_c e^{-k\left(\frac{a'}{a}\right)^3 (1-\mathfrak{a}')}$$

aufzustellen, worin Θ_c die Dichte im Erdmittelpunkt, Θ diejenige in einer ellipsoidischen Schicht vom Äquatorialhalbmesser a' und der Abplattung $\mathfrak{a}' = \frac{a'-c'}{a'}$, ferner a den äusseren Äquatorialhalbmesser und k eine Constante bedeuten.

Sind die inneren Schichten ähnlich, also $1-\alpha' = \frac{c'}{a'} = \frac{1}{n}$ constant, so ist in diesem Falle

$$\Theta = \Theta_c e^{-\frac{k}{n}\left(\frac{a'}{a}\right)^3},$$

welcher Ausdruck für die Erde als Kugel in den folgenden

$$\Theta = \Theta_c e^{-kx^3}$$

übergeht, x in Theilen des Erdhalbmessers gedacht.

Es zeigt sich, dass dies Dichtigkeitsgesetz, das ich schon früher aufgestellt, die Rechnungen im Ganzen in günstigem Sinne beeinflusst und vermöge seiner einfachen und doch sehr allgemeinen Form gewisse Vorzüge besitzt, die die Einführung des Ausdruckes in die Theorie als berechtigt erscheinen lassen. Daher sind in den nachfolgenden Entwicklungen möglichst viele Folgerungen aus dieser Annahme gezogen und überhaupt der Gegenstand in möglichster Vielseitigkeit behandelt worden. Abgesehen von den Consequenzen des obigen Gesetzes an sich und in Beziehung auf die bisher erhaltenen Beobachtungsresultate in den tiefen Erdschachten leite ich unter der Annahme, dass die Erdschichten einander ähnliche Rotationskörper constanter Abplattung sind, einen ersten Näherungswerth der Abplattung ab, um dann zu dem Falle variabler Abplattung überzugehen, zu dem Zwecke, den Einfluss dieser Veränderlichkeit auf das Resultat festzustellen.

Der Voraussetzung einer ersten Annäherung gemäss berücksichtige ich nur die Grössen erster Ordnung der Abplattung und der Centrifugalkraft, da eine weitergetriebene Genauigkeit in Rücksicht auf die Fehlergrenzen der Constanten der Dichtigkeitsformel sich von selbst verbietet. Bis auf Grössen zweiter Ordnung weichen bekanntlich die Niveauflächen von Rotationsellipsoiden nicht ab.

Die Anwendung der Hypothese auch auf die Atmosphäre und ihren Druck, auf die Trägheitsmomente des Erdkörpers und die Dichtigkeitsverhältnisse der Planeten, speciell Jupiters, dürften erweisen, dass das oben formulirte Gesetz eine hinreichende Tragweite hat, um einiger Aufmerksamkeit werth zu sein.

§. 1.

In der allgemeinen Formel für die Masse

$$\int\int\int \Theta \, dx . dy . dz$$

bezeichne Θ die Dichtigkeit im Punkte xyz eines Ellipsoids. Dieselbe sei eine stetige Function des Ortes und ändere sich in den ellipsoidisch gedachten homogenen Schichten von Lage zu Lage. Ihr Ausdruck kann durch eine symmetrische Function

$$\Theta = f(xyz)$$

dargestellt werden. Für das dreiaxige Ellipsoid mit Z als Rotationsaxe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = m,$$

also für den allgemeinsten Fall setzen wir das folgende Dichtigkeitsgesetz fest:

$$\Theta = \Theta_c e^{-kabc\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \qquad 1)$$

Darin bedeuten Θ_c die Dichtigkeit im Mittelpunkte, $a\sqrt{m}$, $b\sqrt{m}$, $c\sqrt{m}$ die Halbaxen der mit m variablen Schichten, k eine Constante. Die Function ist symmetrisch und liefert für alle Elemente, in welchen die eingeklammerte Summe einen constanten Werth m hat, die vorausgesetzte constante Dichtigkeit der zum Schwerpunkte concentrischen, homogenen, ellipsoidischen Schichten. Die Nebenaxen b und c sind in Theilen der grossen Halbaxe $a = 1$ gedacht. Demnach ist die Oberflächendichte des dreiaxigen Ellipsoids durch

$$\Theta_0 = \Theta_c e^{-kabc} \qquad 2)$$

definirt, und es genügt, diese Werthe in die Attractionstheorie einzuführen und die Resultate mit der Erfahrung zu vergleichen. Wir sehen also von Unregelmässigkeiten der Massenvertheilung im Innern ab und setzen einfach die oben definirte ideale Massenvertheilung als gegeben voraus. Vermittelst der bekannten Ausdrücke für Polarcoordinaten

$$x = r \sin \vartheta \cos \omega, \qquad y = r \sin \vartheta \sin \omega, \qquad z = r \cos \vartheta,$$

geht das Massenintegral über in

$$= \Theta_c \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega\, dr\, e^{-kabcr^3\left(\frac{\sin\vartheta^2\cos\omega^2}{a^2}+\frac{\sin\vartheta^2\sin\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\vartheta^2}{c^2}\right)^{3/2}} . \quad 3)$$

Die Integration von $r = 0$ bis zum Durchschnitt $r = R$ der Oberfläche gibt unter Annahme der Ähnlichkeit der Schichten

$$= \frac{1}{3}\Theta_c \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\omega\, d\vartheta\, \frac{\left(1 - e^{-kabcR^3\left(\frac{\sin\vartheta^2\cos\omega^2}{a^2}+\frac{\sin\vartheta^2\sin\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\vartheta^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right)}{kabc\left(\frac{\sin\vartheta^2\sin\omega^2}{a^2}+\frac{\sin\vartheta^2\sin\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\vartheta^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

und da

$$R = \frac{1}{\left(\frac{\sin\vartheta^2\cos\omega^2}{a^2}+\frac{\sin\vartheta^2\sin\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\vartheta^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

so erhält man den einfacheren Ausdruck

$$M = \Theta_c \frac{(1-e^{-kabc})}{3kabc}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega}{\left(\frac{\sin\vartheta^2\cos\omega^2}{a^2}+\frac{\sin\vartheta^2\sin\omega^2}{b^2}+\frac{\cos\vartheta^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \quad 4)$$

Indem wir noch die folgenden Hilfsgrössen

$$A = \frac{\sin\vartheta^2}{b^2}+\frac{\cos\vartheta^2}{c^2} \qquad B = \frac{\sin\vartheta^2}{a^2}+\frac{\cos\vartheta^2}{c^2}$$

benützen, geht der Massenausdruck über in

$$M = \Theta_c \frac{(1-e^{-kabc})}{3kabc}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{(A\sin\omega^2 + B\cos\omega^2)^{3/2}}, \quad 5)$$

und es führt die Integration nach ω auf elliptische Integrale, die wir aber vermeiden können, wenn wir uns auf Rotationsellipsoide beschränken und also $a = b$ setzen. Ausser in speciellen Fällen ist im Folgenden unter a stets die Längeneinheit verstanden, auf welche sich alle anderen Längen beziehen.

Hiernach ist

$$M = \Theta_c \frac{1-e^{-ka^2c}}{3ka^2c} 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\left(\frac{\sin\vartheta^2}{a^2}+\frac{\cos\vartheta^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad 6)$$

und integrirt

$$M = \frac{4\pi\Theta_c}{3k}(1 - e^{-ka^2c}). \tag{7}$$

Dieser Ausdruck bedeutet also die Masse eines geschichteten Rotationsellipsoides, dessen Dichtigkeit nach dem obigen Gesetze 1) eine stetige Function der Lage seiner einander ähnlichen Schichten ist, welche also von Θ_0 bis Θ_c zum Mittelpunkte fortwährend wächst.

Bedeutet Θ_m die mittlere Dichtigkeit der Erde, so ist die Gesammtmasse

$$M = \frac{4}{3}\pi\Theta_m a^2 c, \tag{8}$$

und aus beiden Beziehungen folgt

$$\Theta_m = \Theta_c \frac{1 - e^{-ka^2c}}{ka^2c} \tag{9}$$

als mittlere Dichte des Rotationsellipsoides.

Von diesen Formeln werden wir nunmehr Gebrauch machen, und zwar in der Weise, wie sie Herr Prof. Tumlirz in seiner oben genannten Abhandlung entwickelt hat.

Die Attractionstheorie der Ellipsoide liefert die nachfolgenden Relationen, in welchen (k^2) die Gravitationsconstante bedeutet:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi x abc(k^2)\int_0^\infty \frac{f(T)\,dt}{(a^2+t)\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \\ B &= 2\pi y abc(k^2)\int_0^\infty \frac{f(T)\,dt}{(b^2+t)\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \\ C &= 2\pi z abc(k^2)\int_0^\infty \frac{f(T)\,dt}{(c^2+t)\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$T = \frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{c^2+t}$$

und worin $f(T)$ eine Function der Dichtigkeit darstellt.

Für das Rotationsellipsoid haben wir demnach als Attractionscomponenten auf den Punkt xz im Meridianschnitte $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$:

$$A = 2\pi x a^2 c(k^2)\int_0^\infty \frac{\Theta_c e^{-ka^2c\left(\frac{x^2}{a^2+t}+\frac{z^2}{c^2+t}\right)^{3/2}}}{(a^2+t)^2\sqrt{c^2+t}}\,dt$$

$$C = 2\pi z a^2 c(k^2)\int_0^\infty \frac{\Theta_c e^{-ka^2c\left(\frac{x^2}{a^2+t}+\frac{z^2}{c^2+t}\right)^{3/2}}}{(a^2+t)\sqrt{(c^2+t)^3}}\,dt. \qquad 11)$$

In die erste dieser Gleichungen führen wir ein

$$a^2+t = a^2 u^{-2/3} \quad \text{und} \quad \frac{a}{c} = n,$$

und in die zweite

$$c^2+t = c^2 v^{-2/3},$$

dann folgt

$$A = \frac{4}{3}\pi\frac{x}{n}\,\Theta_c(k^2)\int_0^1 \frac{du\, e^{-\frac{k}{n}x^3u\left(1+\frac{z^2}{x^2\left(1-\frac{n^2-1}{n^2}u^{2/3}\right)}\right)^{3/2}}}{\sqrt{1-\frac{n^2-1}{n^2}u^{2/3}}}$$

$$C = \frac{4}{3}\pi z n^2\Theta_c(k^2)\int_0^1 \frac{dv e^{-kn^2z^3v\left(1+\frac{x^2}{z^2\left(1+\frac{n^2-1}{n^2}v^{2/3}\right)}\right)^{3/2}}}{1+\frac{n^2-1}{n^2}v^{2/3}} \qquad 12)$$

Beschränken wir uns vorläufig auf äquatoriale und polare Attraction, so ist einfacher

$$A = \frac{4}{3}\pi\frac{a}{n}\,\Theta_c(k^2)\int_0^1 \frac{du\, e^{-\frac{ka^3}{n}u}}{\sqrt{1-\frac{n^2-1}{n^2}u^{2/3}}}$$

$$C = \frac{4}{3}\pi a n\,\Theta_c(k^2)\int_0^1 \frac{du\, e^{-\frac{ka^3}{n}u}}{1+\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)u^{2/3}}. \qquad 13)$$

Fassen wir das Vorstehende erläuternd zusammen, so ergibt sich Folgendes:

Es bedeutet A die Attraction eines Rotationsellipsoides auf einen Punkt am Äquator, C die entsprechende auf den Pol, und zwar unter der Voraussetzung, dass das Ellipsoid aus concentrischen, ähnlichen, ellipsoidischen Schichten zusammengesetzt ist, deren nach dem Centrum wachsende Dichte dem Gesetz

$$\Theta = \Theta_c e^{-ka^2c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \Theta_c e^{-\frac{k}{n}a'^3} \qquad 14)$$

gehorcht. a' ist also ein innerer Äquatorialhalbmesser, gedacht in Theilen desjenigen der Oberfläche. Die Integrale zwingen zur Darstellung in Reihen, die um so stärker convergiren, je weniger das Ellipsoid von der Kugel abweicht. Die Abplattung

$$\mathfrak{a} = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a} = 1 - \frac{1}{n}\,[1] \qquad 15)$$

ist in den meisten Fällen sehr klein, was die Rechnungen wesentlich vereinfacht, und man gewinnt nach Ausführung derselben unter Einführung der Relationen

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{5} - \frac{1}{8}\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \frac{1}{14}\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{k}{n}\right)^3 + \\ &\quad + \frac{1}{17}\cdot\frac{1}{4!}\left(\frac{k}{n}\right)^4 - \dots \\ Q &= \frac{1}{7} - \frac{1}{10}\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{k}{n}\right)^3 + \\ &\quad + \frac{1}{19}\cdot\frac{1}{4!}\left(\frac{k}{n}\right)^4 - \dots \end{aligned} \qquad 16)$$

als Resultat

$$A = \frac{4}{3}\,\frac{\pi a}{n}\,\Theta_c(k^2)\left(\frac{1-e^{-\frac{ka^3}{n}}}{\frac{ka^3}{n}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{n^2-1}{n^2}P + \frac{9}{8}\,\frac{(n^2-1)^2}{n^4}\,Q\right),$$

---

[1] Wir bezeichnen mit $\mathfrak{a}$ die Abplattung, mit $\mathfrak{b}$ die relative Zunahme der Schwere vom Äquator zum Pol, mit $\mathfrak{c}$ die äquatoriale Centrifugalkraft im Verhältniss zur Schwerkraft daselbst.

oder nach Einführung von 9)

$$A = \frac{4\pi a \Theta_m (k^2)}{3n}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\frac{n^2-1}{n^2}P + \frac{9}{8}\cdot\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\frac{(n^2-1)^2}{n^4}Q\ldots\right)$$

$$C = \frac{4\pi a n \Theta_m (k^2)}{3}\left(1 - \frac{3\,\Theta_c}{\Theta_m}(n^2-1)P + \frac{3\,\Theta_c}{\Theta_m}(n^2-1)^2 Q\ldots\right) \qquad 18)$$

Diese äquatorial-polaren Attractionscomponenten gehen für $k = 0$ in die bekannten Ausdrücke für das homogene Ellipsoid über. Es bedarf also nur noch der Ermittelung des Werthes von k, um die betreffenden Componenten zu bestimmen.

Die beiden Ausdrücke A und C für Äquator und Pol lassen übrigens leicht erkennen, welchen Einfluss die vorausgesetzte Massenlagerung gegenüber einer gleichförmigen auf die genannten Punkte ausübt. Bei gleicher mittlerer Dichte und den gleichen Längendimensionen zeigt sich, wenn in die Formeln 18)

$$\frac{\Theta_c}{\Theta_m} = \frac{\frac{k}{n}}{1 - e^{-\frac{k}{n}}}$$

eingeführt und in Reihen entwickelt wird, dass die Zunahme der Dichte nach dem Innern eine grössere Äquatorial-, aber kleinere Polaranziehung als bei homogener Dichte zur Folge hat, und ist der Unterschied um so merklicher, je rascher die Zunahme der Dichte nach innen erfolgt, also je grösser der Dichtigkeitsfactor k ist.

§. 2.

Wir ziehen jetzt die Beobachtungen heran, die sich auf Schweremessungen und Pendelbeobachtungen in den Oberflächenschichten der Erde beziehen, unter welchen die von dem Astronomen Airy im Jahre 1854 in der Kohlengrube Harton bei Newcastle ermittelten zunächst in Rechnung gezogen werden sollen. Auf Grund der Annahme, dass die Dichtigkeit nach dem Mittelpunkte der Erde stetig wachse, muss die Zunahme der Schwere eine Beschleunigung der Oscillationen des Secunden-

pendels hervorbringen. Vermittelst des elektrischen Telegraphen ergaben die Vergleiche im Gang des oberen und unteren Pendels für letzteres eine Beschleunigung von 2·25 Secunden täglich in einer Tiefe von 383 *m*. Diesen Ermittelungen zufolge fand Airy für die mittlere Dichte der Erde den Werth 6·566.

Die neueren Untersuchungen an anderen Erdorten ergaben indessen hievon ziemlich abweichende Resultate, die zum Theil in Verschiedenheiten der Massenlagerung, zum Theil in den verschiedenen Beobachtungsmethoden begründet sind, deren fortgesetzte Verfeinerung aber zur Hoffnung berechtigen, dass die Mittelwerthe hinreichend genau sein werden, um einer Theorie zur Grundlage zu dienen. Für ein Rotationsellipsoid, beziehungsweise für ein inneres vom Äquatorialhalbmesser a' oder r vereinfacht sich die Formel 14) zu

$$\Theta_r = \Theta_c e^{-\frac{k}{n}\frac{r^2}{a^2}}. \tag{19}$$

Die Erdmasse ist diesem Dichtigkeitsgesetz zufolge für ähnliche Schichten

$$M_r = 4\pi\Theta_c \int_0^r e^{-\frac{k}{n}\frac{r^2}{a^2}} r^2 dr$$

oder

$$M_r = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{\Theta_c}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{n}\frac{r^2}{a^2}}\right), \tag{20}$$

also die Gesammtmasse vom Halbmasser $r = a$

$$M_a = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{\Theta_c}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{n}}\right) = \frac{4}{3}\pi a^2 c\Theta_m. \tag{21}$$

Die mittlere Dichte ist demnach

$$\Theta_m = n\frac{\Theta_c}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{n}}\right) \tag{22}$$

und die Dichte der oberen Schicht vom Halbmesser a

$$\Theta_a = \Theta_c e^{-\frac{k}{n}}. \tag{23}$$

Diese Formeln können noch weiter mit einander verknüpft werden. So findet man leicht die folgenden Relationen:

$$\frac{k}{n}\Theta_m = \Theta_c - \Theta_a, \qquad \Theta_m = \frac{\Theta_c - \Theta_a}{ln\,\Theta_c - ln\,\Theta_a},$$

ferner

$$\frac{\Theta_m}{\Theta_a} ln \frac{\Theta_c}{\Theta_a} - \frac{\Theta_c}{\Theta_a} + 1 = 0 \qquad 24)$$

und andere, die aus der mittleren und Oberflächendichte die Centraldichte des Erdkörpers berechnen lassen. Man kann sich übrigens das Ellipsoid noch weiter nach aussen fortgesetzt denken, $r > a$, und es würde seine Masse dem Obigen zufolge

$$M_r = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{k}(\Theta_c - \Theta_r) = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{n}\cdot\frac{\Theta_c - \Theta_r}{ln\Theta_c - ln\Theta_a}$$

sein.

r ist stets als Äquatorialhalbmesser gedacht.

Selbst für den Fall eines Ellipsoids von unendlicher Ausdehnung (Nebelstern) sind diese Formeln giltig, und die Masse desselben würde, da $e^{-\frac{kr^3}{na^3}}$ oder Θ_r für $r = \infty$ verschwindet, die endliche Grösse haben:

$$M_\infty = \frac{4}{3}\pi a^3\frac{\Theta_c}{k}.$$

Es ist daher $M_r = M_\infty\left(1 - e^{-\frac{kr^3}{na^3}}\right)$.

Wie man sieht, sind die Formeln von grosser Allgemeinheit. Um zunächst die Airy'schen Untersuchungen zu verwerthen, berechnen wir zuerst die Beschleunigung, welche Kugeln von der vorausgesetzten Dichtigkeit auf einen Punkt vom Halbmesser x, beziehungsweise 1 ausüben.

Nach dem Attractionsgesetz ist ohne Rücksicht auf die Fliehkraft

$$g_x : g = \frac{1 - e^{-kx^3}}{x^2} : \frac{1 - e^{-k}}{1^2} \qquad 25)$$

$$\frac{g_x}{g} = \frac{1 - e^{-kx^3}}{(1 - e^{-k})x^2}.$$

Die Pendelformel $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ zeigt, dass die Quadrate der Schwingungszeiten gleich langer Pendel sich umgekehrt wie die Beschleunigungen an den Beobachtungsorten verhalten. Es ist also $\frac{t^2}{t_x^2} = \frac{g_x}{g}$, mithin

$$\frac{t^2}{t_x^2} = \frac{1-e^{-kx^3}}{x^2(1-e^{-k})}. \tag{26}$$

Differentirt gibt diese Formel

$$2(1-e^{-kx^3})t_x\frac{dt_x}{dx} + 3kt_x^2x^2e^{-kx^3} = 2t^2(1-e^{-k})x$$

und transformirt

$$\frac{x}{t_x}\frac{dt_x}{dx} + \frac{3}{2}\frac{kx^3}{e^{kx^3}-1} = 1. \tag{27}$$

Da die durchbrochene Schicht des 385 m tiefen Schachtes nur $\frac{1}{16621{\cdot}7}$ des Erdhalbmessers beträgt, so kann man für die oberen Schichten den letzten Ausdruck zu dem folgenden

$$\frac{dt}{td_x} = 1 - \frac{3k}{2(e^k-1)} \tag{28}$$

vereinfachen.

Bezeichnet man mit h die Tiefe des Schachtes und mit Δt die Abnahme der Schwingungszeit des Pendels in dieser Tiefe, so ist

$$\frac{\Delta t}{ht} = 1 - \frac{3}{2}\frac{\Theta_0}{\Theta_m}, \tag{29}$$

woraus

$$\Theta_m = \frac{\frac{3}{2}\Theta_0}{1-\frac{\Delta t}{ht}}$$

beziehungsweise

$$\frac{\Theta_0}{\Theta_m} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{\Delta t}{ht}\right) \tag{30}$$

leicht berechnet werden kann. Es ist einzusetzen $h = \frac{1}{16621\cdot 7}$, $\frac{\Delta t}{t} = \frac{2\cdot 25}{86400}$ (für den mittleren Tag angenommen), und es folgt

$$\frac{\Theta_0}{\Theta_m} = 0\cdot 3781.$$

Da nun die Dichtigkeit der oberen Schicht zu $2\cdot 5$ bestimmt wurde, so erhalten wir als mittlere Dichte der Erde auf Grund des Airy'schen Resultates

$$\Theta_m = 6\cdot 61,$$

welcher Werth von dem von ihm berechneten $\Theta_m = 6\cdot 566$ nur wenig abweicht. Den obigen Formeln zufolge ist also die Dichte im Mittelpunkte der Erde

$$\Theta_c = 13\cdot 78.$$

Das Verhältniss $\frac{\Delta t}{t}$ kann noch durch die Beziehungen

$$\frac{g_x}{g} = \frac{86402^{1/4}}{86400}, \qquad \frac{g_x}{g} = \frac{t^2}{t_x^2},$$

woraus

$$2\, g_x dt_x + t_x \Delta g_x = 0$$

in

$$\frac{\Delta t}{t} = -\frac{\Delta g}{2 g_x} = \frac{g_x - g}{2 g_x}$$

umgeändert werden, wonach also

$$\frac{\Theta_0}{\Theta_m} = \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{g}{g_x}\right)\frac{a}{3h} \qquad a = 1$$

oder

$$\Theta_m = \frac{3}{2}\,\Theta_0 : \left(1 - \frac{g_x - g}{g_x} \cdot \frac{a}{2h}\right)$$

folgt.

Damit sind wir vermittelst der eingeführten Dichtigkeitsformel auf einen Ausdruck gekommen, der in den Lehrbüchern der Physik auch in folgender Weise dargestellt zu werden pflegt: (vergl. u. A. Victor v. Lang, Einl. in die theor. Physik).

Die Schwerebeschleunigung g denkt man sich zusammengesetzt aus der Anziehung einer Kugelschale von der Dicke h und einer Kugel vom Radius $a-h=r$. Dabei wird die Dichte der Kugel $=\Theta_m$ angenommen und die Wirkungen beider vereint durch

$$g=\frac{4}{3}\pi\frac{(r+h)^3-r^3}{(r+h)^2}\Theta_0+\frac{4}{3}\pi\frac{r^3.\Theta_m}{(r+h)^2}$$

bestimmt. Hieraus ergibt sich weiter

$$g=\frac{4}{3}\pi\left[(r+h)\Theta_0+r\frac{\Theta_m-\Theta_0}{\left(1+\frac{h}{r}\right)^2}\right]$$

oder bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{h}{r}$

$$g=\frac{4}{3}\pi\left[(r-2h)\Theta_m+3h\Theta_0)\right].$$

Vermöge des Ausdruckes $g_x=\frac{4}{3}\pi r\Theta_m$ ist also

$$\frac{\Theta_0}{\Theta_m}=\frac{2}{3}-\left(1-\frac{g}{g_x}\right)\frac{r}{3h}$$

oder wenn man $\left(\frac{h}{r}\right)^2$ vernachlässigt:

$$\frac{g_x-g}{g}=2h\left(1-\frac{3}{2}\frac{\Theta_0}{\Theta_m}\right). \qquad 31$$

Diese Formel, welche mit der unserigen übereinstimmt, reicht für geringe Tiefen vollkommen aus, für grössere Tiefen sind indessen die allgemeinen Ausdrücke anzuwenden.

Nach neueren, namentlich von Sterneck ausgeführten Beobachtungen dürfte das Airy'sche Resultat $\Theta_m=6\cdot566$ etwas zu gross zu sein. Die von ihm angestellten Untersuchungen über die Änderung der Schwere in verschiedenen Tiefen u. A. im Adalbertschacht des Silberbergwerkes in Přibram (1883) und im Abrahamschacht bei Freiberg i. S. (1885) ergaben die Zunahme der Schwere nach dem Erdinneren. Nur zeigte diese Zunahme ein anderes Verhalten.

In Harton nimmt sie bei 383 *m* Tiefe ebensoviel zu, als in Přibram bei 623 *m* und in Freiberg bei etwa 400 *m*. In einem Bergwerk in Přibram in Böhmen ging in 1000 *m* Tiefe eine Uhr pro Tag um 3·88 Secunden vor. Bei einer Gesteinsdichte von 2·5 würde die obige Formel $\theta_m = 5\cdot 25$ und für $\theta_0 = 2\cdot 7$ etwa $\theta_m = 5\cdot 67$ sein. Man erkennt schon an diesen wenigen Beispielen, dass die Data, abgesehen von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern, doch noch sehr von localen Verhältnissen beeinflusst sind und nur soeben hinreichen, um als erste Näherungen zu gelten. Es bedarf also weiterer, die ganze Erde umfassender, Beobachtungen, aus welchen dann ein Mittelwerth abzuleiten wäre. Wie es scheint, muss die Tiefe, welche der Hartoner Zeit entspricht, im Allgemeinen grösser angenommen werden. Die neueren, auf anderen Methoden beruhenden Resultate bezüglich des Mittelwerthes θ_m nähern sich der Zahl 5·6 und gehen zum Theil noch darunter. Die von Cavendish, Reich, Baily, Cornu und Baille mit der Drehwage ermittelten Dichten sind beziehungsweise 5·45, 5·49 und 5·58, 5·67, 5·56 und 5·50, während v. Jolly mit der Wage mit langem Gehäng 5·692 fand. Wilsing ermittelte mit dem Pendelapparat 5·594, beziehungsweise 5·577; Poynting mit der Wage 5·4934; Boys mit der verbesserten Drehwage 5·5270, Eötvös in Pest 5·529. Die neuerdings von Richarz und Krigar-Menzel mit grosser Sorgfalt angestellten Versuche mit der Doppelwage ergaben

$$\theta_m = 5\cdot 505 \pm 0\cdot 009.$$

Die letzteren Resultate scheinen des Mittelwerthes schon auf 1 bis 2 Decimalen sicher zu sein, wiewohl sich nicht leugnen lässt, dass sie, wie die Pendelversuche, noch immer eine Function des Beobachtungsortes zu sein scheinen.

Nach E. D. Preston ist das Mittel von 9 in Schottland, Italien, England, Japan, Böhmen, Hawai erhaltenen Beobachtungsresultaten 5·59. C. Braun in Kalocsa in Ungarn (Drehwage im luftleeren Raum) findet auf Grund 10jähriger Untersuchungen, dass θ_m zwischen 5·5094 und 5·5511 liegt und bestimmt sie zu $5\cdot 52728 \pm 0\cdot 0012$.

Helmert in seiner »Theorie der höheren Geodäsie« (1884) hält 5·6 für den wahrscheinlichen Mittelwerth. Adoptiren wir vorläufig diese Zahl, so ergeben sich aus den aufgestellten Formeln und der Annahme, dass die Oberflächendichte 2·5 ist, die folgenden Resultate:

Zunächst folgt aus der allgemeinen Formel 22) oder aus

$$\frac{\Theta_m}{\Theta_0} = \frac{e^{\frac{k}{n}}-1}{\frac{k}{n}} = \frac{5\cdot 6}{2\cdot 5}$$

die Constante

$$\frac{k}{n} = 1\cdot 4425. \qquad 32)$$

Damit ist die Dichtigkeit des Erdmittelpunktes

$$\Theta_c = \Theta_0 e^{\frac{k}{n}} = 10\cdot 578,$$

die also nahezu dem specifischen Gewichte des Silbers entspricht.

Es ist ferner

$$\frac{\Theta_c}{\Theta_m} = 1\cdot 889, \qquad e^{\frac{k}{n}} = 4\cdot 2312 \qquad 33)$$

und also die allgemeine Dichtigkeitsformel für den Mittelwerth 5·6

$$\Theta = 10\cdot 578 e^{-1\cdot 4425 x^2},$$

welcher Ausdruck also die Dichtigkeit in jedem Punkte des Erdinneren, genauer in jedem Punkte eines Äquatorhalbmessers, wiedergibt. Die Formel ist sehr einfach und bringt, wie wir hoffen, die wirklichen Verhältnisse hinreichend genau zum Ausdrucke. Man kann aus ihr noch verschiedene Relationen ableiten, die von Interesse sind und die man mit den entsprechenden, auf anderen Grundlagen gewonnenen Resultaten vergleichen möge. Z. B. kann man nach dem Orte fragen, wo die Beschleunigung der Schwere ihr Maximum erreicht. Wird k für $\frac{k}{n}$ gesetzt und

$$\frac{g_x}{g} = \frac{1-e^{-kx^2}}{x^2(1-e^{-k})}$$

differentirt, so folgt für $u = kx^3$

$$e^u = \frac{3}{2} u + 1,$$

woraus

$$u = 0\cdot 7627,$$

also

$$x = 0\cdot 80862$$

folgt.

Die Maximalbeschleunigung liegt also in einer Tiefe, deren Halbmesser nahe $^4/_5$ des Erdhalbmessers ist. Die Centrifugalkraft würde, wenn berücksichtigt, an diesem Resultat nur wenig ändern. Also beträgt in einer Tiefe von circa $^1/_5$ Erdhalbmesser die Beschleunigung

$$g_x = 10\cdot 476\, m.$$

Das Maximalverhältniss ist also $\frac{g_x}{g} = 1\cdot 0686$.

In dieser Tiefe würde also das Secundenpendel, das an der Oberfläche pro Tag 86400 Schwingungen vollführt,

$$86400 \sqrt{1\cdot 0686} = 89314,$$

also gegen 2914 Schwingungen mehr machen als oben.

Die Secundenpendellänge ist hiernach eine Function der Tiefe und nimmt zufolge des allgemeinen Ausdruckes

$$l = \frac{g_x}{\pi^2} = \frac{g(1 - e^{-kx^3})}{\pi^2 x^2 (1 - e^{-k})} \qquad 34)$$

mit der Tiefe zunächst zu, später aber bis auf Null ab, da im Mittelpunkte der Anziehung keine Schwere ist.

Schreibt man die Dichtigkeitsformel in der Form

$$y = \Theta_c e^{-kx^3},$$

also in Gestalt einer Curvengleichung, so zeigen die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -3k\Theta_c x^2 e^{-kx^3} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 3k\Theta_c x(3kx^3 - 2)e^{-kx^3} \end{aligned} \qquad 35)$$

dass die Curve im Punkte $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3k}}$ einen Wendepunkt besitzt, dem zufolge die Dichtigkeit von aussen nach innen rasch ansteigt, bei $x = 0\cdot773$ die grösste Dichtigkeitszunahme, beziehungsweise eine Dichte $\Theta = 5\cdot43$ erreicht, also dem Mittelwerthe $5\cdot6$ nahesteht und damit auch die rasche Zunahme der Beschleunigung erklärlich macht. In der Tiefe $x = 0\cdot76113$ ist $\Theta = \Theta_m = 5\cdot6$. Von Interesse ist ferner die Berechnung des Maximums des Druckes der Masse einer Volumeneinheit im Erdinneren. Der Druck eines Cubikdecimeters Wasser an der Oberfläche ist 1 *kg*, der eines Cubikdecimeters der vorausgesetzten Oberflächenschicht $= 2\cdot5$ *kg*.

Der Druck mg_x hängt von der jeweiligen Masse und der Beschleunigung ab, ist also eine Function der Lage des Punktes und ist nach dem Obigen

$$m_x g_x = mg \frac{1-e^{-kx^3}}{x^2(1-e^{-k})} e^{k(1-x^3)}. \qquad 36)$$

Auch hier ergibt sich unmittelbar, dass der Druck im Mittelpunkte der Erde $= 0$ ist. Die Körper haben dort kein Gewicht. Der Maximaldruck folgt aus der differentirten Gleichung

$$e_u = \frac{1+3u}{1+\frac{3}{2}u}, \qquad u = kx^3, \qquad k = 1\cdot4425.$$

Diese transcendente Gleichung hat die hier giltige Wurzel

$$u = 0\cdot225$$

und liefert

$$x = \sqrt[3]{\frac{u}{k}} = 0\cdot5383.$$

Das Maximum des Druckes liegt also in der Nähe der Mitte des Erdhalbmessers nach der Oberfläche zu. Das obige Verhältniss $m_x g_x : mg$ ist daselbst

$$\frac{3\left(1+\frac{3}{2}u\right)ue^k}{2x^2(1+3u)^2(1-e^{-k})} = 3\cdot0765. \qquad 37)$$

Hiernach ist der Druck der mit Masse erfüllten Volumeneinheit in der Kugelschicht vom Halbmesser $x = 0\cdot5383$ dreimal so gross, als der eines gleichen Volumens der oberen Erdschicht. Wie die Beschleunigung der Schwere, so nimmt auch der Druck lokaler Massen von oben nach unten gerechnet zuerst zu und dann bis Null ab.

§. 3.

Wir nehmen jetzt wieder die Gleichungen 18) auf in der Absicht, aus ihnen die Abplattung der Erde zu berechnen. Die äquatoreale Anziehung $A = G_0$ ist daher zuerst um den Betrag der Centrifugalkraft $= \omega^2 a$ zu vermindern.

Das Clairaut'sche Gesetz, dessen wir uns hier bedienen, schreiben wir in der Form

$$\frac{G_{90}}{g_0} = 1-\mathfrak{a}+\frac{5}{2}\mathfrak{c}, \tag{38}$$

in welchem $\mathfrak{a} = \frac{a-c}{a}$. Wegen $n = \frac{a}{c}$ gelten die Relationen

$$n = \frac{1}{1-\mathfrak{a}} \quad \frac{n^2-1}{n^2} = \mathfrak{a}(2-\mathfrak{a}). \tag{39}$$

Da $G_0 = g_0(1+\mathfrak{c})$, so ist

$$\frac{C}{A} = \frac{G_{90}}{G_0} = \frac{1-\mathfrak{a}+\frac{5}{2}\mathfrak{c}}{1+\mathfrak{c}}. \tag{40}$$

Den entwickelten Formeln für A und C zufolge erhält man

$$\frac{1-\mathfrak{a}+\frac{5}{2}\mathfrak{c}}{1+\mathfrak{c}} = n^2\,\frac{1-3\frac{\Theta_c}{\Theta_m}(n^2-1)P+3\frac{Q_c}{\Theta_m}(n^2-1)^2Q}{1+\frac{3}{2}\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\frac{n^2-1}{n^2}P+\frac{9}{8}\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^2Q} \tag{41}$$

oder

$$\frac{1-\mathfrak{a}+\frac{5}{2}\mathfrak{c}}{1+\mathfrak{c}}(1-\mathfrak{a})^2 = \frac{1-3\frac{\Theta_c}{\Theta_m}(n^2-1)[P-(n^2-1)Q]}{1+3\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\frac{n^2-1}{n^2}\left(P+\frac{3}{4}\frac{n^2-1}{n^2}Q\right)}.$$

Der Ausdruck zur Linken kann auch durch

$$\frac{\frac{1}{n}+\frac{5}{2}\mathfrak{c}}{n^2(1+\mathfrak{c})}$$

ausgedrückt werden.

Die Formel enthält die Abplattung $\mathfrak{a}=1-\frac{1}{n}$, die Centrifugalkraft $\mathfrak{c}=\frac{1}{289}$, das Verhältniss der Dichte im Mittelpunkte zur mittleren Dichte und in den Reihen für P und Q die Dichtigkeitsconstante k. Da das benützte Clairaut'sche Gesetz für alle Massenanordnungen und Lagerungen beliebiger Art gilt, so gilt es auch für das vorausgesetzte Dichtigkeitsgesetz, und es lässt sich also aus der letzten Formel die Abplattung berechnen, wenn die übrigen Grössen bekannt sind. Da aber $\frac{k}{n}=1\cdot4425$ und die Abplattung aller Wahrscheinlichkeit nach zwischen $\frac{1}{290}$ und $\frac{1}{300}$ fällt, so kann man mittelst Näherungen den genauen Werth erhalten, wenn die Reihen für P und Q berechnet sind. Die Rechnung ergibt

$$P=0\cdot086946, \qquad Q=0\cdot054905.$$

Führen wir nun ein

$$\Theta_c=10\cdot578, \qquad \Theta_m=5\cdot6, \qquad \frac{\Theta_c}{\Theta_m}=1\cdot889,$$

so folgt, wenn man auch die Glieder 2. Ordnung zur Rechten noch mitnimmt:

$$\frac{\frac{1}{n}+\frac{5}{2}\mathfrak{c}}{n^2(1+\mathfrak{c})}=\frac{1-5\cdot667(n^2-1)(0\cdot086946-(n^2-1)0\cdot054905)}{1+2\cdot833\frac{n^2-1}{n^2}\left(0\cdot086946+\frac{n^2-1}{n^2}0\cdot041179\right)}.$$

Aus dieser Formel erhält man für $\mathfrak{c}=\frac{1}{289}$ und $n=\frac{1}{1-\mathfrak{a}}$ den Werth

$$\mathfrak{a}=\frac{1}{294\cdot5}.$$

Hiernach lässt sich folgendes Resultat aussprechen:

Wenn die Erde ein Rotationssphäroid und aus ähnlichen, concentrischen, ellipsoidisch begrenzten homogenen Schichten zusammengesetzt ist, deren Dichte in Richtung des Äquatorialradius nach dem Gesetz

$$\Theta = \Theta_c e^{-\frac{k}{n} x^3}$$

von der Oberfläche nach dem Erdmittelpunkte stetig zunimmt, so dass also die Oberflächendichte 2·5, die Dichte im Mittelpunkte 10·578 und die mittlere Dichte 5·6 beträgt, so ist die Abplattung dieses Rotationsellipsoides gleich

$$\frac{1}{294 \cdot 5},$$

eine Zahl, die dem Abplattungswerth 293·465 von Clarke nahezu entspricht.

§. 4.

Der vorhin errechnete Werth der Abplattung gilt nur unter der Voraussetzung der Ähnlichkeit homogener ellipsoidischer Schichten constanter Abplattung, welche Annahme bei unserer Erde und den übrigen Himmelskörpern schwerlich erfüllt sein wird. Vielmehr ist Grund vorhanden, dass die geschichteten Niveauflächen im Inneren der Erde verschiedene Abplattungswerthe haben werden.

Eine genauere Analyse hat also auf diese Veränderlichkeit Rücksicht zu nehmen, schon deshalb, um die Grösse und die Grenzen des Einflusses dieser Verschiedenheiten auf das Endresultat feststellen zu können. Hierdurch aber wird die Aufgabe bedeutend schwieriger, gewinnt aber, weil allgemeiner, ein tieferes Interesse, wobei man freilich nicht ausser Acht lassen darf, dass alle Untersuchungen nach dieser physisch unzugänglichen Seite des Erdballes doch nur lediglich hypothetische Voraussetzungen zur Grundlage haben, deren Zulässigkeit noch erst die Probe zu bestehen hat.

Clairaut, dem wir die ersten allgemeineren Untersuchungen über diesen Gegenstand verdanken, hat im Jahre 1743 in seinem Werke: »Figure de la Terre« eine Bedingungs-

gleichung zwischen Abplattung und Dichtigkeit in Form einer Differentialgleichung 2. Ordnung aufgestellt, welche es ermöglicht, bei bekanntem Dichtigkeitsgesetz das Gesetz der variablen Abplattung zu ermitteln. Im Anschluss an diese berühmte Abhandlung haben besonders Legendre und Laplace den Gegenstand weiter verfolgt und namentlich letzterer ihn für die Mechanik des Himmels fruchtbar gemacht. Der Natur der Sache nach ging es auch hier nicht ohne Hypothesen ab, da Niemand auch im entferntesten eine Vorstellung sich bilden kann davon, in welchem Zustande die tieferen Massen in Folge des darauf ausgeübten gewaltigen Druckes sich befinden, ganz abgesehen von dem Einfluss der Temperatur, über deren Grösse und Vertheilung im Innern auch nur unsichere Vermuthungen herrschen.

Gegen alle eingeführten Hypothesen, z. B. zwischen Druck und Dichtigkeit, lassen sich Einwendungen erheben, da bisher und wohl für immer die Mittel fehlen, die im Erdinneren herrschenden Druckkräfte und Temperaturen experimentell zu wiederholen und damit die gemachten Annahmen zu stützen, beziehungsweise zu widerlegen. »Wenn aber dem so ist, und wenn wir überhaupt nicht im Stande sind, die Form des Gesetzes der Dichtigkeit a priori anzugeben, so scheint es nicht ungerechtfertigt, eine Form, die die genügende Zahl, d. h. hier von drei Constanten enthält, frei anzunehmen und diese Constanten aus den Beobachtungen zu bestimmen.« Lipschitz, Versuch zur Herleitung eines Gesetzes, das die Dichtigkeit für die Schichten im Inneren der Erde annähernd darstellt. Crelle's Journal, 62. Bd., S. 4.

Im Verfolg dieses Gedankens hat Lipschitz in seinen früher genannten Abhandlungen eine Hypothese von sehr einfacher Form aufgestellt, die zu sehr interessanten und wichtigen Consequenzen führte, von welchen ein specieller Satz weiter unten zur Anwendung kommen wird.

Im Nachfolgenden behalte ich, wie schon im Vorhergehenden geschehen, die Schreibweise bei, wie sie Helmert in: »Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie«, die ich auch hier zu Grunde lege, eingeführt hat. Indem ich also auf dieses Werk verweise, gehen

wir nunmehr aus von der genannten Clairaut'schen Gleichung in der Form

$$\frac{d^2\alpha}{da^2} + \frac{2\Theta a^2}{A}\frac{d\alpha}{da} + \alpha\left(\frac{2\Theta a}{A} - \frac{6}{a^2}\right) = 0, \qquad 43)$$

$$A = \int_0^a \Theta a^2 da,$$

worin a den Äquatorialhalbmesser einer beliebigen Schicht im Inneren der Erde, α die zugehörige Abplattung bedeutet.

Will man von den Potentialausdrücken eines homogenen Ellipsoides ausgehen, so kann man den bekannten Werth (siehe Helmert, Theil 2, S. 481)

$$v = \frac{4}{3}\pi(k^2)\frac{\Theta a^3}{r'}\left(1 - \alpha + \frac{\alpha a^2}{5r'^2}(1 - 3\sin\varphi^2)\right) \qquad 44)$$

des Potentials für Punkte $r'(\varphi)$ ausserhalb, beziehungsweise für die Oberfläche anwenden, während für innere Punkte die analoge Gleichung

$$v = 2\pi(k^2)\Theta\left(a^2\left(1 - \frac{2\alpha}{3}\right) - \frac{r'^2}{3} + \frac{2r'^2}{15}\alpha(1 - 3\sin\varphi^2)\right) \qquad 45)$$

gilt. Über die Ableitung dieser Ausdrücke müssen wir auf das genannte Werk verweisen. Differentiren wir den ersten Ausdruck unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit von α nach innen, so ist das Potential einer dünnen homogenen Schicht auf einen Punkt ausserhalb

$$dv = \frac{4}{3}\pi(k^2)\frac{\Theta}{r'}\left(3a^2 - \frac{d(\alpha a^3)}{da} + \frac{1 - 3\sin\varphi^2}{5r'^2}\frac{d(\alpha a^5)}{da}\right) \qquad 46)$$

und auf einen Punkt innerhalb

$$dv = 2\pi(k^2)\Theta\left(2a - \frac{2}{3}\frac{d(\alpha a^2)}{da} + (1 - 3\sin\varphi^2)\frac{2r'^2}{15}\frac{d\alpha}{da}\right) \qquad 47)$$

und wenn wieder integrirt wird, für einen Punkt ausserhalb $r' = a'(1 - \alpha'\sin\varphi^2)$

$$= \frac{4}{3}\pi(k^2)\left(\frac{1}{r'}\int_0^{a'}\left(3a^2 - \frac{d(\alpha a^3)}{da}\right)\Theta da + \frac{1 - 3\sin\varphi^2}{5r'^3}\int_0^{a'}\frac{d(\alpha a^5)}{da}\Theta da\right), \qquad 48)$$

wobei die Integration sich vom Mittelpunkte bis zur Oberfläche erstreckt.

Die zuerst aufgeführte Bedingungsgleichung, die aus der Vereinigung der beiden allgemeinen Potentiale hervorgeht und die Bedingung der Constanz der letzteren für alle Punkte derselben Niveaufläche erfüllt, wenden wir an in der Form

$$\frac{4}{3}\pi(k^2)\int_0^{a'}\left(\frac{1}{5a'^3}\frac{d(\mathfrak{a}a^5)}{da}-\frac{\mathfrak{a}'}{a'}a^2\right)\Theta da + \\ + \frac{4}{15}\pi(k^2)a'^2\int_{a'}^{a_0}\frac{d\mathfrak{a}}{da}\Theta da + \frac{1}{6}\omega^2 a'^2 = 0. \quad 49)$$

$\mathfrak{a}'$ ist der Abplattungswerth der Schicht vom Äquatorialhalbmesser a', während der äussere Halbmesser a_0, wenn weiter nichts bemerkt ist, zuweilen der Einheit gleich gesetzt wird, um die Ausdrücke zu vereinfachen. Man bemerke, dass alle Ausdrücke dieser Bedingungsgleichung mit $\mathfrak{a}$ multiplicirt und mit $\omega^2 a'^2$ von derselben 1. Ordnung sind.

Das Gesetz der Dichtigkeit, wie unsere Hypothese es voraussetzt, schreiben wir in der Form

$$\Theta = \Theta_c e^{-\frac{ka'^3}{na^3}} \quad 50)$$

oder da $n = \frac{a}{c}$, $\mathfrak{a} = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$, mithin $\frac{1}{n} = 1 - \mathfrak{a}$ ist, in der Form

$$\Theta = \Theta_c e^{-\frac{ka'^3}{a^3}(1-\mathfrak{a})}, \quad 51)$$

wo a' der Äquatorialhalbmesser einer Schicht von der Abplattung $\mathfrak{a}$ ist.

Nunmehr ist das Gesetz der Abplattung für das Innere der Erde zu formuliren. Eine einfache Exponentialfunction wie die obige der Dichtigkeit anzusetzen, ist nicht angängig. Dagegen führt u. A. die nachfolgende Reihe, die jener Function in Reihenform ungefähr entspricht, zum Ziele:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_c\left[1 + C_1\frac{k}{n}\left(\frac{a'}{a}\right)^3 + C_2\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(\frac{a'}{a}\right)^6 + C_3\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(\frac{a'}{a}\right)^9\right]. \quad 52)$$

Nach Einführung dieses Ausdruckes in 49) und Zusammenfassung aller integrirten Glieder ergibt sich nach einer Reihe von Reductionen, wenn für einen Augenblick die grosse Halbaxe a_0 der Erde $= 1$ gesetzt wird

$$\frac{3}{5}\left(1+\frac{k}{n}\frac{a'^3}{8}(-5+8C_1)+\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{a'^6}{11}\left(\frac{5}{2}-8C_1+11C_2\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{a'^9}{14}\left(-\frac{5}{6}+4C_1-11C_2+14C_3\right)\ldots\right) \qquad 53)$$
$$-\left[1+\frac{k}{n}a'^3\left(C_1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{k}{n}\right)^2a'^6\left(C_2-\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{6}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{k}{n}\right)^3a'^9\left(C_3-\frac{1}{2}C_2+\frac{C_1}{6}-\frac{1}{24}\right)\right]$$
$$+\frac{3}{5}\left(\frac{k}{n}C_1(1-a'^3)+\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{(1-a'^6)}{6}(-3C_1+6C_2)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{(1-a'^9)}{9}\left(\frac{3}{2}C_1-6C_2+9C_3\right)\right)$$
$$+\frac{3\omega^2}{8\pi(k^2)\Theta_c}=0.$$

Nach Gleichsetzung der Ausdrücke gleich hoher Potenzen folgen die Werthe

$$C_1=\frac{1}{8}, \qquad C_2=\frac{1}{66}, \qquad C_3=\frac{1}{1848}$$

und damit die ersten Glieder des nachfolgenden Abplattungsgesetzes, in welchem $\mathfrak{a}_c$ die Abplattung im Erdmittelpunkte, $\mathfrak{a}$ die der Schicht vom Äquatorialhalbmesser a' bedeutet.

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_c\left(1+\frac{1}{8}\frac{k}{n}\left(\frac{a'}{a_0}\right)^3+\frac{1}{66}\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(\frac{a'}{a_0}\right)^6+\frac{1}{1848}\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(\frac{a'}{a_0}\right)^9\ldots\right) \qquad 54)$$

Die Reihe scheint gut zu convergiren. Bezüglich der folgenden Glieder würde die Berechnung der Coëfficienten aus der obigen Bedingungsgleichung sehr beschwerlich fallen, weshalb wir uns einer Formel bedienen werden, die von Herrn Prof. Lipschitz gegeben und für die Oberfläche des Ellipsoides giltig ist.

Es ist

$$a - c = a\mathfrak{a}, \tag{55}$$

also

$$da - dc = a\,d\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\,da.$$

Indem wir uns auf Rotationsellipsoide von solcher Abplattung beschränken, dass die Quadrate der Abplattung vernachlässigt werden können, schreiben wir die Formel für die Schwerebeschleunigung in der Form

$$g = g_a(1 + \mathfrak{B} \sin \varphi^2), \tag{56}$$

die für den Pol übergeht in

$$g_p = g_a(1 + \mathfrak{b}), \tag{57}$$

woraus sich ergiebt

$$da = dc(1 + \mathfrak{b}).$$

Hieraus folgt in Beziehung auf 55)

$$d\mathfrak{a} = \frac{da}{a}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) \quad \text{oder} \quad \frac{d\mathfrak{a}}{da} = \frac{\mathfrak{b} - \mathfrak{a}}{a}. \tag{58}$$

Führen wir diesen Ausdruck in 43) ein, so resultirt zunächst

$$\mathfrak{a}_0^2 \frac{d^2\mathfrak{a}}{da^2} = 6\left(\mathfrak{a} - \Theta \frac{\mathfrak{b}a^3}{3A}\right). \tag{59}$$

Da nun

$$A = \int \Theta a^2 da = \frac{\Theta_c}{3} \int_0^{a_0} e^{-\frac{k}{n}\left(\frac{a}{a_0}\right)^3} da^3 = n \frac{\Theta_c}{3k}\left(1 - e^{-\frac{k}{n}\left(\frac{a}{a_0}\right)^3}\right) a_0^3$$

so folgt für die Grenzfläche, wenn für diese $\mathfrak{a}_0$ der Abplattungswerth ist:

$$\mathfrak{a}_0^2 \frac{d^2\mathfrak{a}}{da^2} = 6\left(\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{b}ke^{-\frac{k}{n}}}{n\left(1 - e^{-\frac{k}{n}}\right)}\right) \tag{60}$$

oder einfacher

$$\mathfrak{a}_0^2 \frac{d^2\mathfrak{a}}{da^2} = 6\left(\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{b}k}{n\left(e^{\frac{k}{n}} - 1\right)}\right) \tag{61}$$

oder endlich

$$\frac{1}{6}a_0^2\frac{d^2\mathfrak{a}}{da^2}=\mathfrak{a}-\frac{\Theta_0}{\Theta_m}\mathfrak{b}. \tag{62}$$

Diese zuerst von Lipschitz (siehe Crelle's Journal, Bd. 63) abgeleitete Gleichung wird uns bei der Bestimmung der folgenden Coëfficienten des Abplattungsgesetzes nützlich sein.

Setzen wir für einen Augenblick x statt $\frac{a'}{a}$ und der Abkürzung wegen k für $\frac{k}{n}$, so ist

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_c(1+C_1kx^3+C_2k^2x^6\ldots)$$

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dx}=\mathfrak{a}_c(3C_1kx^2+6C_2k^2x^5\ldots)$$

$$\frac{d^2\mathfrak{a}}{dx^2}=\mathfrak{a}_c(6C_1kx+\text{etc.}),$$

und führen wir diese Werthe nach Entwicklung von e^k-1 in eine Reihe und alsdann $\mathfrak{b}$ aus 58) in 61) ein, so folgt für $x=1$:

$$\left(-1+4C_2k^2+11C_3k^3+21C_4k^4+\ldots\frac{(n-1)(3n+2)}{2}C_nk^n\ldots\right) \tag{63}$$
$$\left(1+\frac{k}{2!}+\frac{k^2}{3!}+\frac{k^3}{4!}+\ldots\right)+1+4C_1k+7C_2k^2+10C_3k^3+\ldots=0.$$

Dies ist die Relation, die zur Bestimmung aller Coëfficienten C_1C_2 etc. führt:

$$C_1=\frac{1}{8},\quad C_2=\frac{1}{66},\quad C_3=\frac{1}{1848},\quad C_4=-\frac{263}{1884960},$$
$$C_5=-\frac{2561}{188496000}.$$

C_n findet sich aus

$$n\,.\,C_n(3n+5)+\frac{1}{2!}(n-2)(3n-1)C_{n-1}+$$
$$+\frac{1}{3!}(n-3)(3n-4)C_{n-2}+\frac{1}{4!}(n-4)(3n-7)C_{n-3}+\ldots=0$$

und es ist $C_0=1$ zu setzen.

Die gesuchte Abplattungsformel für alle Schichten $\frac{a'}{a_0} = x$ im Innern der Erde ist also

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_c \Big(1 + 0 \cdot 125 \frac{k}{n} x^3 + 0 \cdot 0151515 \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^6$$
$$+ 0 \cdot 0005411 \left(\frac{k}{n}\right)^3 x^9 - 0 \cdot 0001395 \left(\frac{k}{n}\right)^4 x^{12}$$
$$- 0 \cdot 00001359 \left(\frac{k}{n}\right)^5 x^{15} + 0 \cdot 0000023 \left(\frac{k}{n}\right)^6 x^{18}$$
$$+ 0 \cdot 0000003 \left(\frac{k}{n}\right)^7 x^{21}. \quad 64)$$

Vermittelst dieser Reihe lässt sich also für jeden Werth $x = \frac{a'}{a_0}$ des Äquatorialhalbmessers a' einer Niveaufläche im Innern der Erde die zugehörige Abplattung berechnen, wenn die des Kernes $\mathfrak{a}_c$ bekannt ist.

Wird $\frac{k}{n} = 1 \cdot 4425$ darin eingesetzt, so folgt für die Grenzfläche

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_c (1 + 0 \cdot 180312 + 0 \cdot 031527 + 0 \cdot 001624$$
$$- 0 \cdot 000604 - 0 \cdot 00008487 + 0 \cdot 00002072), \quad 65)$$

also $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_c \, 1 \cdot 22795$.

Wenn z. B. $\mathfrak{a} = \frac{1}{300}$ angenommen würde, so wäre die Abplattung im Erdmittelpunkte

$$\mathfrak{a}_c = \frac{1}{363 \cdot 8}.$$

Das Resultat der vorliegenden Entwicklung zeigt, dass die Abplattung des Ellipsoides in dem Falle, wenn die Dichte vom Mittelpunkte zur Oberfläche abnimmt, geringer ist, als im Falle der Gleichartigkeit, was schon Newton behauptete. Zu gleichem Resultate gelangt auch Laplace, Mec. cel. II.

§. 5.

Wir nehmen nunmehr die Formel für das Potential wieder auf, um die gefundenen Ausdrücke für Θ und $\mathfrak{a}$ darin einzusetzen:

$$v = \frac{4}{3}\pi(k^2)\left(\frac{1}{r'}\int_0^{a'}\left(3a^2 - \frac{d(\mathfrak{a}a^3)}{da}\right)\Theta da - \right.$$
$$\left. - \frac{1-3\sin\varphi_1^2}{5r'^3}\int_0^{a'}\frac{d(\mathfrak{a}a^5)}{da}\Theta da\right). \quad 66)$$

Wir beschränken uns auch im Folgenden wieder auf Grössen 1. Ordnung von $\mathfrak{a}$, vernachlässigen also die höheren Potenzen der Abplattung und können demzufolge mit Ausnahme des ersten Integrals in den beiden folgenden $\Theta = \Theta_c e^{-kx^3}$ setzen, während im ersten Integral für Θ der Werth

$$\Theta = \Theta_c e^{-kx^3(1-\mathfrak{a})}$$

benützt werden muss. Dasselbe wird also, wenn x für die Variabele a gesetzt wird,

$$\int_0^{a'} 3a^2\Theta da = \int_0^{a'} 3a^2\Theta_c e^{-kx^3(1-\mathfrak{a})}dx$$
$$= \Theta_c\int e^{-kx^3} e^{k\mathfrak{a}_c(x^3+kC_1x^6+k^2C_2x^9)} d(x)^3$$
$$= \Theta_c\int e^{-kx^3}(1+k\mathfrak{a}_c(x^3+kC_1x^6\ldots))dx^3.$$

Wird integrirt, so folgt nach Bestimmung der Grenzen

$$\int 3a^2\Theta da = \Theta_c\frac{(1-e^{-k})}{k}$$
$$+\mathfrak{a}_c\Theta_c\left[\frac{1}{k} - \left(1+\frac{1}{k}\right) + kC_1\left(\frac{2}{k^2} - \left(1+\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2}\right)e^{-k}\right)\right.$$
$$\left. + k^2C_2\left(\frac{6}{k^3} - \left(1+\frac{3}{k}+\frac{6}{k^2}+\frac{6}{k^3}\right)e^{-k}\right) + \ldots\right].$$

Desgleichen erhalten wir für das zweite Integral

$$\int^{'}\frac{d(\mathfrak{a}a^3)}{da}\Theta da=\Theta_c\int d(\mathfrak{a}x^3)e^{-kx^3}$$

$$=\Theta_c\mathfrak{a}_c\int e^{-kx^3}(dx^3+kC_1dx^6+k^2C_2dx^9\ldots)$$

$$=\Theta_c\mathfrak{a}_c\left[\frac{1-e^{-k}}{k}+kC_1\left(\frac{2}{k^2}-\left(\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2}\right)e^{-k}\right)\right.$$

$$\left.+k^2C_2\left(\frac{6}{k^3}-\left(\frac{3}{k}+\frac{6}{k^2}+\frac{6}{k^3}\right)e^{-k}\right)+\ldots\right].$$

Die Vereinigung dieser Integrale, die anscheinend sehr complicirt zu werden verspricht, vereinfacht sich sehr durch Aufheben der meisten Glieder zu dem folgenden geschlossenen Ausdruck (worin $\mathfrak{a}_0$ die Abplattung der Oberfläche bezeichnet)

$$\int_0^{a'}\left(3a^2-\frac{d(\mathfrak{a}a^3)}{da}\right)\Theta da=\Theta_c\left(\frac{1-e^{-k}}{k}-\mathfrak{a}_0e^{-k}\right). \qquad 67)$$

Bezeichnen wir ferner das letzte Integral im allgemeinen Ausdrucke 66) mit

$$\mathfrak{a}_c\Theta_cS=\int_0^{a'}\frac{d(\mathfrak{a}a^5)}{da}\Theta da, \qquad 68)$$

so erhalten wir endlich das folgende, allgemein für alle Punkte $r(\varphi)$ der Oberfläche giltige Potential der geschichteten Erde

$$v=\frac{4}{3}\pi(k^2)\frac{\Theta_c}{r}\left(\frac{1-e^{-k}}{k}-\mathfrak{a}_0e^{-k}+\frac{\mathfrak{a}_c}{5}\,\frac{1-3\sin\varphi^2}{r^2}S\right) \qquad 69)$$

und demnach für die Anziehung $g=\frac{dv}{dr}$ der ruhenden Erde auf $r(\varphi)$

$$g=\frac{4}{3}\pi(k^2)\frac{\Theta_c}{r^2}\left(\frac{1-e^{-k}}{k}-\mathfrak{a}_0e^{-k}+\frac{3\mathfrak{a}_c}{5}\,\frac{1-3\sin\varphi^2}{r^2}S\right). \qquad 70)$$

Hierin hat S den Werth

$$S = 1 + \frac{1}{8}(8C_1 - 5)\frac{k}{n} + \frac{1}{11}\left(C_2 - 8C_1 + \frac{5}{2}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{14}\left(14C_3 - 11C_2 + 4C_1 - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^3 + \ldots \qquad 71)$$

Bevor wir aus diesen Bestimmungen Folgerungen ziehen, wollen wir noch die Formel für g mit der früheren (17) für A als der Attractionsbeschleunigung eines homogenen Ellipsoides für einen Punkt des Äquators vergleichen. Darin bedeutet

$$n = \frac{1}{1-\alpha}, \qquad 72)$$

also

$$A = \frac{4}{3}\pi(k^2)(1-\alpha)\Theta_c\left[\frac{1-e^{-k(1-\alpha)}}{k(1-\alpha)} + 3\alpha\left(\frac{1}{5} - \frac{k}{8} + \frac{k^2}{22}\cdots\right)\right] \qquad 73)$$

und wenn in der g-Formel (70) die Constanten $C_1 = C_2$ etc. $= 0$ gesetzt werden, so folgt weiter

$$g = \frac{4}{3}\pi(k^2)\Theta_c\left[\frac{1-e^{-k}}{k} - \alpha e^{-k} + \frac{3}{5}\alpha_c\left(1 - \frac{5}{8}k + \frac{5}{22}k^2\ldots\right)\right]. \qquad 74)$$

Beide Ausdrücke, d. i.

$$(1-\alpha)\frac{1-e^{-k(1-\alpha)}}{k(1-\alpha)}, \text{ beziehungsweise } \frac{1-e^{-k}}{k} - \alpha e^{-k} \qquad 75)$$

müssen identisch sein, was auch bis auf Grössen 2. Ordnung der Fall ist.

Demnach erhält man unter Einführung des Ausdruckes der Centrifugalkraft $\omega^2 r \cos\varphi^2$ und der Formeln für die Masse und Dichtigkeit

$$M = \frac{4}{3}\pi\Theta_m a^3(1-\alpha),$$

$$\frac{\Theta_m}{\Theta_c} = \frac{1-e^{-k(1-\alpha)}}{k(1-\alpha)},$$

und damit für die Kräftefunction $W = v - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos\varphi^2$ unter Benützung von 75)

$$W = M\frac{(k^2)}{r}\left(1 + \frac{\Theta_c}{\Theta_m}\cdot\frac{1-3\sin\varphi^2}{5r^2}\cdot S.\mathfrak{a}_c + \frac{\omega^2 r^3}{2M(k^2)}\cos\varphi^2\right), \quad 76)$$

Quadrate und Producte von $\mathfrak{a}$ und c sind hiebei vernachlässigt.

Die Beschleunigung in Punkte $r(\varphi)$ ergibt sich durch Differentiren von 76) und ist

$$g = M\frac{(k^2)}{r^2}\left(1 + \frac{\Theta_c}{\Theta_m}\,\frac{1-3\sin\varphi^2}{5}\cdot 3S\mathfrak{a}_c - \frac{\omega^2 r^3}{M(k^2)}\cos\varphi^2\right)\cdot \quad 77)$$

Aus der Gleichung für W lässt sich nun leicht der Radiusvector r in Function von $\sin\varphi$ entwickeln, nämlich

$$r = \frac{M(k^2)}{W}\left(1 + \frac{1}{5}\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\mathfrak{a}_c S + \frac{\omega^2}{2Mk^2}\right)\left(1 - \sin\varphi^2\left(\frac{3}{5}\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\mathfrak{a}_c + \frac{\omega^2}{2Mk^2}\right)\right) \quad 78)$$

und ebenso erhält man aus der Gleichung für g nach Einsetzen von r

$$g = \frac{W^2}{M(k^2)}\left(1 + \frac{1}{5}\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\mathfrak{a}_c S - \frac{2\omega^2}{M(k^2)}\right)\left(1 + \sin\varphi^2\left(\frac{2\omega^2}{M(k^2)} - \frac{3}{4}\mathfrak{a}_c\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\right)\right). \quad 79)$$

Vergleichen wir sie mit den typischen Formeln des Ellipsoides,

$$\begin{aligned} r &= a(1 - \mathfrak{a}\sin\varphi^2) \\ g &= g_a(1 + \mathfrak{b}\sin\varphi^2), \end{aligned} \quad 80)$$

also unter Vernachlässigung der höheren Ausdrücke 2. Ordnung, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \frac{3}{5}\,\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\mathfrak{a}_c S + \frac{\omega^2}{2M(k^2)}, \\ \mathfrak{b} &= -\frac{3}{5}\,\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\mathfrak{a}_c S + \frac{2\omega^2}{M(k^2)}; \end{aligned} \quad 81)$$

aus beiden Relationen ergibt sich nunmehr

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \frac{5\omega^2}{2M(k^2)}, \quad 82)$$

und da

$$\frac{\omega^2}{M(k^2)} = \mathfrak{c},$$

so folgt endlich

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \frac{5}{2}\mathfrak{c}, \qquad 83)$$

also das Clairaut'sche Gesetz. Dasselbe ist bekanntlich von der Art der Anordnung der Schichten unabhängig, weshalb wir hier ebenfalls auf dasselbe geführt werden mussten.

Aus den beiden weiteren Relationen für Punkte des Äquators

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{M(k^2)}{W}\left(1+\frac{1}{5}\,\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\,\mathfrak{a}_c S+\frac{1}{2}\mathfrak{c}\right) \\ g_a &= \frac{W}{M(k^2)}\left(1+\frac{1}{5}\,\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\,\mathfrak{a}_c S-2\mathfrak{c}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 84)$$

folgt nach Elimination von W

$$g_a = \frac{M(k^2)}{a^2}\left(1+\frac{3}{5}\,\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\,\mathfrak{a}_c S-\mathfrak{c}\right). \qquad 85)$$

Da aber

$$\frac{3}{5}\,\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\,\mathfrak{a}_c S = \mathfrak{a}-\frac{\mathfrak{c}}{2},$$

so ist endlich

$$g = \frac{M(k^2)}{a^2}\left(1+\mathfrak{a}-\frac{3}{2}\mathfrak{c}\right)\left(1+\left(\mathfrak{a}-\frac{5}{2}\mathfrak{c}\right)\sin\varphi^2\right). \qquad 86)$$

Vermöge der Beziehung

$$\frac{\omega^2}{\frac{4}{3}\pi(k^2)\Theta_m} = \frac{1}{289} = \mathfrak{c} \qquad 87)$$

kann man aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}-1+\frac{3}{5}\left(\frac{k}{n}\right)C_1+\frac{1}{10}\left(\frac{k}{n}\right)^2(-3C_1+6C_2)\,+ \\ +\frac{1}{15}\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(\frac{3}{2}C_1-6C_2+9C_3\right) \\ +\frac{1}{20}\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(12C_4-9C_3+3C_2-\frac{1}{2}C_1\right)+\ldots+\frac{3\omega^2}{8\pi(k^2)\Theta_c\mathfrak{a}_c} = 0, \end{aligned} \qquad 88)$$

welche aus 53) hervorgeht, die Abplattung des Erdkernes vermittelst der folgenden Formel berechnen:

$$\mathfrak{a}_c = \frac{\frac{5}{4}\mathfrak{c}}{\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\left[\begin{aligned} &1-\frac{3}{2}C_1\frac{k}{n}-\frac{3}{4}\left(\frac{k}{n}\right)^2(2C_2-C_1)-\frac{3}{6}\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(3C_3-2C_2+\frac{1}{2}C_1\right)\\ &-\frac{3}{8}\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(4C_4-3C_3+C_2-\frac{1}{6}C_1\right)\\ &-\frac{3}{10}\left(\frac{k}{n}\right)^5\left(5C_5-4C_4+\frac{3}{2}C_3-\frac{1}{3}C_2+\frac{1}{24}C_1\right)\\ &-\frac{3}{12}\left(\frac{k}{n}\right)^6\left(6C_6-5C_5+2C_4-\frac{1}{2}C_3+\frac{1}{12}C_2-\frac{1}{12\cdot 0}C_1\right)\ldots\\ &-\frac{3}{2m}\left(\frac{k}{n}\right)^m\left(mC_m-(m-1)C_{m-1}+\frac{m-2}{2!}C_{m-2}-\frac{m-3}{3!}C_{m-3}+\frac{m-4}{4!}C_{m-4}\ldots\right.\end{aligned}\right]} \qquad 89)$$

$$\mathfrak{a}_c = \frac{\frac{5}{4}\mathfrak{c}}{\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\left(\begin{aligned} &1-\frac{3}{16}\frac{k}{n}+\frac{35}{352}\left(\frac{k}{n}\right)^2-\frac{125}{7392}\left(\frac{k}{n}\right)^3+0\cdot 0029487\left(\frac{k}{n}\right)^4-0\cdot 00043786\left(\frac{k}{n}\right)^5\\ &+0\cdot 0000617\left(\frac{k}{n}\right)^6-0\cdot 0000077\left(\frac{k}{n}\right)^7\ldots\end{aligned}\right)} \qquad 90)$$

Nach Einführung des k-Werthes ergibt sich hieraus

$$\mathfrak{a}_c = \frac{\frac{5}{4}\mathfrak{c}}{\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\left(\begin{array}{l}1-0\cdot27047+0\cdot14778-0\cdot050756+ \\ \qquad +0\cdot012767-0\cdot0027347+0\cdot0005558\ldots\end{array}\right)} \qquad 91)$$

also

$$\mathfrak{a}_c = \frac{\frac{5}{4}\mathfrak{c}}{\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\cdot 0\cdot837},$$

und da

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{288\cdot41} = 0\cdot0034672,$$

sowie

$$\frac{\Theta_c}{\Theta_m} = 1\cdot889,$$

so ist

$$\mathfrak{a}_c = 0\cdot0027411 = \frac{1}{364\cdot8}.$$

Die Abplattung der Erdoberfläche ist demnach

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_c.1\cdot212795 = 0\cdot003324$$

oder

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{300\cdot8},$$

und zwar auf Grund des eingeführten Dichtigkeitsgesetzes ($\Theta_m = 5\cdot6$). Die hiernach gefundene Abplattung ist, wie man sieht, von der Bessel'schen $\frac{1}{299\cdot15}$ nur wenig verschieden. Das zu Grunde gelegte Dichtigkeitsgesetz scheint also den wirklichen Verhältnissen nahe zu entsprechen und dürfte, da es allgemein und einfach genug ist und auch zu keinen Widersprüchen führt, gleiche Berücksichtigung wie die übrigen verdienen. Sein Hauptvorzug beruht in dem geschlossenen Ausdruck, der uns der Bildung einer Reihe überhebt.

Die neuesten Bestimmungen der mittleren Dichte bringen indessen fast durchweg kleinere Werthe, als den oben vorausgesetzten von 5·6. Letzterer ist also noch nicht definitiv. Legen wir den neuerdings von Richarz und von Krigar-Menzel ermittelten Werth $\Theta_m = 5 \cdot 5033$ unter, so zeigt eine Rechnung, dass für 5·50 die Constante $\frac{k}{n} = 1 \cdot 4142$ gesetzt werden kann, wenn $\Theta_0 = 2 \cdot 50$ angenommen wird. Es ist dann $\Theta_c = 10 \cdot 2831$. Das Dichtigkeitsgesetz ist dann sehr einfach

$$\Theta = 10 \cdot 2831 e^{-\sqrt{2}.x^2},$$

und es ist weiter

$$e^{\frac{k}{n}} = 4 \cdot 11325, \qquad \frac{\Theta_c}{\Theta_m} = 1 \cdot 8685.$$

Setzen wir diese Werthe in die vorigen Formeln ein, so erhalten wir nach einigen Rechnungen, die wir übergehen,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_c . 1 \cdot 20799,$$

$$\mathfrak{a}_c = \frac{\frac{5}{4}\mathfrak{c}}{1 \cdot 8685 . 0 \cdot 8388},$$

also wegen $\mathfrak{c} = \frac{1}{288 \cdot 41}$

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{299 \cdot 35}$$

als Abplattungswerth für die abgerundete mittlere Dichte

$$\Theta_m = 5 \cdot 50.$$

Es ist interessant, dass dieser Werth dem von Bessel aus Beobachtungen berechneten $\Theta_m = \frac{1}{299 \cdot 1528}$ schon sehr nahe kommt. Es steht also frei, in der Theorie einen weiteren Beweis für die Genauigkeit der Bessel'schen Constanten oder, was wohl richtiger ist, umgekehrt in dieser Überein-

stimmung einen hinreichend genauen Beweis für das vorausgesetzte Dichtigkeits- und Abplattungsgesetz zu erblicken. Im Ganzen bietet das Vorgetragene eine Stütze dafür, dass die Abplattung jedenfalls kleiner als c ist, und wenn der obige Θ_m-Werth bis zur ersten Decimale genau ist, so werden weitergetriebene Annäherungen den Abplattungswerth kaum noch wesentlich ändern. Hinsichtlich der Fehlergrenzen unseres errechneten Resultates ist zu bemerken, dass die Bestimmung und Einführung des Werthes $\frac{k}{n}$ noch immer eine Unsicherheit von der 1. Ordnung zulässt, so dass jedenfalls anstatt des obigen Abplattungswerthes der folgende $\frac{1}{299 \cdot 35 \pm 1}$ massgebend ist. Der Grund liegt darin, dass das k nur für Schichten constanter Abplattung berechnet werden konnte.

Der im §. 3 abgeleitete für ähnliche Schichten giltige Satz lautet nunmehr für variable gemäss den vorstehenden Entwicklungen wie folgt:

Wenn die Erde aus unendlich dünnen conzentrischen ellipsoidisch begrenzten homogenen Schichten variabler Abplattung und Dichtigkeit derart zusammengesetzt ist, dass die Dichte und die Abplattung der auf einander folgenden Schichten den Gleichungen 51) und 52) entsprechen, so ist unter der Voraussetzung, dass die mittlere Dichte $= 5 \cdot 50$ und die Oberflächendichte $= 2 \cdot 5$ ist, die Dichte im Mittelpunkte $= 10 \cdot 28$, die Abplattung daselbst $= \frac{1}{361 \cdot 6}$, die Abplattung an der Oberfläche $= \frac{1}{299 \cdot 35}$, welcher Werth dem von Bessel aus Beobachtungen abgeleiteten sehr nahe kommt.

§. 6.

Die eingeführte Exponentialfunction $\Theta = \Theta e^{-kx^2}$, deren Form an die bekannte Barometerformel erinnert, wollen wir in einer allgemeineren Fassung auf die Dichtigkeitsverhältnisse der Atmosphäre anwenden, um über die Allgemeingiltigkeit der Function eine Anschauung zu gewinnen. Für die

Atmosphäre stellen wir demzufolge das allgemeinere Dichtigkeitsgesetz

$$\Theta = \Theta_0 e^{-k\left[\left(\frac{r}{a}\right)^n - 1\right]} \qquad 92$$

auf, in welcher Θ_0 die Dichtigkeit an der Erdoberfläche $r = a$, Θ also diejenige in der Entfernung r vom Mittelpunkte der Erde bedeutet. k und n sind zu bestimmende Constanten, die der vorausgesetzten Atmosphäre anzupassen sind. Der Luftdruck wird demnach durch die Formel

$$P = 4\pi \int_a^\infty r^2 dr . \Theta . g_r$$

ausgedrückt, und da $g_r = g\left(\frac{a}{r}\right)^2$ ist, so folgt als Druck der ruhenden Atmosphäre

$$P = 4\pi\Theta_0 g a^2 \int_a^\infty e^{-k\left[\left(\frac{r}{a}\right)^n - 1\right]} dr.$$

Es werde zur Abkürzung $v = k\left(\frac{r}{a}\right)^n$ eingeführt, dann ist

$$P = \frac{4\pi\Theta_0 g a^3 e^k}{n k^{\frac{1}{n}}} \int_k^\infty \frac{e^{-v} dv}{v^{\frac{n-1}{n}}}. \qquad 93.$$

Die Theorie der Gammafunctionen (vergl. Schloemilch. Compendium der höheren Analysis, II) liefert nun das Integral

$$\int_x^\infty \frac{e^{-v}}{v^\lambda} dv = \frac{e^{-x}}{x^\lambda}\left(1 - \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} - \dots\right)$$

$$a_1 = \lambda, \qquad a_2 = \lambda^2 \text{ etc.}$$

Daher geht das obige Integral über in die folgende Reihe

$$P = \frac{4\pi\Theta_0 g a^3}{nk}\left(1 - \frac{\frac{n-1}{n}}{k+1} + \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}{(k+1)(k+2)} - \dots\right). \qquad 94.$$

Um diesen theoretischen Atmosphärendruck mit dem beobachteten zu vergleichen, führen wir statt r den Werth $a+h$ ein.

wo also h die Höhe eines beliebigen Punktes der Atmosphäre über der Erdoberfläche bezeichnet, die gegen den Halbmesser a sehr klein sein möge. Vermöge der Näherungsformel

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = 1 + \frac{nh}{a}$$

folgt also

$$\Theta = \Theta_0 e^{-\frac{knh}{a}},$$

und verglichen mit der barometrischen Höhenformel

$$\Theta = \Theta_0 e^{-\frac{h}{8000}}$$

resultirt die Bedingung $\frac{kn}{a} = \frac{1}{8000}$, also, wenn

a rund zu 6400000 m

angenommen wird,

$$kn = 800.$$

Demnach wird die obige Luftdruckformel vermöge der Relation $\frac{a}{kn} = 8000$

$$P = 4\pi\Theta_0 g . 8000 a^2 \left(1 - \frac{n-1}{800+n} + \frac{(n-1)^2}{(800+n)(800+2n)} - \ldots\right)$$

und da $\Theta_0 g = 1{\cdot}293\ kg$, also $8000 . 1{\cdot}293 = 10344\ kg$,

$$P = 4\pi . 10344 a^2 \left(1 - \frac{n-1}{800+n} + \ldots\right).$$

Der mittlere Atmosphärendruck auf der Oberfläche der Erde ist aber

$$P_1 = 4\pi a^2 . 10328\ kg$$

und stimmt für $n = 1$ mit dem errechneten Werthe nahezu überein. Man muss also setzen $n = 1$ oder

$$\Theta = \Theta_0 e^{-k\left(\frac{r}{a} - 1\right)},$$

woraus das bekannte Gesetz

$$p = p_0 e^{-\frac{kh}{a}} = p_0 e^{-\frac{k}{8000}}$$

in seiner einfachsten Gestalt folgt.

Es ist aber bemerkenswerth, dass die Annahme $n > 1$, z. B. $n = 1{\cdot}5$, $n = 2$ den numerischen Werth des Druckes nur wenig verändert. Für $n = 2$ folgt nämlich

$$P = P_1\left(1 - \frac{1}{802} + \frac{1}{802.804} - \ldots\right)$$

und es weicht in diesem Falle P um weniger als $\frac{1}{802}$ vom wahren Werthe P_1 ab, also um weniger als 1 *mm* der Quecksilbersäule. Bei $n = 3$ ist die Abnahme auch noch nicht beträchtlich, etwa $\frac{1}{400}$, nur ist festzuhalten, dass die Constante $k = \frac{a}{8000\,n}$ bei allen Änderungen den entsprechenden Werth erhalten muss.

Will man die Centrifugalkraft mit berücksichtigen, so bemerken wir beiläufig, ohne die Rechnungen durchzuführen, dass das allgemeine Integral vermöge des genaueren Werthes für

$$g_r = g\frac{a^2}{r^2} - \omega^2 r \cos\varphi^2, \qquad \omega^2 a = c$$

durch

$$P = 4\pi\Theta_0 g a^2 \int e^{-k\left[\left(\frac{r}{a}\right)^n - 1\right]}\left(1 - \frac{1}{3}c\left(\frac{r}{a}\right)^3\right) \qquad 95$$

zu ersetzen ist. Die Ausführung der Rechnungen gibt z. B. für $n = 4$

$$P = 4\pi\Theta_0 g a^2\left(1 - \frac{3/4}{k+1} + \ldots - \frac{1}{3.289}\right)8000,$$

woraus hervorgeht, dass die von der Centrifugalkraft herrührende Abnahme von $\frac{1}{3.289}$ des Druckes und ebenso die entsprechende im Falle für $n = 1$ oder $= 2$ vernachlässig

werden darf. Bezüglich der Dichtigkeitsverhältnisse im Inneren der Erde kann also der Einfluss der Centrifugalkraft gleichfalls vernachlässigt werden.

Das Resultat dieser Betrachtung geht also dahin, dass die eingeführte allgemeine Dichtigkeitsformel der Erde in der Form eines Exponentialausdruckes wegen ihrer Verwandtschaft mit der Dichtigkeitsformel der Atmosphäre eine gewisse Berechtigung für ihre Verwerthung erhalten hat, was mich bestimmte, sie in die Attractionstheorie einzuführen.

§. 7.

Um noch den Gesammtdruck der Erde zu berechnen, benützen wir die Formel

$$m_x g_x = mg \frac{1-e^{-kx^3}}{x^2(1-e^{-k})} e^{k(1-x^3)}, \qquad mg = 2\cdot 5\, kg,$$

welche den Druck der Masse m_x der Volumeneinheit im Abstande $x = \frac{r}{a}$ vom Erdmittelpunkte darstellt. Hiernach ist das Druckintegral

$$G = \frac{4\pi\Theta_0 e^k a^2}{1-e^{-k}} \int_0^a \left(e^{-k\frac{r^3}{a^3}} - e^{-2k\frac{r^3}{a^3}}\right) dr. \tag{96}$$

Die Ausführung der Rechnung verlangt eine Entwicklung der Functionen in Reihen mit sehr vielen Gliedern. Man erhält schliesslich

$$G = \frac{4\pi\Theta_0 k e^k a^3}{1-e^{-k}} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{14}k + \frac{7}{60}k^2 - \frac{5}{104}k^3 + \text{etc.}\right) \tag{97}$$

oder bis auf 5 Decimalen genau

$$G = \frac{4\pi\Theta_0 k e^k a^3}{1-e^{-k}} \cdot 0\cdot 08827. \tag{98}$$

Im Vergleiche mit dem Gewichte der in allen Theilen gleich schweren Erde

$$G_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 \Theta_m$$

erhält man wegen $\theta_0 = \theta_c e^{-k}$

$$\frac{G}{G_1} = 3 \cdot \frac{\theta_c}{\theta_m} \cdot \frac{k}{1-e^{-k}} \cdot 0\cdot 08827 \qquad 99.$$

oder, weil $\frac{k}{1-e^{-k}} = \frac{\theta_c}{\theta_m}$,

$$\frac{G}{G_1} = 3 . 0\cdot 08827 \cdot \left(\frac{\theta_c}{\theta_m}\right)^2 = 0\cdot 94492. \qquad 100$$

Das wirkliche Gewicht der Erde ist also nur um ein geringes kleiner als das mittlere.

Der Gesammtdruck der Erde ist nunmehr

$$G = \frac{4}{3} a^3 \pi . 5\cdot 6 . 1000 . 0\cdot 9449 \, kg,$$

also da $a = 6370000 \, m$

$$= 5729 \text{ Quadrillionen } kg.$$

Der Atmosphärendruck ergibt sich aus

$$\text{At.} = 4 a^2 \pi . 10328 \, kg,$$

also ist das Verhältniss

$$\frac{G}{\text{At.}} = \frac{a . 5\cdot 6 . 0\cdot 9449 . 1000}{3 . 10328} = 1088800 \text{ At.}$$

Hiernach beträgt der Gesammtdruck oder das Gewicht der Erde über eine Million Atmosphären.

Man hat die Frage aufgeworfen, in welchem Zustande sich in Folge des gewaltigen Druckes die tieferen Massen der Erde befinden mögen. Nach Heim zerquetschten Gesteinssäulen durch ihr eigenes Gewicht ihren Sockel, und zwar: Ziegel bei einer Säulenhöhe von 166 *m*, Sandstein bei 900—1300 *m*, Kalkstein bei 1100—1800 *m*, Granit und Gneis bei 1800 bis 2600 *m* und Porphyr bei 2860 *m* Säulenhöhe. Nach den Versuchen von Kick müssen die Gesteinsmassen schon in 8000 *m* Tiefe plastisch werden. Es ist also wahrscheinlich, dass in

Folge des hohen Druckes und der Einwirkung einer hohen Temperatur die tieferen Erdschichten plastisch oder, wie man vermuthet, gasig sind. Andere Hypothesen sprechen sich wieder für eine grössere Starrheit aus. Das tiefste Bohrloch zu Sperenberg zeigt bei 1300 *m* Tiefe +48° Celsius, wonach also die geothermische Tiefenstufe 30 *m* beträgt.

Von Interesse ist es, aus der Dichtigkeitsformel

$$\Theta = 10\cdot578 e^{-1\cdot4425 x^2}$$

die Tiefe der vulcanischen Gesteine, wie Andesit, Trachit, die eine specifische Dichte 2·7 bis 2·8 haben, zu berechnen. Die Rechnung zeigt, dass diese Gesteine in einer Tiefe von 115 bis 170 *km* lagern und also eine Temperatur von mindestens 1200° haben müssen, da dies ihre Schmelztemperatur ist.

Hiernach scheinen diese vulcanischen Gesteine doch wohl etwas tiefer zu liegen, als gemeiniglich angenommen wird. Inwieweit diese Angaben aber der Wirklichkeit entsprechen, entzieht sich zur Zeit noch vollständig der Beobachtung, abgesehen davon, dass die thatsächliche Massenlagerung wohl nicht nothwendig immer mit der vorausgesetzten idealen Schichtung zusammenfällt. In Wirklichkeit werden Massenanhäufungen mit Massendefecten abwechseln, von deren Existenz und Einfluss das Pendel, das geognostische Senkblei, uns in so sicherer und unzweideutiger Weise unterrichtet (vergl. Relative Schwerebestimmungen, ausgeführt durch die k. und k. Kriegsmarine in den Jahren 1892—1894; Wien, 1895).

§. 8.

Man kann noch die Frage stellen, ob das eingeführte Dichtigkeitsgesetz die Zahlenwerthe der Trägheitsmomente der Erde und damit die Präcessionsconstanten hinreichend genau wiederzugeben vermag. Auf alle Fälle darf die Theorie zu keinen Widersprüchen führen, wiewohl es schwer halten mag, alle Beobachtungsdata aus einem rein theoretischen Gesichtspunkt oder Gesetz abzuleiten. Es ist aber immer nützlich, zu sehen, wie weit eine Theorie reicht, d. h. wie weit sie die Beobachtungen befriedigend wiederzugeben vermag, und wo ihre Herrschaft aufhört.

Von den bekannten Formeln für die Trägheitsmomente

$$C = \frac{8}{15}\pi\int_0^a \frac{d[(1-\mathfrak{a})a^5]\Theta da}{da}$$

$$C-A = \frac{8}{15}\pi\int_0^a \frac{d(\mathfrak{a}a^5)\Theta da}{da} \qquad 101$$

werden wir speciell das erste ins Auge fassen und darin die früher aufgestellten Werthe für Θ etc. einführen. Bei Annahme einer nahezu kugelförmigen Gestalt geht das obige Integral für eine constante Abplattung über in

$$A = \frac{8}{15}\frac{\pi}{n}\int_0^a \frac{d(a^5)\Theta}{da}\cdot da.$$

Es genügt, das Trägheitsmoment in dieser vereinfachten Form zu berechnen. Wir setzen $a = x$ und erhalten vermöge

$$\Theta = \Theta_c e^{-\frac{kx^2}{n}}$$

$$A = \frac{8}{3}\frac{\pi}{n}\int_0^1 \Theta x^4 dx = \frac{8}{3}\frac{\pi}{n}\Theta_c\int_0^1 x^4 e^{-\frac{kx^2}{n}} dx.$$

Hierin ist $\frac{k}{n} = \sqrt{2} = 1\cdot4142.$

Dies Integral bringen wir mit den aus astronomischen Berechnungen und Beobachtungen abgeleiteten Werthen (Helmert, a. a. O., S. 473)

$$C = 0\cdot3321\,a^2M \qquad a = \text{Äquatorhalbmesser}$$
$$A = 0\cdot3310\,a^2M$$

in der Weise in Beziehung, dass wir den Coëfficienten 0·3310 von A als Unbekannte z ansehen und demzufolge setzen

$$\frac{8}{3}\frac{\pi}{n}\Theta_c\int_0^1 x^4 e^{-\frac{kx^2}{n}} dx = z\,.\,1^2.M.$$

Hieraus in Verbindung mit

$$M = \frac{4}{3}\pi\frac{\Theta_c}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{n}}\right)$$

ergibt sich

$$z = \frac{2\frac{k}{n}}{1-e^{-\frac{k}{n}}} \int_0^1 x^4 e^{-\frac{kx^2}{n}} dx.$$

Vermöge des Ausdruckes

$$\frac{\Theta_c}{\Theta_m} = \frac{\frac{k}{n}}{1-e^{-\frac{k}{n}}}$$

geht also das Integral über in

$$z = 2\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\int_0^1 x^4 e^{-\frac{kx^2}{n}} dx. \qquad 102)$$

Durch Auflösen desselben in eine Reihe ergibt sich

$$z = 2\frac{\Theta_c}{\Theta_m}\left(\frac{1}{5} - \frac{\frac{k}{n}}{1.8} + \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{2.11} - \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^3}{6.14} + \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^4}{24.17} - \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{120.20} + \dots\right), \qquad 103)$$

deren Bildungsgesetz klar ist.

Wir wenden auf diese Formel den von Richarz und Krigar-Menzel abgeleiteten Dichtigkeitswerth $\Theta_m = 5 \cdot 50$ (auf zwei Decimalen abgerundet) und die unserem Dichtigkeitsgesetz entsprechenden übrigen

Constanten $\frac{\Theta_c}{\Theta_m} = 1 \cdot 8685$, $\frac{k}{n} = \sqrt{2}$ an und erhalten

$$z = 2 \,.\, 1 \cdot 8685 (0 \cdot 2 + 0 \cdot 090909 + 0 \cdot 009804 + 0 \cdot 000483 + \\ + 0 \cdot 0000137 - 1 \cdot 41421 (0 \cdot 125000 + 0 \cdot 023809 + \\ + 0 \cdot 001666 + 0 \cdot 000061),$$

also schliesslich

$$z = 0 \cdot 3300.$$

Das Trägheitsmoment A für die nach dem Dichtigkeitsgesetz $\Theta = \Theta_c e^{-\frac{kx^2}{n}}$ geschichtete Erde als Kugel ist hiernach

$$A = 0 \cdot 330 a^2 M,$$

ein Werth, der von dem oben angegebenen für A oder C nur wenig abweicht. Hätten wir den Werth α in 101) vernachlässigt, so würde $0 \cdot 331$ gekommen sein.

Man kann also immerhin behaupten, dass das Dichtigkeitsgesetz sehr annähernd den astronomischen Constanten entspricht, wenn man daran festhält, dass die vorausgesetzten Werthe für Θ_m und namentlich $\Theta_0 = 2 \cdot 5$ doch auch nur hypothetisch sind. Indessen steht nichts im Wege, k und damit die anderen Constanten derart zu bestimmen, dass die Präcessionswerthe vollständig erfüllt sind. Setzen wir nämlich in 103) für $\frac{\Theta_c}{\Theta_m}$ seinen vorhin abgeleiteten Werth ein und entwickeln in Reihen, so folgt für $A = C$

$$A = 0 \cdot 4 \left(1 - \frac{1}{8}\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{528} + \frac{5\left(\frac{k}{n}\right)^3}{2464} + \frac{41\left(\frac{k}{n}\right)^4}{942480} - \ldots\right) a^2 M. \quad 104)$$

Daher kann durch Versuche k derart bestimmt werden, dass der gewünschte Präcessionscoëfficient aus der Formel hervorgeht.

Im Falle der Homogenität der Erde ist $k = 0$, und es geht A über in die bekannte Formel des Trägheitsmomentes einer homogenen Kugel:

$$A = \frac{2}{5} a^2 M.$$

Für die geschichtete Erde mit nach innen wachsender Dichte ist also das Trägheitsmoment kleiner und daher für nach aussen zunehmende Dichte (k negativ) grösser.

Um noch die Differenz $C—A$ einer kurzen Berechnung zu unterziehen, benützen wir die Formel 63) und erhalten

$$C - A = \frac{8}{15} \pi \mathfrak{a}_c \Theta_c S,$$

also vermöge 81) oder

$$\frac{3}{5} \frac{\Theta_c \mathfrak{a}_c}{\Theta_m} S = \mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{c}}{2}$$

auch

$$C - A = \frac{8}{9} \pi \Theta_m \left(\mathfrak{a} - \frac{1}{2} \mathfrak{c}\right) \qquad (a = 1)$$

oder

$$C-A = \frac{4}{3}\pi\Theta_m a^3 \cdot \frac{1}{3}(2\mathfrak{a}-\mathfrak{c})a_0^2.$$

Damit sind wir auf eine bekannte Formel gekommen. Also ist

$$C-A = \frac{1}{3}(2\mathfrak{a}-c).Ma_0^2. \qquad 105)$$

Setzen wir $\mathfrak{a} = \frac{1}{299\cdot 35} = 0\cdot 0033457$, $\mathfrak{c} = 0\cdot 003467$, so folgt

$$C-A = 0\cdot 001075 a^2 M.$$

Die Mondbewegung verlangt

$$C-A = 0\cdot 0010865 a^2 M.$$

§. 9.

Um die Abhängigkeit der Abplattung von dem Dichtigkeitsgesetz und der Centrifugalkraft klarer hervortreten zu lassen, greifen wir auf 88) zurück, aus welcher zunächst

$$\mathfrak{a}_c = \frac{\frac{15}{16}\frac{\omega^2}{\pi(k^2)\Theta_c}}{1-\frac{3}{16}\frac{k}{n}+\frac{35}{357}\left(\frac{k}{n}\right)^2-\frac{125}{7392}\left(\frac{k}{n}\right)^3+\ldots} \qquad 106)$$

hervorgeht. Da aber $\Theta_c = \frac{\frac{k}{n}\Theta_m}{1-e^{-\frac{k}{n}}}$, so ergibt sich ferner

$$\mathfrak{a}_c = \frac{15\omega^2\left(1-e^{-\frac{k}{n}}\right)}{16\pi(k^2)\frac{k}{n}\Theta_m\left(1-\frac{3}{16}\frac{k}{n}+\frac{35}{357}\left(\frac{k}{n}\right)^2-\ldots\right)}. \qquad 107)$$

und wegen 54) oder

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_c\left(1+\frac{1}{8}\frac{k}{n}+\frac{1}{66}\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{1}{1848}\left(\frac{k}{n}\right)^3+\ldots\right)$$

folgt endlich

$$\mathfrak{a} = \frac{15\omega^2\left(1-e^{-\frac{k}{n}}\right)\left(1+\frac{1}{8}\frac{k}{n}+\frac{1}{66}\left(\frac{k}{n}\right)^2+\ldots\right)}{16\pi(k^2)\frac{k}{n}\Theta_m\left(1-\frac{3}{16}\frac{k}{n}+\frac{35}{357}\left(\frac{k}{n}\right)^2\ldots\right)} \qquad 108$$

oder nach Auflösen aller Ausdrücke in eine Reihe

$$\mathfrak{a} = \frac{15\omega^2}{16\pi(k^2)\Theta_m}\left(1-\frac{3}{16}\frac{k}{n}-\frac{87}{5632}\left[\frac{k}{n}\right]^2\ldots\right). \qquad 109$$

In Bezug auf die Gravitationsconstante (k^2) zeigt sich, dass eine Abnahme der Gravitationskraft eine Zunahme der Abplattung und schliesslich eine Zerstreuung der Materie herbeiführen würde. Ebenso muss eine kleinere mittlere Dichte unter sonst gleichen Umständen eine grössere Abplattung bewirken. Im Falle der Homogenität des Sphäroides ($k = 0$) wird

$$\mathfrak{a}_0 = \frac{15\omega^2}{16\pi(k^2)\Theta_m}$$

oder, wenn man

$$\mathfrak{c} = \frac{\omega^2 a}{g_a} = \frac{\omega^2 a^3}{(k^2)M}$$

in erster Annäherung mit $M = \frac{4}{3}\pi a^3\Theta_m$ einführen will:

$$\mathfrak{a}_0 = \frac{5}{4}\mathfrak{c}.$$

Für die homogene Erde würde also $\mathfrak{a}_0 = \frac{1}{230}$ sein müssen, und die Nichtübereinstimmung dieser Abplattung mit der wirklichen beweist die Existenz der Constanten k, die also positiv sein muss. Die damit verknüpfte Zunahme der Dichtigkeit nach innen bedingt daher, wie die Reihe

$$\mathfrak{a} = \frac{5}{4}\mathfrak{c}\left(1 - \frac{3}{16}\frac{k}{n} - \frac{87}{5632}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \ldots\right) \quad 110)$$

zeigt, eine kleinere Abplattung als bei homogener Dichte. Der Grund liegt darin, dass bei dieser Anordnung die dichteren inneren Massen dem Einflusse der Centrifugalkraft mehr entzogen sind. Man sieht dies auch sofort ein, wenn man annimmt, dass die Dichte von innen nach aussen wachse. Denn da k alsdann negativ ist, so liefert die Formel, wenn $\mathfrak{c}$ constant, eine umso grössere Abplattung, je grösser k, d. h. je stärker die Dichte nach aussen zunimmt, wodurch die äusseren dichten Lagen einem grösseren mit der Entfernung wachsenden Einfluss der Centrifugalkraft unterliegen. Man vergleiche hiermit auch Clairaut, l. c. §. XXXII, S. 220.

Bemerken wir noch, dass der Ausdruck für die Differenz der Trägheitsmomente $C—A$ auch durch die Formel

$$C - A = \frac{\mathfrak{c}}{2}\left(1 - \frac{5}{16}\frac{k}{n} - \frac{145}{5632}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \ldots\right) a^2 M \quad 111)$$

gegeben ist, so zeigt sie, dass diese Differenz unter Annahme der Zunahme der Dichte nach innen kleiner ist, als im Falle der Gleichartigkeit, für welche $k = v$, $\mathfrak{a} = \frac{5}{4}\mathfrak{c}$, also

$$C - A = \frac{2}{5}\mathfrak{a} a_0^2 M$$

besteht.

Es ist bemerkenswerth, wie alle diese Werthe von der Constanten $\frac{k}{n}$ abhängen. Legten wir anstatt des oben angenommenen Werthes $\frac{k}{n} = 1{\cdot}4142$ einen etwas kleineren der Rechnung unter, so würde das Trägheitsmoment für A oder C, ebenso für $C—A$ etwas grösser ausfallen, wie auch die Abplattung, wie schon oben bemerkt, sich vergrössern würde.

Aus der Formel 106) und der vor 108) stehenden lässt sich noch die folgende

$$a = \frac{15\omega^2}{16\pi(k^2)\Theta_c}\left(1 + \frac{5}{16}\frac{k}{n} + \text{etc.}\right) \qquad 112)$$

ableiten, in welcher die Mittelpunktsdichte vorkommt.

Für zwei Sphäroide gleicher Mittelpunktsdichte und Centrifugalkraft, aber verschiedener Dichtigkeitsabnahme nach aussen sind auch die Abplattungen verschieden, da sie eine Function von k sind. Je grösser k, d. h. je rascher vom constanten Θ_c aus die Dichtigkeit abnimmt, umso rascher wächst nach der obigen Formel die Abplattung, wie es auch sein muss, da alsdann auch die mittlere Dichte in starkem Verhältniss abnimmt. In gleichem Sinne wächst c oder das Verhältniss der Centrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator, weil letztere mit grösserem k, d. i. mit verminderter Dichte rasch abnimmt. Denn es ist

$$\Theta_0 = \frac{\Theta_c}{e^{\frac{k}{n}}}.$$

§. 10.

Die obigen Formeln gelten also nicht bloss für die Erde, sondern überhaupt für alle diejenigen Himmelskörper, deren Zusammensetzung und Bau im Ganzen demjenigen der Erde entspricht oder gleicht. Ob die zu Grunde gelegte Dichtigkeitsformel

$$\Theta = \Theta_c e^{-\frac{k}{n}\left(\frac{a'}{a}\right)^3}$$

vermöge ihrer Allgemeinheit sich vielleicht auch auf planetarische Nebelmassen, die sich zu festen Weltkörpern ausbilden, ausdehnen lässt, wollen wir dahingestellt sein lassen. Es dürfte genügen, ausser der bisher betrachteten Erde noch den grössten aller Planeten, den Jupiter, in Rechnung zu ziehen.

Demzufolge nehmen wir die Gleichung 108) wieder vor und bringen sie, um sie mit Jupiter und Erde in Beziehung zu setzen, zur folgenden Darstellung, wobei wir einfach k statt $\frac{k}{n}$ schreiben:

$$\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} = \frac{\omega'^2}{\omega^2} \frac{\Theta_m}{\Theta'_m} \frac{k}{k'} \frac{1-e^{-k'}}{1-e^{-k}} \cdot \frac{1+\frac{1}{8}k'+\frac{1}{66}k'^2 \ldots}{1+\frac{1}{8}k+\frac{1}{66}k'^2 \ldots} \cdot$$

$$\cdot \frac{1-\frac{3}{16}k+\frac{35}{352}k^2 \ldots}{1-\frac{3}{16}k'+\frac{35}{352}k'^2 \ldots} \cdot \quad 113)$$

Hierin bedeuten die gestrichelten Ausdrücke $\mathfrak{a}'$, $\omega' = \frac{2\pi}{T'}$, Θ'_m, k' die Abplattung, Winkelgeschwindigkeit, beziehungsweise Rotationsdauer, mittlere Dichte und Dichtigkeitsconstante des Jupiter, die übrigen die der Erde, wobei wir bemerken, dass die angedeuteten Reihen genauer durch die in den Formeln 63), 64), 89) mitgetheilten Rechnungsmethoden

$$1+0\cdot125\,k+0\cdot01515151\,k^2+0\cdot0005411\,k^3-0\cdot0001395\,k^4$$
$$-0\cdot00001359\,k^5+0\cdot0000023\,k^6+0\cdot0000003\,k^7$$

beziehungsweise

$$1-0\cdot1875\,k+0\cdot099147\,k^2-0\cdot016910\,k^3+0\cdot0029487\,k^4$$
$$-0\cdot0004378\,k^5+0\cdot0000617\,k^6-0\cdot0000077\,k^7$$

gegeben sind.

Die Abplattung des Jupiter ist nach den neueren Bestimmungen von Prof. Schur $= \frac{1}{16\cdot2}$. Seine mittlere Dichte nehmen wir $= 0\cdot24$ der Erde und seine Rotationszeit $= \frac{1}{2\cdot4}$ derjenigen der Erde an, also ist

$$\frac{\omega'^2}{\omega^2} = \frac{T^2}{T'^2} = (2\cdot4)^2.$$

Für die Erde gelten $\mathfrak{a} = \frac{1}{299\cdot35}$, $\Theta_m = 5\cdot50$, also

$$\frac{k}{1-e^{-k}} = \frac{\Theta_c}{\Theta_m} = 1\cdot8685.$$

Alle diese Werthe eingesetzt in 113) ergeben schliesslich

$$\frac{1-e^{-k'}}{k'} \cdot \frac{1+0\cdot 125k'+\dots}{1-0\cdot 1875k'+\dots} = 0\cdot 59343.$$

Diese Gleichung kann nur durch Versuche aufgelöst werden. Nach mehreren Rechnungen, die wir hier übergehen, fand sich endlich für

$$k' = 2\cdot 1,$$

dass der Ausdruck zur Linken der obigen Gleichung zu 0·59688 wurde, was mit dem Werthe zur Rechten nahe übereinstimmt.

Nun ist $e^{+2\cdot 1} = 8\cdot 1661$, $e^{-2\cdot 1} = 0\cdot 1224$, mithin

$$\Theta_c = \Theta_m \cdot \frac{2\cdot 1}{1-e^{-2\cdot 1}} = \frac{0\cdot 24.5\cdot 5}{0\cdot 41788} = 3\cdot 16.$$

Die Mittelpunktsdichte des Jupiter ist demnach 3·16 und seine Oberflächendichte $\Theta_0 = \Theta_c e^{-2\cdot 1} = 0\cdot 387$, welche Werthe natürlich nur angenähert gelten. Für Erde und Jupiter haben wir also das folgende Resultat:

	Erde	Jupiter
Oberflächendichte	2·50	0·387
Mittlere Dichte........	5·50	1·32
Dichte im Centrum	10·28	3·16

Während also bei der Erde die Dichte im Centrum die vierfache Oberflächendichte beträgt, steigt dies Verhältniss bei Jupiter ins achtfache. Die Änderung der Dichtigkeit beim Jupiter ist also weit grösser, als bei der Erde, wiewohl seine Mittelpunktsdichte nur um etwa $^1/_4$ grösser als die Oberflächendichte der Erde ist. Fragt man nach dem Orte, wo bei Jupiter die locale Dichte gleich der mittleren Dichte ist, so ergeben die obigen Formeln, dass dies bei einem Radius von $x = 0\cdot 746$ des Jupiterhalbmessers stattfindet, und ist es bemerkenswerth, dass auch bei der Erde ein nahezu gleiches Resultat (Radius der mittleren Erddichte $= 0\cdot 761$ für $\Theta_m = 5\cdot 5$) gefunden wurde.

Entwurf einer allgemeinen Theorie der Energieübertragung

von

Dr. **Gustav Mie,**

Privatdocent an der technischen Hochschule zu Karlsruhe.

(Mit 7 Textfiguren.)

In neuerer Zeit beginnt, hauptsächlich durch den Einfluss der Maxwell'schen Theorie, die Ansicht herrschend zu werden, dass sich alle Naturerscheinungen durch Nahewirkungen erklären lassen. Eine Folgerung aus dieser Ansicht ist, dass die Energie in eindeutig bestimmbarer Weise im Raume vertheilt sein muss. Man ist nun öfters, besonders seit den Untersuchungen von Poynting und Heaviside über die Energiewanderung im elektromagnetischen Feld, weiter gegangen und hat der Energie auch Bewegungen zuschreiben wollen, die die Änderungen in ihrer räumlichen Vertheilung verursachten. Hiergegen ist vielfach (vergl. z. B. Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie, 1894, S. 296) mit Recht bemerkt worden, dass man von einer Bewegung der Energietheilchen nicht in demselben Sinne sprechen kann, wie von einer Bewegung materieller Theilchen. Ich habe nun in der folgenden Untersuchung, nachdem eine Individualisirung der Energietheilchen, gleich der der materiellen Theilchen, bestimmt zurückgewiesen ist, trotzdem die Theorie der sogenannten Energieströme als eine nothwendige Consequenz aus der Vorstellung der Nahewirkung hergeleitet. Ich habe die Forderung, dass es nur Nahewirkungen gäbe, mathematisch ausgedrückt in Form allgemeiner Principien, deren sich, das Princip der Erhaltung der Energie mitgerechnet, vier nothwendig ergeben haben. Während die beiden ersten von der

Energie selber handeln und zu dem Problem der Berechnung der Energie aus den Eigenschaften der Materie führen, handeln die beiden anderen von der Energieübertragung und bringen das Problem mit sich, die Energieübertragung zu berechnen. Es zeigt sich nun, dass dies mit Hilfe einer durch die Eigenschaften der Materie überall eindeutig bestimmten Vectorgrösse zu geschehen hat, die ich der herkömmlichen Ausdrucksweise folgend, als »wirklichen Energiestrom« bezeichne.

Dieser Vector lässt sich, wie in dem zweiten Theil der Untersuchung gezeigt wird, abgesehen von den noch nicht experimentell erforschten Energieübergängen durch Gravitationswirkungen und durch die neuentdeckten Strahlungen, wirklich immer in einer einfachen Weise berechnen. Besonders wichtig ist es mir hiebei gewesen, die Energieübertragung im elektromagnetischen Felde zu behandeln, und es hat sich ergeben, dass der von Poynting und Heaviside hergeleitete Energiestrom thatsächlich als der wirkliche Energiestrom bezeichnet werden muss.[1]

Damit ist die Poynting'sche Theorie als nothwendige Consequenz der Maxwell'schen erwiesen. Insbesondere ist es mir gelungen, den von Hertz erhobenen Einwand der cyclischen Energieströme in statischen Feldern zu entkräften.

Ausserdem habe ich die bisher über den Gegenstand veröffentlichte Literatur eingehend besprochen, vor Allem die englische, die bisher in Deutschland zum grossen Theil unbeachtet geblieben ist. Die sogenannte Energetik habe ich dabei nicht berücksichtigt, da diese Richtung keinen Einfluss auf meine Untersuchungen gehabt hat.

So viel wie möglich habe ich die allgemeine Theorie an einfachen Beispielen erläutert, z. B. habe ich die Vorgänge in dem Felde einer elektrischen Kugel, die von einer zur Erde abgeleiteten Wand mit constanter Geschwindigkeit entfernt wird, benutzt, um das Wesen der elektromagnetischen Energieübertragung zu erklären. Eine grössere Anzahl von Beispielen denke ich in einer nächstens folgenden Abhandlung zu bringen.

[1] Dieser Nachweis ist mir allerdings nur unter der jedenfalls unwesentlichen Voraussetzung gelungen, dass die Materie im elektromagnetischen Feld sich nicht bewegt.

I. Abschnitt.

Definition des wirklichen Energiestromes.

Erstes Princip: Erhaltung der Energie.

1. Ein System von Körpern, welches im Laufe der Zeit nur solche physikalischen Veränderungen erfährt, die in gar keinem Zusammenhange mit Vorgängen in anderen materiellen Systemen stehen, nennt man ein freies System.

Energie eines freien Systems nennt man eine Function E aller der Grössen, durch die sein Zustand geometrisch und physikalisch in jedem Augenblick charakterisirt ist, die für alle natürlichen Änderungen eine Invariante ist. Erfahrungsgemäss lässt sich diese Function, abgesehen von einer willkürlichen additiven Constante, immer eindeutig[1] bestimmen. Jeder Änderung einer speciellen Art von Zustandsgrössen entspricht eine partielle Änderung dE_α, die man im Allgemeinen als Änderung einer Form der Energie bezeichnet.

Princip von der Erhaltung der Energie.

Die algebraische Summe der partiellen Änderungen der Energie (Energieformen) ist bei natürlichen Vorgängen in einem freien System gleich Null.

$$dE = dE_1 + dE_2 + \ldots + dE_\nu = 0. \qquad \ldots 1$$

Localisation von Energieformen.

2. Fassen wir z. B., wie es die Mechanik conservativer Systeme thut, nur die geometrischen und kinematischen Verhältnisse ins Auge, so finden wir zwei Formen der Energie. Einer Änderung in der geometrischen Configuration entspricht eine solche der »potentiellen Energie« dF, einer Änderung der Geschwindigkeiten eine solche der »kinetischen Energie« dT. Die Mechanik lehrt uns nun, dass dF aufzufassen ist als das

[1] Wodurch die Eindeutigkeit der Bestimmung erzielt wird, soll hier nicht erörtert werden.

totale Differential einer Function der Coordinaten aller materiellen Punkte des Systems, die die Geschwindigkeiten nicht enthält:

$$F = \varphi(x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots z_n).$$

Bei Untersuchung continuirlicher Körper, deren Punktzahl unendlich gross ist, müssen wir uns die Berechnung von F so denken, dass die Coordinaten eines beliebigen Systempunktes (x, y, z) als Functionen der Anfangswerthe und einer Anzahl Parameter $p_1, p_2, \ldots p_k$ (Lagrange'sche Coordinaten) aufzufassen sind und dass man in φ diese Functionen einsetzt:

$$x_\nu = x(x_0^\nu, y_0^\nu, z_0^\nu, p_1, p_2, \ldots p_k)$$
$$y_\nu = y(x_0^\nu, y_0^\nu, z_0^\nu, p_1, p_2, \ldots p_k)$$
$$z_\nu = z(x_0^\nu, y_0^\nu, z_0^\nu, p_1, p_2, \ldots p_k)$$

$$F = \psi(p_1, p_2, \ldots p_k), \qquad dF = \sum \frac{\partial \psi}{\partial p_i} . dp_i .$$

Ebenso ist dT das totale Differential einer Function der Geschwindigkeiten $v_1, v_2, \ldots v_n$ und der Massen der Systempunkte $m_1, m_2, \ldots m_n$:

$$T = \sum \frac{m_\nu v_\nu^2}{2}, \qquad dT = \sum m_\nu v_\nu . dv_\nu .$$

Wenn wir es mit continuirlichen Körpern zu thun haben, so ergibt sich, indem wir mit μ, v, $d\tau$ Dichte, Geschwindigkeit und Volumen eines Körperelementes bezeichnen:

$$T = \int \frac{\mu . v^2}{2} . d\tau, \qquad dT = \int \mu . v . dv . d\tau .$$

Wenn nur mechanische Vorgänge stattfinden, ist also $E = F + T$ die Invariante.

3. Die kinetische Energie des Systems ist nach ihrer Definition eine Summe von unendlich vielen Theilchen, deren jedes einem ganz bestimmten Körperelement zugeordnet ist. Sie hat diese Eigenschaft mit der Masse des Systems gemein, die ebenfalls als Summe der Massen der Körperelemente zu berechnen ist. Wir sagen daher, dass die kinetische Energie

eine räumliche Vertheilung besitzt und können sie uns als eine Art immaterielles Fluidum vorstellen, das den einzelnen Körpertheilchen in veränderlicher Dichte $\left(\frac{\mu v^2}{2}\right)$ anhaftet. Diese Eigenschaft der Energie will ich als ihre Localisirbarkeit bezeichnen.

Definition der Localisirbarkeit.

Eine Energieform dE_α heisst localisirbar, wenn ihre Grösse sich als die Summe unendlich vieler Theilchen ergibt, deren jedes einem bestimmten Körperelemente $d\tau$ eindeutig zugeordnet ist.

$$dE_\alpha = \int de_\alpha . d\tau .$$

Die potentielle Energie ist nach der gewöhnlichen Darstellungsweise der Mechanik nicht localisirbar.

Zweites Princip: Localisirbarkeit der Energie.

4. Wir stellen als eine Forderung der heutigen theoretischen Physik, welche die Fernkräfte leugnet,[1] das folgende Princip auf:

Princip der Localisirbarkeit der Energie.

Die Energie eines jeden freien Systems lässt sich berechnen als Summe unendlich vieler Energietheilchen, deren jedes einem bestimmten Körperelement eindeutig zugeordnet ist.

$$E = \int e . d\tau . \qquad \ldots 2$$

Die Grösse e, welche ich die Dichtigkeit der Energie in dem Elemente $d\tau$ nennen will, hängt dabei allein von den Grössen ab, die den Zustand in $d\tau$ charakterisiren.

---

[1] Drude, Über Fernewirkungen. Referat f. d. 60. Vers. deutscher Naturf. und Ärzte. Section f. Physik. Braunschweig, 1897.

Nach diesem Satz ist es auch möglich, von der Energie eines beliebigen, unfreien Systems zu sprechen, wenn man $e . d\tau$ als die Energie des Körperelementes $d\tau$ bezeichnet.

Wenn man, wie es in der mathematischen Physik gewöhnlich geschieht, unter Körperelementen die kleinsten Theilchen der Materie versteht, die man durch irgendwelche physikalische Mittel noch voneinander unterscheiden kann, wenn man ausserdem für die elektrischen und magnetischen Erscheinungen die Maxwell'sche Theorie annimmt, so ist das Princip weiter nichts als der Ausdruck einer allgemeinen Erfahrung. Dabei müssen wir dann allerdings von der noch nicht experimentell erforschten Gravitationskraft absehen, welche gewöhnlich noch als Fernkraft behandelt wird.[1]

Nach diesem Princip darf man sich die Energie unter dem Bilde eines immateriellen Fluidums denken, das mit der Dichtigkeit e im Raume vertheilt ist. Die Änderungen in der räumlichen Vertheilung werden wir dann natürlich schildern als Folgen von Strömungen (u, v, w), welche, je nachdem sie von einem Punkte auseinandergehen oder in ihm zusammenstreben, eine Vergrösserung oder Verkleinerung der Dichtigkeit e bewirken:

$$-\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Heutiger Stand der Theorie.

5. Die geschilderte Vorstellungsweise ist von jeher allgemein gebraucht für die Energieform der Wärme und für die von einer Lichtquelle ausgehende Strahlung. Besonders hat sich bekanntlich die Theorie der Wärmeströme als ausserordentlich nützlich erwiesen.

Versuche, sie zu verallgemeinern, sind erst gemacht, seitdem Poynting[2] und Heaviside,[3] unabhängig von einander, eine Theorie der Energieströmung im elektromagnetischen Felde

[1] Siehe Anhang II.

[2] Phil. Trans. London, *175*, p. 343, 10. Jan. 1884.

[3] Electrician, *14*, p. 178 und 306, 10. Jan. und 21. Febr. 1885.

aufstellten, indem sie eine Vectorgrösse (u, v, w) definirten, die immer der Bedingung

$$-\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

genügt.

In der Verfolgung dieser Idee gingen manche Forscher, von denen vor Allen Lodge[1] zu nennen ist, so weit, den Energietheilchen eine ähnliche individuelle Existenz zuzuschreiben, wie den materiellen Partikeln, so dass es möglich sein sollte, von jedem einzelnen Energietheilchen seine Bewegungen, seine Gestaltänderungen, seine ganze Geschichte zu erforschen.

Gegen die Theorie der Energieströmung wurden folgende Einwände erhoben:

1. Dass der Bedingung

$$-\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

eine unendliche Mannigfaltigkeit von Functionen (u, v, w) genügt (J. J. Thomson[2]);

2. dass nach der Poynting'schen Theorie in einem statischen Felde, das durch einen permanenten Magneten und einen daneben liegenden elektrisirten Körper erzeugt wird, die Energie in beständiger Bewegung sein müsste, allerdings in geschlossenen Bahnen (Hertz[3]);

3. dass es sehr fraglich sei, ob die Verfolgung der Energie von Punkt zu Punkt einen deutlichen physikalischen Sinn habe (Hertz[3]).

Eine weitere Verallgemeinerung erfuhr die Theorie zuerst durch die Arbeiten von Pearson[4] und W. Wien,[5] welche sie auf die mechanischen Vorgänge in vollkommen elastischen Körpern und in Flüssigkeiten ausdehnten.

---

[1] Phil. Mag. (5), *19*, p. 482, 1885.
[2] Brit. Assoc. Reports, 1885, p. 150.
[3] Ausbreitung der elektr. Kraft, S. 234 und S. 294.
[4] Messenger of Math. *19*, p. 31, 1889.
[5] Wied. Ann. *45*, S. 685, 1892.

Die gründlichsten und umfassendsten Untersuchungen über den Gegenstand verdanken wir Heaviside,[1] der vor Allem die Theorie der Energiewanderung auch für mechanische Vorgänge in voller Allgemeinheit aufstellte und zugleich zeigte, dass für alle mechanischen Analogien, die man bis heute für das elektromagnetische Feld geliefert hat, der mechanische Energiestrom mit dem elektromagnetischen identisch wird.

Heaviside hat zuerst darauf hingewiesen, dass die Theorie des mechanischen Energiestromes:

1. an derselben Unbestimmtheit leidet, wie die des elektromagnetischen;

2. ebenfalls zu cyclischen Energiebewegungen bei stationären Zuständen führt.

Er schliesst daraus, dass es in der That unmöglich ist, den Energiestrom bestimmt zu definiren, dass also die Energietheilchen keine individuelle Existenz besitzen, dass der Energiestrom kein physikalisches Phänomen ist, sondern nur ein mathematisches Hilfsmittel, um die Vertheilung der Energie bequem zu verfolgen.

Von neueren Arbeiten sind noch zu erwähnen der Versuch von Macauley,[2] einen anderen Energiestrom für das elektromagnetische Feld herzuleiten, als Poynting, ferner der von Birkeland[3] geführte Nachweis, dass der Poynting'sche Energiefluss unter allen möglichen der einzige ist, der eine reine Functon der elektrischen und magnetischen Feldstärke ist, endlich die interessante Schilderung von Energieströmen von Föppl,[4] der ebenfalls gewichtige Gründe gegen die Individualisirung der Energietheilchen anführt.

6. Wollen wir der üblichen Ausdrucksweise folgen, so müssen wir jedenfalls den mit dem Worte »Energie« bezeichneten Begriff durch folgende Bestimmung fixiren:

---

1 Electrician, *27*, 3. Juli 1891; *29*, 29. Juli 1892; abgedruckt in Electromagnet. Theory, p. 76 und p. 247 ff.; ferner: Phil. Trans. London, *183*, p. 42[illegible], 1892.

2 Phil. Trans. London, *183*, p. 685, 1892.

3 Wied. Ann. *52*. S. 357, 1894.

4 Einführung in die Maxwell'sche Theorie, S. 293.

Festsetzung.

Es ist unmöglich, die Energietheilchen gleich den materiellen Partikeln zu individualisiren. Es hat keinen vernünftigen Sinn, von einer Bewegung der Energietheilchen und von einer Geschwindigkeit dieser Bewegung zu sprechen, wenn man nicht diesen Worten ganz neue Begriffe unterlegt.

Anmerkung. Die Individualisirung der materiellen Partikeln beruht darauf, dass sie bestimmte Eigenschaften besitzen, an denen sie von ihrer Umgebung zu unterscheiden sind, zum mindesten die Undurchdringlichkeit, d. h. die Eigenschaft, einer Änderung ihres Volumens einen bestimmten Widerstand entgegenzusetzen. Niemand aber hat bisher von blauen oder grünen, kalten oder warmen, gepressten oder ausgedehnten, oder ihr natürliches Volumen besitzenden Energietheilchen gesprochen, oder den Energietheilchen überhaupt im Ernst bestimmte Eigenschaften ausser ihrer Quantität beigelegt. In Folge dessen hat auch noch niemals Jemand wirklich ein Energietheilchen individualisiren und seine Geschichte verfolgen können, wie Lodge es wünscht.

Ferner erkennt man die Geschwindigkeit bewegter Materie an den Trägheitswirkungen, wie Stoss, Centrifugalkraft etc. Mit Hilfe dieser Wirkungen kann man z. B. ganz unabhängig von der Stromstärke einer Flüssigkeitsströmung auch ihre Geschwindigkeit messen. Niemand aber hat jemals von einer Trägheit bewegter Energie gesprochen. Es hat daher z. B. noch niemals Jemand versucht, die Geschwindigkeit zu messen, mit der sich fortgeleitete Wärme etwa bewegt, obwohl man die Stromintensität des Wärmestromes genau bestimmen kann.

Drittes Princip: Energieübertragung.

7. Es sei ein freies System Σ vorgelegt. A und B seien zwei durch geschlossene Flächen abgegrenzte Theilsysteme die keinen Theil gemeinsam haben, und die durch ein drittes Theilsystem C zu Σ ergänzt werden, welches dadurch charakterisirt ist, dass seine Energie während der sich in Σ abspielenden Vorgänge immer ungeändert bleibt.

Ich nehme nun an, es gehe in dem Theil A eine Veränderung vor sich, die eine Verminderung seiner Energie dE_A mit sich bringt. Dann folgt ohne Weiteres, dass in demselben Moment in B eine Zustandsänderung eintreten muss, der eine ebensogrosse Vermehrung der Energie entspricht: $dE_B = -dE_A$.

Das heisst, es muss zwischen den Zuständen der Punkte von A und denen der Punkte von B nothwendig ein mathematischer Zusammenhang bestehen. Diesen charakterisiren wir durch den Ausdruck, es geht die Energie dE_A zwischen A und B über.

Definition des Energieüberganges.

Stehen die Zustände zweier materieller Systeme A und B für alle natürlichen Vorgänge in einem derartigen mathematischen Zusammenhang, dass einer Energieverminderung dE im einen stets eine gleiche und gleichzeitige Energievermehrung im anderen entspricht, so sagen wir, dass zwischen A und B die Energie dE übergeht.

Bezeichnet dt die Zeit, während welcher dE übergeht, so ist $\frac{dE}{dt}$ die Stärke des Energieüberganges.

Wir können nun die beiden ersten Energieprincipe gemeinsam in folgender Form aussprechen:

In einem System A, welches der eine Theil eines freien Systems Σ ist, kann sich die Energie nur dadurch ändern, dass zwischen A und den übrigen Theilen von Σ Energieübergänge stattfinden.

Sind A und B räumlich getrennt, so sind bei den Energieübergängen zwischen ihnen zwei Hauptmöglichkeiten zu unterscheiden.

Erstens kann zwischen A und B eine Fernwirkung bestehen.

Definition der Fernwirkung.

Wenn zwischen zwei räumlich getrennten materiellen Systemen A und B Energieübergänge stattfinden, ohne dass sie mit bestimmten Zuständen eines A und B verbindenden Körpers C nothwendig verknüpft sind, so sagt man, zwischen A und B bestehe eine Fernwirkung.

Zweitens kann der Energieübergang durch einen Körper C vermittelt sein.

Definition der Energieübertragung.

Wenn zwischen zwei räumlich getrennten materiellen Systemen A und B nur solche Energieübergänge stattfinden, die in einem nothwendigen Zusammenhang mit den Zustandsgrössen in den Punkten eines beide verbindenden Körpers C stehen, so dass man den Energieübergang $\frac{dE}{dt}$ ohneweiteres berechnen kann, wenn man nur den Zustand in allen Punkten von C kennt, so sagt man, dass die Energie dE zwischen A und B durch C übertragen wird.

Wir können uns z. B. unter A einen Motor, unter B eine Arbeitsmaschine, unter C die Transmission (Welle und Riemen) zwischen A und B vorstellen. So lange A, B und C verbunden sind und so lange (A, B, C) ein freies System bilden, das durch äussere Kräfte also nicht beeinflusst wird, stehen A und B für alle natürlichen Vorgänge in einem derartigen Zusammenhang, dass jeder Energieänderung in A eine genau gleiche entgegengesetzte in B entsprechen muss, vorausgesetzt, dass wir von den geringfügigen Energieänderungen und Reibungsverlusten in den Theilen der Transmission absehen dürfen. Die Energie geht also von A nach B über. Sobald aber dieser Übergang stattfindet, muss in der verbindenden Transmission ein bestimmter Zustand elastischer Spannung und gleichzeitiger Bewegung herrschen, aus dem man den Energieübergang berechnen kann, ohne die Vorgänge in A und B zu kennen. Durch Riemen und Welle wird also die Energie übertragen.

Ausser diesen beiden Hauptmöglichkeiten ist es natürlich auch denkbar, dass Energieübergänge stattfinden, die weder durch reine Fernewirkung, noch durch reine Übertragung vor sich gehen, sondern durch eine Combination beider. Indessen hat die nähere Untersuchung aller dieser Möglichkeiten für uns kein Interesse, da wir entsprechend der Anschauungsweise, dass es nur Nahewirkungen gibt, folgendes Princip voraussetzen werden:

Princip von der Übertragung der Energie.

Energieübergänge, d. h. überhaupt Änderungen der räumlichen Vertheilung der Energie, können nur durch reine Energieübertragung eintreten.

Problem der Energieübertragung.

8. Die Annahme dieses Principes führt uns zu dem Problem, die Form zu suchen, in der der mathematische Zusammenhang zwischen den Zuständen des Energieüberträgers und dem Energieübergang darzustellen ist.

Die Lösung dieses Problems würde uns eine allgemeine Methode liefern, aus den Zuständen des Überträgers die während jedes Zeitelementes dt von A nach B übergehende Energiemenge dE zu berechnen, ohne dass wir die Vorgänge in A und B zu kennen brauchen.

Ich schneide durch eine geschlossene Oberfläche S aus dem freien System Σ ein Gebiet A aus, construire eine Oberfläche S', welche ganz ausserhalb von S, aber überall unendlich nahe an S verläuft, so dass die Energie der unendlich dünnen Schale $\overline{SS'}$ gegen die ganze Energie von Σ stets zu vernachlässigen ist.[1] Nenne ich den Theil von Σ, der ganz ausserhalb S' liegt, B, so ist die Schale SS' als der Energieüberträger C zu betrachten, dessen Energie selber keine merklichen Änderungen erfährt.

Statt nun zu sagen, dass durch die Schale $\overline{SS'}$ die Energie dE von A nach B übertragen wird, werde ich häufig den Ausdruck brauchen, dass durch die A und B trennende Oberfläche S die Energie dE nach aussen hindurchtritt.

Unser Problem ist also zunächst darauf reducirt, zu untersuchen, wie sich aus den Zustandsgrössen auf jeder beliebigen geschlossenen Oberfläche S die Stärke des durch S hindurchtretenden Energieüberganges $\frac{dE}{dt}$ berechnet.

---

[1] Dabei ist als selbstverständlich vorausgesetzt, dass die Energie sich nicht unendlich dicht anhäufen kann.

Viertes Princip: Localisirbarkeit der Energieübertragung.

9. Ich denke mir nun, es gebe zu einem beliebig begrenzten Stück F der Oberfläche S immer ein materielles System M, welches sich mit F verbinden lässt und die Eigenschaft hat, dass man dann zur Berechnung der Energieübertragung nach M hinein nur die Zustände auf F zu berücksichtigen hat. Damit dies der Fall ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein. Erstens muss jede Energieänderung in M als reine Function der Zustände in F zu berechnen sein. Zweitens, wenn M' ein ähnliches System ist wie M, das sich in gleicher Weise mit F' verbinden lässt, einem F in allen Punkten unendlich benachbarten Flächenstück, dessen Begrenzungscurve mit der von F zusammenfällt, und zwar so, dass M und M' auf verschiedenen Seiten des Schalenstückes $\overline{FF'}$ liegen, so muss die Energie des Systems $(M, M', \overline{FF'})$ bei allen natürlichen Vorgängen ungeändert bleiben. Nennen wir nämlich die freien Oberflächen von M und M': G und G', so ist die Oberfläche des zusammengesetzten Systems (G, G'), es können also Energieänderungen nur dadurch eintreten, dass durch G oder G' Energie übertragen wird, was ausgeschlossen sein soll.

Von einem derartigen System M sage ich, dass es nur durch F vermittelte Energieübergänge $\frac{dE}{dt}$ erfahren kann, und $\frac{dE}{dt}$ nenne ich den realisirbaren Energieübergang durch F.

Der realisirbare Energieübergang muss jedenfalls durch die Zustände in F eindeutig bestimmt sein. Denn seien M_1, $M_2, \ldots$ verschiedene Systeme, die bei ihrer Verbindung mit F nur durch F vermittelte Energieänderungen erfahren würden, M' ein entsprechendes System für die andere Begrenzung F' des unendlich dünnen Schalenstückes $\overline{FF'}$, seien ferner die Energieübergänge, die sich bei einem bestimmten Zustand in FF' für $M_1, M_2, \ldots M'$ berechnen würden:

$$\frac{dE_1}{dt}, \quad \frac{dE_2}{dt}, \ldots \quad \frac{dE'}{dt},$$

so muss offenbar sein:

$$\frac{dE_1}{dt} = -\frac{dE'}{dt}, \quad \frac{dE_2}{dt} = -\frac{dE'}{dt}, \ldots$$

Es sei nun dS ein Element der das Gebiet A umschliessenden Oberfläche S, n die Richtung der Normale nach aussen, $f_n . dS$ der realisirbare Energieübergang durch dS, $\frac{dE}{dt}$ die Energieänderung, die A erfährt, so ist

$$-\frac{dE}{dt} = \int_S f_n . dS.$$

Wir können also in eindeutig bestimmbarer, stets zutreffender Weise den ganzen Energieübergang auf die einzelnen Elemente von S localisiren.

Da dies nur unter der Annahme der Existenz materieller Systeme M möglich ist, die nur durch ein beliebiges Flächenstück F vermittelte Energieänderungen erfahren, da aber die Existenz solcher Systeme M a priori nicht nachzuweisen ist, stellen wir als Ergänzung des dritten Principes ein weiteres allgemeines Princip auf.

Princip der Localisirbarkeit der Energieübertragung.

Der Energieübergang durch eine geschlossene Oberfläche S vertheilt sich in eindeutig bestimmbarer Weise auf die Elemente von S:

$$-\frac{dE}{dt} = \int_S f_n . dS; \qquad \ldots 3$$

$f_n . dS$ ist der durch dS tretende realisirbare Energieübergang, f_n hängt nur von dem Zustand in dS ab.

Methode der Berechnung der Energieübertragung.

10. Ich denke mir den Punkt (x, y, z) als Spitze eines unendlich kleinen Tetraëders, dessen drei Seitenkanten den Richtungen der Coordinatenaxen parallel sind. Die drei Seitenflächen seien: dS_1, dS_2, dS_3, und zwar seien diese Grössen als positiv oder als negativ zu rechnen, je nachdem die nach aussen gerichtete Normale die positive oder die negative Richtung der

parallelen Coordinatenaxe besitzt. Die Grundfläche sei dS, die Richtungscosinus ihrer nach aussen gerichteten Normale n seien: λ, μ, ν, so dass also: $\lambda . dS = -dS_1$, $\mu . dS = -dS_2$, $\nu . dS = -dS_3$. Die durch diese vier Flächen nach aussen tretenden realisirbaren Energieübergänge seien:

$$u . dS_1,\ v . dS_2,\ w . dS_3,\ f_n . dS.$$

Da die Energieänderung in dem Tetraëder unendlich klein von einer höheren Ordnung sein muss wie diese Grössen (nämlich von der Ordnung $dx . dy . dz$), so ist:

$$u . dS_1 + v . dS_2 + w . dS_3 + f_n . dS = 0.$$

Also:

$$f_n = u . \lambda + v . \mu + w . \nu.$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

Finden in dem System Σ alle Energieübergänge nur durch localisirte Energieübertragung statt, so müssen sich für jeden Punkt von Σ drei Grössen u, v, w eindeutig als Functionen der Eigenschaftsgrössen der Materie bestimmen lassen, mit deren Hilfe man die durch eine beliebige Fläche F austretende Energie $\frac{dE}{dt}$ immer berechnen kann:

$$-\frac{dE}{dt} = \int_F (u . \lambda + v . \mu + w . \nu) . dF \qquad \ldots 4$$

λ, μ, ν die Richtungscosinus der auf dem Flächenelement dF nach aussen errichteten Normale n.

Damit ist der Weg zur Lösung des Problems der Energieübertragung gefunden.

Fassen wir u, v, w als Componenten eines f Vectors auf $f = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, so ist:

$$f_n . dS = f . \cos (f, n) . dS.$$

Aus dieser Gleichung folgt ohneweiters, dass, wenn die Fläche $dS \parallel f$ ist: $f_n . dS = 0$. Wir haben hier die Verallgemeinerung des von Kirchhoff für Lichtschwingungen

bewiesenen Satzes,[1] dass sich immer eine Richtung (f) angeben lassen muss, derart, dass durch ein zu ihr paralleles Flächenelement keine Energie übertragen wird. Durch ein zu f senkrechtes Flächenelement findet das Maximum der Energieübertragung statt.

Ist E die in der geschlossenen Fläche S enthaltene Energie, so ist nach 4):

$$-\frac{dE}{dt} = \int_S (u\,.\,dy\,dz + v\,.\,dz\,dx + w\,.\,dx\,dy) \qquad \ldots 5$$

oder wenn S unendlich klein und e die Dichtigkeit der Energie in S:

$$-\frac{de}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \qquad \ldots 6$$

Durch diese Gleichungen ist der gesuchte Zusammenhang zwischen dem Zustande des Energieüberträgers und dem Energieübergang gegeben.

Continuität der Energie.

11. Brauchen wir nun das anschauliche Gleichniss des Fluidums für die Energie, so wollen wir den Vector f als die Intensität der wirklichen Strömung bezeichnen. Dabei ist aber zu bemerken, dass, während die Strömung eines materiellen Fluidums nothwendig eine bestimmte Geschwindigkeit besitzt, hievon in unserer Theorie der Energieübertragung nicht die Rede ist. Ob man das Wort Geschwindigkeit der Energie in diesem Gleichniss überhaupt consequent in irgend einer Weise deuten kann, lasse ich dahingestellt sein.

Definition des wirklichen Energiestromes.

Der wirkliche Energiestrom ist ein Vector f, dessen Componenten u, v, w folgende drei Bedingungen erfüllen:

---

[1] Kirchhoff, Optik. Vorlesung 12, S. 205.

1. Sie genügen der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{de}{dt},$$

wo e die Dichte der Energie im Punkte (x, y, z) ist.

2. Sie sind reine Functionen der Eigenschaftsgrössen der Materie im Punkte (x, y, z) (nebst ihren Ableitungen nach Ort und Zeit) und enthalten nicht explicite die Coordinaten und die Zeit.

3. Sie stellen nur realisirbare Energieübergänge durch die durch den Punkt (x, y, z) zu legenden Flächenelemente dar.

Wie in **18.** gezeigt, gilt dann der Satz:

Der wirkliche Energiestrom muss sich stets eindeutig bestimmen lassen.

Mit Hilfe dieses Begriffes lassen sich die in den vorhergehenden Paragraphen getrennt ausgesprochenen vier Energieprincipe zu dem folgenden Satze vereinigen:

Satz von der Continuität der Energie.

Alle Energieverschiebungen sind die Folgen wirklicher Energieströme.

Ich bemerke dabei ausdrücklich, dass die Ähnlichkeit zwischen diesem Satz und dem von der Continuität der Masse nur eine ganz äusserliche ist, da ihm durchaus die unmittelbare Anschaulichkeit des letzteren fehlt.

Definition der fingirten Energieströme.

12. Alle Vectoren $f'(u', v', w')$, die der Gleichung:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

genügen, die man also alle benützen kann, um die Energieänderungen anschaulich zu schildern, die aber den anderen Bedingungen des wirklichen Energiestromes nicht genügen, nenne ich fingirte Energieströme.

Unter Umständen ist es bequem, mit fingirten Energieströmen zu rechnen.

Eine Classe von fingirten Energieströmen sind die, welche auch die Coordinaten oder die Zeit noch explicite enthalten. Es ist leicht, Beispiele dafür zu finden. Seien ein Motor und eine Arbeitsmaschine mit den Riemscheiben R_1 und R_2 einer Transmissionswelle verbunden, so geht der wirkliche Energiestrom im Innern der Welle von R_1 nach R_2. Da nun aber in der Welle keine Energieanhäufungen stattfinden, so kann ich einen Strom f' fingiren, der irgendwie durch die Luft geht, wenn er nur R_1 und R_2 verbindet und die richtige Intensität besitzt. f' wird die Energieübergänge richtig darstellen, steht aber mit dem Vorgange der Energieübertragung in gar keinem Zusammenhang.

Die andere Classe wird von solchen Vectoren gebildet, die freilich von den Coordinaten und der Zeit nicht explicite abhängen, aber nicht nur realisirbaren Energieübergängen entsprechen. Man kann beispielsweise in einem elektromagnetischen Felde dem wirklichen Energiestrom noch einen superponiren, der überall längs der magnetischen Inductionslinien verläuft und dessen Intensität der magnetischen Induction proportional ist. Dieser superponirte Strom ändert die Dichtigkeit der Energie nirgends, da die magnetischen Inductionslinien sich cyclisch schliessen. Der resultirende Strom $f'(u', v', w')$ genügt also der Bedingung $\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{de}{dt}$, er ist ausserdem eine reine Function der Grössen, die das elektromagnetische Feld charakterisiren, aber niemals lässt sich der ihm entsprechende Energieübergang vollständig realisiren, weil die superponirte Strömung ihrem Wesen nach immer cyclisch verlaufen muss. So ist er z. B. auch im Felde eines ruhenden permanenten Magneten, in welchem überhaupt niemals Energieübergänge stattfinden können, von Null verschieden. Derartige cyclische Energieströme nenne ich wesentlich cyclisch. Man kann die dritte Bedingung, der der wirkliche Energiestrom genügt, auch so ausdrücken:

Wirkliche Energieströme enthalten keine wesentlich cyclischen Bestandtheile.

II. Abschnitt.

Die Formen des wirklichen Energiestromes.

Eintheilung der Energieströme.

13. Um die Energieänderung dE in einem abgeschlossenen Raume zu berechnen, muss man erstens die Änderung dE_0 suchen, welche in Folge der Verschiebung der materiellen Theilchen auftritt, wenn die Energie ihnen unverändert anhaftet, und zweitens die Änderung dE', welche die Energie der den Raum momentan erfüllenden Materie erleidet. Die ganze Änderung dE erhält man als algebraische Summe dieser beiden Grössen:

$$dE = dE_0 + dE'.$$

Ich nenne dE_0 die Energieänderung durch Convection, dE' die Energieänderung durch Leitung.

Die Energie eines beliebigen materiellen Systems kann nun durch folgende Einwirkungen verändert werden:

1. Dadurch, dass eine mechanische Arbeit an der Oberfläche des Systems geleistet wird,
2. dadurch, dass Wärme ab- oder zugeleitet wird,
3. durch elektromagnetische Vorgänge (elektrischer Strom, Entstehung elektrischer und magnetischer Kraftfelder, Strahlung[1]),
4. durch die Wirkung der Gravitation.

Andere Einflüsse, die die Energie eines materiellen Systems ändern, sind bisher nicht bekannt geworden.

Von diesen Energieübergängen müssen wir die durch Gravitationswirkungen erfolgten als gänzlich unerforscht bei Seite lassen, zumal da sie im Allgemeinen noch als Ferne-

---

[1] Dabei ist zu bemerken, dass von den fast unerforschten neuen Strahlungsarten (Röntgenstrahlen etc.) noch nicht feststeht, ob sie ebenfalls nur elektromagnetische Vorgänge im Sinne der Maxwell'schen Theorie sind, oder ob sie nicht eine ganz neue Art mit Energieleitung verbundener Vorgänge darstellen.

wirkungen behandelt werden.[1] Wir betrachten also nur die Energieänderungen, die durch je eine der drei ersten Wirkungen hervorgebracht werden, dE_1, dE_2, dE_3. dE' ergibt sich durch algebraische Summirung dieser drei Grössen, und es ist also die ganze in dem betrachteten Raum eintretende Energieänderung:

$$dE = dE_0 + dE_1 + dE_2 + dE_3.$$

Wir haben demnach vier Arten von Energieströmen einzeln zu berechnen, aus denen sich der gesammte Energiestrom durch Superposition zusammensetzt.

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \\ v &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 \\ w &= w_0 + w_1 + w_2 + w_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots 7$$

Convectionsstrom.

14. Der Convectionsstrom hat die Grösse $f_0 = e.\omega$, wo e die Dichtigkeit der Energie, ω die Geschwindigkeit der materiellen Theilchen bedeuten. Seine Richtung fällt zusammen mit der von ω. Sind die Componenten von ω: α, β, γ, so ist:

$$u_0 = e.\alpha, \; v_0 = e.\beta, \; w_0 = e.\gamma. \quad \ldots 8$$

1. Findet nur Convection von Energie statt, so berechnen sich die Dichtigkeitsänderungen überall nach der Formel:

$$-\frac{de_0}{dt} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = e.\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right).$$

2. Die Grössen u_0, v_0, w_0 enthalten die Zeit und die Coordinaten nicht explicite.

---

[1] Heaviside hat (Electrician, *31*, 4. August, 1893, abgedruckt: Electromagnetic Theory, p. 463) hypothetisch eine der Maxwell'schen Theorie nachgebildete Theorie aufgestellt, die die Energieübergänge durch Gravitation als Nahewirkungen behandelt und den entsprechenden Energiestrom berechnet. Durch einige sehr interessante Zahlenbeispiele hat er dem Beobachter die Mittel zur Prüfung dieser Theorie an die Hand gegeben.

3. f_0 stellt nur realisirbare Energieübergänge dar. Untersuchen wir beispielsweise einen Fall genauer, wo keine Energieübergänge stattfinden und doch f_0 von Null verschieden ist.

Die Theile eines rotirenden Schwungrades besitzen eine beträchtliche kinetische Energie, die sie bei der Rotation mit sich führen, in der Art jedoch, dass, wenn der Radkranz homogen ist, an keinem Orte Energieänderungen eintreten. Wir haben hier einen cyclischen Convectionsstrom. Dennoch aber stellt (u_0, v_0, w_0) realisirbare Energieübergänge dar. Um dies einzusehen, denke man sich den Radkranz (Fig. 1) an einer Stelle durchbrochen und construire zwei geschlossene Oberflächen, deren jede eine Begrenzung an der Durchbrechung ganz in sich schliesst und die andere ganz ausschliesst.

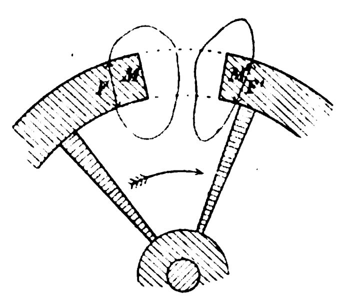


Fig. 1.

Nennen wir die Theile dieser Flächen, die in der Masse des Radkranzes liegen, F und F', nennen wir die Theile des Radkranzes, die ganz von diesen Flächen umschlossen sind, M und M', so sieht man unmittelbar, dass der eine Theil, z. B. M, die ganze durch F eintretende Energiemenge aufnimmt, während der andere, M', die ganze durch F' austretende Energiemenge abgibt.

Es ist leicht einzusehen, dass sich durch dasselbe Beweisverfahren stets zeigen lässt, dass (u_0, v_0, w_0) nur realisirbare Energieübergänge darstellt.

Einen wirklichen Energiestrom, der cyclisch verläuft, nenne ich »zufällig cyclisch«.

Es ist sehr bequem, für einen zufällig cyclischen Energiestrom den Strom Null zu fingiren.

Mechanischer Leitungsstrom.

15. Man denke sich einen ganz beliebigen materiellen Körper Σ, der durch die geschlossene Fläche S begrenzt ist. Auf die Fläche S wirken Mechanismen, die sich unter Ausübung von Druckkräften bewegen und dadurch an Σ eine Arbeit

leisten. Sind X_n, Y_n, Z_n die Componenten des Druckes auf das Flächenelement dS, dessen nach innen gerichtete Normale n die Richtungscosinus λ, μ, ν habe, sind ferner α, β, γ die Componenten der Geschwindigkeit ω an dieser Stelle, so ist die Leistung der Druckkräfte auf dS:

$$(X_n . \alpha + Y_n . \beta + Z_n . \gamma) . dS,$$

also die zeitliche Änderung der Energie im Körper Σ in Folge dieser Leistungen:

$$\frac{dE_1}{dt} = \int_S (X_n . \alpha + Y_n . \beta + Z_n . \gamma) . dS.$$

Sind nun X_x, Y_x, Z_x, X_y, ... die Componenten der Drucke auf Flächenelemente, die den Coordinatenebenen parallel sind und deren nach innen gerichteten Normalen die positive Richtung der Coordinatenaxen haben, so ist:

$$\begin{aligned} X_n &= X_x . \lambda + X_y . \mu + X_z . \nu \\ Y_n &= Y_x . \lambda + Y_y . \mu + Y_z . \nu \\ Z_n &= Z_x . \lambda + Z_y . \mu + Z_z . \nu, \end{aligned}$$

also:

$$\frac{dE_1}{dt} = \int_S \{(X_x . \alpha + Y_x . \beta + Z_x . \gamma)\lambda + (X_y . \alpha + Y_y . \beta + Z_y . \gamma)\mu + \\ + (X_z . \alpha + Y_z . \beta + Z_z . \gamma)\nu\} dS.$$

Daraus folgt, wenn wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= X_x . \alpha + Y_x . \beta + Z_x . \gamma \\ v_1 &= X_y . \alpha + Y_y . \beta + Z_y . \gamma \\ w_1 &= X_z . \alpha + Y_z . \beta + Z_z . \gamma \end{aligned}\right\} \ldots 9$$

1. Die Grössen u_1, v_1, w_1 erfüllen Gleichung 5 (Punkt **10**)[1] und folglich auch Gleichung 6:

$$-\frac{de_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z};$$

[1] Wo zu beachten ist, dass λ, μ, ν die Richtungscosinus der nach aussen gerichteten Normale bedeuten.

2. sie enthalten die Coordinaten und die Zeit nicht explicite;

3. sie liefern nur realisirbare Energieübergänge. Denn man kann die Oberfläche S beliebig in Gebiete F zertheilen und jedes Stück F mit einem eigenen Mechanismus M in Verbindung setzen, der unabhängig von allen übrigen arbeitet. Es liefert dann immer (u_1, v_1, w_1) den nach M hinein stattfindenden Energieübergang.

16. Ich will noch einen anderen, mehr analytischen Nachweis liefern, dass die durch Gleichung 9 definirten Grössen u_1, v_1, w_1 die erste Bedingung erfüllen, der sich freilich nicht wesentlich von dem in (**15**) gebrachten unterscheidet.

Es sei μ die Massendichte, (α, β, γ) die Geschwindigkeit im Punkte (x, y, z), dann ist die kinetische Energie des im Raumelement $d\tau$ befindlichen materiellen Theilchens:

$$T = \frac{1}{2}\mu.(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).d\tau.$$

Es seien ferner die zeitlichen Änderungen der Geschwindigkeitscomponenten, welche sie allein durch den Einfluss der Druckkräfte erleiden:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_1, \quad \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_1, \quad \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_1,$$

so genügen diese Grössen den Gleichungen:[1]

$$\mu.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_1 = -\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)$$

$$\mu.\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_1 = -\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)$$

$$\mu.\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_1 = -\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right).$$

Es ist nun die zeitliche Änderung der kinetischen Energie unter dem Einflusse der Druckkräfte allein:

[1] Die sich aus Kirchhoff, Mechanik, S. 113, Vorl. 11, Gl. 8) ergeben, indem man alle Kräfte ausser den Druckkräften gleich Null setzt.

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_1 = \mu . \left\{ \alpha . \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_1 + \beta . \left(\frac{d\beta}{dt}\right)_1 + \gamma . \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_1 \right\} . d\tau .$$

Ferner ist die zeitliche Änderung der inneren Energie unter dem Einfluss der Druckkräfte allein:[1]

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_1 = \left\{ \left(X_x . \frac{\partial \alpha}{\partial x} + X_y . \frac{\partial \alpha}{\partial y} + X_z . \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) + \right.$$
$$+ \left(Y_x . \frac{\partial \beta}{\partial x} + Y_y . \frac{\partial \beta}{\partial y} + Y_z . \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) +$$
$$\left. + \left(Z_x . \frac{\partial \gamma}{\partial x} + Z_y . \frac{\partial \gamma}{\partial y} + Z_z . \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \right\} . d\tau .$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung:

$$\frac{de_1}{dt} . d\tau = \left(\frac{dT}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)_1$$

ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung der oben hingeschriebenen Bewegungsgleichungen:

$$-\frac{de_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}(X_x . \alpha + X_y . \beta + X_z . \gamma) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}(Y_x . \alpha + Y_y . \beta + Y_z . \gamma) + \frac{\partial}{\partial z}(Z_x . \alpha + Z_y . \beta + Z_z . \gamma).$$

Es erfüllen also die in Gleichung 9 definirten Grössen u_1, v_1, w_1 die Bedingung:

$$-\frac{de_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} .$$

Dabei sei ausdrücklich hervorgehoben, dass keine Hypothesen über die Natur der elastischen Kräfte und keine irgendwie beschränkenden Annahmen über das Medium gemacht sind. Dieses darf fest, flüssig oder gasförmig sein, reibungslos

[1] Kirchhoff, Mechanik, S. 117, Vorl. 11, Gl. 18), wo zu setzen:

$\partial x = \alpha . dt$, $\partial y = \beta . dt$, $\partial z = \gamma . dt$; $X_y = Y_x$, $X_z = Z_x$, $Y_z = Z_y$.

oder mit innerer Reibung; in allen Fällen sind die Gleichungen, von denen wir ausgingen, nur der einfachste Ausdruck der Erfahrungsthatsachen (Lagrange'sche Gleichungen).

17. Seien die Richtungscosinus der Geschwindigkeit l, m, n, so dass $\alpha = \omega . l$, $\beta = \omega . m$, $\gamma = \omega . n$.

Sei ein zu ω senkrechtes Flächenelement dS_ω, die darauf wirkenden Drucke X_ω, Y_ω, Z_ω, so ist:

$$X_\omega = X_x . l + X_y . m + X_z . n$$
$$Y_\omega = Y_x . l + Y_y . m + Y_z . n$$
$$Z_\omega = Z_x . l + Z_y . m + Z_z . n,$$

also:

$$u_1 = X_\omega . \omega, \quad v_1 = Y_\omega . \omega, \quad w_1 = Z_\omega . \omega. \qquad \ldots 10$$

Nennen wir die resultirende Druckkraft P_ω und ihre Richtungscosinus l_1, m_1, n_1, so ist:

$$u_1 = P_\omega . \omega . l_1, \quad v_1 = P_\omega . \omega . m_1, \quad w_1 = P_\omega . \omega . n_1. \qquad \ldots 11$$

Die Grösse des mechanischen Energiestromes f_1 berechnet sich als das Product der Geschwindigkeit und der Grösse des Druckes, der auf das zur Richtung der Geschwindigkeit senkrechte Flächenelement wirkt: $f_1 = P_\omega . \omega$. Seine Richtung fällt mit der Richtung dieses Druckes $P_\omega(l_1, m_1, n_1)$ zusammen.

Durch jedes zu P_ω parallele Flächenelement findet also keine mechanische Energieübertragung statt.

Es sei nun die Normalcomponente von P_ω mit N_ω, die Tangentialcomponente mit T_ω bezeichnet, die Richtungscosinus von T_ω seien l', m', n'; dann ist:

$$N_\omega = X_\omega . l + Y_\omega . m + Z_\omega . n,$$
$$T_\omega = X_\omega . l' + Y_\omega . m' + Z_\omega . n',$$
$$l . l' + mm' + nn' = 0,$$
$$X_\omega = l . N_\omega + l' . T_\omega, \quad Y_\omega = m . N_\omega + m' . T_\omega,$$
$$Z_\omega = n . N_\omega + n' . T_\omega.$$

Ich setze nun:

$$u_1' = \omega . N_\omega . l, \qquad v_1' = \omega . N_\omega . m, \qquad w_1' = \omega . N_\omega . n,$$
$$u_1'' = \omega . T_\omega . l', \qquad v_1'' = \omega . T_\omega . m', \qquad w_1'' = \omega . T_\omega . n',$$

so ist:

$$u_1 = u_1' + u_1'', \qquad v_1 = v_1'' + v_1'', \qquad w_1 = w_1' + w_1''.$$

Der Vector f_1 ist also in zwei Vectoren f_1' und f_1'' zerlegt, von denen der erste in der Richtung von ω, der andere senkrecht dazu verläuft. Ich nenne f_1' den Longitudinalstrom, f_1'' den Transversalstrom der Energie.

Der Longitudinalstrom der Energie f_1' ist gleich dem Product aus der Geschwindigkeit und dem Normaldruck auf der zur Bewegungsrichtung senkrechten Ebene. Seine Richtung fällt entweder mit der der Bewegung zusammen oder ist ihr gerade entgegengesetzt, je nachdem der Normaldruck einen positiven Werth (Druck) oder einen negativen Werth (Zug) hat.

$$u_1' = N_\omega . \omega . l, \quad v_1' = N_\omega . \omega . m, \quad w_1' = N_\omega . \omega . n. \qquad \ldots 12$$

Es sei dS ein Flächenelement parallel zu ω, und zwar senkrecht zu T_ω, ferner dS' ein beliebiges anderes parallel zu ω, der Normalenwinkel zwischen dS und dS' sei φ.

Seien ferner die Tangentialdrucke auf dS und dS': T und T', seien die Componenten von T und T' parallel zu ω: T_1 und T_1'. Nach dem Satz: $X_y = Y_x$ etc., ist dann:

$$T_\omega = T_1 = T . \cos(\omega, T),$$
$$T_1' = T_\omega . \cos\varphi = T_1 . \cos\varphi,$$

also:

$$T_1' < T_1,$$

Daraus folgt:

Der Transversalstrom der Energie fliesst senkrecht zu derjenigen der Bewegungsrichtung parallelen Ebene, für welche der Tangentialdruck parallel zur Bewegung ein Maximum ist. Seine Grösse ist

gleich dem Product aus der Geschwindigkeit und aus der zu ihr parallelen Componente des Tangentialdruckes in dieser Ebene. Diese Componente hat dieselbe Grösse, wie der Tangentialdruck in der zur Bewegungsrichtung senkrechten Ebene, und die Richtung des Stromes fällt mit der Richtung dieses Tangentialdruckes zusammen.

$$\left.\begin{aligned} u_1'' &= \omega . T . \cos(\omega, T) . l', & v_1'' &= \omega . T . \cos(\omega, T) . m', \\ &= \omega . T_\omega . l' & &= \omega . T_\omega . m' \\ w_1'' &= \omega . T . \cos(\omega, T) . n & & \\ &= \omega . T_\omega . n' & & \end{aligned}\right\} \quad \ldots 13$$

Wirkt auf das zur Bewegungsrichtung senkrechte Flächenelement immer nur ein Normaldruck (wie z. B. bei einer reibungslosen Flüssigkeit), so ist der Energiestrom ein reiner Longitudinalstrom, wirkt nur ein Tangentialdruck (wie z. B. in einer Transmissionswelle), so ist er ein reiner Transversalstrom.

Im Allgemeinen entsteht der mechanische Leitungsstrom durch Superposition eines Longitudinal- und eines Transversalstromes.[1]

$$u_1 = u_1' + u_1'', \quad v_1 = v_1' + v_1'', \quad w_1 = w_1' + w_1''. \qquad \ldots 14$$

Für alle diese Fälle werde ich in einer demnächst folgenden Publication Beispiele geben.

18. In der Technik spielt der mechanische Leitungsstrom der Energie naturgemäss eine bedeutende Rolle. Er wird bezeichnet als der durch die Transmission übertragene Effect. Die Dimension seiner Masseinheit ist Kraft × Geschwindigkeit. Nimmt man als Krafteinheit das Kilogramm, als Geschwindigkeitseinheit Meter pro Secunde, so erhält man als Einheit der Stromstärke der Energie das Kilogrammmeter pro Sec. Die praktisch gebräuchliche Einheit ist das 75fache dieser Einheit, man nennt sie Pferdekraft.

---

[1] Pearson (Messenger of Math. *19*, p. 31, 1889) hat den mechanischen Leitungsstrom auf andere Weise in drei Partialströme zerlegt, indessen ist seine Zerlegung nur bei vollkommen elastischen Körpern möglich.

Für die Intensität des Energiestromes (die Grösse f) hingegen ist keine besondere Einheit eingeführt.

Die Instrumente zum Messen des Energiestromes nennt man Dynamometer. Ich gedenke ihre Theorie später mit den übrigen Beispielen zusammen zu behandeln.

19. Ebenso wie unter den Convectionsströmen finden sich unter den mechanischen Leitungsströmen der Energie sehr häufig zufällig cyclische. Ist z. B. um ein rotirendes Rad ein elastisches Band in gespanntem Zustand geschlungen (wie bei den Fahrrädern der Gummischlauch), so findet ausser dem cyclischen Convectionsstrom noch ein cyclischer Leitungsstrom in der der Bewegung entgegengesetzten Richtung statt. Schneidet man aber das Band auf und erzeugt die Spannung durch zwei an den Schnittflächen angebrachte Zugkräfte, etwa dadurch, dass man Gewichte anhängt (Fig. 2), so ist der durch (u_1, v_1, w_1) dargestellte Energieübergang realisirt. Denn offenbar haben wir nun das eine Ende mit einem System M verbunden, das die ganze übertragene Energie aufnimmt, das andere mit einem System M', das die ganze übertragene Energie abgibt.

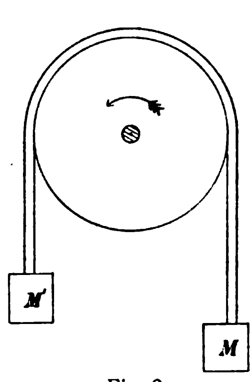


Fig. 2.

Auch für cyclische Leitungsströme fingirt man gewöhnlich den Strom Null.

Beispiele für wesentlich cyclische Ströme erhält man, wenn man irgend eine Vector-Grösse, die nur von den Eigenschaftsgrössen der Materie abhängt und die an allen Stellen des Raumes einen bestimmt angebbaren Werth hat, nimmt, etwa die Geschwindigkeit (α, β, γ), und die folgenden Werthe bildet (die Wirbelcomponenten):

$$u' = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad v' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad w' = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Natürlich hat es niemals einen Sinn, eine derartige Energieströmung anzunehmen.

Relative Energieströme.

20. Wir haben bisher stillschweigend vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeit sich in absoluter Weise ermitteln lässt. Indessen können wir Geschwindigkeiten nur relativ zu irgend einem System messen, aus dem wir ebensogut in ein anderes transformiren dürfen, das sich im ersten mit constanter Geschwindigkeit parallel verschiebt.

Ist $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ die Geschwindigkeit, mit der sich unser Bezugscoordinatensystem in einem anderen bewegt, in das wir transformiren wollen, ferner (α, β, γ) die gemessene Geschwindigkeit in einem Punkte (x, y, z), so sind die Componenten der transformirten Geschwindigkeit: $(\alpha) = \alpha + \alpha_0$, $(\beta) = \beta + \beta_0$, $(\gamma) = \gamma + \gamma_0$.

Setzen wir nun:

$$\left.\begin{aligned} u_r = X_x\alpha_0 + X_y\beta_0 + X_z\gamma_0, \quad v_r = Y_x\alpha_0 + Y_y\beta_0 + Y_z\gamma_0, \\ w_r = Z_x\alpha_0 + Z_y\beta_0 + Z_z\gamma_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots 15$$

und ist der mechanische Leitungsstrom im ersten Coordinatensystem: u_1, v_1, w_1, so ist er im zweiten:

$$(u_1) = u_1 + u_r, \quad (v_1) = v_1 + v_r, \quad (w_1) = w_1 + w_r. \quad \ldots 16$$

Die Transformation des Energiestromes geschieht also dadurch, dass man dem Strom f_1 einen Strom f_r superponirt. Dieser Strom f_r verläuft keineswegs cyclisch, er ruft Energieänderungen hervor, welche die aus den gemessenen Geschwindigkeiten α, β, γ berechnete Vertheilung der kinetischen Energie in die aus den transformirten Geschwindigkeiten (α), (β), (γ) berechnete Vertheilung überführen. Die Vertheilung der anderen Energieformen bleibt bei der Transformation ungeändert. Ich nenne den durch Gleichung 15) definirten Strom $f_r(u_r, v_r, w_r)$ den Umrechnungsstrom.

Ein Beispiel möge diese Umrechnung erläutern. Sei R der Radius der Erde, Ω ihre Rotationsgeschwindigkeit, K ihr Trägheitsmoment. In einem Punkt unter dem Breitengrad φ, dessen Abstand von der Erdaxe also $r = R.\cos\varphi$ ist, werde ein Geschoss von der Masse m aus einer Kanone geschleudert, und zwar genau horizontal von Osten nach Westen mit der

Geschwindigkeit $c = r.\Omega$, relativ zur Erdoberfläche. Es soll nun der Energiestrom berechnet werden, der von dem explodirenden Pulver aus in das Geschoss geht, indem man, wie es im Allgemeinen bei physikalischen Untersuchungen geschieht, die Erdoberfläche als ruhend ansieht. Selbstverständlich muss man finden, dass der Strom f_1 dem Geschoss schliesslich im Ganzen die Energie $T = \frac{m.c^2}{2}$ zugeführt hat, abgesehen von den durch die Reibung und die Rotation des Geschosses verbrauchten Energiemengen, die uns hier nicht weiter interessiren. Transformiren wir nun in ein anderes Coordinatensystem, das die Erde als mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die ruhende Erdaxe rotirend beschreibt, so bewegt sich das vorhin gebrauchte Bezugscoordinatensystem in diesem mit der Geschwindigkeit c, West—Ost. Wir nehmen an, dass nur so kurze Zeiträume in Betracht kommen, dass man diese Bewegung als Parallelverschiebung ansehen kann. In dem neuen System hat das Geschoss zuerst die Geschwindigkeit c, West—Ost, nach dem Abfeuern des Schusses ist es in Ruhe, es hat die Energie $T = \frac{m.c^2}{2}$ abgegeben. Dafür hat nach dem Flächensatz die Erde einen sehr kleinen Zuwachs $d\Omega$ ihrer Rotationsgeschwindigkeit erhalten, nach der Beziehung:

$$mr.c = K.d\Omega,$$

sie hat also die kinetische Energie gewonnen:

$$K.\Omega.d\Omega = m.c^2 = 2T.$$

Der transformirte Energiestrom (f_1) führt also schliesslich sowohl die vom explodirenden Pulver abgegebene Energiemenge T, als auch die ursprüngliche Energie des Geschosses T beide durch das Postament der Kanone in die Erde.

Der Umrechnungsstrom $f_r = (f_1) - f_1$ ergibt also die Verlegung der Energiemenge $2T$ aus dem Geschoss in die Erde.

21. Noch in anderer Hinsicht können die mechanischen Energieströme relativ sein, wenn man nämlich die Druckkräfte nicht von ihrem absoluten Nullpunkt aus rechnet, sondern von einem willkürlichen, wenn man z. B. in einem Gase den Druck

einer Atmosphäre als Nullpunkt wählt und den Druck im Vacuum gleich $-760\,mm$ Quecksilber setzt. Durch diese Wahl des Nullpunktes wird die Vertheilung einer Form der inneren Energie, der Deformationsenergie, beeinflusst. Während z. B. nach der absoluten Rechnung beim Evacuiren eines Gefässes die dazu verbrauchte Energie der Atmosphäre zugeführt wird, die eine unendlich kleine Verdichtung erfährt, geht sie nach der relativen Rechnung in das Vacuum. Wenn die Vertheilung der anderen Energieformen durch diese Nullpunktsverlegung nicht beeinflusst wird, so ist es sehr bequem, sie anzuwenden, beispielsweise in der Theorie der Schallwellen. Auch hier müssen wir dem so berechneten Energiestrom, wenn wir den Nullpunkt des Druckes verlegen, einen Umrechnungsstrom f_r superponiren.

Thermischer Leitungsstrom.

22. Über den mechanischen Leitungsstrom superponirt sich in erster Linie der Wärmeleitungsstrom f_2, dessen Componenten sich aus der Vertheilung der Temperatur ϑ und den Coëfficienten der Wärmeleitungsfähigkeit $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{33}$, die natürlich von ϑ abhängen können, folgendermassen berechnen:[1]

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= -\left(a_{11}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + a_{12}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + a_{13}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) \\ v_2 &= -\left(a_{21}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + a_{22}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + a_{23}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) \\ w_2 &= -\left(a_{31}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + a_{32}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + a_{33}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots 17$$

1. Diese Grössen u_2, v_2, w_2 genügen der Bedingung, dass, wenn keine anderen Energieänderungen als durch Wärmeleitung stattfinden:

$$-\frac{de_2}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}$$

[1] Kirchhoff, Wärme. Vorlesung 1, S. 9 und 10.

2. Sie hängen nur von den Eigenschaftsgrössen der Materie und ihren Differentialquotienten (Temperaturgefälle) in der Materie ab.

3. Sie stellen nur realisirbare Energieübergänge dar, denn man kann die Wärme in jedem Theil einer Schnittfläche unabhängig von allen anderen Theilen zu- und ableiten.

23. Der thermische Leitungsstrom hat eine charakteristische Eigenthümlichkeit, die ihn vor allen anderen Energieströmen auszeichnet: er kann niemals cyclisch sein.

Angenommen nämlich, der Strom verliefe cyclisch:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0,$$

so müssten nach bekannten Sätzen die Stromlinien geschlossene Curven bilden, man könnte also einen ringförmigen Körper V abgrenzen, dessen Oberfläche S aus einer continuirlichen Folge von Stromlinien bestünde. Untersuchen wir die Vorgänge in einem derartigen Körper. Wir haben die folgenden zwei Bedingungen:

1. f_n, der aus der Oberfläche S austretende Energiestrom, ist in allen Punkten von S Null.

2. In allen Punkten von V ist

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0.$$

Da nun:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vartheta . u_2) = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot u_2 + \vartheta \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\vartheta . v_2) = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \cdot v_2 + \vartheta \cdot \frac{\partial v_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\vartheta . w_2) = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cdot w_2 + \vartheta \cdot \frac{\partial w_2}{\partial z},$$

so ist nach dem Green'schen Satz:

$$\int_S \vartheta . f_n . dS = \int_V \left(u_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \cdot d\tau +$$

$$+ \int_V \vartheta \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) d\tau.$$

also, wenn wir die zwei gemachten Bedingungen einführen:

$$\int_V \left(u_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) d\tau = 0.$$

Nun ist aber eine wesentliche Eigenschaft des Wärmestromes, dass er durch ein Element einer isothermen Fläche nur in der Richtung von der wärmeren Seite nach der kälteren Seite fliessen kann. Die Grösse

$$u_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$$

ist also eine wesentlich negative Grösse,[1] die nur an den Stellen Null wird, wo keine Wärmeleitung stattfindet. Daraus folgt, damit das Integral über dieser Grösse Null sein kann, dass in jedem Punkte des betrachteten Körpers der Wärmestrom Null herrschen muss. Es kann also keinen cyclischen Wärmestrom geben.

Man nennt wegen der Unmöglichkeit cyclischer Ströme den Wärmeleitungsstrom einen nicht-umkehrbaren Vorgang.

Poynting's Theorem.

24. Wir setzen die Maxwell'sche Theorie[2] voraus, also vor Allem auch den Satz, dass, wenn:

L, M, N die Componenten der magnetischen Kraft,
$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ die Componenten der magnetischen Induction,
X, Y, Z die Componenten der elektrischen Kraft,
$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Componenten der elektrischen Verschiebung,
a, b, c die Componenten des elektrischen Leitungsstromes,

der zeitliche Zuwachs der Energie in irgend einem Raumelement $d\tau$, der rein durch die elektromagnetischen Vorgänge hervorgerufen wird, unter allen Umständen den Werth hat:

---

[1] Kirchhoff, Wärme. 4. Vorlesung, S. 48.
[2] Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie, S. 2 und 3.

$$\frac{de_3}{dt}\cdot d\tau = \left\{\frac{1}{4\pi}\cdot\left(L\cdot\frac{d\mathfrak{L}}{dt} + M\cdot\frac{d\mathfrak{M}}{dt} + N\cdot\frac{d\mathfrak{N}}{dt}\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\cdot\left(X\cdot\frac{d\mathfrak{X}}{dt} + Y\cdot\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} + Z\cdot\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}\right) +$$
$$\left. + (X.a + Y.b + Z.c)\right\}\cdot d\tau.$$

In welcher Form diese Energie aber auftritt, lasse ich, wie bei den anderen Formen der Energieübertragung, gänzlich unbeachtet.

Aus den Maxwell'schen Gleichungen:[1]

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} + 4\pi a = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \qquad \frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$
$$\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} + 4\pi b = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$
$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} + 4\pi c = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \qquad \frac{d\mathfrak{N}}{dt} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

die für jeden elektromagnetischen Vorgang in ruhenden Körpern erfüllt sein müssen, folgt durch Multiplication mit X, Y, Z, L, M, N und Addition:

$$4\pi\cdot\frac{de_3}{dt} = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}(YN - ZM) + \frac{\partial}{\partial y}(Z.L - XN) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}(X.M - YL)\right\}.$$

Setzen wir nun:

$$\left.\begin{aligned} u_3 &= \frac{1}{4\pi}\cdot(YN - ZM) \\ v_3 &= \frac{1}{4\pi}\cdot(ZL - XN) \\ w_3 &= \frac{1}{4\pi}\cdot(XM - YL) \end{aligned}\right\} \quad \ldots 18$$

[1] Alle Grössen sind in demselben **Masssystem, elektrostatisch** oder **elektromagnetisch gemessen.**

so können wir behaupten:

1. Diese Grössen erfüllen die Bedingung

$$-\frac{de_3}{dt} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z}.$$

2. Sie enthalten die Coordinaten und die Zeit nicht explicite, sondern sind reine Functionen der Zustandsgrössen.

Die dritte Frage, ob sie nur realisirbare Energieübergänge darstellen, lasse ich fürs erste offen.

Poynting's Satz.

Der durch die Gleichungen 18) definirte Vector stellt alle Energieänderungen in einem elektromagnetischen Felde richtig dar. Er ist, abgesehen von dem Zahlenfactor $\frac{1}{4\pi}$, gleich dem Product aus der elektrischen Kraft P, der magnetischen Kraft H und dem Sinus des von beiden gebildeten Winkels φ:

$$f_3 = \frac{1}{4\pi}.H.P \sin \varphi.$$

Seine Richtung steht senkrecht auf P sowohl, als auch auf H, und zwar in dem Sinne, in welchem man durch die von P und H gebildete Ebene sehen muss, um den concaven Winkel von P nach H als positiv (Uhrzeigerdrehung) wahrzunehmen.

25. Wir haben uns bei der Herleitung des Poynting'schen Satzes zunächst auf ruhende Körper beschränkt. Er gilt aber ebenso für bewegte Körper. Denn in diesen entstehen die elektromagnetischen Erscheinungen durch Superposition der folgenden beiden Vorgänge.

Erstens führt die bewegte Materie einen Theil der in ihr herrschenden Zustände convectiv mit sich[1] (geradeso wie ihre Temperatur, elastische Spannungen etc.), während jedenfalls

[1] Vergl. Hertz, Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. Wied. Ann., *41*, S. 369, 1890. Ausbreitung der elektrischen Kraft, S. 256. Hertz macht unnöthigerweise die specielle Annahme, dass die Materie den ganzen elektromagnetischen Zustand mit sich führt, eine Annahme, die sicher nicht richtig ist, wie die Versuche über Lichtgeschwindigkeit in bewegten Medien beweisen.

ein Theil seine Stelle unverändert beibehält. Hiedurch entstehen im Allgemeinen Deformationen des Feldes und Änderungen der magnetischen und elektrischen Kräfte in Leitern und Dielektrica.

Zweitens treten in Folge dieser Kräfteänderungen Vorgänge elektrischer Leitung, dielektrischer Polarisation und Magnetisirung in den verschobenen materiellen Theilchen ein, die ihrerseits ein Feld erzeugen, das sich über das erste superponirt. Für das superponirte Feld gelten die Maxwell'schen Gleichungen genau so, wie bei ruhenden Körpern.

Der erste Theil dieses Vorganges, die mechanische Deformation des Feldes, bewirkt nun auf zweierlei Weise Änderungen in der Energie des Feldes:

1. Dadurch, dass die bewegte Materie einen Theil der Energie mit sich führt (Convectionsstrom);

2. dadurch, dass das Feld deformirt wird, d. h. dass sich die Kraftröhren verkürzen oder verlängern, verbreitern oder verengen. Um die hiemit verbundenen Energieänderungen hervorzubringen, muss durch positive oder negative Arbeit den bewegten materiellen Theilchen Energie zugeführt oder abgenommen werden. Es muss also ein mechanischer Leitungsstrom vorhanden sein, dessen Stromlinien in den bewegten Theilchen ihr Ende oder ihren Anfang haben.

Der zweite Theil des Vorganges, die elektromagnetische Änderung des Feldes, ruft Änderungen der Energie hervor, die, weil die Maxwell'schen Gleichungen gelten, vollständig und richtig durch den Poynting'schen Energiestrom beschrieben werden.

Es ist damit bewiesen, dass das Poynting'sche Theorem auch für bewegte Körper unbeschränkt Giltigkeit behält.

Dies möge zunächst an einigen Beispielen aus der Elektrostatik deutlich gemacht werden.

Bewegung elektrisirter Körper.

26. Es seien A und B (Fig. 3) die Platten eines ebenen Condensators, die so gross sind, dass man die Randwirkungen vernachlässigen und das elektrische Feld als homogen ansehen

kann. A sei festgehalten und mit der Erde leitend verbunden, B sei beweglich, vollkommen isolirt und mit einer bestimmten Elektricitätsmenge geladen. Die Intensität P des elektrischen Feldes hängt nicht vom Abstande der Platten ab, sie bleibt bei den Verschiebungen von B ungeändert.

Wird nun B mit der Geschwindigkeit ω gegen A vorbewegt, so schieben sich die elektrischen Kraftlinien in B hinein. Da aber die elektrische Ladung (Kraftlinienendungen) an der Oberfläche eines Conductors ein Zustand der materiellen Molekeln ist, welcher mit der Materie festverbunden fortschreitet, so müssen die Kraftlinien im Leiter gleichzeitig eine derartige Schrumpfung erfahren, dass ihre Enden immer in der Oberflächenschicht der Platte B bleiben.

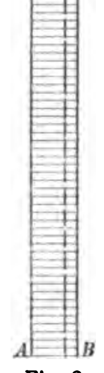


Fig. 3.

Da dieser Vorgang nicht mit dem Auftreten magnetischer Kräfte verbunden ist und da an allen anderen Stellen des Feldes der Zustand fortwährend derselbe bleibt, wie wenn B in Ruhe wäre, so superponirt sich kein neues elektromagnetisches Feld über das vorhandene.

In Folge der Verkürzung der Kraftlinien tritt fortwährend der Energieübergang $\frac{dE}{dt} = \frac{P^2}{8\pi} . \omega$ pro Flächeneinheit aus dem Felde in die Platte B, wird durch diese mechanisch weiter geleitet und kann auf ihrer Aussenseite abgenommen werden.

Sonst treten im Felde keine Energieverschiebungen ein, der Poynting'sche Strom ist Null.

Ganz ebenso lassen sich die Vorgänge beschreiben, die bei einem Wegziehen der Platte B von A eintreten. Nur dass dann die in B haftenden Kraftlinienreste eine Dehnung erfahren, die mit einer Energieabgabe an das Feld verbunden ist.

Die innere Oberfläche der Platte B ist ein Gebiet von Quellpunkten oder von Sinkstellen für den mechanischen Energiestrom.

27. Verschiebt man eine dünne, ebene Platte, die beiderseits mit der Flächendichte σ belegt ist, mit der Geschwindigkeit ω, deren Richtung den Begrenzungsebenen parallel ist, so tritt eine Verkürzung oder Verlängerung der Kraftlinien an den

beiden Begrenzungsebenen nicht ein. Dagegen würden die in der Oberflächenschicht steckenden Kraftlinienendchen durch den mechanischen Vorgang schief gezogen werden, wenn sie sich nicht durch einen immer gleichzeitig erfolgenden Leitungsvorgang wieder senkrecht aufrichteten. Die Flächendichte dieses in der Oberflächenschicht verlaufenden elektrischen Leitungsstromes ist natürlich $\sigma . \omega$, er ist mit einer magnetischen Kraft verbunden, die innerhalb der Platte Null ist, unmittelbar über ihr aber den Werth $H = 4\pi\sigma . \omega$ hat, deren Richtung senkrecht auf ω und parallel zur Platte ist. Man sieht dies unmittelbar ein, wenn man das Linienintegral von H längs einer geschlossenen Curve bildet, durch die der Strom i tritt und berücksichtigt, dass es den Werth $4\pi i$ haben muss. Ausserdem haben wir den Werth der elektrischen Kraft in unmittelbarer Nachbarschaft der Platte: $P = 4\pi\sigma$, ihre Richtung ist senkrecht zur Platte. Da hier P und H beide im elektrostatischen Maass angegeben sind, so ergibt sich die Dichte des Poynting'schen Stromes unmittelbar an der Platte:

$$f_8 = \frac{1}{4\pi} . H . P = \frac{1}{4\pi} . P^2 \omega .$$

Seine Richtung fällt mit der von ω zusammen.

Die Hälfte dieses Stromes:

$$\frac{1}{2} f_8 = \frac{P^2}{8\pi} . \omega$$

stellt den Energieübergang dar, der mit dem Vorrücken des elektrischen Feldes mit der Platte verbunden ist. Die andere Hälfte bringt die Energiezufuhr zu dem vor dem vorderen Rande der Platte befindlichen Theil des Feldes zum Ausdruck, wo durch das Vorrücken der Platte fortwährend Energie absorbirt wird.

Der mechanische Energiestrom hat nur an den Rändern der Platte Quell- und Sinkstellen, an denen die Energie durch den Poynting'schen Strom zu- und abgeführt wird. Ausserdem ist das Vorrücken des ganzen Feldes mit einem Poynting'schen Energiestrome verbunden.

28. Ein kugelförmiger Körper K, der elektrisch geladen und isolirt ist, werde mit der Geschwindigkeit ω von einer zur Erde abgeleiteten Platte A entfernt. Es wird erstens auf der Vorderseite der Kugel eine Schrumpfung, auf der Hinterseite eine Dehnung der Kraftlinien eintreten. Zweitens wird auf der Oberfläche der Kugel ein elektrischer Leitungsstrom vorhanden sein, der dafür sorgt, dass die Kraftlinien immer senkrecht auf der Oberfläche stehen (wir nehmen also an, wie es immer in der Elektrostatik geschieht, dass die Kugel ein vollkommener Leiter ist).

Es entsteht nun ein Poynting'scher Strom, der durch nebenstehende Skizze (Fig. 4) veranschaulicht werden soll. Die Stromlinien verlaufen immer senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien, also auf der Oberfläche der Kugel tangential. Sie führen von der Hinterseite der Kugel, wo fortwährend Energie austritt, nach der Vorderseite hin und geben hier den grössten Theil der Energie wieder an die Kugel zurück. Ein Theil jedoch gelangt ins Feld, da die Stromlinien ein wenig divergiren. Diesen Theil wollen wir nun im Folgenden berechnen.

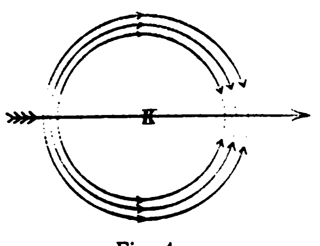


Fig. 4.

Es bedeuten:

ρ Abstand eines Punktes von der Symmetrieaxe;
z Abstand eines Punktes von der Ebene A;
R, Z die Componenten der elektrischen Kraft nach den Richtungen ρ und z;
H die magnetische Kraft, deren Kraftlinien Kreise um die Symmetrieaxe bilden; ihre Richtung ist positiv, wenn die Kraftlinien, in der positiven Z-Richtung gesehen, im Sinne der Uhrzeigerdrehung verlaufen;
t die Zeit;
V die Lichtgeschwindigkeit.

Alle Kräfte seien in demselben Maass-System (elektrostatisch) gemessen.

Man kann nun das elektromagnetische Feld der Kugel leicht berechnen mit Hilfe einer Function $f(\rho, z, t)$, die der folgenden Differentialgleichung genügt:[1]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad \ldots a)$$

Es ist dann:

$$H = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}, \quad Z = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad R = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}. \quad \ldots b)$$

Ich führe noch folgende Bezeichnungen ein:

$$s = s_0 + \omega t$$

sei der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene A;

$$1 - \frac{\omega^2}{V^2} = k^2;$$

$$\sqrt{k^2 \rho^2 + (s-z)^2} = r_1; \qquad \sqrt{k^2 \rho^2 + (s+z)^2} = r_2;$$

$$\frac{s-z}{r_1} = \mu_1; \qquad \frac{s+z}{r_2} = \mu_2.$$

Ferner beschränke ich mich hier auf den Specialfall,[2] wo der Radius der Kugel gegen s verschwindend klein ist, d. h. auf die Untersuchung der Bewegung eines sogenannten elektrischen Punktes.[3] Diesem Fall entspricht die folgende Lösung der Differentialgleichung *a)*:

$$f = \frac{\varepsilon}{k^2} (\mu_1 + \mu_2), \qquad \varepsilon \text{ die Ladung des Punktes;}$$

$$R = \varepsilon . \rho . \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right); \quad Z = -\varepsilon . \left(\frac{s-z}{r_1^3} + \frac{s+z}{r_2^3} \right); \quad \ldots c)$$

$$H = \omega . \varepsilon . \rho \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right).$$

[1] Hertz, Wied. Ann. *36*, S. 1, 1888; abgedr. Ausbreitung der elektr. K. S. 150.

[2] Die allgemeine Lösung für eine endliche Kugel findet sich im Anhange.

[3] Vergl. J. J. Thomson, Recent Researches. p. 16.

Da es sich um ein elektrostatisches Problem handelt, so dürfen wir uns eine weitere Vereinfachung erlauben, da dann ω gegen V verschwindend klein ist, also $k^2 = 1$.

Da nun:

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (s-z)^2}, \qquad r_2 = \sqrt{\rho^2 + (s+z)^2},$$

so hat die elektrische Kraft überall denselben Werth, den sie haben würde, wenn der elektrische Punkt an der Stelle, durch die er gerade geht, in Ruhe wäre.

Das magnetische Feld ist so schwach, dass man es bei der Berechnung der Feldenergie nicht zu berücksichtigen braucht.

Die elektrische Kraft in der Nähe des elektrischen Punktes hat den Werth:

$$P = \frac{\varepsilon}{r_1^2} + \frac{\varepsilon}{r_2^2} \cdot (\mu_1 + \Delta),$$

wo Δ eine sehr kleine Grösse von der Ordnung $\frac{r_1}{r_2}$ ist.

Setzen wir ferner:

$$2s = S,$$

so ist:

$$r_2 = S \cdot (1 + \Delta'),$$

wo Δ' ebenfalls von der Grössenordnung $\frac{r_1}{r_2}$.

In der Nähe des elektrischen Punktes ist also mit genügender Annäherung zu setzen:

$$P = \frac{\varepsilon}{r_1^2} + \frac{\varepsilon}{S^2} \cdot \mu_1.$$

Die Energie in dem Raumelement $d\tau$ ist:

$$\frac{1}{8\pi} \cdot P^2 \cdot d\tau = \left(\frac{\varepsilon^2}{r_1^4} + \frac{2 \cdot \varepsilon^2 \cdot \mu_1}{r_1^2 \cdot r_2^2}\right) \cdot \frac{d\tau}{8\pi}.$$

Es seien nun um den elektrischen Punkt zwei sehr kleine concentrische Kugeln mit den Radien a und b geschlagen, so ist die Energie in der von ihnen gebildeten Kugelschale, wenn wir Polarcoordinaten anwenden, folgendermassen zu berechnen:

Radius: r_1; Breite: $\vartheta (\mu_1 = \cos\vartheta)$; Länge: φ

$$E = \frac{\varepsilon^2}{8\pi} \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{2 \cdot \cos\vartheta}{S^2}\right) . \sin\vartheta \,.\, dr_1 \,.\, d\vartheta \,.\, d\varphi$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Dieser Werth hängt nicht von S ab. Es ist nun leicht zu sehen, dass innerhalb einer Kugel, die um den elektrischen Punkt mit einem sehr kleinen Radius geschlagen ist, und die man sich mit dem Punkt fortbewegt denkt, die Energie ungeändert bleibt.

Anders ist es aber, wenn man die Kugel ruhend lässt. Alsdann vermehrt sich bei der Bewegung des elektrischen Punktes in Folge der Kraftliniendehnungen ihre Energie. Um diese Vermehrung zu berechnen, suche ich die Energie in dem Zwischenraume zwischen den beiden Kugeln mit den Radien a und b, wenn die grössere Kugel (rad. b) an ihrem Orte geblieben ist, die kleinere dagegen (rad. a) sich mit dem elektrischen Punkte während des Zeitelementes dt weiter bewegt hat. Dies ist dann schon ohneweiters die Vermehrung der Energie in dem ganzen von der äusseren Kugel (rad. b) umschlossenen Raum.

1. Berechnung der Energievermehrung in dem Zwischenraume zwischen den beiden Kugelflächen bei dem mechanischen Deformationsvorgange.

Während der unendlich kleinen Zeit dt rückt der Mittelpunkt der kleineren Kugel um die Strecke $CC' = \omega dt$ vor (siehe

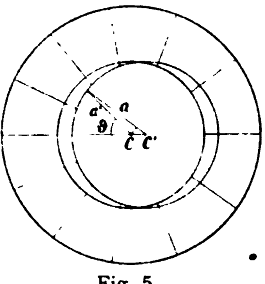


Fig. 5.

nebenstehende Skizze Fig. 5). Denkt man sich das Feld dabei ganz ungeändert, so ergibt sich nach dieser Bewegung die Energie des Zwischenraumes:

$$E' = \frac{\varepsilon^2}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{a'}^{b}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{2.\cos\vartheta}{S^2}\right).\sin\vartheta.dr_1.d\vartheta.d\varphi,$$

wo

$$a' = a - \omega.dt.\cos\vartheta.$$

Die Integration über φ und r_1 gibt zunächst:

$$E' = \frac{\varepsilon^2}{4}.\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{a-\omega.dt\cos\vartheta} - \frac{1}{b} + \right.$$

$$\left. + \frac{2.\cos\vartheta}{S^2}\cdot(b-a+\omega.dt.\cos\vartheta)\right\}\sin\vartheta d\vartheta,$$

oder mit Vernachlässigung aller höheren Potenzen von $\omega.dt$:

$$E' = \frac{\varepsilon^2}{4}\cdot\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{2.(b-a)}{S^2}.\cos\vartheta\right]\sin\vartheta d\vartheta +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{4}.\omega dt.\int_0^{\pi}\left[\frac{\cos\vartheta}{a^2} + \frac{2\cos^2\vartheta}{S^2}\right]\sin\vartheta d\vartheta,$$

$$E' = \frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{\varepsilon^2}{3}\cdot\frac{\omega dt}{S^2}. \qquad \ldots e)$$

Der Zuwachs an Energie beträgt also:

$$dE = \frac{\varepsilon^2}{3}\,\frac{\omega.dt}{S^2}.$$

Während des mechanischen Theiles des Vorganges tritt durch die mit dem elektrischen Punkte bewegte Kugelfläche (rad. a) der Energieübergang:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_1 = \frac{1}{3}\,\frac{\varepsilon^2.\omega}{S^2}. \qquad \ldots f)$$

2. Berechnung des Energieüberganges durch den Poynting'schen Strom.

Die beiden Kugeloberflächen stehen keineswegs senkrecht zu den Kraftlinien (sie sind keine Niveauflächen). Die tangentiale Componente der Kraft ist z. B. auf der kleineren:

$$T = \left(R \cdot \frac{s-z}{a} + Z \cdot \frac{\rho}{a}\right) = -\frac{\varepsilon}{S^2} \cdot \frac{\rho}{a} = -\frac{\varepsilon}{S^2} \cdot \sin\vartheta,$$

wo gleich die Glieder der Ordnung $\frac{a}{r_2}$ gegen 1 vernachlässigt sind. Mit der gleichen Vernachlässigung ergibt sich für die magnetische Kraft:

$$H = \omega . \varepsilon \cdot \frac{\rho}{a^3} = \frac{\omega . \varepsilon}{a^2} \cdot \sin\vartheta.$$

Durch die Kugel tritt nach aussen der Energieübergang.

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_2 = -\frac{1}{4\pi} \cdot H . T . dS = \frac{\omega . \varepsilon^2}{4\pi . S^2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta . d\vartheta . d\varphi$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_2 = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^2 . \omega}{S^2}.$$

Bei dem elektromagnetischen Vorgang tritt durch die kleinere Kugelfläche der Energieübergang:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon^2 . \omega}{S^2}. \qquad \ldots 8)$$

Derselbe Energieübergang geht aber, wie man unmittelbar erkennt, auch durch die äussere Kugelfläche, die Energie des Zwischenraumes erfährt also keine weitere Vermehrung.

Der Raum, der von einer ruhenden, mit unendlich kleinem Radius *(b)* um den elektrischen Punkt beschriebenen Kugelfläche eingeschlossen wird, erfährt einen zeitlichen Energiezuwachs:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon^2 . \omega}{S^2}.$$

Durch seine Oberfläche tritt der Energieübergang:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon^2 . \omega}{S^2}.$$

An dem elektrischen Punkte wird also in Folge der Dehnung der Kraftlinien dem Felde im Ganzen die Leistung zugeführt:

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dE}{dt}\right)_2 = \frac{\varepsilon^2}{S^2} \cdot \omega.$$

Der Punkt wird mit der Kraft $\frac{\varepsilon^2}{S^2}$ nach der abgeleiteten Wand hingezogen.

Andere Theorien.

29. Der Poynting'sche Strom f_3 schildert erstens die Energieänderungen in einem elektromagnetischen Felde unter allen Umständen richtig und vollständig. Zweitens ist er aus den Zustandsgrössen allein zu berechnen. Bisher ist keine andere Theorie der elektromagnetischen Energieübertragung aufgestellt, die auch dieser zweiten Forderung genügte.

So haben Föppl[1] und Andere für den stationären elektrischen Strom eine Theorie vorgeschlagen, nach welcher der ganze Energiestrom im Leiter, und zwar parallel zu den Linien des elektrischen Stromes verlaufen soll, ähnlich dem Energiestrom in einer hydraulischen Kraftübertragung. Ist J die Stärke des elektrischen Stromes, U das Potential an einer bestimmten Stelle, so soll der Energieübergang durch den betreffenden Querschnitt sein:

$$\frac{dE}{dt} = J.U.$$

J ist ohne Zweifel eine Grösse, die einen bestimmten Zustand des Stromleiters charakterisirt. U hingegen ist sicher nicht unter die Zustandsgrössen zu rechnen, allein schon aus dem Grunde, weil überhaupt nur in constanten magnetischen Feldern von einem elektrischen Potential gesprochen werden kann. Ausführlicher hat Heaviside[2] diesen Gegenstand erörtert bei Besprechung der Arbeit von Macauley,[3] der dieselbe Theorie aufgestellt hat.

---

[1] Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie, S. 306.

[2] Electrician, *29*, 29. Juli, 1892, abgedruckt in Electromagnet. Theory, p. 248.

[3] Phil. Trans. London, *183*, p. 685, 1892.

30. Macauley hat der Theorie noch eine weitere Änderung hinzugefügt. Er zerlegt (dem Maxwell'schen Treatise folgend) die elektrische Kraft in zwei Summanden, in eine, die ein Potential hat (elektrostatische Kraft), und in eine, die keines hat (elektrodynamische Kraft). Zur Berechnung des Energiestromes verwendet er nur den zweiten Summanden. Indessen darf man auch diese elektrodynamische Kraft nicht als Zustandsgrösse bezeichnen. Man denke nur an das in Nr. **28** durchgeführte Beispiel. Ist in Gleichung *c)* k^2 von 1 verschieden, so hat die elektrische Kraft sicher kein Potential, ist $k^2 = 1$, so hat sie eines. Ist nun im ersten Falle die Kraft Repräsentant eines ganz anderen physikalischen Zustandes wie im zweiten? Oder lässt sich ein elektrostatischer und ein elektrodynamischer Theil an ihr physikalisch unterscheiden? Die Trennung dürfte wohl in jedem Falle willkürlich sein.

Der Macauley'sche Energiestrom ist, soweit er sich vom Poynting'schen unterscheidet, willkürlich fingirt.

Cyclischer Energiestrom.

31. Ich komme nun zur Untersuchung der dritten Frage. Hertz[1] hat gegen die Poynting'sche Theorie den schwerwiegenden Einwand gemacht, dass sie in Fällen, wo gar keine Energieübertragung stattfindet, von Null verschiedene cyclische Energieströme liefert. Ein Beispiel möge dies erläutern.

In der Z-Axe liege ein unendlich dünner Magnetstab von der Länge l und der Polstärke m, der positive Pol sei dem Coordinatenanfang zugekehrt und im Abstande p von ihm. Im Coordinatenanfang sei ein elektrisirtes Partikelchen mit der positiven Ladung ε angebracht. ε und m seien beide in demselben Maasssystem (etwa elektrostatisch) gemessen.

Benutzen wir nun wieder das Coordinatensystem der z und ρ (siehe Nr. **28**), so haben wir in einem Punkte (z, ρ) folgende Kraftcomponenten:

[1] Wied. Ann., *40*, S. 577, 1890, abgedr. in Ausbreitung der elektr. Kraft, S. 234.

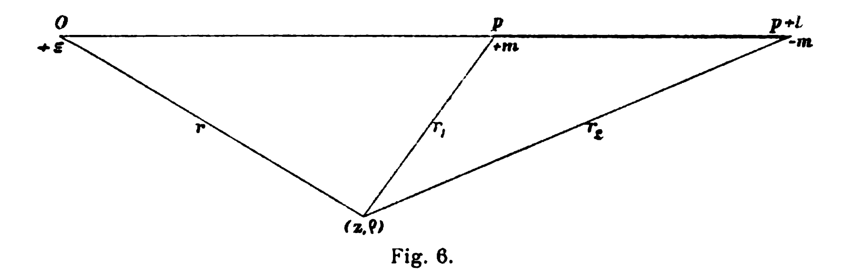


Fig. 6.

Componenten der elektrischen Kraft P: Z, R:

$$Z = \varepsilon . \frac{z}{r^3}, \quad R = \varepsilon . \frac{\rho}{r^3}, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \qquad \ldots a_1)$$

Componenten der magnetischen Kraft H: N, Q:

$$N = m . \left(\frac{z-p}{r_1^3} - \frac{z-(p+l)}{r_2^3} \right), \quad Q = m . \rho . \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right),$$

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z-p)^2}, \quad r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z-p-l)^2}. \qquad \ldots a_2)$$

Es kreist also um die z-Axe im positiven Sinne der cyclische Energiestrom:

$$f_3 = \frac{1}{4\pi} . (QZ - N . R) = \frac{\varepsilon . m}{4\pi} \cdot \frac{\rho}{r^3} \cdot \left(\frac{p}{r_1^3} - \frac{p+l}{r_2^3} \right). \qquad \ldots b)$$

32. Nun nehme ich den Magnetstab fort und lege dafür durch die z-Axe eine unendlich ausgedehnte Ebene S, die auf beiden Seiten eine elektrische Belegung hat, auf der einen eine positiv elektrische von der gleichförmigen Flächendichte σ, auf der anderen eine ebenso grosse negativ elektrische $-\sigma$. Diese Belegungen ändern also das elektrische Feld des Punktes ε nicht. Nun sollen sie mit einer an jeder Stelle constant bleibenden Geschwindigkeit bewegt werden, deren Componenten für die positive Belegung seien, wenn man die Ebene S als x-z-Ebene wählt:

$$\alpha = -\left(\frac{z-p}{r_1^3} - \frac{z-(p+l)}{r_2^3} \right); \quad \gamma = + \left(\frac{x}{r_1^3} - \frac{x}{r_2^3} \right) \qquad \ldots c)$$

für die negative Belegung dagegen $-\alpha$, $-\gamma$.

Da nun: $\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$, so ist die Strömung der elektrischen Partikelchen cyclisch, die Dichtigkeit σ und $-\sigma$ bleibt überall ungeändert.

Wie der Rowland'sche Versuch bewiesen hat, ist die Bewegung elektrischer Partikelchen mit ebensolchen magnetischen Kräften verbunden, wie ein elektrischer Strom. Die Componenten der Flächendichte unseres Stromes sind:

$$a = 2\sigma.\alpha, \quad c = 2\sigma.\gamma. \qquad \ldots d)$$

Die magnetische Kraft dieses Stromes lässt sich leicht berechnen, wenn man bedenkt, dass:

1. das Linienintegral der Kraft um eine geschlossene Curve, die die Ebene des Stromes nicht schneidet, Null sein muss;

2. das Linienintegral um eine die Ebene schneidende Curve den Werth $4\pi J$ hat, wenn J der durch die Curve tretende elektrische Strom ist.

Bilden wir das Linienintegral längs eines schmalen, unendlich kleinen Rechtecks (Fig. 7), dessen längere Seite parallel der x-Axe ist und das die Ebene S in dem Linienelement dx schneidet, so ergibt sich, wenn L_1 und L_2 die X-Componenten der magnetischen Kraft zu beiden Seiten der Ebene sind:

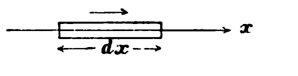


Fig. 7.

$$(L_1 - L_2)dx = 4\pi c.dx,$$

also:

$$L_1 = +2\pi c, \quad L_2 = -2\pi c. \qquad \ldots e_1)$$

Ebenso, wenn N_1 und N_2 die z-Componenten zu beiden Seiten der Ebene:

$$N_1 = -2\pi a, \quad N_2 = +2\pi a. \qquad \ldots e_2)$$

Gehen wir wieder zu dem Coordinatensystem der z, ρ über, so ergeben sich in dem einen der beiden Gebiete, in welches die Ebene S den Raum theilt, sagen wir dem vorderen:

$$Q_1 = 4\pi\sigma.\left(\frac{\rho}{r_1^3} - \frac{\rho}{r_2^3}\right); \quad N_1 = 4\pi\sigma.\left(\frac{z-p}{r_1^3} - \frac{z-(p+l)}{r_2^3}\right),$$

in dem anderen, dem hinteren Gebiet:

$$Q_2 = -4\pi\sigma.\left(\frac{p}{r_1^3} - \frac{p}{r_2^3}\right); \quad N_2 = -\pi\sigma\left(\frac{z-p}{r_1^3} - \frac{z-(p+l)}{r_2^3}\right).$$

Nun lege ich an dieselbe Stelle, wo sich früher der Magnetstab befand, einen anderen von derselben Länge l, aber von der halben Polstärke $\frac{m}{2}$. Ferner setze ich fest, dass die Flächendichte der elektrischen Belegung $\sigma = \frac{m}{8\pi}$ sei. Dann ergibt sich in dem vorderen Raumgebiete die magnetische Kraft:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q}{2} + Q_1 &= m\left(\frac{p}{r_1^3} - \frac{p}{r_2^3}\right) = Q \\ \frac{N}{2} + N_1 &= m\left(\frac{z-p}{r_1^3} - \frac{z-(p+l)}{r_2^3}\right) = N \end{aligned}\right\} \quad \ldots g)$$

Im hinteren Raumgebiet dagegen:

$$\frac{Q}{2} + Q_2 = 0, \quad \frac{N}{2} + N_2 = 0. \quad \ldots h)$$

Es muss also der Energiestrom im hinteren Raumgebiete Null sein, im vorderen dagegen, wo ganz dieselben Verhältnisse herrschen, wie in dem vorher beschriebenen Falle [siehe Gleichungen *a)*], muss er auch dieselbe Intensität f_3 [Gleichung *b)*] haben.

Der Energiestrom verläuft jetzt in Halbkreisen, er ist nicht mehr cyclisch.

In der That beschreibt er die Verhältnisse richtig. Bei der Bewegung des positiven Elektricitätstheilchens $\sigma.dS$ an einer Stelle $z = z_1$, $x = x_1$ mit der Geschwindigkeit (α, γ) im Felde des elektrischen Partikelchens ε gewinnt man die Leistung:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_1 = \sigma.dS.(Z\alpha + R.\gamma) = \frac{\sigma.\varepsilon.x_1}{r^3}\cdot\left(\frac{p}{r_1^3} - \frac{p+l}{r_2^3}\right).dS.$$

Genau dieselbe Leistung gewinnt man auch durch die Bewegung des Theilchens $-\sigma.dS$ an derselben Stelle. Im Ganzen also, wenn man berücksichtigt, dass $\sigma = \frac{m}{8\pi}$, ist:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m.\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{x_1}{r^3} \cdot \left(\frac{p}{r_1^3} - \frac{p+l}{r_2^3}\right).dS = f_3 . dS. \quad \ldots i)$$

Ebenso muss man den Theilchen $\sigma.dS$ und $-\sigma dS$ an der Stelle $z = z_1$, $x = -x_1$ diese Leistung $f_3 . dS$ zuführen.

Durch den Äther wird in Form eines auf einer halbkreisförmigen Bahn verlaufenden Energiestromes f_3 die an einer Stelle $(z_1, -x_1)$ zugeführte Leistung nach der Stelle $(z_1, +x_1)$ übertragen, wo sie wieder abgenommen werden kann.

Der Energiestrom im statischen Felde ist nur ein zufällig cyclischer, er lässt sich vollständig realisiren.

Der wirkliche Energiestrom.

33. Das im letzten Abschnitte benützte Verfahren lässt sich verallgemeinern. Ich nehme an, dass die Materie in dem elektromagnetischen Felde sich nicht bewegt. Es sei durch eine geschlossene Oberfläche S aus dem elektromagnetischen Felde ein Raumgebiet G ausgeschnitten. In dieser Fläche S seien die Grössen $L, M, N, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, X, Y, Z, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und die Componenten des elektrischen Leitungsstromes a, b, c gegeben. Die Richtungscosinus der nach innen gerichteten Flächennormale n seien: λ, μ, ν, ferner die Richtungscosinus zweier auf einander senkrecht stehenden Tangenten n_1 und n_2: λ_1, μ_1, ν_1 und λ_2, μ_2, ν_2. Die Drehrichtung von n_1 nach n_2 sei positiv, wenn man von aussen nach innen durch die Fläche sieht. Die Linien n, n_1, n_2 können aufgefasst werden als Tangenten an die Schnittcurven dreier orthogonaler Flächenschaaren $F(x, y, z) = k$; $F_1(x, y, z) = k_1$; $F_2(x, y, z) = k_2$. S sei eine Fläche der Schaar $F(x, y, z) = k$. Es sind nun:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}.\lambda + \mathfrak{M}.\mu + \mathfrak{N}.\nu &= B \\ \mathfrak{X}.\lambda + \mathfrak{Y}.\mu + \mathfrak{Z}.\nu &= D \end{aligned}\right\} \quad \ldots a)$$

die Dichten der Kraftlinienschnitte auf S, ferner:

$$\left.\begin{aligned} L.\lambda_1 + M.\mu_1 + N.\nu_1 &= H_1 \qquad X.\lambda_1 + Y.\mu_1 + Z.\nu_1 = P_1 \\ L.\lambda_2 + M.\mu_2 + N.\nu_2 &= H_2 \qquad X.\lambda_2 + Y.\mu_2 + Z.\nu_2 = P_2 \end{aligned}\right\} \ldots b)$$

die zur Oberfläche parallelen Kraftcomponenten.

34. Es sollen nun über S zwei materielle Schichten von folgender Beschaffenheit ausgebreitet gedacht werden:

1. Die äussere Schicht soll eine ungeheure Anzahl unendlich kleiner Magnetnadeln enthalten, deren Axen parallel zu S, und zwar so gerichtet sind, dass ihr freier Magnetismus überall die Flächendichte $\sigma'' = \frac{B}{4\pi}$ besitzt.

Ist m die Stärke eines Poles, so muss also die Summirung über alle in dem Flächenelement dS enthaltenen Pole ergeben:

$$\Sigma m = \sigma''.dS = \frac{B}{4\pi}.dS. \qquad \ldots c)$$

Diese Bedingung kann bei genügender Zahl und Stärke der Nädelchen immer erfüllt werden, da

$$\int_S B.dS = 0.$$

Ausserdem sollen die Nädelchen Drehungen innerhalb der Fläche S um ihre Mittelpunkte erfahren, in der Weise, dass, wenn m die Polstärke, β_1 und β_2 die Geschwindigkeitscomponente des Poles nach n_1 und n_2 sind, die Summirung über alle Pole in dS ergibt:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m.\beta_1 &= b_1.dS = +\frac{P_2}{4\pi}.dS \\ \Sigma m.\beta_2 &= b_2.dS = -\frac{P_1}{4\pi}.dS. \end{aligned}\right\} \ldots d)$$

$b_1 = \frac{P_2}{4\pi}$, $b_2 = -\frac{P_1}{4\pi}$ sind also die Componenten der Flächendichte des magnetischen Convectionsstromes auf S. P_1 und P_2 sind die in $b)$ definirten Grössen.

2. Die innere Schicht soll von einer ungeheuren Anzahl elektrisirter Partikelchen, positiven und negativen, gebildet sein, die so vertheilt sind, dass die freie Elektricität überall eine Dichte $\sigma' = \frac{D}{4\pi}$ hat. Ist also ε die Ladung eines Partikelchens, so muss die Summirung über alle Partikeln auf dem Flächenstück dS ergeben:

$$\Sigma \varepsilon = \sigma'.dS = \frac{D}{4\pi}.dS. \qquad \ldots e)$$

Ausserdem sollen die positiv geladenen Theilchen sich sämmtlich mit einer Geschwindigkeit auf der Fläche S bewegen, deren Componenten nach n_1 und n_2, α_1 und α_2 sind, die negativen mit der Geschwindigkeit $-\alpha_1$, $-\alpha_2$; und zwar sollen diese Grössen α_1 und α_2 so bestimmt sein, dass:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1.\Sigma[\varepsilon] &= a_1.dS = -\frac{H_2}{4\pi}.dS \\ \alpha_2.\Sigma[\varepsilon] &= a_2.dS = +\frac{H_1}{4\pi}.dS, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots f)$$

wo $[\varepsilon]$ den absoluten Betrag der Ladung ε bedeutet.

$a_1 = -\frac{H_2}{4\pi}$ und $a_2 = \frac{H_1}{4\pi}$ sind also die Componenten der Flächendichte des elektrischen Convectionsstromes auf S. H_1 und H_2 sind in *b)* definirt.

35. Erstens lässt sich nun beweisen, dass, solange man die magnetischen und elektrischen Strömungen, wie es in *d)* und *f)* gefordert wird, im Gange hält, die Vertheilung des freien Magnetismus und der freien Elektricität immer von selbst die Dichte $\frac{B}{4\pi}$ und $\frac{D}{4\pi}$ annimmt. Ich zeige dies für die elektrische Strömung.

Sei die Gleichung der Fläche S:

$$F(x, y, z) = k,$$

die einer unendlich benachbarten, sie umhüllenden Fläche S':

$$F(x, y, z) = k + dk,$$

sei der Abstand zwischen S und S' an einer Stelle dn, seien die Projectionen von dn auf die Coordinatenaxen dx, dy, dz, so ist offenbar:

$$\frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial y}.dy + \frac{\partial F}{dz}.dz = dk,$$

also:

$$dn = \frac{dk}{R}, \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}, \qquad \ldots g)$$

$$\lambda . R = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \mu . R = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \nu . R = \frac{\partial F}{\partial z}. \qquad \ldots h)$$

Ferner seien die elektrisirten Partikeln über den ganzen Zwischenraum zwischen S und S' gleichmässig vertheilt, so dass $\sigma' = \tau' . dn$, wenn τ' ihre räumliche Dichte bedeutet. Ferner soll die Bewegung nur auf Flächen der Schaar $F =$ const. vor sich gehen, so dass die Vertheilung zwischen S und S' gleichmässig bleibt; die Componenten der räumlichen Stromdichte nach n_1 und n_2 sind also: $\frac{a_1}{dn}$ und $\frac{a_2}{dn}$, die Componente nach n ist mit all ihren Ableitungen gleich Null.

Die Componenten der räumlichen Stromdichte nach den Coordinatenaxen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, sowie ihre Ableitungen ergeben sich daher, wenn man setzt:

$$\mathfrak{a} . dn = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2, \qquad \mathfrak{b} . dn = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2,$$
$$\mathfrak{c} . dn = a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2 .$$

Benutzt man nun die Gleichungen *f)* und *b)* und berücksichtigt, dass

$$\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1 = \lambda, \qquad \nu_1 \lambda_2 - \nu_2 \lambda_1 = \mu, \qquad \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \nu,$$

so erhält man:

$$4\pi \mathfrak{a} dn = (N . \mu - M . \nu), \qquad 4\pi \mathfrak{b} dn = (L\nu - N\lambda),$$
$$4\pi \mathfrak{c} dn = (M\lambda - L\mu),$$

oder nach *g)* und *h)*:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi dk . \mathfrak{a} &= \left(N . \frac{\partial F}{\partial y} - M . \frac{\partial F}{\partial z}\right), \\ 4\pi dk . \mathfrak{b} &= \left(L . \frac{\partial F}{\partial z} - N . \frac{\partial F}{\partial x}\right), \\ 4\pi dk . \mathfrak{c} &= \left(M . \frac{\partial F}{\partial x} - L . \frac{\partial F}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \qquad \ldots i)$$

wo $4\pi . dk$ ein constanter Factor.

Nenne ich nun die Elektricitätszufuhr in das Raumelement $d\tau$, während der Zeit dt: $d\eta . d\tau$, so ist nach der Continuitätsgleichung:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial z}\right).$$

Setzt man nun aus *i)* die Werthe für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ein und benutzt nach Ausführung der Differentiation wieder *g)* und *h)*, so ergibt sich:

$$4\pi . \frac{d\eta}{dt} . dn = -\left(\lambda . \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + \mu . \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + \right.$$
$$\left. + \nu . \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right).$$

Dies ist aber nach den Maxwell'schen Gleichungen:

$$4\pi . \frac{d\eta}{dt} . dn = \lambda . \left(4\pi a + \frac{d\mathfrak{X}}{dt}\right) + \mu . \left(4\pi b + \frac{d\mathfrak{Y}}{dt}\right) +$$
$$+ \nu . \left(4\pi c + \frac{d\mathfrak{Z}}{dt}\right). \qquad \dots k)$$

Multipliciren wir die Gleichung *k)* mit $\dfrac{dS . dt}{4\pi}$, so erhalten wir die ganze Elektricitätszufuhr in das Schalenstück $dS . dn$ während der Zeit dt: $d\eta . dS . dn$. Nennen wir nun I_n die Componente des von dS nach G hineinfliessenden elektrischen Leitungsstromes nach n: $I_n = (a . \lambda + b . \mu + c . \nu) . dS$, so ist:

$$d\eta . dS . dn = I_n . dt + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dD}{dt} . dS dt. \qquad \dots l)$$

Da nun von der auf dS befindlichen Elektricität während der Zeit dt die Menge $I_n . dt$ nach G hinein fortgeführt wird, so beträgt der Zuwachs der Elektricität auf dS:

$$d\sigma' . dS = d\eta . dS . dn - I_n . dt = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dD}{dt} . dS dt.$$

Es ist also:

$$\frac{d\sigma'}{dt} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dD}{dt}. \qquad \dots m)$$

Es behält σ' immer den Werth $\frac{D}{4\pi}$.

Genau in derselben Weise folgt, dass σ'' immer den Werth $\frac{B}{4\pi}$ behält.

Wir haben zunächst das folgende Resultat:

Solange die elektrisirten Partikeln ε und die Magnetpole m die durch Gleichung *f)* und *d)* vorgeschriebenen Bewegungen ausführen, erhalten die elektrischen Leitungsströme in dem Raumgebiet G ihre ganze Elektricitätszufuhr aus der elektrischen Belegung der Schale um S, und die Vertheilung der freien Elektricität und des freien Magnetismus in den Belegungen behält immer die Dichte $\sigma' = \frac{D}{4\pi}$ und $\sigma'' = \frac{B}{4\pi}$.

36. Weiter denke ich mir nun alle elektrischen und magnetischen Körper, wenn man will sogar alle Materie aus der Umgebung des Gebietes G entfernt, und dieses nur von den beiden beschriebenen Schichten umhüllt.

Dann lässt sich zweitens zeigen, dass die elektromagnetischen Vorgänge in G sich unter diesen eingebildeten Umständen in genau derselben Weise abspielen müssten, wie sie sich unter den wirklichen Umständen abspielen, dass hingegen ausserhalb G alle Kräfte Null sein müssten.

Der Beweis ist geliefert, wenn man zeigt, dass die behauptete Vertheilung der elektrischen und magnetischen Kräfte den Maxwell'schen Gleichungen genügt. In G, wo die Vorgänge gegeben sind, und ausserhalb G, wo die Kräfte Null sind, ist dies selbstverständlich der Fall. Der Beweis ist nur für die unmittelbare Umgebung der beiden von uns construirten Schichten zu führen, und zwar sind hier folgende vier Behauptungen zu beweisen:

$$\int_s H.ds.\cos(H,s) = 4\pi I \qquad \ldots n)$$

$$\int_s P.ds.\cos(P,s) = -4\pi J \qquad \ldots o)$$

$$\int_F B.dF.\cos(B, N) = 0 \qquad \ldots p'$$

$$\int_F D.dF.\cos(B, N) = 4\pi e, \qquad \ldots q'$$

wo:

H, B magnetische Kraft und Induction,
P, D elektrische Kraft und Verschiebung,
s eine geschlossene Curve,
I, J der durch sie hindurchtretende elektrische und magnetische Convectionsstrom,
F eine geschlossene Oberfläche,
N ihre nach aussen gerichtete Normale,
e die wahre Elektricitätsmenge in F.

Es seien S' und S'' zwei Flächen aus der Schaar $F(x, y, z) = k$, die einander unendlich benachbart sind und die Fläche S mitsammt ihren beiden Belegungen zwischen sich enthalten. Aus der unendlich dünnen Schale $S'S''$ schneide ich mir ein unendlich kleines, rechteckiges Stück $dS'S''$ aus. Die Kanten dieses kleinen rechtwinkeligen Parallelepipedons $dS'S''$ seien dn, dn_1, dn_2, wo n, n_1, n_2 die eingangs erläuterte Bedeutung haben.

Bildet man nun die Linienintegrale von H und P um die vier Rechtecke (dn, dn_1) und (dn, dn_2), die allein in Betracht kommen, da die beiden anderen (dn_1, dn_2) ganz innerhalb und ganz ausserhalb G liegen, so sieht man ohneweiters die Richtigkeit der beiden ersten Behauptungen *n)* und *o)* ein. Es ist z. B.:

$$\int_{(dn,\, dn_1)} H.ds.\cos(H, s) = H_1.dn_1 = 4\pi a_2.dn_1,$$

wo nach Gleichung *f)* $a_2.dn_1$ der durch das Rechteck $(dn, dn_1$ tretende elektrische Convectionsstrom.

Sei S''' weiter eine Fläche, die zwischen den beiden Schichten verläuft und enthalte die Schale $S''S'''$ die magnetische Schicht. Sei aus $S''S'''$ das unendlich kleine Parallelepiped $F = (dn', dn_1, dn_2)$ ausgeschnitten. Das Linienintegral der magnetischen Kraft um die Rechtecke (dn', dn_1) und

(dn', dn_2) ist Null, da durch sie nur ein magnetischer, aber kein elektrischer Strom geht. Hieraus folgt, dass die magnetische Kraft H ausserhalb der Schale S''' nur noch eine Componente nach der Flächennormale n hat. Nennen wir den auf den vier Schnittflächen (dn', dn_1) und (dn', dn_2) befindlichen freien Magnetismus m_1, m_2, m_3, m_4, so ist, da H keine Componente senkrecht zu diesen Flächen hat, der aus ihnen austretende Inductionsfluss:

$$4\pi.(m_1 + m_2 + m_3 + m_4).$$

Der aus der äusseren Fläche $dS''(dn_1, dn_2)$ austretende Inductionsfluss ist nach Voraussetzung Null, der aus der inneren dS''' hingegen $(\mathfrak{L}.\lambda + \mathfrak{M}.\mu + \mathfrak{N}.\nu).dn_1.dn_2$. Also ist der ganze Inductionsfluss aus dem unendlich kleinen Parallelepipedon F:

$$\int_F B.dF.\cos(B, N) = (\mathfrak{L}.\lambda + \mathfrak{M}.\mu + \mathfrak{N}.\nu).dn_1.dn_2 + \\ + 4\pi.(m_1 + m_2 + m_3 + m_4).$$

Da die Pole einer jeden Magnetnadel entgegengesetzt gleich sind, so muss der auf dem Schalenstück $dn_1.dn_2$ befindliche freie Magnetismus $\sigma''.dn_1.dn_2$ entgegengesetzt gleich sein der Summe $m_1 + m_2 + m_3 + m_4$, also:

$$4\pi.(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = -4\pi\sigma''.dn.dn_2 = -B.dn_2.dn_2 \\ = -(\mathfrak{L}.\lambda + \mathfrak{M}.\mu + \mathfrak{N}.\nu).dn_1 dn_2.$$

Also:

$$\int_F B.dF.\cos(B, N) = 0.$$

Es bleibt noch die vierte Behauptung *q)* zu bewejsen. Zu dem Zwecke denke ich mir aus der Schale $S'S'''$, welche die elektrische Belegung enthält, ein Stück $F'F'''$ ausgeschnitten, so gross, dass die seitliche Begrenzung gegen F' und F''' verschwindend klein ist. Dann reducirt sich das Oberflächenintegral

$$\int_{F'F'''} D.dF.\cos(D, N) \quad \text{auf} \quad \int_{F'} (\mathfrak{X}.\lambda + \mathfrak{Y}.\mu + \mathfrak{Z}.\nu).dF'.$$

Nach Gleichung *e)* ergibt sich dann:

$$\int_{F'F'''} D.dF.\cos(D,N) = \int_{F'} 4\pi\sigma'.dF' = 4\pi e,$$

wo e die wahre Elektricität in dem Schalenstück $F'F'''$ bedeutet.

Wir haben das Resultat:

Entfernt man alle elektrischen und magnetischen Körper aus der Umgebung von G und umhüllt dafür die Oberfläche S mit den beiden durch die Gleichungen *c)* bis *f)* charakterisirten Schichten, so ändert das an den elektromagnetischen Vorgängen in G nichts. Ausserhalb G sind dann hingegen alle Kräfte Null, die elektromagnetischen Vorgänge spielen sich lediglich in G und in den umhüllenden Schichten ab.

37. Durch S ist aus dem elektromagnetischen Felde ein Stück ausgeschnitten, in welchem die Vorgänge allein durch die Bewegungen auf S in derselben Weise im Gange gehalten werden können, wie durch die wirkliche Umgebung. Alle Zufuhr und alle Abnahme von Energie muss dann durch die umhüllenden Schichten geschehen, weil ausserhalb S der Äther völlig im ruhigen Gleichgewicht verharrt. Wir denken uns nun die Bewegungen der Partikeln auf S durch eigene Mechanismen hervorgebracht, die jeder auf einen Theil F von S wirken, ohne irgendwie in Zusammenhang miteinander oder mit anderen Körpern zu stehen. Diese Mechanismen können nur durch die Fläche F Energie aufnehmen oder abgeben, durch sie wird also der ganze Energieübergang durch F realisirt, da ja auch die Bewegung der elektrischen und magnetischen Partikeln auf F nur durch den elektromagnetischen Zustand in dem anstossenden Theil von G geregelt wird, mit den Bewegungen auf den anderen Theilen von S aber gar nicht in Zusammenhang steht. Es sind also Mechanismen M im Sinne der Nr. 9: die Belegung auf S stellt ihre Verbindung mit dem Äther in G dar.

Der dritte Theil dieser Betrachtung hat sich nun mit der Berechnung der Energieübergänge in diese Mechanismen M zu befassen.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass die äussere, magnetische Schicht an der Energieübertragung nicht betheiligt ist. Denn die magnetische Kraft H hat keinen Einfluss auf die parallel zu S vor sich gehenden Bewegungen der Magnetnädelchen, da sie, wie in Nr. **36** gezeigt wurde, senkrecht auf S steht, ebenso wenig natürlich die elektrische Kraft. Sollte die Bewegung der Nädelchen also Energie erfordern oder Energie abgeben, so kann dies nur auf Kosten der der magnetischen Schale selber eigenen Energie geschehen, die wohl von der Anordnung der Nädelchen abhängen kann.

Hieraus folgt, dass die ganze Energieübertragung aus G in die Mechanismen M durch die elektrische Schicht allein vermittelt wird. Wir können uns daher die magnetische Schicht ganz wegdenken, es werden dann allerdings auch ausserhalb S elektromagnetische Vorgänge sich abspielen. Diese haben aber auf die Energieübergänge durch S keinen Einfluss.

Die Energie, welche durch die Bewegung der elektrischen Partikeln in M gewonnen wird, berechnet sich für jedes Flächenelement dF, wie folgt:

$$de.dF = (P_1\alpha_1.\Sigma[\varepsilon]+P_2.\alpha_2.\Sigma[\varepsilon])dt \qquad \ldots r)$$

oder nach Gleichung $f)$:

$$de = \frac{1}{4\pi}.(P_2H_1-P_1H_2).$$

Diese Energie kann nicht aus einem etwa in der elektrischen Schicht vorhandenen Energievorrath stammen. Denn sie wäre bei denselben Änderungen innerhalb dieser Schicht Null, wenn nur P_1 und P_2 oder H_1 und H_2 Null wären. Das System M mit der zu ihm gehörenden elektrischen Haut F gewinnt also die Energie:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_F (P_2.H_1-P_1.H_2).dF =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cdot\int_F P_S.H_S.\sin(P_S, H_S).dF, \ldots s)$$

wo P_S, H_S die Kraftcomponenten $\parallel S$.

Damit ist, allerdings nur unter der Voraussetzung, dass die Materie im elektromagnetischen Felde sich nicht bewegt[1] der Satz bewiesen:

Die elektromagnetische Energieübertragung lässt sich localisiren. Der Vector, durch den sich alle realisirbaren Energieübergänge berechnen lassen, ist der Poynting'sche Energiestrom.

Maasseinheit.

38. Für die Stromstärke der elektromagnetischen Energieübertragung ist eine besondere Einheit eingeführt, für die Intensität des Stromes nicht. Da man das Linienintegral der elektrischen Kraft in Volt, das Linienintegral der magnetischen Kraft (unter Hinzufügung des Factors $\frac{1}{4\pi}$) in Ampère misst, so ist das Flächenintegral des Poynting'schen Stromes, d. h. die Stromstärke der Energie, zu messen in der Einheit 1 Volt 1 Ampère $=$ 1 Watt.

Die Instrumente zur Messung des elektromagnetischen Energiestromes nennt man Wattmeter.

Ein besonderes Gebiet bilden die Messungen des Energiestromes bei sehr rapiden elektrischen Schwingungen (Strahlungen). Hiezu benützt man Bolometer, Radiometer etc.

Gesammtstrom.

39. Wenn man von den noch unerforschten Energieübergängen durch die neu entdeckten Strahlungen und durch die Gravitation absieht, so ist gezeigt worden, dass die vier im ersten Abschnitt aufgestellten Energieprincipe alle der Erfahrung entsprechen, dass sich alle Energieänderungen in der Natur folglich durch wirkliche Energieströme schildern lassen.

Diese Energieströme setzen sich durch Superposition aus folgenden Einzelströmen zusammen:

1. Convectionsstrom; bewegte Materie führt ihre Energie mit sich.

[1] Die Verallgemeinerung für bewegte Körper behalte ich mir für eine spätere Untersuchung vor.

Grösse: Energiedichte × Geschwindigkeit: $f_0 = e.\omega$, Richtung: Geschwindigkeit ω.

2. Mechanischer Leitungsstrom; der Energieüberträger bewegt sich unter Druck.

Grösse: Druck auf dem zur Bewegungsrichtung senkrechten Flächenelement × Geschwindigkeit: $f_1 = P_\omega.\omega$, Richtung: Druck P_ω.

3. Thermischer Leitungsstrom; der Energieüberträger leitet Wärme.

Grösse: Temperaturabfall × Wärmeleitungscoëfficient, Richtung: In isotropen Körpern Temperaturabfall, in anisotropen spitzwinklig zum Temperaturabfall.

4. Elektromagnetischer Leitungsstrom; der Energieüberträger ist der Äther.

Grösse: Elektrische Kraft × magnetische Kraft × Sinus des eingeschlossenen Winkels: $f_3 = \frac{1}{4\pi} P.H.\sin(P, H)$, Richtung: Senkrecht sowohl zur elektrischen, als auch zur magnetischen Kraft.

Nur wenn mindestens einer dieser Vectoren von Null verschiedene Werthe hat, ändert sich die räumliche Vertheilung der Energie, und umgekehrt, wenn einer von ihnen von Null verschieden ist, lässt sich der ihm entsprechende Energieübergang immer vollständig realisiren. Freilich können sie auch zufällig cyclisch verlaufen, mit Ausnahme des thermischen Leitungsstromes, der einen nicht umkehrbaren Vorgang darstellt.

Anhang I.

Bewegung einer elektrisirten Kugel von endlicher Ausdehnung.

Um das in **28.** behandelte Problem auch für eine Kugel von endlicher Ausdehnung zu lösen, entwickle ich f, unter Beibehaltung der in **28.** benützten Bezeichnungen, in eine doppelt unendliche Reihe nach Kugelfunctionen.

Ich setze nämlich:

$$f = \sum_0^\infty{}_n \sum_0^\infty \varphi_n^{(\nu)}(s) . \left(\frac{\mathfrak{P}_{n,\nu}(\mu_1)}{r_1} + \frac{\mathfrak{P}_{n,\nu}(\mu_2)}{r_2} \right), \qquad \ldots a)$$

wo $\varphi_n^{(\nu)}$ die ν^{te} Ableitung einer Function $\varphi_n(s)$ bedeutet, über die später verfügt werden wird, $\mathfrak{P}_{n,\nu}$ eine Function bedeutet, die folgender Differentialgleichung genügt:

$$\left. \begin{aligned} &\mathfrak{P}''_{n\nu} . (1 - \mu^2) + \mathfrak{P}_{n,\nu}(n - \nu)(n - \nu + 1) = \\ &= 2\delta . (\mathfrak{P}'_{n,\nu-1} . (1 - \mu^2) - (n - \nu + 1) . \mu . \mathfrak{P}_{n,\nu-1}) + \delta . \mathfrak{P}_{n,\nu-2} \end{aligned} \right\} \ldots b)$$

wo: $\delta = \frac{1 - k^2}{k^2} = \frac{\omega^2}{V^2 - \omega^2}$ und für $\mathfrak{P}_{n,\varkappa}$, wenn $\varkappa < 0$, Null einzusetzen ist.

Alsdann befriedigt f die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} . \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{1}{V^2} . \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Die Werthe der Functionen $\mathfrak{P}_{n,\nu}$ lassen sich mit Hilfe der von Heine[1] als $\mathfrak{P}_1^{(n)}$ bezeichneten ganzen Functionen ausdrücken, die ich der Kürze halber $\mathfrak{P}_n$ nennen werde. Es ist also:

$$\left. \begin{aligned} &\mathfrak{P}_n = \frac{(n+1)!}{(2n)!} . \frac{d^{n-1}(\mu^2 - 1)^n}{d\mu^{n-1}} \quad \text{für } n > 0 \\ &\mathfrak{P}_0 = \mu \\ &\mathfrak{P}_{-1} = 1 \\ &\mathfrak{P}_{-2} = \ldots = \mathfrak{P}_{-n} = 0 \end{aligned} \right\} \ldots c)$$

$\mathfrak{P}_n$ genügt der Differentialgleichung:

$$\mathfrak{P}''_n . (1 - \mu^2) + n . (n+1) . \mathfrak{P}_n = 0.$$

Ich setze daher:

$$\mathfrak{P}_{n,0} = \mathfrak{P}_n . \qquad \ldots d)$$

Ferner lässt sich mit Hilfe dieser Functionen $\mathfrak{P}_n$ auch für jede Differentialgleichung folgender Form eine Lösung finden:

---

[1] Heine, Handbuch der Kugelfunctionen. I, S. 152.

$$\left.\begin{array}{l} y''.(1-\mu^2)+m.y = \sum_{n_1}^{n_2} {}_i\, \alpha_i \mathfrak{P}_i \\ \text{Man hat nur zu setzen:} \\ y = \sum_{n_1}^{n_2} {}_i\, \beta_i.\mathfrak{P}_i,\ \beta_i = \frac{\alpha_i}{i.(i+1)-m} \end{array}\right\} \quad \ldots e)$$

Weiter gelten die Recursionsformeln:

$$\mathfrak{P}'_{n+m}.(1-\mu^2)-(n-\nu).\mathfrak{P}_{n+m}.\mu = -(2n+m-\nu+1).\mathfrak{P}_{n+m+1}+$$
$$+(m+\nu).\frac{(n+m+1)(n+m-1)}{(2n+2m+1)(2n+2m-1)}.\mathfrak{P}_{n+m-1}. \quad \ldots f)$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass das Differentialgleichungssystem *b)* befriedigt wird durch Functionen folgender Form:

$$\mathfrak{P}_{n,\nu} = \delta^{(1)}_{n,\nu}.\mathfrak{P}_{n+\nu}+\delta^{(2)}_{n,\nu}.\mathfrak{P}_{n+\nu-2}+\ldots+\delta^{(\nu)}_{n,\nu}.\mathfrak{P}_{n-\nu+2}, \quad g)$$

wo die $\delta_{n,\nu}$ Constanten sind. Setzt man nämlich für $\mathfrak{P}_{n,\nu-1}$, $\mathfrak{P}_{n,\nu-2},\ldots$ ihre aus *g)* ersichtlichen Werthe in die Gleichung *b)* ein und wendet man dann die Formeln *f)* an, so erhält man eine Gleichung von der Form *e)*, die durch eine Function *g)* lösbar ist. Man sieht zugleich, dass sich für die $\delta_{n,\nu}$ Recursionsformeln ergeben, aus denen sie sich vollständig berechnen lassen; sie setzen sich aus einigen Potenzen der Grösse δ, verbunden mit Zahlenfactoren, zusammen und verschwinden mit δ, wenn $\nu > 0$.

Es sind nun in dem Ausdruck *a)* noch die Grössen $\varphi_n(s)$ zu bestimmen. Das geschieht durch die Bedingung, dass die Kraftlinien auf der Oberfläche des kugelförmigen Körpers senkrecht stehen sollen. Es sei die Gleichung dieser Oberfläche: $r_1 = k.a$, welche ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit der z-Axe als Rotationsaxe darstellt. Ist k nahezu 1, so ist der Körper nahezu eine Kugel.

Ersetzen wir nun in dem Ausdruck:

$$\frac{\partial f}{\partial z}.(s-z)-\frac{\partial f}{\partial \rho}.\rho = -\frac{\partial f}{\partial r_1}.r_1+\frac{\partial f}{\partial r_2}.(r_1.\mu_1\mu_2-r_2(1-\mu_2^2))+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial \mu_2}.(1-\mu_2^2).\left(\mu_2+\frac{r_1\mu_1}{r_2}\right)$$

die Grössen r_2 und μ_2 überall durch r_1, μ_1, s mit Hilfe der Beziehungen:

$$r_2^2 = r_1^2 + 4s^2 + 4s . r_1 . \mu_1, \quad r_2 . \mu_2 = 2s - r_1 . \mu_1,$$

so dass man erhält:

$$\frac{\partial f}{\partial z} . (s - z) - \frac{\partial f}{\partial \rho} . \rho = \psi(r_1, \mu_1, s), \qquad \ldots h)$$

so ist die gestellte Forderung erfüllt, wenn ψ für den Werth $r_1 = ka$ identisch verschwindet. Dies ist der Fall, wenn:

$$\left.\begin{array}{l} (\psi)_{\substack{r_1 = ka \\ \mu_1 = 0}} = 0 \ldots \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mu_1}\right)_{\substack{r_1 = ka \\ \mu_1 = 0}} = 0 \ldots \\ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu_1^2}\right)_{\substack{r_1 = ka \\ \mu_1 = 0}} = 0 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad \ldots i)$$

In den Gleichungen *i)* kommt als einzige Variable die Grösse s vor. Sie stellen also ein Differentialgleichungssystem für die $\varphi_n(s)$ vor, durch welche, wie eine genauere Überlegung zeigt, diese Grössen φ als Functionen von s und δ völlig bestimmt sind. Es soll hier auf die Details der Rechnung nicht eingegangen werden. Für den Fall $\delta = 0$ (elektrostatisches Problem) ist die Berechnung von Maxwell durchgeführt, sie findet sich in dem »Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus«, Bd. I, Übersetzung, S. 228 ff., wo man nur $b = a$, $B = -A$, $c = 2s$ zu setzen hat, um unseren Fall zu erhalten.

Anhang II.

Die Localisirbarkeit der bekannten Energieformen.

Ausser der kinetischen Energie kennt man nur die im Folgenden aufgezählten Energieformen.

1. Energie der elastischen Deformation.

Wenn ein Körper eine elastische Deformation oder eine Volumänderung erfährt, so entsteht eine localisirbare Form der

Energie. Denn bekanntlich kann man jedes Körperelement als selbständigen Körper auffassen und aus seiner Deformation das ihm zukommende Energietheilchen berechnen. Durch einfache Summation erhält man die ganze Energie.[1]

2. Oberflächenenergie.

Wenn sich die Oberfläche eines Körpers, sei er flüssig oder fest, vergrössert, so erlangt er in Folge der Oberflächenspannung Energie, die in der Oberflächenhaut localisirt ist.[2]

3. Wärme.

Wenn sich die Temperatur eines Körpers ändert, so gewinnt jedes Körpertheilchen seinen bestimmten Betrag an Energie.

4. Structurenergie, chemische Energie.

Wenn sich ein Körper in einen anderen von ganz verschiedenem physikalischen Verhalten umwandelt, entweder durch Änderung des Aggregatzustandes oder durch Änderung der Structur (Härten, Ausglühen, Ziehen von Metallen u. a. Körpern, Umkrystallisiren krystallinischer oder amorpher Substanzen) oder endlich durch chemische Umlagerung, so ist ebenfalls der Betrag, um den sich die Energie des neuen Körpers in einem bestimmten Zustande (Druck, Temperatur) von der des alten unterscheidet, in bestimmter Weise auf die einzelnen Körperelemente vertheilt.

Dabei sind als Körperelemente immer die kleinsten Theilchen betrachtet, die man noch durch irgendwelche physikalischen Mittel von einander unterscheiden kann. Dass wir guten Grund haben, diese Elemente als sehr complicirte materielle Systeme anzusehen, die sich aus einer ungeheuren Anzahl von Atomen mit dem diese verbindenden Weltäther zusammensetzen, hat für die folgenden Überlegungen keinerlei Bedeutung. Es ist uns vielmehr zunächst gleichgiltig, ob die Energie auch innerhalb dieser Elemente noch bestimmt localisirt

[1] Kirchhoff, Mechanik. Vorl. 11. Gl. 30 ff., S. 122.

[2] Kirchhoff, Mechanik. Vorl. 13, S. 135.

ist, und wie sie sich, wenn dies der Fall ist, auf die Atome und den Äther vertheilt.

Ferner ist zu beachten, dass wir von den unter 1. bis 4. aufgezählten Energieformen nicht sagen können, dass eine jede als das totale Differential einer bestimmten Function aufgefasst werden kann. Vielmehr müssen sie als partielle Differentiale einer einzigen, jedenfalls sehr complicirten Function sämmtlicher Zustandsgrössen bezeichnet werden. Diese Function, die aber noch eine willkürliche Constante additiv enthält, nennen wir die innere Energie.

Jedem Körperelement ist also eine bestimmte innere Energie zugeordnet, wenn wir für die willkürliche Constante einen bestimmten Werth gewählt haben. Wir werden bei dieser Wahl natürlich so verfahren, dass Körper, die physikalisch gleich sind, bei gleichen Zuständen auch immer dieselbe Energie besitzen. Wir dürfen uns aber auch wohl vorstellen, dass es für jeden Körper einen bestimmten Zustand gibt, wo jede mögliche Zustandsänderung nur einen positiven Zuwachs der inneren Energie mit sich bringen kann, und wir dürfen wohl annehmen, dass es nur noch an den nöthigen Erfahrungen fehlt, um diesen Zustand, den man als den absoluten Nullpunkt der inneren Energie zu bezeichnen hätte, zu berechnen. Dem sei, wie ihm wolle; für das Folgende genügt es, die innere Energie von einem willkürlichen Nullpunkt ab zu rechnen, so dass sie sowohl positive, als auch negative Werthe annehmen kann.

Eine wesentliche Eigenschaft der inneren Energie ist, dass sie bei blossen Ortsveränderungen des Körpertheilchens, dem sie zugeordnet ist, ihm unverändert zugeordnet bleibt. Es wird sich daher die räumliche Vertheilung der inneren Energie im Allgemeinen ändern, wenn die räumliche Vertheilung der Körperelemente geändert wird, auch ohne dass sonst irgend ein physikalischer Vorgang stattfindet.

Die innere Energie kann noch einige weitere Formen annehmen:

5. Lösungsenergie, chemische Verbindungsenergie.

Wenn mehrere getrennte Körper sich durch Mischung, Lösung, Absorption oder durch chemische Vereinigung in einen

einzigen neuen verwandeln, dessen einzelne Körperelemente also aus ganz bestimmten Elementen der ursprünglichen Körper hervorgegangen sind, so wird sich der Betrag, um den sich die innere Energie des neuen Körpers in einem bestimmten Zustande von der Summe der inneren Energieen der ursprünglichen Körper unterscheidet, in bestimmter Weise auf die einzelnen Körperelemente vertheilen, da man jedes Körperelement immer als selbständigen Körper betrachten kann.

Auch wenn bei einer chemischen Umwandlung etc. mehrere neue Körper entstehen, lässt sich ein ganz analoger Satz leicht aussprechen, wenn man dabei nur beachtet, dass der Nullpunkt der Energie für jeden Körper als gegeben betrachtet werden muss, wenn er nur für jeden chemisch einfachen Stoff (chemisches Element) fixirt ist.

6. Elektrische und magnetische Energie.

Wenn an irgend einer Stelle im Raum elektrische oder magnetische Kräfte auftreten, so entsteht dort nach der Maxwell'schen Theorie eine localisirbare Energieform, deren Grösse sich mathematisch für jedes Raumelement berechnen lässt.[1] Befindet sich in dem Raumelement gewöhnliche Materie, so müssen wir jedenfalls einen Theil dieser Energieform als innere Energieform bezeichnen, da sie bei Ortsänderungen der Materie zum Theil mitgeführt wird. Ein Theil aber ist, so viel wir heute wissen, unabhängig von der Materie und folgt den Bewegungen wenigstens nicht unmittelbar, wie auf Seite 1147 (Punkt 25) näher auseinandergesetzt ist. Diesen Theil müssen wir als Energie des Weltäthers an der betreffenden Stelle des Raumes auffassen. Wo elektrische und magnetische Kräfte im leeren Raum auftreten, müssen wir ihre Energie als reine Energie des Weltäthers bezeichnen. Für unseren Zweck können wir die Frage nach dem Substrat der Energie ausser Acht lassen, es genügt, die Thatsache der Localisirbarkeit festgestellt zu haben.

7. Strahlungsenergie.

Strahlung, sichtbare oder unsichtbare, ist eo ipso localisirbare Energie, und zwar sind die bekannteren Strahlungs-

[1] Maxwell, Elektricität und Magnetismus. Bd. 2, Abschnitt 630 ff.

arten nur besondere Formen der elektromagnetischen Energie. Von der Kathodenstrahlung, der Röntgenstrahlung und den mit diesen verwandten lässt sich das letztere wohl noch nicht mit Sicherheit behaupten.

Ausser den aufgezählten Energieformen, denen nur noch die Gravitationsenergie hinzuzufügen ist, dürften wohl keine weiteren bekannt sein.[1] Freilich ist zu erwarten, dass ein eingehenderes Studium der Molecularphysik noch zu einer oder der anderen heutzutage sehr unvollständig oder gar nicht bekannten Form der inneren Energie führen wird. Indessen ist es sehr unwahrscheinlich, dass man jemals nicht localisirbare Formen entdecken wird.

8. Gravitationsenergie.

Eine einzige Energieform bleibt, welche möglicherweise als potentielle Energie im gewöhnlichen Sinne der Mechanik zu bezeichnen wäre: die Energie der Gravitation. Die Grösse dieser Energieform hängt nach der üblichen Darstellungsweise nicht wie die der kinetischen Energie und der sämmtlichen unter 1. bis 7. aufgezählten Formen von dem physikalischen Zustande[2] der Materie und des Äthers ab, sondern nur von der gegenseitigen Lage mehrerer discreter Körper im Raume. Man nennt sie daher auch Energie der Lage. Es ist aus der in 3. gegebenen Definition der Localisirbarkeit unmittelbar einzusehen, dass eine Energie der Lage sich nicht localisiren lässt.

In neuerer Zeit dringt jedoch mehr und mehr die Ansicht durch, dass es keine Energieform geben könne, deren Grösse sich ändert, ohne dass eine wirkliche physikalische Änderung in der Materie (im weiteren Sinne) eintritt, dass also die Abhängigkeit von rein geometrischen Grössen nur eine scheinbare sein könne. Nach dieser Anschauungsweise muss die Gravitation an jeder Stelle des Raumes die Äusserung eines besonderen physikalischen Zustandes im Weltäther sein, ähnlich wie die elektrischen und magnetischen Kräfte es nach der

[1] Selbstverständlich beschränken wir uns ganz auf die anorganische Natur.

[2] Auch die Bewegung eines Körpers ist als physikalischer Zustand anzusehen.

Maxwell'schen Theorie sind. Welcher Art dieser Zustand sein mag, darüber gibt es eine grosse Reihe von Hypothesen.[1] Keine indessen beantwortet die Frage befriedigend.

Der Erste, welcher darauf hinwies, dass man auch ohne specielle Hypothese die Gravitation als physikalischen Zustand behandeln könne, und der den Ausdruck für die Gravitationsenergie in die Form einer localisirbaren Energie brachte, war Heaviside.[2] Später wurde der Gedanke in derselben Weise auch von Föppl[3] ausgeführt.

---

[1] Drude, Über Fernewirkungen. Referat für die 60. Vers. deutscher Naturf. und Ärzte, Sect. Physik. Braunschweig, 1897.

[2] O. Heaviside, Electrician, *31*, 1893, 14. Juli, Elektromagnet. Theory, p. 455.

[3] Föppl, Münchener Akademieber., math.-naturw. Cl. 1897, S. 93.

Inhaltsverzeichniss.

XXI. SITZUNG VOM 20. OCTOBER 1898.

Der Vorsitzende, Präsident Prof. Ed. Suess, begrüsst das neueingetretene w. M. Herrn Prof. F. Becke und ersucht denselben, die Functionen des Secretärs für die heutige Sitzung zu übernehmen.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht fünf im I. chemischen Universitäts-Laboratorium ausgeführte Arbeiten, und zwar:

1. »Über die Einwirkung von salpetriger Säure auf den Resorcinmonoäthyläther«, von C. Kietaibl.
2. »Über die Trennung der Dimethyläther des Pyrogallols und des Methylpyrogallols«, von O. Rosauer.
3. »Über das γ-Amino-α-β-Propylenglycol«, von C. Chiari.
4. »Über den *o*-Phenyl-Benzaldehyd«, von R. Fanto.
5. »Über einige neue Derivate der Gallussäure«, von A. Hamburg.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. Adolf Franke: »Über die Einwirkung von Hydrazinhydrat auf das Isobutyraldol«.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. IX. UND X. HEFT.

JAHRGANG 1898. — NOVEMBER UND DECEMBER.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 2 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1898.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 9. und 10. Heftes November und December 1898 des CVII. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 50 kr. = 5 Mk.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. IX. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XXII. SITZUNG VOM 3. NOVEMBER 1898.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank aus, und zwar Herr Obersanitätsrath Prof. M. Gruber in Wien für seine Wahl zum inländischen und Herr Prof. F. Fouqué in Paris für seine Wahl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Herr Prof. E. Lippmann übersendet eine Arbeit aus dem III. chemischen Universitätslaboratorium in Wien von Pharm. Mr. Karl Heidrich, betitelt: »Condensationsvorgänge bei der Einwirkung von Acetessigäthylester auf Benzidin«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Elisabeth-Gymnasium im V. Bezirk in Wien, übersendet folgende vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (17. Fortsetzung).

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Herrn E. Kolda: »Über die Einwirkung von Äthylendiamin auf Isobutyr-, Isovaler-, Acetaldehyd und Glyoxal«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im chemischen Laboratorium des k. k. technologischen Gewerbemuseums ausgeführte Untersuchung von Prof. Dr. P. Friedländer: »Über *o*-substituirte Alkylaniline«.

Herr Heinrich Misselbacher in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Zeichnung und Beschreibung des von Heinrich Misselbacher aus Kepernest bei Tatraug in Ungarn (Siebenbürgen) erfundenen Motors«.

Herr Adolf Hnatek in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Die Meteore des 20. bis 30. November mit besonderer Berücksichtigung der Bieliden«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Gegenbaur K., Dr., Vergleichende Anatomie der Wirbelthiere. mit Berücksichtigung der Wirbellosen. I. Band. Leipzig. 1898; 8°.

Pâris E., Vice-Admiral, Souvenirs de Marine. Band 1—5. Paris. 1882—1892; Gross-Folio.

Zach St., Dr., Die periodische Wiederkehr der Hochfluthen. Nässen und Dürren in ihrem Zusammenhange mit dem Fleckenbestande der Sonne, der Häufigkeit der Nordlichter und den Änderungen des Erdmagnetismus. Budweis, 1898; 8°.

XXIII. SITZUNG VOM 10. NOVEMBER 1898.

Das c. M. Herr Prof. G. Haberlandt übersendet eine Arbeit aus dem botanischen Institute der k. k. Universität in Graz von Dr. Ferdinand Schaar: »Über den Bau des Thallus von *Rafflesia Rochussenii* Teysm. Binn.«

Das w. M. Herr Prof. Becke verliest in Vertretung des Secretärs ein Schreiben der Herren Graf C. Landberg und Prof. D. H. Müller, worin dieselben ihre Ankunft in Alexandrien, beziehungsweise Kairo anzeigen.

Das w. M. Herr Prof. G. v. Escherich überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Die zweite Variation der einfachen Integrale«.

Ferner legt derselbe das 1. Heft des I. Bandes der mit Unterstützung der cartellirten Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebenen »Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften« vor.

Herr Dr. Heinrich Gerstmann in Charlottenburg übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Moleculargewicht«.

Herr Dr. Fritz Blau überreicht eine im Laboratorium für analytische Chemie der k. k. technischen Hochschule in Wien ausgeführte Abhandlung, betitelt: »Über neue organische Metallverbindungen. Ein Beitrag zur Kenntniss der Metalliake«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Albert I[er], Prince Souverain de Monaco: Résultats des campagnes scientifiques, accomplies sur son yacht. Publiés sous sa direction avec le concours de M. J. Richard. Fascicule XII. Imprimerie de Monaco, 1898. 4°.

Die zweite Variation der einfachen Integrale

(I. Mittheilung)

von

G. v. Escherich,
w. M. k. Akad.

Seit Clebsch mit seiner Abhandlung:[1] »Über die Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form« die Untersuchung der zweiten Variation für die relativen Maxima-Minima der einfachen Integrale einleitete, hat dieser Gegenstand nur noch durch eine Abhandlung A. Mayer's,[2] insoferne diese das Hauptresultat Clebsch's in einfacherer, durchsichtigerer Weise begründete, eine Förderung erfahren. Denn die Arbeit Scheeffer's,[3] welche eine Lücke auszufüllen und »einiges neue Licht auf die Begründung der Theorie und die innere Bedeutung der Kriterien des Maximums und Minimums zu werfen« versprach, hat dieses Versprechen keineswegs erfüllt, da die Durchführung des vermeintlich neuen Grundgedankens, von dem diese Abhandlung ausgeht, so viele Lücken enthält und an solchen Mängeln leidet, dass dieselbe dadurch fast werthlos wird. Ich erlasse es mir, diese Behauptung hier näher zu begründen, zumal ich in einer Vorarbeit zu dieser für den Jacobi'schen Fall gezeigt habe[4] und in einer späteren für den allgemeinen zeigen werde, wie in exacter Weise dieser Grundgedanke durchzuführen ist. Im Interesse der geschichtlichen Wahrheit will ich aber schon

[1] Journal für Math., Bd. 55.

[2] Ibid. Bd. 69.

[3] Math. Annalen, Bd. 25 und 26.

[4] Diese Sitzungsberichte, Bd. XCVII, Abth. II. Die Abhandlung ist leider durch eine Unmenge Druckfehler sehr entstellt.

hier erwähnen, dass derselbe zur Zeit der Veröffentlichung von Scheeffer's Abhandlung keineswegs mehr neu war, sondern, dass er schon Jahre vorher von Weierstrass in seinen Vorlesungen über Variationsrechnung[1] zur Untersuchung des einfachsten Falles der Variationsrechnung in umfassender Weise ausgenützt wurde und sich bereits auch bei Hesse[2] angedeutet findet.

In der vorliegenden Arbeit suche ich auf dem von Clebsch betretenen Wege über die Transformation der zweiten Variation zu den Kriterien für die Permanenz ihres Zeichens zu gelangen. Er führt in einfacher, natürlicher Weise zum Ziele und eröffnet einen klaren Einblick in alle obwaltenden Verhältnisse.

Doch um denselben zu begehen, war es zuvörderst nothwendig, die Integration eines kanonischen Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung zu erörtern, um sich über die Ableitung ihrer Integrale aus einem Elemente eine hinreichend klare Vorstellung zu machen und genügend allgemeine Bedingungen aufzufinden, unter denen diese Integrale nach den Integrationsconstanten oder Parametern differentiirbar sind. Die Anwendung der gefundenen Regeln auf die Differentialgleichungen, die von der ersten Variation herrühren, zeigte sogleich die Nothwendigkeit — auf die auch schon Scheeffer, aber aus einem mehr nebensächlichen Grunde, hinwies — die

---

[1] Mir liegt eine Niederschrift solcher Vorlesungen vor, die schon im S. S. 1879 gehalten wurden. — Ich möchte übrigens mit obiger Bemerkung keineswegs die Vermuthung unterstützen, dass Scheeffer den Grundgedanken aus den Vorlesungen Weierstrass' übernommen habe. Vielmehr ziehe ich aus der Thatsache, dass er eine so unreife Arbeit veröffentlichte, den Schluss, dass er die Vorlesungen nicht kannte. Denn wenn auch Weierstrass in denselben nicht über den einfachsten Fall — wo also die Function bloss eine abhängige Veränderliche und nur ihre erste Ableitung enthält — hinausgeht und wie aus einer Bemerkung in den Vorlesungen vom S. S. 1884 erhellt, darüber auch nicht hinauskam, so lenken sie doch die Aufmerksamkeit auf mehrere schwierige und heikle Fragen, die im allgemeinen Probleme in grösserer Complication wiederkehren. Im Falle ihrer Kenntniss wäre also Scheeffer entweder vor manchen begangenen Irrthümern bewahrt worden oder er hätte die Veröffentlichung unterlassen. — Ich benütze gerne diese Gelegenheit, um dankbar zu bekennen, dass die Vorlesungen Weierstrass' mir in obgedachtem Sinne mancherlei Anregung bei meinen Arbeiten über die zweite Variation boten.

[2] Journal für Math., Bd. 54.

beiden Fälle zu unterscheiden, ob jede Bedingungsgleichung auch Derivirte der gesuchten Functionen enthält oder nicht.

Diese hier zuerst ersichtlich werdende Trennung beschränkt sich aber nicht, wie sich zeigte, auf diese specielle Frage, sondern zieht sich durch die ganze Untersuchung der zweiten Variation. Sie wird sogleich wieder erforderlich bei Behandlung des Systems linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das sich schon zu Anfang der Untersuchungen über die zweite Variation einstellt und das ich das accessorische Gleichungssystem nannte. Die Anwendung der Sätze über die kanonischen Systeme von Differentialgleichungen ergab dabei die Richtigkeit der bisher gemachten Annahme, dass mit der Integration der Differentialgleichungen der ersten Variation auch die Lösung des accessorischen Gleichungssystems erledigt sei. Bei den Versuchen, dieses Gleichungssystem für die Transformation der zweiten Variation heranzuziehen, schiebt sich ein bilinearer Differentialausdruck der ersten Ordnung in den Vordergrund, der verdeckt schon bei Clebsch vorkommt und der für gewisse Lösungssysteme des accessorischen Gleichungssystems, die ich conjugirte nannte, verschwindet. Aus seinen Eigenschaften ergibt sich in ungezwungener Weise die von Clebsch gefundene Transformation, und ich hielt es für angemessen, diese Ableitung hier aufzunehmen, weil sie mir unmittelbarer als die beiden bisher bekannten aus ihrer eigentlichen Quelle zu fliessen scheint, nämlich der Eigenschaft des accessorischen Gleichungssystems, die mit einem in der Theorie der linearen Differentialgleichungen üblichen Ausdrucke kurz bezeichnet werden kann: als sich selbst adjungirt zu sein. Die bedeutsame Rolle, welche hiebei den conjugirten Systemen zufällt, gab die Veranlassung, die Lösungssysteme des accessorischen Gleichungssystems genauer zu untersuchen. Die Eigenschaften einer gewissen Determinante, deren Elemente die eben erwähnten bilinearen Differentialausdrücke sind, leiten zu einer ausgezeichneten Classe von Fundamentalsystemen der Lösungssysteme, in denen je zwei Glieder einander paarweise zugeordnet sind und welche ich involutorische Fundamentalsysteme nannte. Mit ihrer Hilfe wurde es möglich, tiefer in die Natur der conjugirten Systeme einzudringen und eine Reihe ein-

schlägiger Aufgaben zu lösen, zu denen unter anderen auch die bereits von Clebsch[1] mittelst partieller Differentialgleichungen gefundene allgemeine Form der conjugirten Systeme gehört. Aus den conjugirten Systemen hebt sich schon bei der Transformation eine eigene Classe hervor, die bereits Mayer[2] benützte. Jedem Punkte des Integrationsbereiches ist eine Gruppe solcher Systeme, deren Determinanten sich nur um constante Factoren unterscheiden, zugeordnet.

Diese Systeme sind bei den Kriterien für die Permanenz des Vorzeichens der zweiten Variation ausschlaggebend, doch wurde ihre Verwendung zu diesem Zwecke erst möglich, als es mir gelang, eine versteckter liegende Formel aufzudecken, welche einen Zusammenhang zwischen den Determinanten zweier conjugirter Systeme, ihren ersten Ableitungen und der quadratischen Form in der transformirten zweiten Variation darstellt. Mit ihrer Hilfe liess sich nun strenge beweisen, was bisher eine Annahme blieb, dass für die relativen Maxima und Minima bezüglich des Vorzeichens der zweiten Variation in sinngemässer Übertragung die Sätze gelten, die schon seit längerer Zeit für den einfachsten Jacobi'schen Fall feststehen. Schon die Dienste, welche die Formel in diesen Untersuchungen leistet, lässt sie als den Schlüssel zur ganzen zweiten Variation erscheinen, aber die Berechtigung zu dieser Bezeichnung wird noch mehr in späteren Arbeiten hervortreten, da die Formel es ermöglicht, auch die Frage zu beantworten, inwieweit die hier gefundenen Bedingungen für die Permanenz des Vorzeichens der zweiten Variation, die bloss nothwendige Bedingungen für das Eintreten eines Maximums oder Minimums ergeben, auch hinreichend hiefür sind, und diese selbst aufzustellen.[3]

Die Untersuchungen sind in dieser Abhandlung zum Theile unter allgemeineren als den gewöhnlichen Annahmen durchgeführt, aber anderseits werden wieder Beschränkungen vorgenommen, die unerlässlich sind, wenn man nicht den Resultaten einen Schein grösserer Allgemeinheit geben will, als wozu

[1] Journal für Math., Bd. 56.

[2] L. c.

[3] Ich habe mich inzwischen überzeugt, dass nach der hier entwickelten Methode sich auch die zweite Variation vielfacher Integrale behandeln lässt.

die Entwickelungen berechtigen. Aus diesem Grunde wurde auch in der vorliegenden Arbeit durchwegs an der Voraussetzung festgehalten, dass in der Curve, welche aus der ersten Variation sich ergibt, die Ordinaten im ganzen Integrationsbereiche eindeutige Functionen der Abscisse seien und somit das vorgelegte Curvenintegral sich auf ein gewöhnliches bestimmtes Integral reducire. In einer späteren, demnächst erscheinenden Arbeit werden die unter dieser Einschränkung gewonnenen Ergebnisse von ihr frei gemacht werden.

Aus mehr äusserlichen Gründen habe ich die Abhandlung in drei Theile zerlegt. Die kurze Vorbemerkung zu jedem Theile gibt über seinen Inhalt Aufschluss.

In diesem ersten Theile wird zunächst die Integration eines kanonischen Systems von Differentialgleichungen der ersten Ordnung, die Differentiation ihrer Integrale nach Integrationsconstanten und Parametern, sowie die Fortsetzung aus einem Integralelement erörtert und werden dann die gewonnenen Sätze auf die Differentialgleichungen der ersten Variation angewendet. Vorbereitend wird darauf das Problem der Transformation der zweiten Variation für den Fall behandelt, in dem keine Bedingungsgleichungen vorhanden sind und sodann der Fall in Angriff genommen, wo jede Bedingungsgleichung Derivirte der gesuchten Functionen enthält. Für diesen Fall wird das accessorische System von Differentialgleichungen untersucht und noch die Transformation der zweiten Variation in die von Clebsch angegebene Form, welche die reducirte genannt wird, durchgeführt.

I.

1. In den folgenden Entwicklungen werden einige allgemeine Eigenschaften der reellen Differential-Gleichungssysteme benützt, und es wäre daher nicht unzweckmässig, gleich hier die Integration solcher Systeme genauer zu erörtern, doch behalte ich das einer anderen Gelegenheit vor und beschränke mich hier auf das unmittelbar Nöthige. Der allgemeinen Methode Cauchy's, um ein Integralsystem — oder richtiger ein Element desselben — des Differential-Gleichungssystems

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1 \ldots x_n) \ldots \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1 \ldots x_n)$$

herzustellen, das gegebene Anfangsbedingungen erfüllt, hat Picard[1] eine sehr bequeme Form gegeben und aus der will ich die nöthigen Sätze ableiten.

Über die n Functionen $f_1 \ldots f_n$ sollen hier nicht die allgemeinsten Annahmen gemacht werden, unter denen diese Sätze noch bestimmt gelten, sondern bloss die folgenden: Sie sollen in einer gewissen Umgebung einer Stelle $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ vom Radius ρ nach t, und r nach $x_1, x_2 \ldots x_n$ sammt ihren ersten Differentialquotienten nach $x_1, x_2 \ldots x_n$, deren Existenz als vorausgesetzt wird, eindeutig, endlich und stetig sein, wobei endlich in dem Sinne zu verstehen ist, dass sie eine endliche untere und obere Grenze haben. Dann kann man successive auf folgende Weise ein Element des Integralsystems herstellen, in welchem $x_1 \ldots x_n$ in t_0 bezüglich die Werthe $x_1^0 \ldots x_n^0$ annehmen. Die erste Annäherung $x_1^1 \ldots x_n^1$ ist gegeben durch

$$x_1^1 - x_1^0 = \int_{t_0}^{t} f_1(t, x_1^0 \ldots x_n^0)\, dt \ldots x_n^1 - x_n^0 = \int_{t_0}^{t} f_n(t, x_1^0 \ldots x_n^0)\, dt,$$

die zweite $x_1^2 \ldots x_n^2$ durch

$$x_1^2 - x_1^0 = \int_{t_0}^{t} f_1(t, x_1^1 \ldots x_n^1)\, dt \ldots x_n^2 - x_n^0 = \int_{t_0}^{t} f_n(t, x_1^1 \ldots x_n^1)\, dt.$$

[1] Journal de Mathématiques (1890).

die m^{te} $x_1^m \dots x_n^m$ durch

$$x_1^m - x_1^0 = \int_{t_0}^{t} f_1(t, x_1^{m-1} \dots x_n^{m-1})\, dt \dots x_n^m - x_n^0 = \\ = \int_{t_0}^{t} f_n(t, x_1^{m-1} \dots x_n^{m-1})\, dt.$$

Nimmt man hiebei stets die obere Grenze t der Integrale genug nahe an t_0, so werden die $t, x_1^m \dots x_n^m$ stets die für die schrittweise Berechnung nöthige Bedingung erfüllen, in die festgesetzte Umgebung von $t_0, x_1^0 \dots x_n^0$ zu fallen. Bleiben die absoluten Beträge von $f_1(t, x_1 \dots x_n) \dots f_n(t, x_1 \dots x_n)$ in derselben kleiner als die Zahl M, so genügt es, t so klein zu nehmen, dass sowohl $x_k^0 - M(t - t_0)$, als auch $x_k^0 + M(t - t_0)$ für $k = 1, 2 \dots n$ in ihr liegen, was erreicht wird, wenn $|t - t_0|$ kleiner genommen wird als die kleinere der beiden Grössen ρ und $\frac{r}{M}$. Bezeichnet man $x_k^m - x_k^{m-1} = X_k^m$ und wählt M so, dass auch $\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right| < M$ in der Umgebung wird, so ist nach dem Mittelwerthsatze

$$|X_k^m| = \left| \int_{t_0}^{t} [f_k(t, x_1^{m-1} \dots x_n^{m-1}) - f_k(t, x_1^{m-2} \dots x_n^{m-2})]\, dt \right| \\ < M \int_{t_0}^{t} [|x_1^{m-1} - x_1^{m-2}| + \dots + |x_n^{m-1} - x_n^{m-2}|]\, dt \\ < M \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{k=1}^{n} |X_k^{m-1}| \right) dt$$

für $m > 1$. Für $m = 1$ erhält man direct

$$|X_k^1| < M |t - t_0|,$$

woraus dann folgt

$$|X_k^m| < \frac{n^{m-1} M^m |t - t_0|^m}{m!} < \frac{[nM|t - t_0|]^m}{m!}.$$

Also ist jede der Reihen

$$x_k = x_k^0 + X_k^1 + X_k^2 + \dots \qquad (k = 1, 2 \dots n),$$

die zusammen ein Element eines Integralsystems bilden, in einer Umgebung der Stelle $t_0, x_1^0 \dots x_n^0$ vom Radius der kleineren

der beiden Grössen ρ und $\frac{r}{M}$ absolut und gleichmässig convergent. Das erhaltene System ist offenbar auch das einzige, das unter den gemachten Bedingungen in t_0 beziehungsweise die Werthe $x_1^0 \ldots x_n^0$ annimmt.

2. Da die Functionen $f_1(t, x_1 \ldots x_n) \ldots f_n(t, x_1 \ldots x_n)$ in dem angegebenen Bereiche sammt ihren ersten Derivirten stetig hinsichtlich sämmtlicher Variablen sind, so sind es auch $X_k^0, X_k^1, \ldots X_k^m \ldots$, also ist jedes Glied der Reihe, die x_k darstellt, nach den Integrationsconstanten $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ stetig. Somit ist, da die Reihe für x_k, wie aus den vorstehenden Ungleichungen hervorgeht, bezüglich $x_1^0 \ldots x_n^0$ und in einer Umgebung derselben gleichmässig convergirt, auch x_k eine stetige Function dieser Grössen. Fügt man nun zu den früheren Bedingungen noch die weiteren, dass die $f_1(t, x_1 \ldots x_n) \ldots f_n(t, x_1 \ldots x_n)$ auch die zweiten Differentialquotienten nach den $x_1, x_2 \ldots x_n$ in einer Umgebung von $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ besitzen und dass sie in derselben stetig hinsichtlich sämmtlicher Variabeln sind, so sind die in (1) erhaltenen Integrale auch nach den Integrationsconstanten $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ differentiirbar.

Da in Folge der gemachten Voraussetzungen die Differentiation unter den Integralzeichen gestattet ist, so erhält man zunächst durch successive Berechnung

$$\left| \frac{\partial x_k^m}{\partial x_i^0} \right| < e^{nM|t-t_0|} < e^{nM\delta},$$

wenn $|t-t_0| < \delta$ genommen wird, wo δ die kleinere der beiden Zahlen ρ und $\frac{r}{M}$ ist.

Bezeichnet man der Kürze halber

$$\frac{\partial f_k(t, x_1 \ldots x_n)}{\partial x_\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f_k(t, x_1 \ldots x_n)}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}$$

bezüglich mit

$$f_{k,\lambda}(t, x_1 \ldots x_n) \quad \text{und} \quad f_{k,\lambda,\mu}(t, x_1 \ldots x_n)$$

und berücksichtigt, dass

$$x_k^{m-1} = x_k^{m-2} + X_k^{m-1}$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{\partial X_k^m}{\partial x_i^0} = \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} \Big\{ [f_{k,\lambda}(t, x_1^{m-1} \ldots x_n^{m-1}) -$$

$$- f_{k,\lambda}(t, x_1^{m-2} \ldots x_n^{m-2})] \frac{\partial x_\lambda^{m-2}}{\partial x_i^0} + f_{k,\lambda}(t, x_1^{m-1} \ldots x_n^{m-1}) \frac{\partial X_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0} \Big\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda} \Big[\sum_{\mu} f_{k,\lambda,\mu}(t, x_1^{m-2} + \theta X_1^{m-1} \ldots x_n^{m-2} + \theta X_n^{m-1}) \frac{\partial x_\lambda^{m-2}}{\partial x_i^0} X_\mu^{m-1}$$

$$- f_{k,\lambda}(t, x_1^{m-1} \ldots x_n^{m-1}) \frac{\partial X_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0} \Big] dt.$$

Wird nun M so gross gewählt, dass es in der Umgebung der Stelle $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ auch grösser als die zweiten Derivirten der $f_1, f_2 \ldots f_n$ nach den $x_1, x_2 \ldots x_n$ ist und bezeichnet M' eine Zahl, die grösser als

$$M \text{ und } nMe^{nM\delta}$$

ist, so findet man

$$\left| \frac{\partial X_k^m}{\partial x_i^0} \right| < M' \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\left| \frac{\partial X_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0} \right| + |X_\lambda^{m-1}| \right) dt,$$

welche Formel für $m > 1$ gilt. Für $m = 1$ ergibt sich direct

$$\left| \frac{\partial X_k^0}{\partial x_i^0} \right| < M' |t - t_0|$$

und schliesslich vermöge obiger Formel

$$\left| \frac{\partial X_k^m}{\partial x_i^0} \right| < M' |t - t_0| \frac{[nM' |t - t_0|]^m}{m!}.$$

woraus folgt, dass die Reihe

$$x_k^0 + X_k^1 + X_k^2 + \ldots$$

nach x_i^0 gliedweise differenzirbar ist, da die Reihe der Differentialquotienten dieser Glieder gleichmässig convergirt.

Man erhält somit den Satz:

Sind in den Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1 \ldots x_n) \ldots \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1 \ldots x_n)$$

die Functionen $f_1(t, x_1 \ldots x_n) \ldots f_n(t, x_1 \ldots x_n)$ sammt ihren ersten Derivirten nach den $x_1, x_2 \ldots x_n$ an der Stelle $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ und in einer Umgebung derselben eindeutig, endlich und stetig nach den sämmtlichen Veränderlichen, so gibt es ein und nur ein Integralsystem, dessen Glieder in t_0 beziehungsweise die Werthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ annehmen. Diese Glieder sind hinsichtlich der $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ in einer Umgebung derselben stetig und besitzen gewiss auch Differentialquotienten nach denselben, wenn die zweiten Derivirten der $f_1, f_2 \ldots f_n$ nach den $x_1, x_2 \ldots x_n$ an der Stelle $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ bestehen und in der Umgebung von $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ bezüglich $t, x_1 \ldots x_n$ ebenfalls eindeutig, endlich und stetig sind.[1]

Unter diesen Voraussetzungen haben die Integrale offenbar auch zweite und dritte Derivirte nach t, die in der genannten Umgebung eindeutig, endlich und stetig sind.

Da die Reihe aus dem Differentialquotienten der Glieder jeder obigen Reihe auch hinsichtlich t an der Stelle t_0 gleichmässig convergirt, so ist an dieser Stelle

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k^0} = 0 \text{ für } i \gtrless k \text{ und } \frac{\partial x_k}{\partial x_k^0} = 1.$$

Hat die Umgebung von $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$, in der $f_1, f_2 \ldots f_n$ nebst ihren ersten Derivirten nach $x_1, x_2 \ldots x_n$ eindeutig, endlich und stetig hinsichtlich $t, x_1 \ldots x_n$ sind, bezüglich t den Radius ρ und r bezüglich $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind, ferner die absoluten Beträge der Functionen und ihrer ersten Derivirten in dieser Umgebung nicht grösser als M, so erhält man das Element des Integralsystems für eine Umgebung von t_0, die kleiner als die kleinere der Grössen ρ und $\frac{r}{M}$ ist. Bezeichnen ρ', r' und M' die analogen Grössen hinsichtlich der Functionen ihrer ersten und zweiten Derivirten nach den $x_1, x_2 \ldots x_n$, so sind sicher die

[1] Ich habe diese Sätze bereits am Anfange dieses Decenniums in meinen Vorlesungen vorgetragen.

Glieder des Integralsystems nach den $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ differenzirbar für den Bereich $|t-t_0| < \rho'$ und $\frac{r'}{M'}$.

Man ersieht sofort aus der Ableitung, dass der letzte Theil des Satzes sich erweitern lässt, im Falle die $f_1, f_2 \ldots f_n$ nach den $x_1, x_2 \ldots x_n$ Differentialquotienten bis zur $(m+1)^{\text{ten}}$ Ordnung besitzen und diese eindeutig, endlich und stetig sind für alle $t, x_1, x_2 \ldots x_n$, für welche $|t-t_0| < \rho$, $|x_1-x_1^0| < r \ldots |x_n-x_n^0| < r$. Ist dann M eine Zahl, nicht kleiner als die absoluten Beträge der Functionen und ihre vorgenannten Derivirten in dieser Umgebung, so besitzen die Glieder des gefundenen Integralsystems Derivirte bis zur m^{ten} Ordnung nach $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ für alle $|t-t_0|$, die zugleich $< \rho$ und $\frac{r}{M}$ sind.

Die Betrachtungen, welche die Bemerkung über die Differentiation der Glieder des erhaltenen Integralelementes nach den Constanten $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ ergaben, lassen sich auch auf den Fall anwenden, dass die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ einen Parameter μ enthalten und führen zu folgender Erkenntniss:

Sind $f_1, f_2 \ldots f_n$, sammt ihren ersten Derivirten nach $x_1, x_2 \ldots x_n$, μ, deren Existenz also vorausgesetzt wird, an der Stelle $t_0, x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$, μ_0 und in ihrer Umgebung eindeutig, endlich und stetig nach $t, x_1 \ldots x_n$, μ, und gilt das Gleiche von den zweiten gemischten Differentialquotienten der $f_1, f_2 \ldots f_n$ nach den $x_1, x_2 \ldots x_n$ mit μ, so sind auch die Glieder des Integralelementes in μ_0 nach μ differenzirbar.

Ist ρ der Radius der angeführten Umgebung bezüglich t und r bezüglich $x_1, x_2 \ldots x_n$, μ, ferner M nicht kleiner als die absoluten Beträge der genannten Functionen und ihrer Derivirten, so ist die Differentiation der Integrale gewiss gestattet für alle t, welche der Bedingung $|t-t_0| < \rho$ und $\frac{r}{M}$ genügen.

Dieser Satz lässt sich unmittelbar ausdehnen für den Fall, dass die $f_1, f_2 \ldots f_n$ wiederholte Differentiationen nach den μ zulassen, und man erhält dann:

Haben die $f_1, f_2 \ldots f_n$ gemischte Differentialquotienten nach den $x_1, x_2 \ldots x_n$ von der ersten, nach μ bis zur m^{ten} Ordnung

und sind dieselben in $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0, \mu_0$ und ihrer Umgebung eindeutig, endlich und stetig nach $t, x_1 \ldots x_n, \mu$, so besitzen die Integrale in μ_0 gewiss Differentialquotienten nach μ bis zur $m$ten Ordnung für alle t, in einer Umgebung von t_0, deren Radius kleiner als ρ' und $\frac{r'}{M'}$ ist, wenn ρ', r', M' die den ρ, r, M analogen Grössen bedeuten.

3. Wendet man auf das gewonnene Element den aus der Functionentheorie complexer Veränderlichen geläufigen Begriff der Fortsetzung an, indem man im Bereiche des Elementes ein Fortsetzungscentrum annimmt und aus den Functionswerthen desselben das zugehörige Integralelement bildet, so kann möglicherweise der Bereich des neuen Elementes über den des ursprünglichen hinausgehen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man für eine Strecke t_0T, die zumindest gleich dem Bereiche des Anfangselementes ist, ein System von Functionen definirt, welche in t_0T überall den Differentialgleichungen genügen, eindeutig und unabhängig von den vermittelnden Fortsetzungscentren sind, da in jedem Punkte der Strecke die zugehörigen Functionswerthe nur **ein** Integralelement zulassen. Diese den einzelnen Stellen von t_0T zugehörigen Integralelemente sind für die Bildung der Functionen gleichwerthig, insoferne sich aus jedem von ihnen das ganze Functionensystem, das ein Integralsystem ist, herstellen lässt.

Werden die Fortsetzungen auf Grund der in (2) angegebenen Bedingungen vorgenommen, so ist jedes Integralelement in t_0T nach seinen Anfangswerthen differentiirbar und daher auch seine unmittelbare Fortsetzung. Da das Gleiche von jeder nachfolgenden unmittelbaren Fortsetzung gilt, so gelangt man zur Einsicht:

»Das Integralsystem ist auf der ganzen Strecke t_0T nach den Anfangswerthen eines jeden seiner Elemente differentiirbar«.

Enthalten die Differentialgleichungen auch Parameter und wahrt man bei den Fortsetzungen die in (2) angegebenen Bedingungen, unter denen ein Integralelement nach den einzelnen Parametern als differentiirbar sich ergab, so erkennt man wieder, wenn mit t_0T die Strecke bezeichnet wird, über

die das Anfangselement fortgeführt wurde: das Integralsystem ist längs der ganzen Strecke $t_0 T$ nach den Parametern differentiirbar.

Die Grenzen t_0 und T sind von den Stellen, die durch Fortsetzung aus einem Anfangselement erhalten werden, die nächsten, an denen die in (1) oder (2) angegebenen Bedingungen für die Bildung eines Elementes nicht mehr erfüllt sind. Sie müssen aber noch keineswegs die äussersten auf diese Weise erreichbaren Grenzpunkte sein, denn es wäre immerhin möglich, dass in der Umgebung eines derselben Stellen vorhanden sind, an denen die zugehörigen Integralelemente für grössere als die in (1) und (2) angegebenen kleinsten Intervalle gelten und somit über den Grenzpunkt hinausführen. Es ist aber auch noch die Möglichkeit vorhanden, dass zwar eine Fortsetzung über die eine oder beide Grenzstellen nicht besteht, dass aber dort ein neues eindeutiges Integralsystem ansetzt. Das zuerst gefundene ist dann nur ein Zweig eines mehrdeutigen Integralsystems. Zumal dieser letztere Umstand, der durch das angewandte Integrationsverfahren nicht ans Licht tritt, macht eine Modification desselben wünschenswerth.

Einen Fingerzeig hiefür gibt schon die Erörterung des einfachen Falles

$$F(x, y) = 0,$$

wenn F in einem gewissen Bereiche von x und y sammt seinen beiden ersten partiellen Ableitungen F'_x und F'_y endlich und stetig ist.

Es besteht dann der Satz:

Ist x_0, y_0 eine Stelle dieses Bereiches, an welcher $F(x, y)$ verschwindet und ist daselbst F'_y nicht Null, so existirt eine und nur eine in einer Umgebung von x_0 eindeutige, stetige Function von x, welche in x_0 einen Differentialquotienten nach x besitzt, daselbst den Werth y_0 annimmt und für y substituirt, $F(x, y)$ für diese Umgebung von x identisch Null macht.

Setzt man nun das gefundene Element in Fühlung mit der Gleichung $F(x, y) = 0$ fort, so erhält man eine in einem Intervalle ab eindeutige, stetige, differenzirbare Function von x, welche für y substituirt, $F(x, y)$ in diesem Intervall identisch

Null macht. Innerhalb des Intervalles haben $F(x, y)$, F'_x und F'_y dieselben Eigenschaften wie im Punkte x_0, y_0, aber nicht mehr in a und b. Gleichwohl müssen a und b noch nicht die äussersten erreichbaren Grenzen sein und auch nicht die gefundene Function der einzige aus dem Anfangselement ableitbare Zweig. Letzteres erkennt man sofort, wenn die Fortsetzung an einer der Grenzstellen a und b unmöglich wird, weil F'_y an derselben Null wird, während $F(x, y)$ und F'_x endlich und stetig bleiben. Ist dann F'_x nicht Null, so lässt sich x in einer Umgebung des betreffenden y als eindeutige stetige Function des y darstellen, und es ist somit dieses in der Umgebung der betreffenden Grenzstelle i. A. mehrdeutige Function des x. Es setzt also dann thatsächlich eine neue eindeutige Function von x, ein zweiter Zweig an, welcher für y der Gleichung genügt.

Die besprochenen Übelstände können vermieden werden, wenn man x und y als eindeutige Functionen einer dritten Veränderlichen darzustellen sucht. Als sehr geeignet erweist sich hiezu die durch

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

definirte Veränderliche s, wo $y' = \frac{dy}{dx}$ ist. Bei dieser Wahl ist nämlich nicht nur s eindeutige Function des x, sondern auch umgekehrt x eindeutige Function des s. Ferner besteht das Integral, sobald nur y' im Integrationsintervall (einschliesslich Grenzen) nicht von der ersten oder höheren als ersten Ordnung unendlich wird, aber, wie man leicht erkennt, gewiss auch immer, wenn y besteht, nicht zugleich mit y' unendlich wird, und stetig bleibt.

An Stelle der früheren Gleichung treten nun die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{ds} = \frac{F'_y}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y}}, \qquad \frac{dy}{ds} = -\frac{F'_x}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y}}.$$

Ordnet man den gegebenen x_0, y_0 den Werth s_0 zu und bildet aus diesen Anfangswerthen nach (1) das Integralelement, so kann man hieraus in der früher auseinandergesetzten Weise durch Fortsetzung für x und y zwei eindeutige Functionen

von s ableiten, welche den beiden Differentialgleichungen genügen. Diese Fortsetzungen gehen aber jetzt sowohl über die Stellen hinaus, wo nur eine der Functionen F'_x und F'_y verschwindet, als auch über die, an denen beide zwar zugleich Null werden, aber $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{dy}{ds}$ endliche Grenzwerthe annehmen. Die so erhaltenen Functionen genügen der Gleichung $F(x, y) = 0$, und es werden also auf diese Weise die früher ausgeschlossenen Stellen in die Darstellung aufgenommen. Dass sie die Gleichung befriedigen, erkennt man, wenn man dieselben in $F(x, y)$ substituirt, denn man erhält

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} = 0,$$

also $F = \text{Const.}$

Da aber $F(x, y)$ für alle in Betracht kommenden Werthe von x und y stätige Function beider Veränderlichen x und y ist, jede dieser wieder stetige Function von s, so ist auch F eine stetige Function von s. Daher hat die Constante für das ganze Intervall von s denselben Werth, und da sie für s_0 Null ist, so im ganzen Intervalle.

Um diese Überlegungen für die Integration des Systems von Differentialgleichungen in (1) nutzbar zu machen, kann man von der Bemerkung ausgehen, dass das Integralsystem eine Curve in der Mannigfaltigkeit $x, x_1, \ldots x_n$, wo der Gleichförmigkeit halber x für t geschrieben wurde, festlegen und also dieselben als Functionen des Bogens darzustellen suchen, der analytisch durch die Gleichung definirt ist

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx_n}{dx}\right)^2}.$$

Man wird also statt des ursprünglichen Systems das neue integriren:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_1^2 + \ldots + f_n^2}}$$

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{f_1}{\sqrt{1 + f_1^2 + \ldots + f_n^2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_1^2 + \ldots + f_n^2}}.$$

Die Integrale dieses Systems erstrecken sich über Stellen, die der früheren Darstellung unzugänglich waren. Es bildet für die Fortsetzung kein Hinderniss mehr, wenn an einer Stelle nur eine der Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ unendlich wird oder selbst, wenn bei mehreren dies eintritt, sobald nur die obigen Quotienten endliche Grenzwerthe besitzen.

Es ist auch klar, dass wenn bei den Fortsetzungen auf die Bedingungen in (2) Rücksicht genommen wurde, das erhaltene Integralsystem für den ganzen Verlauf des s nach den Anfangswerthen irgend eines Elementes und auch, wenn die in (2) angegebenen hinreichenden Bedingungen hinsichtlich etwaiger Parameter beachtet wurden, nach diesen differentiirbar sind.

Lässt sich s als eindeutige Function einer neuen Veränderlichen t ausdrücken, so kann man natürlich auch diese statt s einführen. Von dem Integralsystem der $(n+1)$ Differentialgleichungen kann man das der ursprünglichen n gewinnen, indem man wieder das s durch x ausdrückt und in die Gleichungen für $x_1, x_2 \ldots x_n$ substituirt.

Dies lässt sich immer bewerkstelligen, sobald $\frac{dx}{ds}$ nur isolirte Nullstellen besitzt, d. h. wenn um jede Nullstelle eine Umgebung von endlichem Radius besteht, in der keine weitere Nullstelle liegt und die untere Grenze dieser Radien nicht Null ist. Es lässt sich dann das Intervall in eine endliche Anzahl Theile zerlegen, derart, dass innerhalb jedes einzelnen $\frac{dx}{ds}$ nicht verschwindet.

Jedem einzelnen dieser Theile entspricht dann ein Intervall des x, dem ein Integralsystem zugeordnet ist. Die Giltigkeit des Systems ist auf dieses Intervall beschränkt, doch wenn zwei dieser Intervalle des x einen gemeinsamen Grenzpunkt haben und ganz auseinanderliegen, so können die beiden zugehörigen Integralsysteme als Fortsetzungen betrachtet und daher zu einem über beide Intervalle des x sich erstreckenden Integralsystem zusammengefasst werden.

Alle diese Integralsysteme haben die Eigenschaften des vermittelst der Veränderlichen s gebildeten Integralsystems.

War dieses nach den Anfangswerthen eines Elementes oder nach einem Parameter differentiirbar, so ist auch jedes dieser abgeleiteten Integralsysteme nach den Anfangswerthen irgend eines seiner Elemente oder nach dem Parameter differentiirbar.

Statt s kann man auch eine neue Veränderliche t einführen. Nur muss s eindeutige Function des t sein und vom Anfangspunkt aus den ganzen Curvenbogen stetig wachsend durchmessen, wenn t ein bestimmtes Intervall monoton durchläuft. Auf diese Weise erkennt man, dass an Stelle des ursprünglichen Systems von Differentialgleichungen das folgende behandelt werden kann

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x, x_1 \ldots x_n) \frac{dx}{dt} \ldots \frac{dx_n}{dt} = f_n(x, x_1 \ldots x_n) \frac{dx}{dt},$$

wo $\frac{dx}{dt}$ der Wahl überlassen bleibt.

Von diesen Bemerkungen in (3) wird zwar in der vorliegenden Abhandlung noch kein Gebrauch gemacht werden, sondern erst in der folgenden, aber des Zusammenhanges halber mit (1) und (2) wurden sie schon hier aufgenommen.

II.

1. Bekanntlich kann man der allgemeinsten Aufgabe der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Veränderlichen die Fassung geben:

Man soll die Veränderlichen $y_1, y_2 \ldots y_n$ so bestimmen, dass sie m Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_m = 0, \tag{1}$$

wo $n > m$, genügen und das Integral

$$\int_a^b f(x, y_1, y_1', y_2, y_2' \ldots y_n y_n') dx$$

zu einem Maximum oder Minimum machen.

Dieses Integral ist, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, nicht ein gewöhnliches bestimmtes Integral und die angesetzten Grenzen zeigen eigentlich nur an, dass für diese Werthe des x die $y_1, y_2 \ldots y_n$ wieder gewissen Bedingungen unterworfen sind. Unbeschadet der Allgemeinheit kann man

bekanntlich sich auf den Fall beschränken,[1] dass die $y_1, y_2 \ldots y_n$ in a und b gegebene Werthe annehmen sollen.

Die Function $f(x, y_1, y_1', y_2, y_2' \ldots y_n, y_n')$ kann als eine sehr allgemeine angenommen werden, insofern als keineswegs für die nachfolgenden Betrachtungen erforderlich ist, dass sie eine analytische sei, sondern bloss, dass im Integrationsbereiche ihre ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten nach $x, y_1 \ldots y_n, y_1' \ldots y_n'$ bestehen und daselbst endlich bleiben. Das Gleiche gilt bezüglich der Functionen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$.

Nach dem Vorgange Lagrange's, den ich hier als richtig hinnehmen will, hat man statt des ursprünglichen Integrals das andere

$$J = \int_a^b F dx$$

zu betrachten, wo

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_m \varphi_m$$

ist und die $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ noch unbestimmte Functionen des x sind, die aus den Bedingungen der Aufgabe zu berechnen sind.

Variirt man nun die Function F, indem man $y_1, y_2 \ldots y_n$ bezüglich $y_1 + \eta_1, y_2 + \eta_2 \ldots y_n + \eta_n$ setzt und nimmt die η_i in der sehr speciellen Form

$$\eta_1 = \varepsilon u_1, \; \eta_2 = \varepsilon u_2 \ldots \eta_n = \varepsilon u_n$$

an, wo die $u_1, u_2 \ldots u_n$ von ε freie Functionen des x sind, die sammt ihren ersten Derivirten im Integrationsbereiche endlich bleiben, und ε eine differentiale Grösse ist, so erhellt aus der Entwicklung von $F(x, y_1 + \eta, y_1' + \eta_1', \ldots y_n + \eta_n')$ bis zu den Gliedern dritter Dimension, dass die $y_1, y_2 \ldots y_n$ auch den n Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

zu genügen haben.

Die $(n+m)$ Grössen $y_1, y_2 \ldots y_n, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ sind also aus den $(n+m)$ Gleichungen

[1] Mayer, l. c.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_m = 0\end{array}\right\} \quad (2)$$

zu bestimmen. Dieses System wird, indem man durch die Gleichungen

$$\frac{dy_1}{dx} = y'_1,\ \frac{dy_2}{dx} = y'_2 \ldots \frac{dy_n}{dx} = y'_n$$

die neuen Veränderlichen $y'_1, y'_2 \ldots y'_n$ einführt, linear hinsichtlich der Grössen

$$y'_1, y'_2 \ldots y'_n;\ y_1, y_2 \ldots y_n;\ \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$$

und berechnet man aus dem vergrösserten nunmehr linearen System die

$$\frac{dy'_1}{dx}, \frac{dy'_2}{dx} \ldots \frac{dy'_n}{dx};\ \lambda'_1, \lambda'_2 \ldots \lambda'_m,$$

so ist es in die sogenannte kanonische Form gebracht, die den Betrachtungen in I zu Grunde lag. Bei der Behandlung der zweiten Variation wird dasselbe als bereits integrirt vorausgesetzt, und vermöge der Bemerkungen in I ist es nun möglich, sich über die Bildung dieses Integralsystems eine einigermassen klare Vorstellung zu machen. Es ist aber hiebei nothwendig, auf die Beschaffenheit der m Bedingungsgleichungen (1) Rücksicht zu nehmen und die beiden Fälle zu unterscheiden, ob jede Gleichung ausser $y_1, y_2 \ldots y_n$ auch erste Ableitungen derselben enthält oder ob auch solche Gleichungen vorhanden sind, in denen keine Derivirten vorkommen. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass im ersten Falle sich das System der Bedingungsgleichungen nicht in eines der zweiten Art transformiren lässt.

2. Um im ersten Falle dem System in (2) die kanonische Form zu geben, hat man das System der $(n+m)$ Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d\varphi_i}{dx} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

nach den $y_1'', y_2'' \ldots y_n'', \lambda_1', \lambda_2' \ldots \lambda_m'$ aufzulösen und die n Gleichungen

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1', \quad \frac{dy_2}{dx} = y_2', \ldots \frac{dy_n}{dx} = y_n'$$

anzufügen.

Diese Darstellung ist an jeder Stelle x des Integrationsbereiches möglich, wo die Determinante des Systems

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_1'} \ldots \frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_n'}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} \ldots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_1'} \ldots \frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_n'}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} \ldots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} \ldots \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}, & 0 \ldots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \ldots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}, & 0 \ldots 0 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

nicht verschwindet. An einer solchen Stelle können nicht sämmtliche Determinanten m^{ten} Grades der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2'} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_2'} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \end{vmatrix}$$

Null sein. Nimmt man nun an, dass

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m)}{\partial(y_1', y_2' \ldots y_m')} \neq 0,$$

so lassen sich nach einem bekannten Satze aus den Gleichungen (1) $y_1', y_2' \ldots y_m'$ in einer Umgebung der betreffenden Stelle $x, y_1 \ldots y_n, y_{m+1}' \ldots y_n'$ als eindeutige, stetige und differentiirbare Functionen dieser Variablen darstellen, so dass also

die Werthe von $y_1', y_2' \ldots y_m'$ durch die Werthe von $y_1 \ldots y_n$, $y'_{m+1} \ldots y'_n$ an der Stelle x vermöge der m Bedingungsgleichungen (1) schon gegeben sind. Man kann daher aus den Werthen, welche

$$y_1, y_2 \ldots y_n, y'_{m+1}, y'_{m+2} \ldots y'_n, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$$

an dieser Stelle x besitzen, als Anfangswerthe ein Integralelement bilden und durch Fortsetzung nach den Andeutungen in I, 3 das System sich hergestellt denken. Es ist aber auch klar, dass derartige Stellen x, wo obige Determinante nicht Null ist, vorhanden sein müssen, da sie in keinem noch so kleinen Intervall identisch verschwinden darf. Denn wäre dies der Fall, so würde die Anzahl der Integrationsconstanten kleiner als $2n$ sein, was mit den Grenzbedingungen unverträglich ist.

Es wird nun zunächst ausdrücklich angenommen, dass die Determinante (3) im ganzen Integrationsbereiche nicht verschwinde. Diese Voraussetzung, die in einer späteren Arbeit erweitert werden soll, lässt sich nicht umgehen, sobald man x, wie es in der vorliegenden Arbeit geschehen soll, als die unabhängige Veränderliche betrachten will, d. h. also annimmt, dass die $y_1, y_2 \ldots y_n$ im ganzen Integrationsbereiche sich als eindeutige Functionen der Abscisse x darstellen, so dass das vorgelegte Curvenintegral ein gewöhnliches bestimmtes wird. Diese Voraussetzungen liegen auch allen bisher veröffentlichten Untersuchungen, soweit sie exact sind, stillschweigend zu Grunde.

Aus ihr folgt, dass man das Integralsystem von (2) entstanden denken kann durch Fortsetzung aus einem Anfangselement, etwa dem im Anfangspunkte a. Da nun das kanonische System von Differentialgleichungen in (2) auch die in I, 2 angegebenen Bedingungen erfüllt, so werden die Glieder des Integralsystems nach den Anfangswerthen von $y_1, y_2 \ldots y_n$, $y'_{m+1}, y'_{m+2} \ldots y'_n$, $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ in a, die als die Integrationsconstanten betrachtet werden können und bezüglich mit

$$c_1, c_2 \ldots c_{2n}$$

bezeichnet werden mögen, sich differentiiren lassen.

3. Von den m Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_m = 0$$

soll nun nicht mehr jede auch erste Derivirte der $y_1, y_2 \dots y_n$ enthalten, sondern in μ derselben etwa

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0 \dots \varphi_\mu = 0$$

sollen keine Derivirten vorkommen, während jede der übrigen $(m-\mu)$ Gleichungen

$$\varphi_{\mu+1} = 0, \ \varphi_{\mu+2} = 0 \dots \varphi_m = 0$$

auch erste Derivirte besitzt, wobei selbstverständlich vorausgesetzt wird, dass sich aus diesen nicht eine Gleichung der ersten Art ableiten lässt.

Die Behandlung des Systems erfordert auch in diesem Falle zunächst seine Darstellung in kanonischer Form, da nur für solche Systeme die bekannten Sätze und Entwicklungen abgeleitet wurden. Nun gelingt in diesem Falle so wenig als im vorhergehenden (2) das gegebene System in ein ihm äquivalentes kanonisches überzuführen, aber auch hier lässt sich wie dort ein kanonisches herstellen, dem jedes seiner Integralsysteme genügt. Man erhält dasselbe, wenn man aus dem System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0 \qquad i = 1, 2 \dots n \\
&\frac{d^2}{dx^2}\varphi_i(x, y_1, y_2 \dots y_n) = 0 \qquad i = 1, 2 \dots \mu \\
&\frac{d}{dx}\varphi_i(x, y_1 \dots y_n, y_1' \dots y_n') = 0 \qquad i = \mu+1, \dots m \\
&y_1' = \frac{dy_1}{dx}, \ y_2' = \frac{dy_2}{dx} \dots y_n' = \frac{dy_n}{dx}
\end{aligned}\right\} (4)$$

die Grössen

$$\frac{dy_1'}{dx} \dots \frac{dy_n'}{dx}, \ \lambda_1 \dots \lambda_\mu, \ \frac{d\lambda_{\mu+1}}{dx} \dots \frac{d\lambda_m}{dx}$$

berechnet und die so erhaltenen Gleichungen der obigen letzten Gruppe hinzufügt. Die Bestimmung dieser Grössen ist an jeder Stelle möglich, wo die Determinante

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2} \ldots \frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_n'}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_1}, & \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_1'} \ldots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_1'} \ldots \frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_n'}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \ldots \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_n}, & \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_n'} \ldots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}, & 0 \ldots 0, & 0 \ldots 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_n}, & 0 \ldots 0, & 0 \ldots 0 \\
\frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_1'} \ldots \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_n'}, & 0 \ldots 0, & 0 \ldots 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \ldots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}, & 0 \ldots 0, & 0 \ldots 0
\end{vmatrix} \qquad (3^*)$$

nicht verschwindet, und um allgemeine Resultate in diesem dritten Falle zu erlangen, ist die Annahme unvermeidlich, dass die obige Determinante, die in keinem noch so kleinen Intervall identisch verschwinden darf, überhaupt nirgends im Integrationsbereiche Null werde.

Das erhaltene kanonische System ist ein gemischtes, indem es aus einem kanonischen System von $2n+m-\mu$ Differentialgleichungen der ersten Ordnung besteht und μ Gleichungen, welche $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_\mu$ durch die übrigen Grössen ausdrücken, so dass auch sie unmittelbar durch die Auflösung des kanonischen Systems erhalten werden.

Jedes Lösungssystem des kanonischen Gleichungssystems genügt nun den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1', \quad \frac{dy_2}{dx} = y_2' \ldots \frac{dy_n}{dx} = y_n'$$

$$\varphi_i(x, y_1, y_2 \dots y_n) = a_i x + b_i \qquad i = 1, 2 \dots \mu$$
$$\varphi_i(x, y_1 \dots y_n, y'_1 \dots y'_n) = c_i \qquad i = \mu+1, \dots n,$$

wo die a_i, b_i, c_i Constante bedeuten.

Man erhält somit sämmtliche Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems, wenn man jene des kanonischen Systems aussucht, für welche die Constanten Null sind. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Lösungen an einer und somit jeder Stelle des Integrationsbereiches den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_i(x, y_1, y_2 \dots y_n) = 0, \quad \dfrac{d}{dx}\,\varphi_i(x, y_1, y_2 \dots y_n) = 0 \\ i = 1, 2 \dots \mu \\ \varphi_i(x, y_1 \dots y_n, y'_1 \dots y'_n) = 0 \qquad i = \mu+1, \dots m \end{array}\right\} \quad (5)$$

genügen. Die gesuchten Integralsysteme werden daher erhalten, indem man die Anfangswerthe von $y_1, y_2 \dots y_n$, $y'_1, y'_2 \dots y'_n$ diesen Gleichungen gemäss wählt.

Man erkennt leicht, dass sich dies immer bewerkstelligen lässt. Denn in Folge der Annahme, dass die obige Determinante (3*) an jeder Stelle x des Integrationsbereiches nicht Null ist, können an dieser Stelle auch nicht sämmtliche Determinanten m^{ten} Grades der Matrix

$$\left|\begin{array}{c} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} \dots \dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_1}, \dfrac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial y'_1} \dots \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y'_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} \dots \dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_n}, \dfrac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial y'_n} \dots \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y'_n} \end{array}\right|$$

Null sein. Ist etwa

$$\left|\begin{array}{c} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} \dots \dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_1}, \dfrac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial y'_1} \dots \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y'_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_m} \dots \dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_m}, \dfrac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial y'_m} \dots \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y'_m} \end{array}\right| \quad (6)$$

von Null verschieden, so können auch nicht alle Determinanten μ^{ten} Grades in der Matrix

$$\left|\begin{array}{cccc} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y'_1}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y'_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y'_m} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y'_1}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y'_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y'_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial y'_1}, & \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial y'_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial y'_m} \end{array}\right|$$

verschwinden.

Ist etwa

$$\frac{\partial(\varphi_1 \ldots \varphi_\mu)}{\partial(y'_1 \ldots y'_\mu)}$$

eine in x nicht verschwindende Determinante derselben, so lassen sich nach dem schon mehrmals angezogenen Satze, wenn für die Stelle x Werthe von $y'_1, y'_2 \ldots y_n$ gegeben sind, welche den μ Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \; \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_\mu = 0$$

genügen, μ Functionen von $x, y'_{\mu+1} \ldots y'_n$ herstellen, welche in einer gewissen Umgebung der Stelle $x, y'_{\mu+1} \ldots y'_n$ eindeutige, stetige, differentiirbare Functionen der Veränderlichen $x, y_{\mu+1} \ldots y_n$ sind und für $y'_1, y'_2 \ldots y'_\mu$ in die Gleichung substituirt, dieselben innerhalb dieser Umgebung identisch erfüllen.

Bezeichnet man der Kürze halber, wenn $i < \mu + 1$ ist,

$$\Phi_i = \frac{d}{dx}\, \varphi_i(y'_1, y'_2 \ldots y'_n)$$

so ersieht man sofort, dass die obige Determinante (6) identisch ist mit der Functionaldeterminante

$$\frac{\partial(\Phi_1 \ldots \Phi_\mu, \varphi_{\mu+1} \ldots \varphi_m)}{\partial(y''_1 \ldots y''_\mu, y'_{\mu+1} \ldots y'_m)}.$$

Daher kann man nach demselben Satze aus dem Gleichungssystem

$$\Phi_1 = 0 \ldots \Phi_\mu = 0, \; \varphi_{\mu+1} = 0 \ldots \varphi_m = 0$$

die $y'_1, y'_2 \dots y'_m$ als Functionen der $x, y_1 \dots y_n, y'_{m+1} \dots y'_n$ darstellen, wenn auch Werthe der $y'_1, y'_2 \dots y'_n$, welche diesen Gleichungen genügen, der Stelle x zugeordnet werden.

Es ergeben sich also aus den Gleichungen (5) die

$$y_1, y_2 \dots y_n,\; y'_1, y'_2 \dots y'_n$$

als Functionen der Veränderlichen $x, y_{\mu+1} \dots y_n, y'_{m+1} \dots y'_n$.

Wendet man diese Betrachtungen auf den Anfangspunkt a an, in dem die Werthe von $y_1, y_2 \dots y_n, y'_1, y'_2 \dots y'_n$ als bekannt anzusehen sind, da bei der Behandlung der zweiten Variation die Gleichungen der ersten Variation als schon gelöst angenommen werden, so sind vermöge der m Bedingungsgleichungen μ der $y_1, y_2 \dots y_n$ ihre Differentialquotienten und weitere $m-\mu$ der $y'_1, y'_2 \dots y'_n$ als eindeutige Functionen der übrigen dieser Grössen aufzufassen. Treffen etwa die für die Stelle x gemachten Annahmen in a zu, so können die $y_{\mu+1} \dots y_n, y'_{m+1} \dots y'_n$ und x als die unabhängigen unter ihnen angesehen werden, und es erscheinen dann auch bloss die Anfangswerthe dieser Grössen als willkürlich dem Punkte $x = a$ zugeordnet, die übrigen aber durch sie bestimmt. Fügt man zu diesen Anfangswerthen der $y_1, \dots y_n\, y'_1 \dots y'_n$, von denen aber nur die $y_{\mu+1} \dots y_n, y'_{m+1} \dots y'_n$, wie eben erörtert wurde, als willkürlich gelten können, noch die Werthe, die $\lambda_{\mu+1} \dots \lambda_m$ in a haben, so kann man hieraus ein Integralelement des im Gleichungssystem (4) enthaltenen kanonischen Systems von Differentialgleichungen bilden. Die übrigen μ Gleichungen des Gleichungssystems geben dann die zugehörigen Werthe von $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_\mu$. Durch Fortsetzung dieses Elementes und paralleler der Bedingungsgleichungen erhält man dann nach (I, 1) ein über ab sich erstreckendes Lösungssystem des kanonischen Gleichungssystems, das aber, weil die Bedingungsgleichungen (5) erfüllt sind, auch dem ursprünglichen Gleichungssystem genügt.

Als Integrationsconstanten sind in diesem Lösungssystem also die Werthe von

$$y'_{m+1} \dots y'_n,\; y_{\mu+1} \dots y_n,\; \lambda_{\mu+1} \dots \lambda_m$$

in a zu betrachten, die bezüglich mit

$$c_1 \dots c_{n-m},\; c_{n-m+1} \dots c_{2n-m-\mu} \dots c_{2(n-\mu)}$$

bezeichnet werden mögen. Da im kanonischen System von Differentialgleichungen in Folge der in (II, 1) gemachten Voraussetzungen und weil die Determinante (3*) im Integrationsbereiche nirgends Null ist, die Bedingungen in (II, 2) erfüllt sind, so lassen sich die Integrale $y_1, y_2 \ldots y_n$, $y'_1, y'_2 \ldots y'_n$, $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ auch nach diesen Constanten differentiiren.

Auch in diesem Falle wird, wie im vorhergehenden, in der vorliegenden Abhandlung vorausgesetzt, dass 1. die $y_1, y_2 \ldots y_n$ für alle Werthe des x von a bis b eindeutige Functionen dieser Veränderlichen sind, was zur Folge hat, dass das vorgelegte Curvenintegral als ein gewöhnliches bestimmtes anzusehen ist, und 2. die Determinante (3*) nirgends im Intervalle ab Null ist.

III.

Die vorstehenden, wenn auch sehr unvollständigen und aphoristischen Bemerkungen über die Differentialgleichungen der ersten Variation dürften gleichwohl für die Behandlung der zweiten Variation $\delta^2 J$ des Integrals genügen. Diese selbst ist für die vorhin angenommenen Variationen $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ gegeben durch

$$\delta^2 J = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\eta_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial y_n}\eta_n \frac{\partial}{\partial y'_1}\eta'_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial y'_n}\eta'_n\right)^2 F dx$$

$$= \int_a^b \Omega(\eta, \eta')\, dx \tag{1}$$

wenn

$$\Omega(\eta, \eta') = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\eta_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial y_n}\eta_n \frac{\partial}{\partial y'_1}\eta'_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial y'_n}\eta'_n\right)^2 F$$

gesetzt wird.

Aus

$$2\Omega(\eta, \eta') = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\Omega(\eta, \eta')}{\partial\eta_k}\eta_k + \frac{\partial\Omega(\eta, \eta')}{\partial\eta'_k}\eta'_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\Omega(\eta, \eta')}{\partial\eta_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega(\eta, \eta')}{\partial\eta'_k}\right)\eta_k$$

$$+ \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Omega(\eta, \eta')}{\partial\eta'_k}\eta_k\right)$$

folgt, da die $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ an den Grenzen a und b verschwinden:

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \eta_k \left(\frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_k} \right) dx, \quad (2)$$

wo also

$$\frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_k \partial y_i} \eta_i + \frac{\partial^2 F}{\partial y_k \partial y'_i} \eta'_i - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'_k \partial y_i} \eta_i - \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} \eta'_i \right) \right] \quad (3)$$

ist.

Vorbereitend soll nun zunächst der Fall des absoluten Maximums und Minimums, in dem also zwischen den gesuchten Functionen $y_1, y_2 \ldots y_n$ keine Bedingungsgleichungen bestehen, untersucht werden unter der von allen Autoren bisher stillschweigend gemachten Annahme, dass für alle Werthe des x im Intervall ab die $y_1, y_2 \ldots y_n$ eindeutige Functionen dieser Veränderlichen seien. Die obige Form für

$$\frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_k}$$

weist unmittelbar auf einen Zusammenhang mit den Differentialgleichungen der ersten Variation

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0, \qquad i = 1, 2 \ldots n, \quad (4)$$

wo hier $F = f$ ist, hin, der sofort evident wird, wenn man die $y_1, y_2 \ldots y_n$ nach einem Parameter c differentiirbar und die Gleichungen als nach diesem Parameter identische annimmt. Als solche Parameter bieten sich von selbst die Integrationsconstanten dar, wie aus folgender Bemerkung erhellt. Vervollständigt man die n Differentialgleichungen der ersten Variation (4) durch Hinzufügen der n Gleichungen

$$\frac{dy_1}{dx} = y'_1, \; \frac{dy_2}{dx} = y'_2 \ldots \frac{dy_n}{dx} = y'_n$$

zu einem linearen System von $2n$ Gleichungen, so sollen für dieses die in (II, 2) gemachten Voraussetzungen gelten und zu Integrationsconstanten die $2n$ Anfangswerthe in a genommen werden. Denkt man sich die Integrale in das Differentialgleichungssystem substituirt, so werden die einzelnen Gleichungen hinsichtlich der Integrationsconstanten identisch erfüllt, und da überdies nach (II, 2) die Integrale nach diesen Constanten differentiirbar sind, so erhält man, wenn c eine solche Constante bezeichnet, die $2n$ Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial c}+\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k'}\left(\frac{\partial y_k}{\partial c}\right)'-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial c}+\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'}\left(\frac{\partial y_k}{\partial c}\right)'\right)\right]=0$$

$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial y_1}{\partial c}=\frac{\partial y_1'}{\partial c},\ \frac{d}{dx}\frac{\partial y_2}{\partial c}=\frac{\partial y_2'}{\partial c}\cdots\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_n}{\partial c}\right)=\frac{\partial y_n'}{\partial c}.$$

Das System der $2n$ linearen Differentialgleichungen nach z

$$\left.\begin{aligned}&\psi_i(z) = \\ &\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k}z_k+\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k'}z_k'-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k}z_k+\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'}z_k'\right)\right] \\ &= 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \\ &\frac{dz_1}{dx}=z_1',\ \frac{dz_2}{dx}=z_2'\ldots\frac{dz_n}{dx}=z_n',\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

das sich wegen der in III gemachten Voraussetzung, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_n'} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_n'}\end{vmatrix}$$

im Integrationsintervalle nirgends verschwinde, überall daselbst in der kanonischen Form darstellen lässt, hat somit die $2n$ Integralsysteme

$$\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial y_1}{\partial c_1}\right)', \left(\frac{\partial y_2}{\partial c_1}\right)' \dots \left(\frac{\partial y_n}{\partial c_1}\right)' \frac{\partial y_1}{\partial c_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial c_1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\left(\frac{\partial y_1}{\partial c_{2n}}\right)', \left(\frac{\partial y_2}{\partial c_{2n}}\right)' \dots \left(\frac{\partial y_n}{\partial c_{2n}}\right)' \frac{\partial y_1}{\partial c_{2n}} \dots \frac{\partial y_n}{\partial c_{2n}}
\end{array}$$

Nun sind nach den obigen Festsetzungen $c_1 \dots c_n, c_{n+1} \dots c_{2n}$ bezüglich die Werthe von $y_1' \dots y_n', y_1 \dots y_n$ in a, und da, wie die Darstellung der Integrale in I, 1 zeigt, die Differential-quotienten

$$\frac{\partial y_1'}{\partial c_1} \dots \frac{\partial y_n'}{\partial c_n}, \frac{\partial y_1}{\partial c_{n+1}} \dots \frac{\partial y_n}{\partial c_{2n}}$$

in a alle gleich 1 werden, während alle übrigen daselbst verschwinden, so ist die Determinante

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial y_1'}{\partial c_1} \dots \frac{\partial y_n'}{\partial c_1}, \frac{\partial y_1}{\partial c_1} \dots \frac{\partial y_n}{\partial c_1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\partial y_1'}{\partial c_{2n}} \dots \frac{\partial y_n'}{\partial c_{2n}}, \frac{\partial y_1}{\partial c_{2n}} \dots \frac{\partial y_n}{\partial c_{2n}}
\end{vmatrix}$$

in a gleich 1 und verschwindet daher nicht identisch im Integrationsintervalle. Somit sind die oben angegebenen Integral-systeme des Systems linearer Differentialgleichungen (5) von einander linear unabhängig und bilden also ein Fundamental-system.

Berücksichtigt man nun, dass

$$\psi_i(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Omega(z, z')}{\partial z_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega(z, z')}{\partial z_i'}\right]$$

ist, so erhält man

$$\delta^2 J = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \eta_i \psi_i(\eta)\, dx. \qquad (6)$$

IV.

Aus diesem Ausdrucke für $\psi_i(z)$ ergeben sich wichtige Folgerungen vermöge einiger Eigenschaften, die den linearen

Differentialausdrücken der zweiten Ordnung $\psi_i(z)$ innewohnen und die zuförderst abgeleitet werden sollen.

Da $\Omega(z, z')$ eine nach $z_1, z_2 \ldots z_n, z'_1, z'_2 \ldots z'_n$ quadratische Form ist, so folgt aus einer bekannten Eigenschaft derselben, wenn $2n$ anderen Grössen entsprechend mit $u_1, u_2 \ldots u_n, u'_1, u'_2 \ldots u'_n$ bezeichnet werden, wo die oberen Striche wieder Derivationsindices bedeuten sollen:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(u_k \frac{\partial\Omega(z,z')}{\partial z_k} + u'_k \frac{\partial\Omega(z,z')}{\partial z'_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(z_k \frac{\partial\Omega(u,u')}{\partial u_k} + z'_k \frac{\partial\Omega(u,u')}{\partial u'_k}\right)$$

oder

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \left[\frac{\partial\Omega(z,z')}{\partial z_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega(z,z')}{\partial z'_k}\right] + \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial\Omega(z,z')}{\partial z'_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} z_k \left[\frac{\partial\Omega(u,u')}{\partial u_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega(u,u')}{\partial u'_k}\right] + \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial\Omega(u,u')}{\partial u'_k}.$$

Somit

$$\sum_{k=1}^{n}[u_k\psi_k(z) - z_k\psi_k(u)] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n}\left[z_k \frac{\partial\Omega(u,u')}{\partial u'_k} - u_k \frac{\partial\Omega(z,z')}{\partial z'_k}\right].$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial\Omega(u,u')}{\partial u'_k} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\Omega(u,u')}{\partial u'_k \partial u'_i} u'_i + \frac{\partial^2\Omega(u,u')}{\partial u'_k \partial u_i} u_i\right)$$

und

$$\frac{\partial\Omega(z,z')}{\partial z'_k} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\Omega(z,z')}{\partial z'_k \partial z'_i} z'_i + \frac{\partial^2\Omega(z,z')}{\partial z'_k \partial z_i} z_i\right).$$

Daher erhält man

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k\psi_k(z)-z_k\psi_k(u)) = \frac{d}{dx}\sum_{i,k}\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega(u,u')}{\partial u_i'\partial u_k'}(u_i'z_k-u_kz_i')$$

$$+\frac{d}{dx}\sum_{i,k}\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega(u,u')}{\partial u_k'\partial u_i}(u_iz_k-z_iu_k).$$

Bezeichnet man der Kürze halber den bilinearen Differentialausdruck der ersten Ordnung

$$\sum_{i,k}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\Omega(z,z')}{\partial z_i'\partial z_k'}(u_i'z_k-u_kz_i')+\frac{\partial^2\Omega(z,z')}{\partial z_k'\partial z_i}(u_iz_k-z_iu_k)\right]$$

$$=\sum_{i,k}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i'\partial y_k'}(u_i'z_k-u_kz_i')+\frac{\partial^2 F}{\partial y_k'\partial y_i}(u_iz_k-z_iu_k)\right]$$

mit $\psi(z, u)$, so nimmt obige Formel die Gestalt an

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k\psi_k(z)-z_k\psi_k(u)) = \frac{d}{dx}\psi(z,u).$$

Der Differentialausdruck $\psi(z, u)$ ist alternirend, daher ist $\psi(z, z) = 0$.

Sind

$$z_1, z_2 \ldots z_n$$
$$u_1, u_2 \ldots u_n$$

zwei linear unabhängige Integralsysteme des Differentialgleichungssystems (III, 5) $\psi_k(z) = 0$, so folgt

$$\psi(z, u) = \text{Const.},$$

wo wegen der Stetigkeit von $\psi(z, u)$ die Constante im ganzen Integrationsintervalle denselben Werth besitzt.

Verschwinden überdies die sämmtlichen z und u an derselben Stelle x, so ist diese Constante Null. Zwei linear unabhängige Integralsysteme, für welche obige Constante Null ist, sollen zu einander conjugirt heissen. Es ist nun klar, dass für jede Stelle x des Integrationsintervalls n linear unabhängige Integralsysteme bestehen, deren einzelne Glieder an dieser Stelle verschwinden. Je zwei dieser n Systeme sind also

einander conjugirt. Jede Gruppe nun von mindestens n linear unabhängigen Integralsystemen, die so beschaffen sind, dass je zwei unter ihnen einander conjugirt sind, soll kurz ein conjugirtes System genannt werden. Solche conjugirte Systeme zu bilden, hat keine Schwierigkeiten, da die $\frac{1}{2}n(n-1)$ bilinearen Gleichungen, die zwischen den Constanten entstehen, wenn man jedes der Systeme durch dasselbe Fundamentalsystem ausdrückt, sich leicht successive auflösen lassen.

Bevor nun auf die genaue Untersuchung dieser conjugirten Systeme eingegangen wird, soll die von Clebsch angegebene Transformation der zweiten Variation des Integrals abgeleitet werden, wozu die vorstehenden Bemerkungen eben genügen.

V.

Um die gewonnene Formel (1) für die Transformation der zweiten Variation des Integrals

$$\delta^2 J = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \eta_i \psi_i(\eta)\, dx$$

zu verwenden, setze man

$$\eta_k = \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda z_k^\lambda,$$

wo

$$z_1^\lambda, z_2^\lambda \ldots z_n^\lambda \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots n)$$

ein Integralsystem von (III, 5) bedeute, das kurz mit z^λ bezeichnet werde. Es wird dann

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_k \psi_k(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \psi_k(\eta) \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda z_k^\lambda = \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \sum_{k=1}^{n} \psi_k(\eta) z_k^\lambda.$$

Anderseits ist

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^\lambda \psi_k(\eta) = \frac{d}{dx} \psi(\eta, z^\lambda),$$

wo

$$\psi(\eta, z^\lambda) = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k}[\eta_i (z_k^\lambda)' - \eta'_k z_i^\lambda] + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_k \partial y_i}(\eta_i z_k^\lambda - \eta_k z_i^\lambda)$$

ist.

Daher, wenn mit ρ_λ multiplicirt und nach λ summirt wird:

$$\sum_{\lambda, k} \rho_\lambda z_k^\lambda \psi_k(\eta) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \psi_k(\eta) = \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \frac{d}{dx} \psi(\eta, z^\lambda)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \psi(\eta, z^\lambda)\right] - \sum_{\lambda=1}^{n} \rho'_\lambda \psi(\eta, z^\lambda). \qquad (1)$$

Nun ist aber, wenn man für $\psi(\eta, z^\lambda)$ seinen Werth in (IV. setzt:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \rho'_\lambda \psi(\eta, z^\lambda) = \sum_{i,k,\lambda} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} \rho'_\lambda (\eta_i (z_k^\lambda)' - \eta'_k z_i^\lambda)$$

$$+ \sum_{i,k,\lambda} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_k \partial y_i} \rho'_\lambda (\eta_i z_k^\lambda - \eta_k z_i^\lambda)$$

Ferner ist

$$\rho'_\lambda[\eta_i (z_k^\lambda)' - z_i^\lambda \eta'_k] = \rho'_\lambda\left[(z_k^\lambda)' \sum_{\mu=1}^{n} \rho_\mu z_i^\mu - z_i^\lambda \sum_{\mu=1}^{n} (\rho_\mu (z_k^\mu)' + \rho'_\mu z_k^\mu)\right]$$

$$= \rho'_\lambda\left[\sum_{\mu=1}^{n} \rho_\mu (z_i^\mu (z_k^\lambda)' - z_i^\lambda (z_k^\mu)') - z_i^\lambda \sum_{\mu=1}^{n} \rho'_\mu z_k^\mu\right]$$

und daher wird

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \rho'_\lambda \psi(\eta, z^\lambda) = \sum_{i,k,\lambda,\mu} \rho'_\lambda \rho_\mu \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} (z_i^\mu (z_k^\lambda)' - z_i^\lambda (z_k^\mu)') \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y_k} (z_i^\mu z_k^\lambda - z_i^\lambda z_k^\mu) \right\}$$

$$- \sum_{i,k,\lambda,\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} \rho'_\lambda \rho'_\mu z_i^\lambda z_k^\mu$$

$$= \sum_{\lambda,\mu} \psi(z^\mu, z^\lambda) \rho'_\lambda \rho_\mu - \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} \sum_{\lambda=1}^{n} \rho'_\lambda z_i^\lambda \sum_{\mu=1}^{n} \rho'_\mu z_k^\mu.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die obige Formel (1), so erhält man, wenn man noch

$$\zeta_i = \sum_{\lambda=1}^{n} \rho'_\lambda z_i^\lambda$$

setzt:

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k \psi_k(\eta) = \frac{d}{dx} \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \psi(\eta, z^\lambda) - \sum_{\lambda,\mu} \psi(z^\mu, z^\lambda) \rho'_\lambda \rho_\mu$$
$$+ \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} \zeta_i \zeta_k,$$

wo

$$\psi(z^\mu, z^\lambda) = C_{\lambda\mu}$$

eine Constante ist. Sind daher die sämmtlichen n Systeme z^λ conjugirt, so werden diese Constanten Null, und der obige Ausdruck vereinfacht sich in

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k \psi_k(\eta) = \frac{d}{dx} \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \psi(\eta, z^\lambda) + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} \zeta_i \zeta_k.$$

Die ρ sind hiebei aus den Gleichungen

$$\eta_k = \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda z_k^\lambda \qquad k = 1, 2 \ldots n$$

und die

$$\zeta_k = \sum_{\lambda=1}^{n} \rho'_\lambda z_k^\lambda$$

aus

$$\eta'_k = \zeta_k + \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda (z_k^\lambda)'$$

und

$$\eta_k = \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda z_k^\lambda \qquad k = 1, 2 \ldots n$$

zu bestimmen. Es ergibt sich hieraus:

$$\zeta_k \Sigma \pm z_1' z_2' \ldots z_n^n = \begin{vmatrix} \eta_{ik}', (z_k')' \ldots (z_k^n)' \\ \eta_1, z_1' \ldots z_1^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n, z_n' \ldots z_n^n \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Wenn also die Determinante $\Sigma \pm z_1' z_2' \ldots z_n^n$ im ganzen Intervalle ab, einschliesslich der Grenzen, nicht verschwindet, so lassen sich die Grössen ρ und ζ bestimmen; da dann die ρ an den Grenzen a und b verschwinden, so lässt sich der zweiten Variation die Form geben

$$\begin{aligned} \delta^2 J &= \int_a^b \sum_{k=1}^n \eta_k \psi_k(\eta)\, dx \\ &= \int_a^b \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \zeta_i \zeta_k. \end{aligned} \qquad (3)$$

VI.

Diese Transformation beruht also wesentlich auf der Voraussetzung, dass ein conjugirtes System von n Integralsystemen der Gleichungen (III, 5) bestehe, dessen Determinante weder an den Grenzen des Integrals, noch innerhalb derselben verschwindet. Um die Bedingungen für die Existenz eines solchen zu finden, ist es zunächst nothwendig, den in (V, 1) erhaltenen bilinearen Ausdruck

$$\psi(u, z) = \sum_{i,k} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} (z_i' u_k - z_k u_i') + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k} (z_i u_k - z_k u_i) \right],$$

der nach den z von der ersten Ordnung ist, genauer zu betrachten.

Setzt man der Kürze halber

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} = a_{ik} \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k} = b_{ik},$$

so nimmt er die Gestalt an

$$\psi(u, z) = \sum_{i=1}^{n} z_i' \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k - \sum_{k=1}^{n} z_k \sum_{i=1}^{n} [b_{ik} u_i' + (a_{ik} - b_{ik}) u_i].$$

Sind nun

$$\begin{matrix} u_1^1, u_2^1 \ldots u_n^1 \\ u_1^2, u_2^2 \ldots u_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1^n, u_2^n \ldots u_n^n \end{matrix}$$

n linear unabhängige Integralsysteme der Gleichungen (III, 5), so kann man n neue nach den z lineare Differentialausdrücke der ersten Ordnung

$$\omega_\mu(z) = w_1^\mu \psi(z, u^1) + w_2^\mu \psi(z, u^2) + \ldots + w_n^\mu \psi(z, u^n)$$

mit den n^2 unbestimmten Multiplicatoren $w_1^\mu, w_2^\mu \ldots w_n^\mu$ $(\mu = 1, 2 \ldots n)$ bilden. Es stellt sich dann

$$\begin{aligned} \omega_\mu(z) &= \sum_{\lambda=1}^{n} w_\lambda^\mu \psi(z, u^\lambda) \\ &= \sum_{\lambda=1}^{n} w_\lambda^\mu \left[\sum_{i=1}^{n} z_i' \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k^\lambda - \sum_{k=1}^{n} z_k \sum_{i=1}^{n} (b_{ik} (u_i^\lambda)' + (a_{ik} - b_{ik}) u_i^\lambda) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} z_i' \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{\lambda=1}^{n} u_k^\lambda w_\lambda^\mu - \sum_{k=1}^{n} z_k \sum_{\lambda, i} [b_{ik} (u_i^\lambda)' + (a_{ik} - b_{ik}) u_i^\lambda] w_\lambda^\mu. \end{aligned}$$

In diesem Ausdrucke verfüge man nun über die n Multiplicatoren $w_1^\mu, w_2^\mu \ldots w_n^\mu$ so, dass die Coëfficienten von $z_1' \ldots z_{\mu-1}'$, $z_{\mu+1}' \ldots z_n'$ verschwinden und der von z_μ' einer gegebenen Constanten C_μ gleich werde. Man hat zu dem Behufe die w^μ aus den Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{\lambda=1}^{n} u_k^\lambda w_\lambda^\mu = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots \mu - 1, \mu + 1 \ldots n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{\lambda=1}^{n} u_k^\lambda w_\lambda^\mu = C_\mu$$

zu berechnen, die, wenn

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_k^\lambda w_\lambda^\mu = W_k$$

gesetzt wird, in

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} W_k = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots \mu-1, \mu+1 \ldots n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\mu k} W_k = C_\mu$$

übergehen. Aus diesen Gleichungen ergeben sich zunächst, da die Determinante $A = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ gemäss Voraussetzung im ganzen Integrationsintervalle nicht verschwindet, die W_k und hieraus wieder an jeder Stelle x, wo auch $U = \Sigma \pm u_1^1 u_1^2 \ldots u_n^n$ nicht Null ist, die $w_1^\mu, w_2^\mu \ldots w_n^\mu$. Bezeichnet man mit A_{ik} die Subdeterminante von a_{ik} in A und mit U_k^λ die von u_k^λ in U, so findet man

$$w_\lambda^\mu = C_\mu \frac{\sum_{k=1}^{n} A_{\mu k} U_k^\lambda}{AU}.$$

In Folge dieser Bestimmung der $w_1^\mu, w_2^\mu \ldots w_n^\mu$ erhält nun $\omega_\mu(z)$ die Form

$$\omega_\mu(z) = C_\mu z'_\mu - \sum_{k=1}^{n} c_k^\mu z_k = \sum_{\lambda=1}^{n} \psi(z, u^\lambda) w_\lambda^\mu$$

$$= \frac{C_\mu}{AU} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \psi(z, u^\lambda) A_{\mu k} U_k^\lambda.$$

Bilden die Systeme $u^1, u^2 \ldots u^n$ ein conjugirtes System, so ist stets für beliebige λ und ν

$$\psi(u^\nu, u^\lambda) = 0.$$

Daher wird dann den n Differentialgleichungen erster Ordnung in z:

$$\omega_1(z) = 0,\ \omega_2(z) = 0 \ldots \omega_n(z) = 0$$

durch diese n linear unabhängigen Systeme genügt. Sie stellen somit ein Fundamentalsystem für diese Gleichungen dar, und es ist daher

$$\omega_\mu(z) = \frac{C_\mu}{AU} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \psi(z, u^\lambda) A_{\mu k} U_k^\lambda$$

$$= \frac{C_\mu}{U} \begin{vmatrix} z'_\mu, & z_1, & z_2 \ldots z_n \\ (u_\mu^1)', & u_1^1, & u_2^1 \ldots u_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (u_\mu^n)', & u_1^n, & u_2^n \ldots u_n^n \end{vmatrix},$$

woraus sich ergibt

$$\begin{vmatrix} z'_\mu, & z_1, & z_2 \ldots z_n \\ (u_\mu^1)', & u_1^1, & u_2^1 \ldots u_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (u_\mu^n)', & u_1^n, & u_2^n \ldots u_n^n \end{vmatrix} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{\mu k}}{A} \psi(z, u^\lambda) U_k^\lambda = \frac{U \omega_\mu(z)}{C_\mu}. \quad (3)$$

Diese Formel stellt eine Identität dar, die sich auch unmittelbar verificiren lässt und leitet sofort zur Erkenntniss:

Ist ein Integralsystem $v_1, v_2 \ldots v_n$ der Differentialgleichungen (III, 5) $\psi_k(z) = 0$ zu jedem der n obigen Systeme $u^1, u^2 \ldots u^n$, die selbst ein conjugirtes System bilden, conjugirt, so ist $\psi(v, u^\lambda) = 0$ (für $\lambda = 1, 2 \ldots n$) und daher befriedigt dasselbe das Gleichungssystem $\omega_1(z) = 0,\ \omega_2(z) = 0 \ldots \omega_n(z) = 0$, also ist es von den Systemen $u^1, u^2 \ldots u^n$ linear abhängig.

Somit:

Ein conjugirtes System von Integralsystemen der linearen Differentialgleichungen (III, 5) enthält nur n linear unabhängige Integralsysteme.

Ist ein Integralsystem zu n von einander linear unabhängigen Integralsystemen eines conjugirten Systems conjugirt, so hängt es von diesen linear ab

zu berechnen, die, wenn

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_k^\lambda w_\lambda^\mu = W_k$$

gesetzt wird, in

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} W_k = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots \mu - 1, \mu + 1 \ldots n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\mu k} W_k = C_\mu$$

übergehen. Aus diesen Gleichungen ergeben sich zunächst, da die Determinante $A = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ gemäss Voraussetzung im ganzen Integrationsintervalle nicht verschwindet, die W_k und hieraus wieder an jeder Stelle x, wo auch $U = \Sigma \pm u_1^1 u_1^2 \ldots u_n^n$ nicht Null ist, die $w_1^\mu, w_2^\mu \ldots w_n^\mu$. Bezeichnet man mit A_{ik} die Subdeterminante von a_{ik} in A und mit U_k^λ die von u_k^λ in U, so findet man

$$w_\lambda^\mu = C_\mu \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} A_{\mu k} U_k^\lambda}{AU}.$$

In Folge dieser Bestimmung der $w_1^\mu, w_2^\mu \ldots w_n^\mu$ erhält nun $\omega_\mu(z)$ die Form

$$\omega_\mu(z) = C_\mu z'_\mu - \sum_{k=1}^{n} c_k^\mu z_k = \sum_{\lambda=1}^{n} \psi(z, u^\lambda) w_\lambda^\mu$$

$$= \frac{C_\mu}{AU} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \psi(z, u^\lambda) A_{\mu k} U_k^\lambda.$$

Bilden die Systeme $u^1, u^2 \ldots u^n$ ein conjugirtes System, so ist stets für beliebige λ und ν

$$\psi(u^\nu, u^\lambda) = 0.$$

Daher wird dann den n Differentialgleichungen erster Ordnung in z:

$$\omega_1(z) = 0, \ \omega_2(z) = 0 \ldots \omega_n(z) = 0$$

durch diese n linear unabhängigen Systeme genügt. Sie stellen somit ein Fundamentalsystem für diese Gleichungen dar, und es ist daher

$$\omega_\mu(z) = \frac{C_\mu}{AU} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \psi(z, u^\lambda) A_{\mu k} U_k^\lambda$$

$$= \frac{C_\mu}{U} \begin{vmatrix} z'_\mu, & z_1, & z_2 \ldots z_n \\ (u_\mu^1)', & u_1^1, & u_2^1 \ldots u_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (u_\mu^n)', & u_1^n, & u_2^n \ldots u_n^n \end{vmatrix},$$

woraus sich ergibt

$$\begin{vmatrix} z'_\mu, & z_1, & z_2 \ldots z_n \\ (u_\mu^1)', & u_1^1, & u_2^1 \ldots u_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (u_\mu^n)', & u_1^n, & u_2^n \ldots u_n^n \end{vmatrix} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{\mu k}}{A} \psi(z, u^\lambda) U_k^\lambda = \frac{U\omega_\mu(z)}{C_\mu}. \quad (3)$$

Diese Formel stellt eine Identität dar, die sich auch unmittelbar verificiren lässt und leitet sofort zur Erkenntniss:

Ist ein Integralsystem $v_1, v_2 \ldots v_n$ der Differentialgleichungen (III, 5) $\psi_k(z) = 0$ zu jedem der n obigen Systeme $u^1, u^2 \ldots u^n$, die selbst ein conjugirtes System bilden, conjugirt, so ist $\psi(v, u^\lambda) = 0$ (für $\lambda = 1, 2 \ldots n$) und daher befriedigt dasselbe das Gleichungssystem $\omega_1(z) = 0$, $\omega_2(z) = 0 \ldots \omega_n(z) = 0$, also ist es von den Systemen $u^1, u^2 \ldots u^n$ linear abhängig.

Somit:

Ein conjugirtes System von Integralsystemen der linearen Differentialgleichungen (III, 5) enthält nur n linear unabhängige Integralsysteme.

Ist ein Integralsystem zu n von einander linear unabhängigen Integralsystemen eines conjugirten Systems conjugirt, so hängt es von diesen linear ab

Die in (3) erhaltene Determinante zeigt eine grosse Ähnlichkeit mit dem Ausdrucke für ζ_k (V, 2) und birgt die Aufforderung in sich, dieser Analogie genauer nachzugehen. Zu diesem Ende ist es aber zunächst nöthig, eine allgemeinere Determinantenrelation abzuleiten.

VII.

Nimmt man in der Determinante

$$\chi_\mu = \begin{vmatrix} z'_\mu, & (u_\mu^1)' \ldots (u_\mu^n)' \\ z_1, & u_1^1 \ldots u_1^n \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ z_n, & u_n^1 \ldots u_n^n \end{vmatrix} \tag{1}$$

die adjungirte Subdeterminante von

$$\begin{vmatrix} z'_\mu, & (u_\mu^k)' \\ z_\lambda, & u_\lambda^k \end{vmatrix},$$

so erhält man nach einer bekannten Formel

$$(-1)^{\lambda+k} \chi_\mu U_\lambda^k = U \begin{vmatrix} z'_\mu \ldots (u_\mu^{k-1})', & (u_\mu^{k+1})' \ldots (u_\mu^n) \\ z_1 \ldots u_1^{k-1}, & u_1^{k+1} \ldots u_1^n \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ z_{\lambda-1} \ldots u_{\lambda-1}^{k-1}, & u_{\lambda-1}^{k+1} \ldots u_{\lambda-1}^n \\ z_{\lambda+1} \ldots u_{\lambda+1}^{k-1}, & u_{\lambda+1}^{k+1} \ldots u_{\lambda+1}^n \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ z_n \ldots u_n^{k-1}, & u_n^{k+1} \ldots u_n^n \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} (u_\mu^1)' \ldots (u_\mu^n)' \\ u_1^1 \ldots u_1^n \\ \cdots \\ \cdots \\ u_{\lambda-1}^1 \ldots u_{\lambda-1}^n \\ u_{\lambda+1}^1 \ldots u_{\lambda+1}^n \\ \cdots \\ \cdots \\ u_n^1 \ldots u_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1, u_1^1 \ldots u_1^{k-1}, u_1^{k+1} \ldots u_1^n \\ z_2, u_2^1 \ldots u_2^{k-1}, u_2^{k+1} \ldots u_2^n \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ z_n, u_n^1 \ldots u_n^{k-1}, u_n^{k+1} \ldots u_n^n \end{vmatrix}$$

oder, wenn man die aus n Systemen

$$\begin{matrix} v_1^1, v_2^1 \ldots v_n^1 \\ v_1^2, v_2^2 \ldots v_n^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ v_1^n, v_2^n \ldots v_n^n \end{matrix}$$

gebildete Determinante mit $\Delta(v^1, v^2 \ldots v^n)$ bezeichnet:

$$(-1)^{\lambda+k}\chi_\mu U_\lambda^k = \Delta(u^1, u^2 \ldots u_n) \begin{vmatrix} z'_\mu & \ldots (u_\mu^{k-1})', & (u_\mu^{k+1})' \ldots (u_\mu^n)' \\ z_1 & \ldots u_1^{k-1}, & u_1^{k+1} \ldots u_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{\lambda-1} & \ldots u_{\lambda-1}^{k-1}, & u_{\lambda-1}^{k+1} \ldots u_{\lambda-1}^n \\ z_{\lambda+1} & \ldots u_{\lambda+1}^{k-1}, & u_{\lambda+1}^{k+1} \ldots u_{\lambda+1}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n & \ldots u_n^{k-1}, & u_n^{k+1} \ldots u_n^n \end{vmatrix}$$

$$-\Delta(z, u^1 \ldots u^{k-1} u^{k+1} \ldots u^n) \begin{vmatrix} (u_\mu^1)' \ldots (u_\mu^n)' \\ u_1^1 \ldots u_1^n \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ u_{\lambda-1}^1 \ldots u_{\lambda-1}^n \\ u_{\lambda+1}^1 \ldots u_{\lambda+1}^n \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ u_n^1 \ldots u_n^n \end{vmatrix}.$$

Nimmt man hierin $\lambda = \mu$, so erhält man

$$(-1)^{k-1}\chi_\mu U_\mu^k = \Delta(u^1, u^2 \ldots u^n) \begin{vmatrix} z_1 & \ldots u_1^{k-1}, & u_1^{k+1} \ldots u_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{\mu-1} & \ldots u_{\mu-1}^{k-1}, & u_{\mu-1}^{k+1} \ldots u_{\mu-1}^n \\ z'_\mu & \ldots (u_\mu^{k-1})', & (u_\mu^{k+1})' \ldots (u_\mu^n)' \\ z_{\mu+1} & \ldots u_{\mu+1}^{k-1}, & u_{\mu+1}^{k+1} \ldots u_{\mu+1}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n & \ldots u_n^{k-1}, & u_n^{k+1} \ldots u_n^n \end{vmatrix}$$

$$-\Delta(z, u_1^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n) \begin{vmatrix} u_1^1 & \ldots & u_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{\mu-1}^1 & \ldots & u_{\mu-1}^n \\ (u_\mu^1)' & \ldots & (u_\mu^n)' \\ u_{\mu+1}^1 & \ldots & u_{\mu+1}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n^1 & \ldots & u_n^n \end{vmatrix}.$$

Summirt man daher nach μ von 1 bis n, so ergibt sich schliesslich

$$(-1)^{k-1} \sum_{\mu=1}^{n} U_\mu^k \chi_\mu = \Delta(u^1, u^2 \ldots u^n) \Delta'(z, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n)$$
$$-\Delta'(u^1, u^2 \ldots u^n)\, \Delta(z, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n),$$

wo $\Delta' = \frac{d\Delta}{dx}$ bedeutet.

VIII.

Bilden die Systeme $u^1, u^2 \ldots u^n$ ein conjugirtes System, so kann man diese Formel mit der (VI, 3) in Verbindung bringen. Denn es ist dann

$$\chi_\mu(z) = \frac{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)\, \omega_\mu(z)}{C_\mu} = \frac{1}{A} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \psi(z, u^\lambda) A_{\mu\nu} U_\nu^\lambda$$

und man erhält somit die Identität:

$$\Delta(u^1, u^2 \ldots u_n)\Delta'(z, u^1 \ldots u^{k-1} u^{k+1} \ldots u^n) -$$
$$-\Delta'(u^1, u^2 \ldots u^n)\Delta(z, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n)$$
$$= \frac{(-1)^{k-1}}{A} \sum_{\lambda, \mu, \nu} \psi(z, u^\lambda) A_{\mu\nu} U_\mu^k U_\nu^\lambda. \qquad (1)$$

Wählt man nun das System $v_1, v_2 \ldots v_n$, das kurz mit v bezeichnet werde, so, dass es mit jedem der Systeme $u^1, \ldots u^{k-1}$, $u^{k+1}, \ldots u^n$ conjugirt ist, aber nicht mit u^k, so ist

$$\psi(v, u^1) = \ldots = \psi(v, u^{k-1}) = \psi(v, u^{k+1}) = \ldots = \psi(v, u^n) = 0,$$

hingegen $\psi(v, u^k) \neq 0$. Es vereinfacht sich dann obige Formel in

$$\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)\Delta'(v, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n) -$$
$$-\Delta'(u^1, u^2 \ldots u^n)\Delta(v, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n)$$
$$= \frac{(-1)^{k-1}}{A} \psi(v, u^k) \sum_{\mu,\nu} A_{\mu\nu} U_\mu^k U_\nu^k \qquad (2)$$

und der Ausdruck für χ_μ in

$$\chi_\mu(v) = \frac{1}{A} \psi(v, u^k) \sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu} U_\nu^k. \qquad (3)$$

Multiplicirt man diesen letzten Ausdruck mit

$$\chi_\lambda(v) = \frac{1}{A} \psi(v, u^k) \sum_{\tau=1}^{n} A_{\lambda\tau} U_\tau^k,$$

so ergibt sich

$$\chi_\lambda(v)\chi_\mu(v) = \frac{\psi(v, u^k)^2}{A^2} \sum_{\nu,\tau} A_{\mu\nu} A_{\lambda\tau} U_\nu^k U_\tau^k$$

und hieraus

$$\sum_{\lambda,\mu} a_{\mu\lambda}\chi_\lambda(v)\chi_\mu(v) = \frac{\psi(v, u^k)^2}{A^2} \sum_{\lambda,\mu,\nu,\tau} A_{\mu\nu} A_{\lambda\tau} a_{\mu\lambda} U_\nu^k U_\tau^k$$
$$= \frac{\psi(v, u^k)^2}{A^2} \sum_{\lambda,\nu,\tau} A_{\lambda\tau} U_\nu^k U_\tau^k \sum_{\mu=1}^{n} A_{\mu\nu} a_{\mu\lambda}.$$

Da nun $\sum_{\mu=1}^{n} A_{\mu\nu} a_{\mu\lambda}$ für $\nu = \lambda$ gleich A und für $\nu \gtrless \lambda$ Null wird, so ist

$$\sum_{\lambda,\mu} a_{\mu\lambda}\chi_\lambda(v)\chi_\mu(v) = \frac{\psi(v, u^k)^2}{A} \sum_{\lambda,\tau} A_{\lambda\tau} U_\lambda^k U_\tau^k.$$

Vergleicht man diese Formel mit der früheren (2), so erhält man

$$\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)\Delta'(v, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n) -$$
$$-\Delta'(u^1, u^2 \ldots u^n)\Delta(v, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n)$$
$$= \frac{(-1)^{k-1}}{\psi(v, u^k)} \sum_{\lambda,\mu} a_{\mu\lambda}\chi_\lambda(v)\chi_\mu(v), \qquad (4)$$

wo $\phi(v, u^k)$ eine von Null verschiedene Constante ist und die rechtsstehende quadratische Form bereits bei der Transformation der zweiten Variation des Integrals (V, 3) auftrat.

IX.

1. Da die hier für den Fall des absoluten Maximums und Minimums entwickelten Formeln auch beim relativen Maximum und Minimum wiederkehren, so soll davon abgesehen werden, die aus ihnen fliessenden Consequenzen zu ziehen und mögen zunächst sie selbst für den Fall abgeleitet werden, dass zwischen den gesuchten Functionen $y_1, y_2 \ldots y_n$ die folgenden m Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_m = 0$$

bestehen, deren jede auch erste Derivirte von $y_1, y_2 \ldots y_n$ enthalte.

Die zweite Variation des Integrals hat dann wieder die Form

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial \eta_{ik}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial \eta_{ik}'} \right) \eta_{ik} \, dx, \qquad (1)$$

wo $\Omega(\eta_i, \eta_i')$ dieselbe Bedeutung wie früher besitzt, aber nicht mehr

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_m \varphi_m,$$

das nunmehr auch die m Functionen des x: $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ enthält, die von den Integrationsconstanten abhängen, die sich aus der Integration der Differentialgleichungen der ersten Variation:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots n \qquad (2)$$

ergeben. In Folge dessen besteht auch zwischen den Gleichungen, die sich aus diesen durch Differentiation nach einer Integrationsconstante ableiten lassen und

$$\frac{\partial \Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial \eta_{ik}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial \eta_{ik}'}$$

nicht mehr derselbe, aber doch ein ähnlicher Zusammenhang, wie gezeigt werden soll.

Für das System von Differentialgleichungen der ersten Ordnung

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

$$\frac{dy_1}{dx} = y'_1, \; \frac{dy_2}{dx} = y'_2 \ldots \frac{dy_n}{dx} = y'_n$$

$$\varphi_1 = 0, \; \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_m = 0$$

zwischen den $2n+m$ Functionen

$$y_1, y_2 \ldots y_n, \; y'_1, y'_2 \ldots y'_n, \; \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$$

sollen die in (II, 1) gemachten Voraussetzungen gelten und auch die Integrationsconstanten $c_1, c_2 \ldots c_{2n}$ sollen in der dort (II, 2) angegebenen Weise gewählt sein. Denkt man sich das System integrirt und die Integrale darin substituirt, so erhält man nach den Integrationsconstanten identische und differentiirbare Gleichungen. Die Differentiation nach irgend einer dieser Constanten c ergibt dann

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial c} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k}\frac{\partial y'_k}{\partial c} - \right.$$
$$\left. - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial c} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k}\frac{\partial y'_k}{\partial c}\right)\right]$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\frac{\partial \lambda_k}{\partial c} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i}\frac{\partial \lambda_k}{\partial c}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial y_i}{\partial c} = \frac{\partial y'_i}{\partial c} \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial c} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k}\frac{\partial y_k}{\partial c}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m),$$

woraus erhellt, dass

$$\frac{\partial y_1}{\partial c}, \frac{\partial y_2}{\partial c} \ldots \frac{\partial y_n}{\partial c}; \; \frac{\partial \lambda_1}{\partial c}, \frac{\partial \lambda_2}{\partial c} \ldots \frac{\partial \lambda_m}{\partial c}$$

ein particuläres Integralsystem des linearen Differentialgleichungssystems der ersten Ordnung

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k'} z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} z_k' - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k} z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} z_k'\right)\right] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} r_k\right)\right] = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots n \\
&\frac{dz_i}{dx} = z_i' \qquad i = 1, 2 \ldots n \\
&\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} z_k + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} z_k'\right) = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots m
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

zwischen den $z_1, z_2 \ldots z_n$, $r_1, r_2 \ldots r_m$ ist, da diesem genügt wird, wenn man

$$z_k = \frac{\partial y_k}{\partial c}, \quad r_k = \frac{\partial \lambda_k}{\partial c}$$

nimmt.

Da c gleich $c_1, c_2 \ldots c_{2n}$ genommen werden kann, so erhält man auf diese Weise $2n$ particuläre Systeme des obigen linearen Differentialgleichungssystems der ersten Ordnung (3), welches das accessorische System linearer Differentialgleichungen heissen soll.

Diesem System (3) kann man zunächst die kanonische Form geben, indem man seine n ersten Gleichungen mit den m anderen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} z_k' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} z_k\right) = 0$$

combinirt und hieraus

$$\frac{dz_1'}{dx}, \frac{dz_2'}{dx} \cdots \frac{dz_n'}{dx}; \frac{dr_1}{dx}, \frac{dr_2}{dx} \cdots \frac{dr_m}{dx}$$

zieht, was immer möglich ist, da nach der Voraussetzung in (II, 2) die Determinante aus den Coëfficienten dieser Unbekannten in dem Systeme der $n+m$ Gleichungen überall von Null verschieden ist.

Da auch die übrigen in den Differentialgleichungen vorkommenden Coëfficienten (II, 1) überall im Integrationsbereiche (inclusive Grenzen) endlich und stetig sind, so liegen darin nirgends singuläre Stellen des kanonischen Differentialgleichungssystems, was festzustellen für die weiteren Überlegungen von Wichtigkeit ist.

Dieses kanonische System ist aber keineswegs äquivalent mit dem ursprünglichen Systeme (3), indem wohl jedes Integralsystem des letzteren das erstere befriedigt, aber nicht umgekehrt. Denn die Integralsysteme des ersteren genügen nicht mehr insgesammt den Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k} z_k + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k'} z_k'\right) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m),$$

sondern

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k} z_k + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k'} z_k'\right) = C_i \qquad (i = 1, 2 \ldots m),$$

wo die C_i Constante bedeuten. Um also aus den Integralsystemen des kanonischen Systems die von (3) zu finden, hat man jene herauszusuchen, für welche diese Constanten Null sind, welche somit, da diese Constanten wegen der vorausgesetzten Stetigkeit im ganzen Integrationsbereiche denselben Werth haben, an einer Stelle desselben die linke Seite zu Null machen. Man könnte also solche Integralsysteme herstellen, indem man die Anfangswerthe so wählt, dass sie diese Bedingung erfüllen. Im vorliegenden Falle hat man aber im vorhinein $2n$ solche Integralsysteme

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial c_i}\right)', \left(\frac{\partial y_2}{\partial c_i}\right)' \ldots \left(\frac{\partial y_n}{\partial c_i}\right); \quad \frac{\partial y_1}{\partial c_i}, \frac{\partial y_2}{\partial c_i} \ldots \frac{\partial y_n}{\partial c_i}; \quad \frac{\partial\lambda_1}{\partial c_i}, \frac{\partial\lambda_2}{\partial c_i} \ldots \frac{\partial\lambda_n}{\partial c_i}$$
$$(i = 1, 2 \ldots 2n)$$

gegeben, und es erhebt sich also zunächst die Frage, ob dieselben auch linear unabhängig sind.

2. Um dieselbe zu beantworten, nehme man $2n+m$ Integralsysteme des kanonischen Differentialgleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{l}(z_1^1)' \ldots (z_n^1)',\ z_1^1 \ldots z_n^1,\ r_1^1 \ldots r_m^1 \\ (z_1^2)' \ldots (z_n^2)',\ z_1^2 \ldots z_n^2,\ r_1^2 \ldots r_m^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Die Determinante D aus diesen Integralsystemen multiplicire man zeilenweise mit der Determinante $(2n+m)^{\text{ten}}$ Grades

$$\left|\begin{array}{l}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y'_1} \ldots \frac{\partial\varphi_1}{\partial y'_m};\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y'_{m+1}},\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y'_{m+2}} \ldots \frac{\partial\varphi_n}{\partial y'_n};\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n};\ 0\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial y'_1} \ldots \frac{\partial\varphi_m}{\partial y'_m};\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial y'_{m+1}},\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial y'_{m+2}} \ldots \frac{\partial\varphi_m}{\partial y'_n};\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_n};\ 0\ldots 0 \\ 0 \ \ldots\ 0;\ \ 1,\ \ 0\ \ldots\ 0;\ \ 0\ \ldots\ 0;\ \ 0\ldots 0 \\ 0 \ \ldots\ 0;\ \ 0,\ \ 1\ \ldots\ 0;\ \ 0\ \ldots\ 0;\ \ 0\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ \ldots\ 0;\ \ 0,\ \ 0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{array}\right|$$

$$= \frac{\partial(\varphi_1 \ldots \varphi_m)}{\partial(y'_1 \ldots y'_m)},$$

deren Structur aus der Anschreibweise deutlich erkennbar ist. Das Product beider hat die Form

$$\left|\begin{array}{llll}C_1^1 \ldots C_m^1, & (z_{m+1}^1)' \ldots (z_n^1)', & z_1^1 \ldots z_n^1, & r_1^1 \ldots r_m^1 \\ C_1^2 \ldots C_m^2, & (z_{m+1}^2)' \ldots (z_n^2)', & z_1^2 \ldots z_n^2, & r_1^2 \ldots r_m^2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ C_1^{2n} \ldots C_m^{2n}, & (z_{m+1}^{2n})' \ldots (z_n^{2n})' & z_1^{2n} \ldots z_n^{2n}, & r_1^{2n} \ldots r_m^{2n} \\ C_1^{2n+1} \ldots C_m^{2n+1}, & (z_{m+1}^{2n+1})' \ldots (z_n^{2n+1})', & z^{2n+1} \ldots z_n^{2n+1}, & r_1^{2n+1} \ldots r_m^{2n+1} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right|$$

wo die C_k^i Constante bedeuten.

Sind die $(2n+m)$ particulären Integralsysteme des kanonischen Systems von einander linear unabhängig, so ist D im ganzen Integrationsintervalle, da darin kein singulärer Punkt des Differentialgleichungssystems liegt, endlich und von Null verschieden.

An der beliebigen Stelle x des Integrationsintervalles muss nach II, 2 mindestens eine Determinante m^{ten} Grades aus der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2'} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_2'} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

von Null verschieden sein.

Ist daselbst etwa

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m)}{\partial(y_1', y_2' \ldots y_m')}$$

nicht Null, so ist auch das Product aus ihr und D, also die Determinante $\mathfrak{T}$, an dieser Stelle nicht Null. Daher:

Unter $2n+m$ linear unabhängigen Integralsystemen des kanonischen Gleichungssystems besitzen höchstens $2n$ lauter verschwindende Constanten.

Daraus folgt weiter apagogisch:

Verschwinden für jedes von $2n+1$ particulären Integralsystemen des kanonischen Gleichungssystems die zugehörigen Constanten, so sind diese Systeme linear abhängig.

Es lässt sich aber auch leicht ein Kennzeichen dafür auffinden, ob $2n$ derartige Systeme linear unabhängig sind oder nicht.

Sind

$$\left.\begin{matrix} (z_1^1)' \ldots (z_n^1)', & z_1^1 \ldots z_n^1, & r_1^1 \ldots r_m^1 \\ (z_1^2)' \ldots (z_n^2)', & z_1^2 \ldots z_n^2, & r_1^2 \ldots r_m^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (z_1^{2n})' \ldots (z_n^{2n})', & z_1^{2n} \ldots z_n^{2n}, & r_1^{2n} \ldots r_n^{2n} \end{matrix}\right\} \qquad (6)$$

diese Systeme, so verschwinden in $\mathfrak{D}$ die in den $2n$ ersten Zeilen stehenden Constanten, und es wird

$$\mathfrak{T} = C . \Delta,$$

wenn man mit Δ die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} (z_{m+1}^1)' \ldots (z_n^1)', & z_1^1 \ldots z_n^1, & r_1^1 \ldots r_m^1 \\ (z_{m+1}^2)' \ldots (z_n^2)', & z_1^2 \ldots z_n^2, & r_1^2 \ldots r_m^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ (z_{m+1}^{2n})' \ldots (z_n^{2n})', & z_1^{2n} \ldots z_n^{2n}, & r_1^{2n} \ldots r_m^{2n} \end{vmatrix}$$

und mit C die Determinante

$$\begin{vmatrix} C_1^{2n+1} \ldots C_m^{2n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1^{2n+m} \ldots C_m^{2n+m} \end{vmatrix}$$

bezeichnet.

In letzterer kann man aber den C_i^k beliebige Werthe ertheilen, da man die Anfangswerthe eines Systems $z'_1 \ldots z'_n$, $z_1 \ldots z_n$ so wählen kann, dass die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} z_k + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} z'_k \right) = C_i \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

bei vorgegebenem Werthe $C_1, C_2 \ldots C_m$ erfüllt werden, und man kann also bewirken, dass C nicht Null ist. Es sind dann Δ und $\mathfrak{T}$ zugleich Null oder davon verschieden.

Sind daher die $2n$ Integralsysteme nicht linear unabhängig, so verschwindet

$$\mathfrak{T} = D \frac{\partial(\varphi_1 \ldots \varphi_m)}{\partial(y'_1 \ldots y'_m)}$$

im ganzen Integrationsintervalle, da D daselbst überall Null ist und somit auch Δ.

Verschwindet letztere an der Stelle x des Integrationsintervalls, so auch $\mathfrak{T}$ und daher, wenn an dieser Stelle

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m)}{\partial(y'_1, y'_2 \ldots \partial y'_m)}$$

nicht Null ist, auch D. Die $2n+m$ Integralsysteme (4) sind dann nicht mehr linear unabhängig, aber da C nicht Null ist, so

beschränkt sich, wie man aus der Annahme des Gegentheils erkennt, die Abhängigkeit auf die $2n$ Integralsysteme (6).

Nun kann man aus der Matrix (5) $\binom{n}{m}$ Determinanten m^{ten} Grades bilden und dem entsprechend auch $\binom{n}{m}$ zugehörige Determinanten $(2n)^{\text{ten}}$ Grades Δ, von denen sämmtliche aus einer erhalten werden, indem man in ihren $(n-m)$ ersten Colonnen an Stelle der unteren Indices alle Combinationen ohne Wiederholung zur $(n-m)^{\text{ten}}$ Classe der n ersten Zahlen setzt. Da nun an jeder Stelle des Integrationsintervalls mindestens eine der Determinanten m^{ten} Grades aus der Matrix (5) nicht Null ist, so ergeben sich die Sätze:

Sind die $2n$ Integralsysteme (6) des accessorischen Systems nicht linear unabhängig, so verschwindet jede der $\binom{n}{m}$ Determinanten Δ an jeder Stelle des Integrationsintervalls.

Verschwinden an einer Stelle des Integrationsintervalls alle Determinanten Δ, so sind die $2n$ Integralsysteme (6) nicht linear unabhängig.

Ist hingegen ein Δ an irgend einer Stelle des Integrationsbereiches nicht Null, so ist an dieser Stelle auch das zugehörige $\mathfrak{D}$ und somit auch D von Null verschieden. Daher sind die $2n$ Integralsysteme von einander linear unabhängig und man gelangt so zur Erkenntniss:

Verschwinden für $2n$ Integralsysteme des kanonischen Gleichungssystems die zugehörigen Constanten, so sind dieselben immer linear unabhängig, wenn eine der Determinanten Δ an irgend einer Stelle des Integrationsintervalls nicht verschwindet.

Ein System von solchen $2n$ Integralsystemen soll ein Fundamentalsystem des accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen heissen. Es besitzt, wie man leicht erkennt, die wesentlichen Eigenschaften, welche die Fundamentalsysteme kanonischer Systeme linearer Differentialgleichungen I. Ordnung auszeichnen.

Setzt man nun

$$z_k^i = \frac{\partial y_k}{\partial c_i}, \quad r_k^i = \frac{\partial \lambda_k}{\partial c_i},$$

so verschwinden nach der Bedeutung der $c_1, c_2 \ldots c_{2n}$ in II für $x = a$ in obigem Δ sämmtliche Elemente mit Ausnahme der in der Hauptdiagonale stehenden, deren jedes gleich 1 wird. Man erhält daher den Satz:

Unter den in (II, 2) gemachten Voraussetzungen hat das accessorische System linearer Differentialgleichungen (3) die $2n$ linear unabhängigen Integralsysteme

$$z_1^i = \frac{\partial y_1}{\partial c_i}, \ldots z_n^i = \frac{\partial y_n}{\partial c_i}, \; r_1^i = \frac{\partial \lambda_1}{\partial c_i} \ldots r_m^i = \frac{\partial \lambda_m}{\partial c_i},$$

$$i = 1, 2 \ldots n,$$

aus denen alle übrigen Lösungen sich linear zusammensetzen.

X.

Setzt man den ersten Ausdruck (IX, 3):

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k} z'_k - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y_k} z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} z'_k \right) \right]$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k \right) \right) = \psi_i(z, r), \quad (1)$$

so kann man auch schreiben:

$$\psi_i(z, r) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Omega(z, z')}{\partial z_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(z, z')}{\partial z'_i} \right] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k \right) \right]. \quad (1^*)$$

Führt man noch die Bezeichnung ein

$$\bar{\varphi}_k(z) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} z_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} z \right),$$

so erhält man für die zweite Variation (IX, 1) den Ausdruck:

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i \psi_i(\eta, r) - \sum_{i=1}^{m} r_i \bar{\varphi}_i(\eta) + \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k \eta_i \right) \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i \psi_i(\eta, r) + \sum_{i=1}^{m} r_i \bar{\varphi}_i(\eta) \right] dx$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \eta_i \psi_i(\eta, r) \, dx, \tag{2}$$

da die $\bar{\varphi}_i(\eta) = 0$ sind. Die hierin auftretenden r sind beliebige Grössen.

Um nun den erhaltenen Ausdruck weiter zu transformiren, ist es zunächst nothwendig, die $\psi_i(z, r)$ zu untersuchen.

Sind u und ρ ein anderes Grössensystem, so ist analog

$$\psi_i(u, \rho) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Omega(u, u')}{\partial u_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(u, u')}{\partial u'_i} \right] + \\ + \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \rho_k - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \rho_k \right) \right]$$

und daher

$$\sum_{i=1}^{n} [u_i \psi_i(z, r) - z_i \psi_i(u, \rho)] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(u_i \frac{\partial \Omega(z, z')}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \Omega(u, u')}{\partial u_i} \right) \right. \\ \left. + z_i \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(u, u')}{\partial u'_i} - u_i \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(z, z')}{\partial z'_i} \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} (u_i r_k - z_i \rho_k) - u_i \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k \right) + z_i \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \rho_k \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(z'_i \frac{\partial \Omega(u, u')}{\partial u'_i} - u'_i \frac{\partial \Omega(z, z')}{\partial z'_i} \right) + \right.$$

$$+ z_i \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(u, u')}{\partial u'_i} - u_i \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(z, z')}{\partial z'_i}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left[r_k\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}u_i+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}u_i'\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}r_k u_i\right)\right.$$

$$\left.-\rho_k\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}z_i+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}z_i'\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}\rho_k z_i\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2\Omega(u,u')}{\partial u_i'\partial u_k'}(z_i u_k'-u_i z_k')+\frac{\partial^2\Omega(u,u')}{\partial u_i'\partial u_k}(z_i u_k-u_i z_k)\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left[r_k\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}u_i+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}u_i'\right)-\rho_k\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}z_i+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}z_i'\right)\right]$$

$$-\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}(r_k u_i-\rho_k z_i). \qquad (3)$$

Benützt man die eingeführte Bezeichnung

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}z_i+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}z_i'\right)=\bar{\varphi}_k(z), \qquad (4)$$

so folgt aus dieser Gleichung (3)

$$\sum_{i=1}^{n}u_i\psi_i(z,r)+\sum_{i=1}^{m}\rho_k\bar{\varphi}_k(z)-\left[\sum_{i=1}^{n}z_i\psi_i(u,\rho)+\sum_{i=1}^{m}r_k\bar{\varphi}_k(u)\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{\sum_{i,k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\Omega(u,u')}{\partial u_i'\partial u_k'}(z_i u_k'-u_i z_k')+\frac{\partial^2\Omega(u,u')}{\partial u_i'\partial u_k}(z_i u_k-u_i z_k)\right]\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}(r_k u_i-\rho_k z_i)\right\}=\frac{d}{dx}\psi(z,r;u,\rho), \qquad (5)$$

wenn man die Bezeichnung einführt:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\Omega(u,u')}{\partial u_i'\partial u_k'}(z_i u_k'-u_i z_k')+\frac{\partial^2\Omega(u,u')}{\partial u_i'\partial u_k}(z_i u_k-u_i z_k)\right]$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}(r_k u_i-\rho_k z_i)=\psi(z,r;u,\rho). \qquad (6)$$

Dieser Ausdruck hat die Eigenschaft, dass

$$\psi(z, r; u, \rho) = -\psi(u, \rho; z, r)$$

und

$$\psi(z, r; z, r) = 0.$$

Ist

$$u_1, u_2 \ldots u_n; \; \rho_1, \rho_2 \ldots \rho_m$$

ein Integralsystem von (IX, 3), ist also

$$\psi_i(u, \rho) = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots n$$
$$\bar{\varphi}_i(u) = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots m,$$

so reducirt sich obige Relation auf

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \psi_i(z, r) + \sum_{k=1}^{m} \rho_k \bar{\varphi}_k(z) = \frac{d}{dx} \psi(z, r; u, \rho).$$

Ist überdies auch

$$z_1, z_2 \ldots z_n, \; r_1, r_2 \ldots r_m$$

ein Integralsystem von (IX, 3), so dass auch

$$\left.\begin{aligned} \psi_i(z, r) &= 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \\ \bar{\varphi}(z) &= 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ist, so wird

$$\frac{d}{dx} \psi(z, r; u, \rho) = 0,$$

daher

$$\psi(z, r; u, \rho) = C,$$

einer Constanten, die im ganzen Integrationsintervall denselben Werth hat.

Von besonderer Wichtigkeit sind solche zwei linear unabhängige Integralsysteme des accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen, für welche diese Constante Null ist. Sie sollen zu einander conjugirt genannt werden. Es ist klar, dass die obigen beiden linear unabhängigen Integralsysteme,

wenn ihre Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$; $u_1, u_2 \ldots u_n$ an derselben Stelle des Integrationsbereiches verschwinden, einander conjugirt sind und dass man auf diese Weise zu jeder Stelle des Integrationsbereiches n linear unabhängige Integralsysteme construiren kann, von denen je zwei einander conjugirt sind. Eine Gruppe von mindestens n linear unabhängigen Integralsystemen, in der je zwei einander conjugirt sind, soll wieder ein conjugirtes System genannt werden. Es hat keine Schwierigkeit, solche conjugirte Systeme aus n Gliedern, zu denen also auch die eben erwähnten gehören, nach dem in IV angedeuteten Verfahren zu bilden. Ein anderes gibt Clebsch in der citirten Abhandlung des Bandes 55 an.

Diese Bemerkungen genügen, um die beabsichtigte Transformation der zweiten Variation herzustellen. Es seien

$$z_1^\lambda, z_2^\lambda \ldots z_n^\lambda;\; r_1^\lambda, r_2^\lambda \ldots r_m^\lambda$$
$$(\lambda = 1, 2 \ldots n)$$

n linear unabhängige particulare Integralsysteme des accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen, von denen das angeschriebene

$$z_1^\lambda, z_2^\lambda \ldots z_n^\lambda;\; r_1^\lambda, r_2^\lambda \ldots r_m^\lambda$$

kurz mit z^λ, r^λ bezeichnet werde.

Setzt man dann

$$\eta_k = \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda z_k^\lambda$$
$$k = 1, 2 \ldots n,$$

wo die $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ unbestimmte Multiplicatoren bedeuten, und bezeichnet das Substitutionsresultat der sich hieraus ergebenden Werthe von $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ in $\sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda r_k^\lambda$ mit r_k, so dass

$$r_k = \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda r_k^\lambda.$$

so wird

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k \psi_k(\eta, r) = \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \sum_{k=1}^{n} z_k^\lambda \psi_k(\eta, r)$$

$$\sum_{k=1}^{m} r_k \overline{\varphi}_k(\eta) = \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \sum_{k=1}^{m} r_k^\lambda \overline{\varphi}_k(\eta) = 0,$$

daher

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k \psi_k(\eta, r) - \sum_{k=1}^{m} r_k \overline{\varphi}_k(\eta) =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \left[\sum_{k=1}^{n} z_k^\lambda \psi_k(\eta, r) - \sum_{k=1}^{m} r_k^\lambda \overline{\varphi}_k(\eta) \right]$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \frac{d}{dx} \psi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda)$$

$$= \frac{d}{dx} \left[\sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \psi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda) \right] - \sum_{\lambda=1}^{n} \rho'_\lambda \psi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda)$$

oder auch, da $\overline{\varphi}_k(\eta) = 0$ ist,

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \psi_i(\eta, r) = \frac{d}{dx} \left[\sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \psi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda) \right] - \sum_{\lambda=1}^{n} \rho'_\lambda \psi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda). \quad (8)$$

Nun ist aber nach (6)

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \rho'_\lambda \psi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda) =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \rho'_\lambda \left\{ \sum_{i,k} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_i \partial \eta'_k} (\eta_k (z_i^\lambda)' - \eta'_i z_k^\lambda) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_k \partial \eta_i} (\eta_k z_i^\lambda - \eta_i z_k^\lambda) \right]$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} (z_k^\lambda r_i - \eta_k r_i^\lambda) \right\}. \quad (9)$$

Substituirt man hierin, analog wie in V

$$\eta_{ik}(z_i^\lambda)' - z_k^\lambda \eta_i' = \sum_{\mu=1}^{n} \rho_\mu [z_k^\mu (z_i^\lambda)' - z_k^\lambda (z_i^\mu)'] - z_i^\lambda \sum_{\mu=1}^{n} \rho_\mu' z_i^\mu$$

$$\eta_{ik} z_i^\lambda - \eta_{ii} z_k^\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} \rho_\mu (z_i^\lambda z_k^\mu - z_i^\mu z_k^\lambda)$$

$$z_k^\lambda r_i - \eta_{ik} r_i^\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} \rho_\mu (z_k^\lambda r_i^\mu - r_i^\lambda z_k^\mu).$$

so geht obiger Ausdruck (9) über in

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda' \psi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda) =$$

$$= \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \rho_\lambda' \rho_\mu \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_i \partial \eta_{ik}'} (z_k^\mu (z_i^\lambda)' - (z_i^\mu)' z_k^\lambda) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_{ik}' \partial \eta_i} (z_i^\lambda z_k^\mu - z_i^\mu z_k^\lambda) \right| - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} (r_i^\mu z_k^\lambda - r_i^\lambda z_k^\mu) \Big\}$$

$$- \sum_{i,k=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta_i' \partial \eta_{ik}'} \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda' z_i^\lambda \sum_{\mu=1}^{n} \rho_\mu' z_i^\mu$$

$$= \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \rho_\lambda' \rho_\mu \psi(z^\mu, r^\mu; z^\lambda, r^\lambda) - \sum_{i,k} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_i' \partial \eta_k'} \zeta_i \zeta_k.$$

wenn

$$\zeta_i = \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda' z_i^\lambda$$

gesetzt wird.

Man erhält also schliesslich aus (8)

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \psi_i(\eta, r) = \sum_{i,k} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_i' \partial \eta_k'} \zeta_i \zeta_k$$

$$- \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \rho_\lambda' \rho_\mu \psi(z^\mu, r^\mu; z^\lambda, r^\lambda) + \frac{d}{dx} \left[\sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \psi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda) \right]. \quad 8'$$

wo die $\psi(z^\mu, r^\mu; z^\lambda, r^\lambda) = C_{\lambda\mu}$ Constante sind. Diese werden Null, wenn man für die Umformung ein n-gliedriges conjugirtes System benützt. Es vereinfacht sich dann obige Formel (8*) in:

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \psi_i(\eta, r) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_i' \partial \eta_k'} \zeta_i \zeta_k + \frac{d}{dx}\left[\sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \psi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda)\right]$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \zeta_i \zeta_k + \frac{d}{dx}\left[\sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \psi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda)\right], \qquad (10)$$

wo also nach (V, 2) für ζ_k die Gleichung

$$\zeta_k \Delta(z^1, z^2 \ldots z^n) = \begin{vmatrix} \eta_k', & (z_k^1)' \ldots (z_k^n)' \\ \eta_1, & z_1^1 \ldots z_1^n \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \eta_n, & z_1^n \ldots z_n^n \end{vmatrix}$$

besteht, wenn $\Sigma \pm z_1^1 z_2^2 \ldots z_n^n$ mit $\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)$ bezeichnet wird. Diese Grössen sind aber nicht von einander unabhängig. Denn da

$$\bar{\varphi}_i(\eta) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m),$$

so ist

$$\bar{\varphi}_i\left(\sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda z^\lambda\right) = 0,$$

oder

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda \bar{\varphi}_i(z^\lambda) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda' z_k^\lambda = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m);$$

somit erhält man wegen

$$\bar{\varphi}_i(z^\lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

die Relation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \zeta_k = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m).$$

Zur Bestimmung der Grössen $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ dienen die n Gleichungen

$$\eta_k = \sum_{\lambda=1}^{n} \rho_\lambda z_k^\lambda \qquad (k = 1, 2 \ldots n),$$

welche also dieselbe Determinante $\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)$ besitzen, wie die für Berechnung der $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$ erhaltenen. Es werden sich also beide Grössensysteme dann und nur dann aus den zugehörigen Gleichungssystemen berechnen lassen, wenn diese Determinante im ganzen Intervalle *ab*, einschliesslich der Grenzen *a* und *b*, nicht verschwindet.

Unter dieser Voraussetzung kann man der zweiten Variation in (2) gemäss (10), da die $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ an den Grenzen Null sind, die Form geben:[1]

$$\delta^2 J = \int_a^b \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \zeta_i \zeta_k, \qquad (11)$$

wo die $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$ den m Gleichungen genügen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \zeta_k = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m).$$

Diese Form der zweiten Variation soll ihre reducirte Form genannt werden.

[1] Clebsch, Journal für Math., Bd. 55.

XXIV. SITZUNG VOM 17. NOVEMBER 1898.

Die kais. medicinische Militär-Akademie in St. Petersburg übersendet eine Einladung zu dem am 30. December l. J. stattfindenden Erinnerungsfeste ihrer hundertjährigen Gründung.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendet eine im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag verfasste Arbeit von Dr. Hans Meyer: »Die Isomeren des Cantharidins« (II. Mittheilung über das Cantharidin).

Herr Walter Ziegler in Wanghausen übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, mit der Aufschrift:

1. »Farbige Photographie: ein neues vereinfachtes Verfahren für Copie und Druck.
2. Ein neues Korn für Heliogravure.
3. Ein neues Raster für Hochdruck; beides hauptsächlich für Farbendruckzwecke«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Franz Kietreiber: »Über die Condensation der Fettaldehyde mit Propionsäure. (Ein Beitrag zur Perkin'schen Reaction.)»

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit der Herren Dr. E. Haschek und Dr. H. Mache vor, betitelt: »Über den Druck im Funken«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss erstattet einen Bericht über die Beobachtungen des Leoniden-Stromes der

Meteore, welche von der Wiener Sternwarte veranlasst wurden.

Das w. M. Herr Prof. G. v. Escherich überreicht den zweiten Theil seiner Abhandlung, betitelt: »Die zweite Variation der einfachen Integrale«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine in seinem Laboratorium von Herrn Prof. J. Herzig ausgeführte Arbeit, betitelt: »Über Brasilin und Hämatoxylin« (IV. Abhandlung).

Das w. M. Herr Hofrath V. v. Lang überreicht folgende »Vorläufige Mittheilung über das Spectrum des Chlors«, von den Herren Regierungsrath J. M. Eder und Prof. E. Valenta.

Herr Privatdocent Dr. Franz E. Suess in Wien spricht über die Herkunft der Moldavite aus dem Weltraume.

Über den Druck im Funken

von

Dr. **Eduard Haschek** und Dr. **Heinrich Mache.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

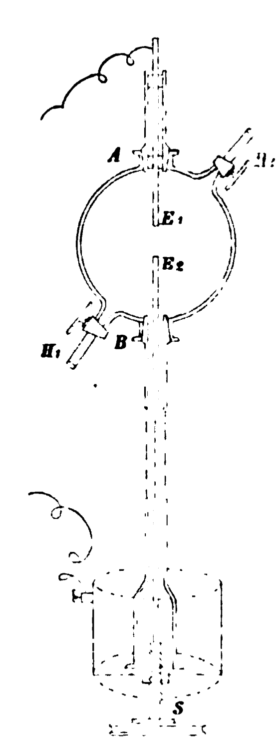
Gelegentlich ihrer Versuche mit der 11000gliedrigen Chlorsilberbatterie machten Warren de la Rue und H. W. Müller[1] die Beobachtung, dass ein Funkenstrom in einer theilweise evacuirten Luftpumpenglocke eine plötzliche Druckerhöhung hervorruft, die beim Öffnen des Stromes ebenso rasch wieder zurückgeht. Dieser Ausschlag, der beispielsweise bei 56 *mm* Quecksilberdruck zu 15·8 *mm* angegeben wird, lässt sich eben wegen seiner Grösse und seines raschen Verschwindens nach der Unterbrechung des Funkenstromes nicht als Wärmeausschlag deuten, sondern muss als Folge einer Druckerhöhung im Metalldampf der Funkenbahn angesehen werden, worauf Warren de la Rue und H. W. Müller bereits hinweisen. Auch auf indirectem Wege lässt sich auf einen derartigen Druck im Funken schliessen. Es hat nämlich Humphreys[2] nachgewiesen, dass die Linien des Bogenspectrums eine Verschiebung nach Roth erfahren, sobald man den Bogen in Gas von erhöhtem Druck brennen lässt. Aus den numerischen Angaben Humphreys kann man nun von einer etwaigen Linienverschiebung auf eine Druckerhöhung in dem Theil eines leuchtenden Dampfes schliessen, von dem das spectral zerlegte Licht stammt.

[1] C. R. 89, p. 637 (1879).

[2] Astroph. Journ. 6 (1897).

Es haben nun F. Exner und E. Haschek[1] gelegentlich ihrer Untersuchungen der ultravioletten Funkenspectra der Elemente derartige, und zwar sehr beträchtliche Linienverschiebungen nachgewiesen und schätzen aus der Grösse derselben im Vergleiche zu den Angaben Humphreys den Funkendruck auf 24—30 Atmosphären. Hiemit stimmt auch eine Beobachtung Mohler's[2] überein, die dahin geht, dass man in einer Geisslerröhre, die auf 2 *mm* Druck ausgepumpt wurde, dieselben Wellenlängen der Spectrallinien erhält, wie im Bogen, der unter 20 *mm* Druck brennt.

Endlich hat H. Mache[3] auch direct nachgewiesen, dass beim Ausströmen hochgespannter Elektricität aus Spitzen, sowie beim Überschlagen von Funken der Influenzmaschine oder des Inductoriums Druckveränderungen an der Umgebung der Elektroden auftreten.



Es erscheint nach Allem wünschenswerth, diese gewiss interessante Erscheinung näher zu studiren und messend zu verfolgen.

§ 1. Die definitiven Versuche hatten wir in folgender Weise angeordnet:

In einer starkwandigen Glaskugel von 20·8 *cm* Durchmesser waren oben und unten Schliffstücke *A* und *B* angebracht. In *A* war die eine Elektrode E_1 fixirt, an *B* eine 1 *m* lange Barometerröhre angeblasen, durch die ein Stahlstab ging, an dem die zweite Elektrode E_2 befestigt wurde. Der Stab selbst war mit einer Stahlschraube *S* von 2 *mm* Ganghöhe verbunden, so dass die Elektrode E_2 gehoben und gesenkt

[1] Diese Sitzungsber., 106 (1897) ff.
[2] Astroph. Journ. 4 (1896).
[3] Diese Sitzungsber. 107 (1898).

werden konnte. Der luftdichte Abschluss wurde im Barometerrohre durch eine Vaselinöl-, respective Quecksilbersäule bewerkstelligt, deren Stand gleichzeitig den in der Kugel herrschenden Druck abzulesen gestattete. Zu den Elektroden wurde der Strom eines Hochspannungs-Transformators von etwa 5200 Volt effectiver Spannung zugeleitet. Parallel zur Funkenstrecke konnten im Bedarfsfalle gemessene Capacitäten eingeschaltet werden. Zwei Hähne H_1 und H_2 ermöglichten es, die Kugel zu evacuiren, beziehungsweise mit verschiedenen Gasen zu füllen. Auch erwies es sich sehr häufig als nöthig, das beim Überschlagen der Funken sich reichlich entwickelnde Stickoxyd zu entfernen.

§ 2. Lässt man den Funken zwischen den Elektroden übergehen, so zeigt die Indexflüssigkeit im Barometerrohr eine Druckerhöhung an, welche sofort fast vollständig zurückgeht, wenn man den Funkenstrom einstellt. Zur Deutung dieser direct zu messenden Druckerhöhung im Gesammtraum der Kugel für unsere Zwecke ist es nöthig, eine Beziehung zwischen eben dieser Druckerhöhung und der Druckerhöhung im Funken selbst aufzustellen. Es ist nun ohneweiters verständlich, dass diese plötzlich im Funken auftretende Steigerung des Druckes, die nach der Entladung ebenso rapid verschwindet, im umgebenden Gase zur Bildung einer Welle Veranlassung geben wird, die mit einer der Schallgeschwindigkeit mindestens gleichen Geschwindigkeit fortschreitet. Wegen der Kleinheit der Erregungsquelle — wir verwendeten nur in einem Falle eine Funkenstrecke von mehr als 3 *mm* Länge — können diese Wellen schon in kleiner Entfernung als Kugelwellen angesprochen werden.

Es wird dabei auf die Flächeneinheit der Oberfläche einer jeden solchen Kugelwelle ein Druck entfallen, der mit wachsendem Radius der betreffenden Welle kleiner wird, jedoch so, dass der Druck auf der Gesammtoberfläche constant bleibt, denn die Gesammtenergie der Kugelwelle, welcher der Druck direct proportional ist, bleibt constant. Nennen wir also die Druckerhöhung auf der Oberflächeneinheit des Funkens selbst P, dessen Oberfläche O, so entfällt auf die Oberflächeneinheit einer Kugelwelle vom Radius r die Druckerhöhung

$$P' = \frac{O}{4r^2\pi} . P.$$

Ist r der Radius der verwendeten Glaskugel, so wird dieser Druck P' direct am Manometer beobachtet, da ja die Welle in der angesetzten Röhre, welche genügend calibrirt ist, ohne Einbusse an Energie weiterschreitet.

Da jedoch wegen der Trägheit der Indexflüssigkeit zur Messung ein Funke allein nicht genügt, ist man genöthigt, die Einstellung des Index während eines Funkenstromes abzuwarten, so dass man dann P' und analog P als ein Zeitmittel der Druckerhöhung zu definiren hätte. Es ist aber ohneweiters klar, dass dieses Zeitmittel P umso genauer dem wahren Funkendruck gleichgesetzt werden kann, je rascher die einzelnen Entladungen aufeinanderfolgen.

Experimentell wird sich ein Werth für die Zahl der Funken in der Secunde ergeben, über den hinaus eine Variation der Einstellung der Indexflüssigkeit nicht mehr constatirt werden kann. Berücksichtigt man, dass der entwickelte Metalldampf und somit auch der zwischen den Elektroden herrschende Druck nicht mit dem Funken völlig gleichzeitig verschwinden können, so ist im Voraus anzunehmen, dass bei unserem Transformator der mit Wechselstrom von etwa 80 Wechseln in der Secunde gespeist wurde, dieser Grenzwerth wohl zur Genüge erreicht sein dürfte. In der That wurde die Berechtigung dieser Annahme durch die später in § 9 angeführten Versuche mit dem Funkeninductor festgestellt.

Es erübrigt nur noch, die Methode zu beschreiben, nach welcher wir die in die Rechnung eingehende Oberfläche des Funkens O mit thunlichster Annäherung zu bestimmen suchten. Wir haben zu diesem Zwecke vom Funken Momentphotographien in vierfacher Vergrösserung angefertigt. Die Geschwindigkeit des hiebei verwendeten Momentverschlusses betrug $^1/_{28}$ Secunde. Der auf diese Weise in der Ebene fixirte, vom Funken incandescirte Theil des Raumes wurde mit Hilfe eines Polarplanimeters ausgemessen. In unserem Falle genügte es stets für die dem so gemessenen Querschnitt entsprechende Oberfläche des Funkens die Oberfläche einer Kugel zu

substituiren, deren Radius ρ gleich ist dem Radius des Kreises, der jenem Querschnitt flächengleich ist. Es wird dann auch

$$P' = \frac{\rho^2}{r^2} P \text{ und } P = \frac{r^2}{\rho^2} P'.$$

Die Messung des P', d. h. der Druckerhöhung im Gesammtraum der Kugel, unterlag keinen besonderen Schwierigkeiten. Zwar tritt stets auch ein Ausschlag der Indexflüssigkeit in Folge der im Funken producirten Wärme auf, doch ist die Natur dieses Wärmeausschlages von der des Druckausschlages so verschieden, dass eine Trennung beider mit Leichtigkeit bewerkstelligt werden kann. Doch ist hier auf einen Umstand aufmerksam zu machen. Während der Dauer des Versuches erhitzen sich nämlich am Funkenstrome die Elektroden sehr beträchtlich — bei zu starkem primären Strome bis zur Rothgluth. Die aufsteigende warme Luft drückt aber wegen ihrer besseren Leitfähigkeit das Schlagpotential des Funkens wesentlich herab und gleichzeitig beginnt der Ausschlag zurückzugehen.

Diese Erscheinung äussert sich auch in akustischer Beziehung, indem das laute, in freier Luft fast unerträgliche Prasseln des Funkens in ein schwächeres, zischendes Geräusch übergeht. Die Beobachtungen dürfen daher höchstens bis zum Eintritt dieses Phänomens ausgedehnt werden.

Es sei hier noch bemerkt, dass wir die Funkenwärme selbst für eine Erscheinung secundärer Natur halten, deren directe Ursache die lebendige Kraft ist, welche den von den Elektroden durch elektromotorische Kräfte abgeschleuderten Metallpartikeln oder Metallmolekeln innewohnt. Wir finden uns hier in Übereinstimmung mit den Versuchen von Schuster,[1] welcher die Geschwindigkeit der von den Elektroden abgeschleuderten Funkensubstanz bis zu 2000 *m*/Sec. angibt.

Die hier geäusserte Anschauung ist übrigens seit Langem und zu wiederholten Malen ausgesprochen worden. Unseres Wissens findet sie sich zuerst bei v. Waltenhofen,[2] welcher

---

1 Nature LVII, 17 (1897).

2 Pogg. Ann. 128, p. 608 (1866). Vergl. auch: Lecher, Diese Sitzungsberichte, 96, S. 103 (1887).

sich »die ponderable Materie zwischen den Elektroden nicht nur als Träger der Entladung, sondern als durch diese selbst in Bewegung gesetzt denkt«.

§ 3. Es wurde zunächst nach dem oben auseinandergesetzten Verfahren der Druck im Funken für verschiedene, in den secundären Kreis eingeschaltete Capacitäten bestimmt. Hiebei bedienten wir uns einer Funkenstrecke von 2 *mm* Länge zwischen Messingstiften von 3 *mm* Durchmesser. Als inducirende Flüssigkeit verwendeten wir Vaselinöl. Die primäre Stromstärke betrug bei diesen Versuchen 7·5 Ampère bei einer Spannung von 100 Volt.

Die erhaltenen Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Tabelle I.

Capacität in Metern	Ausschlag in Millimetern Vaselinöl	Druck im Funken in Atmosphären
5·16	33	22
11·1	118	40
16·4	148	48
22·9	165	45
53·1	220	51
77·3	228	50
100·2	258	46
156·0	293	36

Die in der Kugel eingeschlossene Luft stand hiebei unter einem Druck von 695 *mm*.

Wir geben hier und in den folgenden Tabellen den direct am Manometer beobachteten Ausschlag, weil wir in demselben gemäss der in § 2 entwickelten Ansicht ein Maass für die im Funken entwickelte Schallenergie erblicken. Es zeigt sich ohneweiters, dass mit wachsender Capacität, also wachsender Elektricitätsmenge, die im Einzelfunken passirt, diese akustische Energie zunimmt, und zwar anfangs sehr rasch, später aber

einem bestimmten Grenzwerth zustrebt. Gleichzeitig nimmt auch der Druck im Funken anfangs rasch zu, erreicht aber dann ein Maximum und sinkt hierauf in Folge der Vergrösserung des Funkenvolumens wieder langsam ab.

§ 4. Weiters wurden die Erscheinungen näher ins Auge gefasst, welche eintreten, wenn man bei gleichbleibender Capacität und primärer Stromstärke die Funkenlänge variirt. Auch hier wächst der beobachtete Ausschlag gegen einen Grenzwerth. Der im Funken entwickelte Druck scheint aber constant zu bleiben, da sich die Funkenzahl nicht ändert, also die im Einzelfunken passirende Energiemenge unverändert bleibt. Er beträgt im Mittel 50·7 Atmosphären. Die folgende Tabelle gibt die genaueren Daten. Die verwendete Capacität betrug 77·3 *m*, die primäre Stromstärke 6·2 Ampère, der Gasdruck 697 *mm* Hg.

Tabelle II.

Funkenlänge in Millimetern	Ausschlag in Millimetern Vaselinöl	Druck im Funken in Atmosphären
1	85	41
1·5	120	57
2	182	51
2.5	227	45
3	260	59
3·5	280	47
4	300	55

§ 5. Ferner wurde der Einfluss des Druckes des umgebenden Mediums untersucht. Selbstverständlich musste als Indexflüssigkeit in diesem Falle Quecksilber verwendet werden. Die erhaltenen Resultate sind im Folgenden gegeben. Verwendet wurde dabei eine Funkenstrecke von 3 *mm*, eine Capacität von 100·2 *m*, bei einer primären Stromstärke von 9·5 Ampère.

Tabelle III.

Druck in Millimetern Quecksilber	Ausschlag in Millimetern Quecksilber	Druck im Funken in Atmosphären
585	7·8	27·2
550	6·2	19·6
502	5·0	19·9
415	3·3	11·2
320	2·2	6·5
217	1·2	3·7
96	0·5	1·0

Auch hier, wie in allen folgenden Versuchsreihen, wo nicht ausdrücklich von anderen Elektroden die Rede ist, wurden als solche Messingstifte von 3 *mm* Durchmesser verwendet.

Erwähnt sei, dass bei den Drucken von 217, respective 96 *mm* Quecksilber die Elektroden bereits von blauem Licht umhüllt waren. Da ein weiteres Verfolgen der Erscheinung bei noch niedrigeren Drucken wegen der geringen Ausschläge bei so kleiner Funkenstrecke unthunlich war, so haben wir die letztere auf 24 *mm* erhöht. Wir erhielten die folgende Tabelle.

Tabelle IV.

Druck in Millimetern Quecksilber	Ausschlag in Millimetern Quecksilber
165	12·3
160	11·1
140	8·8
120	7·1
88	4·7
70	3·5
50	2·8
20	1·0

Den Druck haben wir nicht bestimmt, da die bei der Ableitung der Formel in § 2 gemachten Voraussetzungen hier nicht mehr genügend genau erfüllt sind und die Anfertigung, beziehungsweise Deutung der Photographien mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Es ist nämlich die sich bildende Aureole so lichtschwach, dass sie auf Momentaufnahmen nicht mehr sichtbar gemacht werden kann, während wieder das blaue Licht, das die Elektroden einhüllt, sowie die Funkenbahn selbst so aktinisch sind, dass bei Daueraufnahmen, welche die Aureole zeigen müssten, dieselbe in Folge des diffusen, vom Funken stammenden Lichtes vollständig im Schleier verschwindet. Ausserdem ist das blaue Licht an den Elektroden sehr unruhig, so dass ein auch nur annähernd genaues Ausmessen der Photographien, selbst bei Umgehung obiger Schwierigkeiten, ganz aussichtslos wäre.

§ 6. Auch den Einfluss der Form der Elektroden unterzogen wir einer Prüfung, indem wir unter denselben Versuchsbedingungen, welche der Tabelle III zu Grunde liegen, die Messingstifte durch Messingkugeln von 18 *mm* Durchmesser ersetzten. Die erhaltenen Resultate sind mit den oben gegebenen identisch.

§ 7. Hingegen konnten wir einen Einfluss des umgebenden Gases auf den Funkendruck constatiren.

Untersucht wurden Luft, Kohlendioxyd und Leuchtgas (Dichte = 0·47). Verwendet wurde hiebei eine Funkenstrecke von 2 *mm*, eine Capacität von 72·8 *m* bei einer primären Stromstärke von 6 Ampère. Das in der Kugel eingeschlossene Gas stand unter dem Druck von 704 *mm* Quecksilber.

Tabelle V.

	Ausschlag in Millimetern Vaselinöl	Druck im Funken in Atmosphären
Luft	167	51·7
Kohlendioxyd	323	153·2
Leuchtgas	260	79·7

§ 8. Weitere Versuche wurden mit Elektroden aus verschiedenem Material durchgeführt. Wir benützten dazu den Transformator und die Condensatoren, die bei den Spectraluntersuchungen von F. Exner und E. Haschek in Verwendung stehen, um nach Möglichkeit die dort herrschenden Versuchsbedingungen zu gewinnen. Zum Vergleich mit den früher gegebenen Zahlen haben wir auch den Funkendruck für Messingelektroden bestimmt. Die Kohlenstifte waren aus käuflicher, gepresster Gaskohle (Elementenkohle) geschnitten, deren hoher Gehalt an leicht zersetzlichen, flüchtigen Bestandtheilen wohl den hohen Werth des Druckes im Funken erklärt.

Die Versuchsbedingungen waren 8·2 Ampère im primären Stromkreis, 6 Batterien je zehnplattiger, ebener Condensatoren mit der Gesammtcapacität von 750 *m* bei beiläufig 5800 Volt effectiver Spannung im secundären Kreis. In der folgenden Tabelle sind wieder der directe Ausschlag, der Funkendruck und die Funkenlänge, die nicht bei allen Elektroden auf denselben Betrag gebracht werden konnten, angegeben.

Tabelle VI.

Material	Funkenstrecke in Millimetern	Ausschlag in Millimetern Vaselinöl	Druck im Funken in Atmosphären
Gaskohle	3	740	124
Eisen	3	605	79
Messing	3	427	64
Zink	2·6	243	44
Kupfer	2·5	187	33

Die hier für verschiedene Materialien gefundenen Funkendrucke lassen sich vielleicht mit den von V. v. Lang[1] gemessenen elektromotorischen Gegenkräften im Gleichstrombogen in Zusammenhang bringen. Es zeigen nämlich die Substanzen, welche einen grossen Werth des Funkendruckes liefern,

[1] Diese Ber. 95. S. 84 (1887).

eine höhere elektromotorische Gegenkraft; nur Zink macht hier eine Ausnahme. Doch lässt sich dies vielleicht dadurch erklären, dass der für die elektromotorische Kraft des Zinkbogens gefundene Werth wegen der leichten Schmelzbarkeit des Materials mit einer grösseren Unsicherheit behaftet sein dürfte.

§ 9. Gemäss den Ausführungen in § 2 ist eine Untersuchung der Abhängigkeit unserer Erscheinung von der Zahl der Funken in der Secunde wünschenswerth. Da sich eine derartige Untersuchung mit dem Transformator naturgemäss nicht ausführen liess, da wir bei demselben an die Wechselzahl des von der »Internationalen Elektricitätsgesellschaft« gelieferten Wechselstromes gebunden waren, so verwendeten wir hiezu einen Ruhmkorff'schen Funkeninductor von circa 15 *cm* Schlagweite. Die Unterbrechung des primären Stromes geschah für die niedrigen Unterbrechungszahlen mit einem regulirbaren Foucault'schen Interruptor, für die höheren mit einem Neef'schen Hammer, beziehungsweise mit einem schnelllaufenden Motorunterbrecher. In den secundären Kreis hatten wir eine Capacität von 5·16 *m* eingeschaltet. Die Abhängigkeit des Ausschlages von der Unterbrechungszahl kann der folgenden Tabelle entnommen werden.

Tabelle VII.

Unterbrechungszahl in der Secunde	Ausschlag in Millimetern Vaselinöl
4·8	2·3
7·5	4·3
14·1	11·2
20·0	14·7
24.0	15·2
30·0	15·5

Bei der verwendeten Capacität entspricht jeder Unterbrechung auch ein Funke. Da nun der Ausschlag für eine Änderung von 24 auf 30 Unterbrechungen in der Secunde nur um

0·3 *mm* Vaselinöl, das ist um etwa $2^0/_0$ des Ausschlages bei 24 Funken wächst, so ist klar, dass schon bei einer wenig grösseren Unterbrechungszahl — die wir leider nicht mehr erreichen konnten — der in § 2 erwähnte Grenzwerth erreicht worden wäre. Daraus folgt aber, dass für den Transformator bei 80 Wechseln in der Secunde der in den Tabellen angegebene Druck, der ja zunächst nur ein Zeitmittel ist, mit dem wahren Funkendruck zusammenfällt.

Auch versuchten wir ein Maass für den im Funken eines Inductoriums herrschenden Druck zu gewinnen. Doch stösst man hiebei auf eine Schwierigkeit. Da nämlich bei einer geringen eingeschalteten Capacität der Funke für eine Momentaufnahme sich als zu lichtschwach erweist, anderseits aber bei grösserer Capacität die Zahl der Funken in der Secunde über ein gewisses Maximum nicht zu steigern ist, so waren wir gezwungen, die Messung bei niedrigerer Unterbrechungszahl vorzunehmen und vermittelst der obigen Tabelle auf die höchste zu reduciren. Es ergab sich auf diese Weise für eine Capacität von 16·4 *m* und einen direct beobachteten Ausschlag von 11·5 *mm* Vaselinöl der Funkendruck zu 11·3 Atmosphären.

§ 10. Auf Grund der in § 2 entwickelten Anschauung könnte die Frage entschieden werden, ob man es im Gleichstrombogen mit einem continuirlichen oder disruptiven Entladungsvorgang zu thun hat; denn es zeigt sich auch hier in ganz analoger Weise eine Druckerhöhung. Zündeten wir nämlich in unserer Kugel einen Bogen von etwa 2 *mm* Länge an, so sank das Vaselinöl zunächst rasch und gleichmässig; wurde dann plötzlich der Bogen abgestellt, so hörte dieses Sinken nicht nur im selben Moment auf, sondern ging ebenso momentan in ein Steigen über. Nun zeigt aber die Indexflüssigkeit den Partialdruck derjenigen Stelle im Gase an, wo die Manometerröhre an die Kugel angesetzt ist. Wird dieser erhöhte Druck an jener Stelle nicht durch nachkommende Verdichtungswellen fort und fort erneuert, so wird das Manometer so lange in Ruhe bleiben, bis der expandirende Metalldampf selbst das Manometerrohr erreicht hat. In Anbetracht des grossen Volumens unserer Kugel und des Charakters der ganzen Erscheinung lässt sich somit für die letztere nur dann eine befriedigende

Erklärung finden, wenn man auch im Lichtbogen eine sich fortwährend stossweise regenerirende Druckerhöhung voraussetzt, eine Annahme, die umso unbedenklicher gemacht werden kann, als auch anderweitige experimentelle Untersuchungen auf eine solche Intermittenz der Entladung hinweisen.[1] Auf die Existenz des hiedurch bedingten Druckes lässt sich auch insoferne schliessen, als erfahrungsgemäss die in verschiedenen Bogen erhaltenen Spectren desselben Elementes untereinander nicht unbeträchtliche Verschiedenheiten aufweisen, die sich durch eine Verschiedenheit des in den einzelnen Bogen herrschenden Druckes ungezwungen erklären würden.

Für einen Bogen von 3 *mm* Länge und eine Stromstärke von circa 2 Ampère bei 110 Volt Spannung schätzten wir nach Analogie der oben für Funkenstrecken gefundenen Werthe die Grösse dieses Druckes auf 2—3 Atmosphären.

Zum Schlusse sei es uns gestattet, auf das Resultat der vorliegenden Arbeit nochmals kurz zurückzukommen. Als solches ergibt sich der Nachweis eines hohen Druckes in der Bahn des elektrischen Funkens, als dessen unmittelbare Ursache der von den Elektroden abgeschleuderte Metalldampf anzusehen ist. Hieraus erklärt sich, dass der Druck im Funken ebensowohl mit der aufgewendeten Energie variirt, wie mit der Substanz, aus welcher die Elektroden bestehen. Ein weiteres Ergebniss ist die Abhängigkeit der Erscheinung vom Druck und der Natur des umgebenden Gases. Endlich zeigt sich auch im Lichtbogen eine Drucksteigerung, die auf eine Intermittenz der Entladung hinweist.

[1] Vergl. Lecher, Diese Sitzungsber., 95 (1887), Cantor, Diese Sitzungsberichte, 107 (1898).

Die zweite Variation der einfachen Integrale

(II. Mittheilung)

von

G. v. Escherich,

w. M. k. Akad.

In diesem zweiten Theile wird zunächst die Formel, welche in der Einleitung als der Schlüssel zur zweiten Variation bezeichnet wurde, für den ersten Fall der Variationsrechnung, wo also jede Bedingungsgleichung auch Derivate der gesuchten Functionen enthält, abgeleitet. Bei der darauffolgenden Untersuchung des zweiten Falles der Variationsrechnung fand eine Beschränkung auf die Fragen statt, die eine andere Behandlung als im ersten Fall erfordern. Einer eingehenden Betrachtung werden dann die conjugirten Systeme unterzogen. Durch die hiebei erhaltenen Resultate, zu denen auch der Beweis für die allgemeine Giltigkeit der erwähnten fundamentalen Formel gehört, ist erst eine feste Basis gewonnen für die Entwickelung der Criterien bezüglich des Vorzeichens der zweiten Variation.

XI.

1. Als eine wesentliche Bedingung, damit die Transformation durchführbar sei, ergab sich, dass ein conjugirtes System von n Integralsystemen des accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen bestehe, welches weder im Integrations-Intervalle, noch an seinen Grenzen verschwinde. Um diese Bedingungen genauer zu erörtern, ist es zunächst nothwendig, einige Relationen herzuleiten, die ebenfalls auf dem in (VI) eingeschlagenen Weg erhalten werden.

Es soll, wie dort

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i y'_k} = a_{ik}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y_k} = b_{ik}$$

gesetzt werden, wodurch (X, 6) in

$$\psi(z, r; u, \rho) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [a_{ik}(z_i u'_k - u_i z'_k) + b_{ik}(z_i u_k - u_i z_k)]$$
$$- \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} (r_k u_i - \rho_k z_i)$$

übergeht, oder

$$\psi(u, \rho; z, r) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [a_{ik}(u_i z'_k - z_i u'_k) + b_{ik}(u_i z_k - u_k z_i)]$$
$$- \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} (\rho_k z_i - r_k u_i)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} z'_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} u_i + \sum_{k=1}^{n} z_k \left\{ \sum_{i=1}^{n} [(b_{ik} - b_{ki}) u_i - a_{ik} u'_i] - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} \rho_i \right\}$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k u_i.$$

Sind

$$\begin{array}{l} u_1^1, u_2^1 \dots u_n^1;\ \rho_1^1, \rho_2^1 \dots \rho_m^1, \\ u_1^2, u_2^2 \dots u_n^2;\ \rho_1^2, \rho_2^2 \dots \rho_m^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_1^n, u_2^n \dots u_n^n;\ \rho_1^n, \rho_2^n \dots \rho_m^n \end{array}$$

n linear unabhängige Integralsysteme des accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen (IX, 3), deren λtes kurz mit u^λ, ρ^λ bezeichnet werde, so lassen sich die $n\,(n+m)$ unbestimmten Multiplicationen

$$w_1^\mu, w_2^\mu \dots w_n^\mu;\ v_1^\mu, v_2^\mu \dots v_m^\mu \qquad (\mu = 1, 2 \dots n)$$

so wählen, dass in dem nach den $z_1, z_2 \ldots z_n$ linearen Differential-Ausdrucke erster Ordnung

$$\omega_\mu(z) = \sum_{\lambda=1}^{n} w_\lambda^\mu \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r) + \sum_{\lambda=1}^{m} v_\lambda^\mu \bar{\varphi}_\lambda(z) \tag{1}$$

sämmtliche r und alle Ableitungen der z bis auf z'_μ verschwinden. Es hat nämlich dieser Ausdruck die Form

$$\omega_\mu(z) = \sum_{\lambda=1}^{n} w_\lambda^\mu \sum_{k=1}^{n} z'_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} u_i^\lambda + \sum_{\lambda=1}^{m} v_\lambda^\mu \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_k} z'_k$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{n} w_\lambda^\mu \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} u_i^\lambda r_k + \sum_{i=1}^{n} p_i z_i$$

und man hat also zu dem beabsichtigten Zwecke die Multiplicatoren nur gemäss den Gleichungen zu bestimmen:

$$\sum_{\lambda, k=1}^{n} a_{ik} u_k^\lambda w_\lambda^\mu + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_i} v_\lambda^\mu = 0,$$

$$i = 1 \ldots \mu-1, \mu+1 \ldots n$$

$$\sum_{\lambda, k=1}^{n} a_{ik} u_k^\mu w_\lambda^\mu + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_i} v_\lambda^\mu = C_\mu,$$

$$\sum_{\lambda, i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} u_i^\lambda w_\lambda^\mu = 0,$$

$$k = 1, 2 \ldots m$$

wo C_μ eine beliebig angenommene Constante bedeute, die nicht Null ist.

Führt man in dieselben

$$W_k = \sum_{\lambda=1}^{n} u_k^\lambda w_\lambda^\mu$$

ein, so gehen sie über in

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} W_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} v_k^{\mu} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2 \ldots \mu - 1, \mu + 1 \ldots n.$$

$$= C_{\mu} \quad \text{»} \quad i = \mu,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} W_k = 0, \qquad i = 1, 2 \ldots m.$$

Da die Determinante dieses Gleichungssystems

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} \ldots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} \ldots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} \ldots \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}, & 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \ldots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}, & 0 \;.\;.\; 0 \end{vmatrix}$$

nach den in (II, 2) gemachten Voraussetzungen nirgends im Integrations-Intervalle verschwindet, so lassen sich aus demselben die Grössen

$$W_1, W_2 \ldots W_n; \; v_1^{\mu}, v_2^{\mu} \ldots v_m^{\mu}$$

bestimmen. Bezeichnet man in Δ die Subdeterminante von a_{ik} mit A_{ik}, und von $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'}$ mit φ_i^k, so erhält man

$$W_k = C_{\mu} \frac{A_{\mu k}}{\Delta}, \quad v_{\lambda}^{\mu} = C_{\mu} \frac{\varphi_{\lambda}^{\mu}}{\Delta},$$

woraus, wenn

$$\Sigma \pm a_{11}^{1} a_{22} \ldots a_{nn} = A$$

gesetzt und mit U_k^{λ} die Subdeterminante von u_k^{λ} in

$$\Sigma \pm u_1^1, u_2^2 \ldots u_n^n = \Delta(u^1, u^2 \ldots u^n) = U$$

bezeichnet wird, sich ergibt

$$\begin{cases} w_\lambda^\mu = \dfrac{1}{U}\sum_{k=1}^{n} U_k^\lambda W_k = \dfrac{C_\mu}{\Delta U}\sum_{k=1}^{n} A_{\mu k} U_k^\lambda, \\ v_\lambda^\mu = C_\mu \dfrac{\varphi_\lambda^\mu}{\Delta}, \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass $U \neq 0$ ist.

Substituirt man diese Werthe in $\omega_\mu(z)$, so erhält man

$$\omega_\mu(z) = C_\mu z'_\mu + \sum_{i=1}^{n} q_i z_i$$

$$= \frac{C_\mu}{\Delta U}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu} U_\nu^\lambda \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r) + \frac{C_\mu}{\Delta}\sum_{\lambda=1}^{m} \varphi_\lambda^\mu \overline{\varphi}_\lambda(z). \qquad (1^*)$$

Hieraus erkennt man sofort, dass, wenn je zwei der Systeme

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2; \ldots u^n, \rho^n$$

zu einander conjugirt sind, dann wegen

$$\psi(u^\lambda, \rho^\lambda; u^k, \rho^k) = 0, \quad \overline{\varphi}_\lambda(u_k) = 0$$

die n linear unabhängigen Systeme $u^1, u^2, \ldots u^n$ den n linearen Differentialgleichungen

$$\omega_1(z) = 0,\ \omega_2(z) = 0 \ldots \omega_n(z) = 0$$

genügen, also ein Fundamentalsystem derselben bilden. Dies führt zunächst zu folgenden Bemerkungen:

Ein conjugirtes System enthält nur n linear unabhängige Integralsysteme des accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen.

Ist ein Integralsystem zu jedem von n linear unabhängigen Integralsystemen eines conjugirten Systems conjugirt, so steht es zu diesen in einer linearen Abhängigkeit.

Da ferner in diesem Falle n linear unabhängige Integralsystem $u^1, u^2 \ldots u^n$ des Gleichungssystems

$$\omega_1(z) = 0,\ \omega_2(z) = 0 \ldots \omega_n(z) = 0$$

bekannt sind, so kann man $\omega_\mu(z)$ durch dieselben darstellen und man erhält so:

$$\omega_\mu(z) = \frac{C_\mu}{U} \begin{vmatrix} z'_\mu; & z_1 \dots z_n \\ (u^1_\mu)'; & u^1_1 \dots u^1_n \\ \dots & \dots\dots \\ \dots & \dots\dots \\ (u^n_\mu)'; & u^n_1 \dots u^n_n \end{vmatrix} = \frac{C_\mu \chi_\mu(z)}{U},$$

wenn, wie in (VII), die Determinante mit $\chi_\mu(z)$ bezeichnet wird. Führt man diesen Ausdruck in (1*) ein, so findet man die Formel

$$\chi_\mu(z) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\kappa,\nu=1}^{n} A_{\kappa\nu} U_\nu^\lambda \varphi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r) + \frac{U}{\Delta} \sum_{\lambda=1}^{m} \bar{\varphi}_\lambda(z) \varphi_\lambda^\mu, \qquad (2)$$

die sich auch direct verificiren lässt.

2. Nimmt man nun an, dass die $z_1, z_2 \dots z_n$, die bisher ganz willkürlich waren, den m Gleichungen

$$\bar{\varphi}_\lambda(z) = 0, \quad \lambda = 1, 2 \dots m$$

genügen, so vereinfacht sich obiger Ausdruck in

$$\chi_\mu(z) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\kappa,\nu=1}^{n} A_{\kappa\nu} U_\nu^\lambda \varphi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r). \qquad (3)$$

Bilden die

$$z_1, z_2 \dots z_n; \; r_1, r_2 \dots r_m$$

ein Integralsystem des accessorischen Systems linearer Differential-Gleichungen, so trifft diese Annahme zu, und setzt man weiters voraus, dass dieses Integralsystem mit $(n-1)$ des conjugirten, etwa $u^1, \rho^1; u^2, \rho^2; \dots u^{k-1}, \rho^{k-1}; u^{k+1}, \rho^{k+1}; \dots u^n, \rho^n$ conjugirt sei, aber nicht zu u^k, ρ^k, so ist

$$\varphi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r) = 0 \quad \text{für } \lambda = 1 \dots k-1, k+1 \dots n$$

und es reducirt sich weiter der obige Ausdruck auf

$$\chi_\mu(z) = \frac{\varphi(u^k, \rho^k; z, r)}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{n} A_{k\nu} U_\nu^k. \qquad (4)$$

Setzt man diesen Ausdruck in (VII, 1)

$$(-1)^{k-1}\sum_{\mu=1}^{n} U_\mu^k \chi_\mu(z) = \Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)\Delta'(z, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n)$$
$$-\Delta'(u^1, u^2 \ldots u^n)\Delta(z, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n)$$

ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}&\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)\Delta'(z, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n)\\ &\quad -\Delta'(u^1, u^2 \ldots u^n)\Delta(z, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n) =\\ &\qquad = (-1)^{k-1}\frac{\psi(u^k, \rho^k; z, r)}{\Delta}\sum_{\mu,\nu=1}^{n} A_{\mu\nu} U_\mu^k U_\nu^k.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Zwischen der hier auftretenden quadratischen Form

$$\sum_{\lambda,\nu=1}^{n} A_{\lambda,\nu} U_\lambda^k U_\nu^k$$

und der in der Transformation der zweiten Variation erhaltenen besteht ein enger Zusammenhang, der leicht aufzudecken ist.

Multiplicirt man das obige $\chi_\mu(z)$ (4) mit

$$\chi_\lambda(z) = \frac{\psi(u^k, \rho^k; z, r)}{\Delta}\sum_{\tau=1}^{n} A_{\lambda\tau} U_\tau^k,$$

so ergibt sich

$$\chi_\mu(z)\chi_\lambda(z) = \frac{\psi(u^k, \rho^k; z, r)^2}{\Delta^2}\sum_{\nu,\tau=1}^{n} A_{\mu\nu} A_{\lambda\tau} U_\nu^k U_\tau^k$$

und

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\mu\lambda}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z) =\\ &\qquad = \frac{\psi(u^k, \rho^k; z, r)^2}{\Delta^2}\sum_{\lambda,\nu,\tau} A_{\lambda\tau} U_\nu^k U_\tau^k \sum_{\mu=1}^{n} A_{\mu\nu} a_{\mu\lambda}.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Um diesen Ausdruck weiter umzuformen, bemerke man zunächst, dass

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda} \chi_\lambda(z) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda} z'_\lambda; & z_1 \ldots z_n \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda} (u^1_\lambda)'; & u^1_1 \ldots u^1_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda} (u^n_\lambda)'; & u^n_1 \ldots u^n_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{\varphi}_\sigma(z); & z_1 \ldots z_n \\ \overline{\varphi}_\sigma(u^1); & u^1_1 \ldots u^1_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \overline{\varphi}_\sigma(u^n); & u^n_1 \ldots u^n_n \end{vmatrix} = 0$$

ist und daher, wenn man für $\chi_\lambda(z)$ seinen Werth aus (4) einsetzt,

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda} \sum_{\tau=1}^{n} A_{\lambda\tau} U^k_\tau = 0.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $\sum\limits_{\nu=1}^{n} U^k_\nu \varphi'_\sigma$, so erhält man

$$\sum_{\lambda,\nu,\tau=1}^{n} A_{\lambda\tau} U^k_\nu U^k_\tau \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda} \varphi'_\sigma = 0.$$

Mit Benützung dieser Formel kann man nun (5) die Gestalt geben

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\mu\lambda} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z) =$$

$$= \frac{\psi(u^k, \rho^k; z, r)^2}{\Delta^2} \sum_{\lambda,\nu,\tau=1}^{n} A_{\lambda\tau} U^k_\nu U^k_\tau \left[\sum_{\mu=1}^{n} A_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} + \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda} \varphi'_\sigma \right].$$

wo die eckige Klammer den Werth Δ oder Null besitzt, je nachdem λ und ν einander gleich oder ungleich sind. Der obige Ausdruck geht somit über in

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\mu\lambda}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z) = \frac{\psi(u^k, \rho^k; z, r)^2}{\Delta} \sum_{\lambda,\nu=1}^{n} A_{\lambda\nu} U_\lambda^k U_\nu^k. \qquad (8)$$

Wendet man dieses Ergebniss auf die Formel (5) an, so findet man die Gleichung

$$\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)\Delta'(z, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n) -$$

$$- \Delta'(u^1, u^2 \ldots u^n)\Delta(z, u^1, u \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n) =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{\psi(u^k, \rho^k; z, r)} \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z);$$

die rechtsstehende quadratische Form ist aber dieselbe, welche bei der Transformation der zweiten Variation auftritt, da auch die $\chi_\lambda(z)$, wie sich oben zeigte, denselben Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} \chi_k(z) = 0, \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

genügen, wie die ζ_k. Man gelangt also zu dem Ergebnisse:

Bilden die n Integralsysteme des accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2; \ldots u^n, \rho^n$$

ein conjugirtes System und ist ein anderes Integralsystem z, r des ersteren, zu jedem Integralsysteme

$$u^1, \rho^1 \ldots u^{k-1}, \rho^{k-1}; u^{k+1}, \rho^{k+1} \ldots u^n, \rho^n$$

conjugirt, aber nicht zu u^k, ρ^k, so besteht an jeder Stelle, wo $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$ nicht Null ist, die Relation:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)\Delta'(z, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n) - \\ &\quad - \Delta'(u^1, u^2 \ldots u^n)\Delta(z, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n) = \\ &\qquad = \frac{(-1)^{k-1}}{\psi(u^k, \rho^k; z, r)} \sum_{\lambda,\mu}^{n} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\lambda(z), \\ &\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial y'_k}\chi_k(z) = 0, \quad i = 1, 2 \ldots m,\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

XII.

Die Behandlung des allgemeinsten Falles, wo also unter den Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1 = 0, \; \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_m = 0$$

auch solche vorkommen, die keine ersten Derivirten der gesuchten Functionen $y_1, y_2 \ldots y_n$ enthalten, sondern nur diese selbst, unterscheidet sich in manchen Punkten von der des vorangehenden und erfordert desshalb eine kurze Besprechung.

Verfolgt man den in (IX) eingeschlagenen Gang der Untersuchung, so wird man auch hier wieder zu einem accessorischen Gleichungssysteme geführt, das dieselbe Form besitzt, wie das in (IX, 3) und nach der Bezeichnungsweise in (X, 1) durch

$$\left.\begin{aligned}&\psi_i(z, r) = 0, \quad \frac{dz_i}{dx} = z'_i \qquad i = 1, 2 \ldots n \\ &\overline{\varphi}_i(z) = 0 \qquad\qquad\qquad\quad i = 1, 2 \ldots m\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dargestellt wird, aber in Folge der von der früheren verschiedenen Bedeutung dieser Zeichen eine etwas geänderte Behandlungsweise nöthig macht.

Zu dem Behufe ist es erforderlich, die beiden Arten der Bedingungsgleichungen auseinander zu halten. Es sollen also wie in (II, 3) von den m Bedingungsgleichungen die μ ersten keine Derivirten der gesuchten Functionen $y_1, y_2 \ldots y_n$ enthalten, während in jeder der übrigen $m-\mu$ Gleichungen auch solche vorkommen sollen.

In

$$\psi_i(z, r) \quad \text{und} \quad \overline{\varphi}_i(z)$$

von (IX, 3) sind demnach die $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k}$ für $i < \mu+1$ gleich Null zu setzen und es enthält somit dieses accessorische Gleichungssystem die zweiten Ableitungen von $z_1, z_2 \ldots z_n$, die ersten von $r_{\mu+1}, r_{\mu+2} \ldots r_m$ aber keine von $r_1, r_2 \ldots r_\mu$.

Aus diesem Gleichungssysteme erhält man eines in kanonischer Form, wenn man aus

$$\left.\begin{aligned} &\psi_i(z,r) = 0, \quad \frac{dz_i}{dx} = z'_i \qquad i = 1, 2 \ldots n \\ &\frac{d^2\varphi_i(z)}{dx^2} = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots \mu \\ &\frac{d\varphi_i(z)}{dx} = 0 \qquad i = \mu+1, \ldots n \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

die Werthe von

$$\frac{dz'_1}{dx} \cdots \frac{dz'_n}{dx}; \; r_1 \ldots r_\mu; \; \frac{dr_{\mu+1}}{dx} \cdots \frac{dr_m}{dx}$$

berechnet, was immer möglich ist, da die Determinante aus den Coëfficienten dieser Grössen in obigem Systeme, die in (II, 3) angegebene ist, die also gemäss der dort gemachten Voraussetzung weder im Integrationsbereiche, noch an seinen Grenzen verschwindet.

Dieses kanonische System besteht aus einem kanonischen System von $2n+m-\mu$ linearen Differentialgleichungen der ersten Ordnung und den μ Gleichungen für $r_1, r_2 \ldots r_\mu$, die lineare Functionen der Unbekannten dieses kanonischen Systems von Differentialgleichungen sind. Da nun die Determinante des Gleichungssystems (2) im ganzen Integrationsintervalle nicht Null ist und daselbst auch die übrigen Coëfficienten von (2) nach (III, 1) überall endlich sind, so sind es auch die Functionen des kanonischen Systems und es liegt somit darin keine singuläre Stelle des letzteren.

Dieses kanonische System steht wieder zu dem ursprünglichen (1) in der Beziehung, dass wohl jedes Integralsystem des letzteren dem ersteren genügt, aber nicht umgekehrt, denn ein

Integralsystem des ersteren befriedigt nur die Gleichungen

$$\psi_i(z, r) = 0, \quad \frac{dz_i}{dx} = z_i' \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_i(z) &= a_i x + b_i && (i = 1, 2 \ldots \mu) \\ &= c_i && (i = \mu + 1 \ldots m), \end{aligned}$$

wo die a, b und c Constante bedeuten, so dass man aus den Integralsystemen des kanonischen die des ursprünglichen Differential-Gleichungssystems findet, wenn man jene aufsucht, für welche diese Constanten Null sind. Nun hat man schon im Vorhinein $2n$ solcher Systeme des ursprünglichen Gleichungssystems gegeben, nämlich

$$\frac{\partial y_1}{\partial c_i}, \frac{\partial y_2}{\partial c_i} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial c_i}; \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial c_i}, \frac{\partial \lambda_2}{\partial c_i} \cdots \frac{\partial \lambda_m}{\partial c_i}$$
$$(i = 1, 2, \ldots 2n),$$

wo die $c_1, c_2 \ldots c_{2n}$ die in (II, 3) festgesetzte Bedeutung haben und es entsteht wieder zunächst die Frage, ob dieselben auch von einander linear unabhängig sind.

Sind

$$\left.\begin{array}{l} z_1^1, z_2^1 \ldots z_n^1; \; (z_1^1)', (z_2^1)' \ldots (z_n^1)'; \; r_{\mu+1}^1, r_{\mu+2}^1 \ldots r_m^1 \\ z_1^2, z_2^2 \ldots z_n^2; \; (z_1^2)', (z_2^2)' \ldots (z_n^2)'; \; r_{\mu+1}^2, r_{\mu+2}^2 \ldots r_m^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (3)$$

$2n + m - \mu$ Lösungssysteme des in (2) enthaltenen kanonischen Systems linearer Differentialgleichungen, so bilde man aus ihnen die Determinante

$$D = \left| \begin{array}{l} z_1^1 \ldots z_\mu^1; (z_1^1)' \ldots (z_\mu^1)'; (z_{\mu+1}^1)' \ldots (z_m^1)'; (z_{m+1}^1)' \ldots (z_n^1)'; z_{\mu+1}^1 \ldots z_n^1; r_{\mu+1}^1 \ldots r \\ z_1^2 \ldots z_\mu^2; (z_1^2)' \ldots (z_\mu^2)'; (z_{\mu+1}^2)' \ldots (z_m^2)'; (z_{m+1}^2)' \ldots (z_n^2)'; z_{\mu+1}^2 \ldots z_n^2; r_{\mu+1}^2 \ldots r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

und multiplicire sie zeilenweise mit der Determinante $2n + m - \mu$ Grades

$$
D_1 = \left|
\begin{array}{llllll}
\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}\right)' \cdots \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_\mu}\right)'; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_\mu}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_{\mu+1}} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_{m+1}} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}; & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_{\mu+1}}\right)', \cdots \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}\right)', & 0 \ldots 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\
\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_1}\right)' \cdots \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_\mu}\right)'; & \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_\mu}, & \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_{\mu+1}} \cdots \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_m}, & \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_{m+1}} \cdots \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_n}; & \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_{\mu+1}}\right)', \cdots \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_n}\right)', & 0 \ldots 0 \\
\frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_\mu}; & \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_i'} \cdots \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_\mu'}, & \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_{\mu+1}'} \cdots \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_m'}, & \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_{m+1}'} \cdots \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_n'}; & \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_{\mu+1}} \cdots \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y_n}, & 0 \ldots 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\
\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_\mu}; & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_\mu'}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_{\mu+1}'} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_m'}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_{m+1}'} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}; & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_{\mu+1}} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n}, & 0 \ldots 0 \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_\mu} & 0 \ \ldots \ 0 & 0 \ \ldots \ 0 & 0 \ \ldots \ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_{\mu+1}} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}, & 0 \ldots 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\
\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_\mu} & 0 \ \ldots \ 0 & 0 \ \ldots \ 0 & 0 \ \ldots \ 0 & \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_{\mu+1}} \cdots \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_n}, & 0 \ldots 0 \\
0 \ \ldots \ 0 & 0 \ \ldots \ 0 & 0 \ \ldots \ 0 & 1 \ \ldots \ 0 & 0 \ \ldots \ 0, & 0 \ldots 0 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\
0 \ \ldots \ 0 & 0 \ \ldots \ 0 & 0 \ \ldots \ 0 & 0 \ \ldots \ 0 & 0 \ \ldots \ 0, & 0 \ldots 1
\end{array}
\right|
$$

$$= \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_\mu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_\mu} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_1} \cdots \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_1}, & \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y'_i} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} \cdots \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y'_m}, & \frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial y'_m} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_m} \end{vmatrix},$$

dann erhält man

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} a_1^1 \ldots a_\mu^1; & c_{\mu+1}^1 \ldots c_m^1; & a_1^1 x + b_1^1; \ldots a_\mu^1 x + b_\mu^1; & (z_{m+1}^1)' \ldots (z_n^1)'; & z_{\mu+1}^1 \ldots z_n^1; & r_{\mu+1}^1 \ldots r_m^1 \\ a_1^2 \ldots a_\mu^2; & c_{\mu+1}^2 \ldots c_m^2; & a_1^2 x + b_1^2; \ldots a_\mu^2 x + b_\mu^2; & (z_{m+1}^2)' \ldots (z_n^2)'; & z_{\mu+1}^2 \ldots z_n^2; & r_{\mu+1}^2 \ldots r_m^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{2(n-\mu)} \ldots a_\mu^{2(n-\mu)}; & c_{\mu+1}^{2(n-\mu)} \ldots c_m^{2(n-\mu)}; & a_1^{2(n-\mu)} x + b_1^{2(n-\mu)}; \ldots a_\mu^{2(n-\mu)} x + b_\mu^{2(n-\mu)}; & (z_{m+1}^{2(n-\mu)})' \ldots (z_n^{2(n-\mu)})'; & z_{\mu+1}^{2(n-\mu)} \ldots z_n^{2(n-\mu)}; & r_{\mu+1}^{2(n-\mu)} \ldots r_m^{2(n-\mu)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante enthalten alle Elemente, die in den $m+\mu$ ersten Colonnen stehen, Constanten. Für jedes Integralsystem, das dem ursprünglichen Gleichungssysteme (1) genügt, sind die betreffenden Constanten Null, während anderseits durch passende Wahl der Anfangswerthe eines Integralsystems im kanonischen Gleichungssysteme sich stets erreichen lässt, dass die zugehörigen Constanten gegebene Werthe annehmen. Da überdies nach den Voraussetzungen in (II, 3) an jeder Stelle x des Integrationsbereiches mindestens eine Determinante m^{ten} Grades aus der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}; \dots \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_1}; & \frac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial y'_1} \dots \frac{\partial\varphi_m}{\partial y'_1} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n}; \dots \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_n}; & \frac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial y'_n} \dots \frac{\partial\varphi_m}{\partial y'_n} \end{vmatrix}$$

und somit auch mindestens eine Determinante μ^{ten} Grades der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}; \dots \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_1}; \dots \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, ferner D dann und nur dann an irgend einer Stelle x Null ist, wenn die $2n+m-\mu$ Integralsysteme, aus denen sie gebildet ist, nicht linear unabhängig sind, so bestehen auch hier wieder alle Vordersätze, aus denen die Schlüsse in (IX) fliessen. Da auch die $r_1, r_2 \dots r_\mu$ zugleich mit den zugehörigen Integralsystemen des kanonischen Systems linearer Differentialgleichungen linear unabhängig sind oder nicht, so erkennt man hieraus:

»Unter $2n+m-\mu$ linear unabhängigen Integralsystemen des kanonischen Gleichungssystems besitzen höchstens $2(n-\mu)$ lauter verschwindende Constanten«.

»Verschwinden für jedes von $2(n-\mu)+1$ particulären Integralsystemen des kanonischen Gleichungssystems die zugehörigen Constanten, so sind diese Systeme linear abhängig« (4).

Bezeichnet man mit Δ die Determinante $2(n-\mu)^{\text{ten}}$ Grades

$$\begin{vmatrix} (z^1_{m+1})' \dots (z^1_n)', & z^1_{\mu+1} \dots z^1_n, & r^1_{\mu+1} \dots r^1_m \\ (z^2_{m+1})' \dots (z^2_n)', & z^2_{\mu+1} \dots z^2_n, & r^2_{\mu+1} \dots r^2_m \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ (z^{2(n-\mu)}_{m+1})' \dots (z^{2(n-\mu)}_n)', & z^{2(n-\mu)}_{\mu+1} \dots z^{2(n-\mu)}_n, & r^{2(n-\mu)}_{\mu+1} \dots r^{2(n-\mu)}_m \end{vmatrix},$$

so lassen sich aus den Integralsystemen (3) $\binom{n}{m}\binom{n}{\mu}$ solcher Determinanten bilden, die aus der obigen hervorgehen, indem man an Stelle der unteren Indices ihrer $(n-m)$ ersten Colonnen alle Combinationen ohne Wiederholung zur $(n-m)^{\text{ten}}$ und ihrer $n-\mu$ darauffolgenden Colonnen alle solchen Combinationen zur $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Classe treten lässt. Mit Hilfe dieser Determinante erhält man den Satz:

Verschwinden für $2(n-\mu)$ Integralsysteme des kanonischen Gleichungssystems die zugehörigen Constanten, so sind dieselben linear unabhängig, wenn eine der Determinanten Δ an irgend einer Stelle des Integrationsintervalls nicht verschwindet, und linear abhängig, wenn daselbst alle Null sind.

Jedes solche Integralsystem bildet aber mit den zugehörigen $r_1, r_2 \ldots r_\mu$ ein Lösungssystem des accessorischen Gleichungssystems.

Der obige Satz gibt somit die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen an, unter welchen die $2(n-\mu)$ Lösungssysteme des accessorischen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{llll} z_1^1 & \ldots z_n^1, & r_1^1 & \ldots r_m^1 \\ z_1^2 & \ldots z_n^2, & r_1^2 & \ldots r_m^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_1^{2(n-\mu)} & \ldots z_n^{2(n-\mu)}, & r_1^{2(n-\mu)} & \ldots r_m^{2(n-\mu)} \end{array}$$

linear unabhängig sind. Ein solches Lösungssystem soll wieder ein Fundamentalsystem des accessorischen Gleichungssystems heissen. Nach dem Satze (4) ist jedes andere Lösungssystem des accessorischen Gleichungssystems eine lineare Substitution der Glieder des Fundamentalsystems.

Nimmt man nun

$$z_k^i = \frac{\partial y_k}{\partial c_i}, \quad r_k^i = \frac{\partial \lambda_k}{\partial c_i},$$

wo die $c_1, c_2 \ldots c_{2(n-\mu)}$ die Integrationsconstanten des Differentialgleichungssystems (II, 3) bedeuten, so erhält man für

$i = 1, 2 \ldots 2(n-\mu)$ gerade $2(n-\mu)$ linear unabhängige Lösungen, da hiefür in der oben angeschriebenen Determinante Δ alle Glieder der Hauptdiagonale den Werth 1 erhalten und alle übrigen Null werden.

Man wird so wieder auf den Satz geführt:

Unter den in (II, 3) gemachten Voraussetzungen hat das accessorische Gleichungssystem (1) die $2(n-\mu)$ linear unabhängigen Lösungen

$$z_1^i = \frac{\partial y_1}{\partial c_i} \ldots z_n^i = \frac{\partial y_n}{\partial c_i}, \quad r_1^i = \frac{\partial \lambda_1}{\partial c_i} \ldots r_m^i = \frac{\partial \lambda_m}{\partial c_i}$$

$$i = 1, 2 \ldots 2(n-\mu),$$

aus denen alle übrigen Lösungen sich linear zusammensetzen.

XIII.

1. Die weitere Untersuchung auf dem in X. eingeschlagenen Wege führt anfänglich auch zu denselben Resultaten, und erst beim Begriff der conjugirten Systeme beginnen sich Unterschiede geltend zu machen, indem an Stelle von n überall $(n-\mu)$ tritt. Die Ansätze (in X) erfahren ebenfalls die Abänderung in

$$\eta_k = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} \rho_\lambda z_k^\lambda, \quad r_i = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} \rho_\lambda r_i^\lambda \qquad \begin{matrix}(k = 1, 2 \ldots n) \\ (i = 1, 2 \ldots m).\end{matrix}$$

Die $(n-\mu)$ Grössen $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_{n-\mu}$ lassen sich aber dennoch so bestimmen, dass sie den n Gleichungen

$$\eta_k = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} \rho_\lambda z_k^\lambda \qquad k = 1, 2 \ldots n$$

genügen, wenn man die Voraussetzung einführt, dass mindestens eine Determinante μ^{ten} Grades in der Matrix

so lassen sich aus den Integralsystemen (3) $\binom{n}{m}\binom{n}{\mu}$ solcher Determinanten bilden, die aus der obigen hervorgehen, indem man an Stelle der unteren Indices ihrer $(n-m)$ ersten Colonnen alle Combinationen ohne Wiederholung zur $(n-m)^{\text{ten}}$ und ihrer $n-\mu$ darauffolgenden Colonnen alle solchen Combinationen zur $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Classe treten lässt. Mit Hilfe dieser Determinante erhält man den Satz:

Verschwinden für $2(n-\mu)$ Integralsysteme des kanonischen Gleichungssystems die zugehörigen Constanten, so sind dieselben linear unabhängig, wenn eine der Determinanten Δ an irgend einer Stelle des Integrationsintervalls nicht verschwindet und linear abhängig, wenn daselbst alle Null sind.

Jedes solche Integralsystem bildet aber mit den zugehörigen $r_1, r_2 \ldots r_\mu$ ein Lösungssystem des accessorischen Gleichungssystems.

Der obige Satz gibt somit die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen an, unter welchen die $2(n-\mu)$ Lösungssysteme des accessorischen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{llll}
z_1^1 & \ldots z_n^1, & r_1^1 & \ldots r_m^1 \\
z_1^2 & \ldots z_n^2, & r_1^2 & \ldots r_m^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
z_1^{2(n-\mu)} & \ldots z_n^{2(n-\mu)}, & r_1^{2(n-\mu)} & \ldots r_m^{2(n-\mu)}
\end{array}$$

linear unabhängig sind. Ein solches Lösungssystem soll wieder ein Fundamentalsystem des accessorischen Gleichungssystems heissen. Nach dem Satze (4) ist jedes andere Lösungssystem des accessorischen Gleichungssystems eine lineare Substitution der Glieder des Fundamentalsystems.

Nimmt man nun

$$z_k^i = \frac{\partial y_k}{\partial c_i}, \quad r_k^i = \frac{\partial \lambda_k}{\partial c_i},$$

wo die $c_1, c_2 \ldots c_{2(n-\mu)}$ die Integrationsconstanten des Differentialgleichungssystems (II, 3) bedeuten, so erhält man für

$i=1,2\ldots2(n-\mu)$ gerade $2(n-\mu)$ linear unabhängige Lösungen, da hiefür in der oben angeschriebenen Determinante Δ alle Glieder der Hauptdiagonale den Werth 1 erhalten und alle übrigen Null werden.

Man wird so wieder auf den Satz geführt:

Unter den in (II, 3) gemachten Voraussetzungen hat das accessorische Gleichungssystem (1) die $2(n-\mu)$ linear unabhängigen Lösungen

$$z_1^i = \frac{\partial y_1}{\partial c_i}\ldots z_n^i = \frac{\partial y_n}{\partial c_i},\quad r_1^i = \frac{\partial \lambda_1}{\partial c_i}\ldots r_m^i = \frac{\partial \lambda_m}{\partial c_i}$$

$$i = 1, 2\ldots 2(n-\mu),$$

aus denen alle übrigen Lösungen sich linear zusammensetzen.

XIII.

1. Die weitere Untersuchung auf dem in X. eingeschlagenen Wege führt anfänglich auch zu denselben Resultaten, und erst beim Begriff der conjugirten Systeme beginnen sich Unterschiede geltend zu machen, indem an Stelle von n überall $(n-\mu)$ tritt. Die Ansätze (in X) erfahren ebenfalls die Abänderung in

$$\eta_k = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} \rho_\lambda z_k^\lambda,\quad r_i = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} \rho_\lambda r_i^\lambda \qquad \begin{matrix}(k = 1, 2\ldots n)\\(i = 1, 2\ldots m).\end{matrix}$$

Die $(n-\mu)$ Grössen $\rho_1, \rho_2\ldots\rho_{n-\mu}$ lassen sich aber dennoch so bestimmen, dass sie den n Gleichungen

$$\eta_k = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} \rho_\lambda z_k^\lambda \qquad k = 1, 2\ldots n$$

genügen, wenn man die Voraussetzung einführt, dass mindestens eine Determinante μ^{ten} Grades in der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_1}, & \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_n} \end{vmatrix},$$

etwa

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_\mu)}{\partial(y_1, y_2 \dots y_\mu)},$$

nur isolirte Nullstellen im Integrationsintervall besitze. Denn bestimmt man dann die $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_{n-\mu}$ aus den obigen Gleichungen für $k = \mu+1, \mu+2 \dots n$, was wieder dann und nur dann möglich ist, wenn die Determinante $\Sigma \pm z^1_{\mu+1}, z^2_{\mu+2} \dots z^{n-\mu}_n$ weder im Integrationsbereiche, noch an seinen Grenzen verschwindet, so genügen die gefundenen $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_{n-\mu}$ von selbst auch den ersten μ Gleichungen, da zwischen den η und z^λ die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \eta_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} z_k^\lambda = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots \mu)$$

bestehen. Durch Subtraction ergibt sich aus denselben

$$\sum_{k=1}^{\mu} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \left(\eta_k - \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} \rho_\lambda z_k^\lambda \right) = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots \mu),$$

woraus wegen der Voraussetzung über die Determinante

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_\mu)}{\partial(y_1, y_2 \dots y_\mu)}$$

und da die η, ρ, z im Integrationsintervall überall endlich und stetig sind, folgt:

$$\eta_k = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} \rho_\lambda z_k^\lambda \qquad k = 1, 2 \dots \mu.$$

Für die Grössen

$$\zeta_k = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} \rho'_\lambda z_k^\lambda$$

erhält man dann die Relationen

$$\zeta_k . \Delta(z^1, z^2 \ldots z^{n-\mu}) = \begin{vmatrix} \eta'_k, & \eta_{\mu+1} \ldots \eta_n \\ (z_k^1)', & z_{\mu+1}^1 \ldots z_n^1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ (z_k^{n-\mu})', & z_{\mu+1}^{n-\mu} \ldots z_n^{n-\mu} \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

wenn

$$\Sigma \pm z_{\mu+1}^1 z_{\mu+2}^2 \ldots z_m^{n-\mu} = \Delta(z^1, z^2 \ldots z^{n-\mu})$$

gesetzt wird. Zwischen diesen Grössen $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$ bestehen nun die m Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \zeta_k = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots \mu \\ &\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} \zeta_k = 0 \qquad i = \mu + 1 \ldots m \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

aus deren μ ersten man stets $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_\mu$ linear und homogen durch die $\zeta_{\mu+1}, \zeta_{\mu+2} \ldots \zeta_n$ ausdrücken kann, so dass zwischen letzteren $m - \mu$ lineare homogene Gleichungen sich ergeben.

Vermöge dieser Grössen $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$ erhält dann die zweite Variation des Integrals abermals die Form (X, 10) und die dort erhaltenen Bedingungsgleichungen zwischen den $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$ gehen in die hier gefundenen (2) über, wenn man in ihnen für $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k}$, sobald $i < \mu + 1$ ist, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}$ setzt.

2. Um die Untersuchung in XI dem vorliegenden Falle anzupassen, muss man von dem Ansatz ausgehen

$$\omega_\gamma(z) = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} w_\lambda^\gamma \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r) + \sum_{\lambda=1}^{m} v_\lambda^\gamma \bar{\varphi}_\lambda(z),$$

wo man aber jetzt dem $\overline{\varphi}_\lambda(z)$ für $\lambda < \mu + 1$ eine andere Bedeutung beilegen muss als dort, indem man

$$\overline{\varphi}_\lambda(z) = \frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial y_i} z_i$$

für $\lambda = 1, 2 \ldots \mu$ zu setzen hat. Führt man, analog XI, die Grössen

$$W'_k = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} u_k^\lambda w_\lambda^\gamma$$

ein, so nimmt der obige Ausdruck, wenn man unter $\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial y'_k}$, sobald $\lambda < \mu + 1$ ist, $\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial y_k}$ versteht, die Form an

$$\omega_\gamma(z) = \sum_{k=1}^{n} z'_k \left[\sum_{i=1}^{n} a_{ik} W_i + \sum_{\lambda=1}^{m} v_\lambda^\gamma \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial y'_k}\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} p_k z_k + \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial y'_i} W_i.$$

Über die $n + m - \mu$ disponiblen Grössen $w_1^\gamma \ldots w_{n-\mu}^\gamma$, $v_1, v_2 \ldots v_m$ verfügt man nun so, dass

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} W_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_i} v_k^i = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots \gamma - 1, \gamma + 1 \ldots n$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\gamma k} W_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial y'_i} v_k^\gamma = C_\gamma$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial y'_k} W_k = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots m$$

wird. Dies ist immer möglich, denn zunächst lassen sich aus diesem Gleichungssystem die $n + m$ Grössen $W_1, W_2 \ldots W_n$, $v_1^\gamma, v_2^\gamma \ldots v_m^\gamma$ berechnen, da seine Determinante

$$\Delta = \left|\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & \ldots & a_{1n}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_1}, & \frac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial y_1'} \ldots \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_n'} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & \ldots & a_{nn}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} \ldots \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_n}, & \frac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial y_n'} \ldots \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_n'} \\
\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} & 0 \ldots\ldots & \ldots\ldots 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_n} & 0 \ldots\ldots & \ldots\ldots 0 \\
\frac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial y_1'} & \ldots & \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_n'} & 0 \ldots\ldots & \ldots\ldots 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial\varphi_m}{\partial y_1'} & \ldots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_m'} & 0 \ldots\ldots & \ldots\ldots 0
\end{array}\right|$$

im ganzen Integrationsintervall (einschliesslich der Grenzen) nicht verschwindet. Man erhält somit, wenn man an der Bedeutung von $\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k'}$ für $k < \mu + 1$ festhält und die Bezeichnungen in XI sinngemäss überträgt:

$$W_k = C_\gamma \frac{A_{\gamma k}}{\Delta}, \qquad v_\lambda^\gamma = C_\gamma \frac{\varphi_\lambda^\gamma}{\Delta}$$

$$(k = 1, 2 \ldots n) \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots m).$$

Will man nun hieraus jetzt noch die $n - \mu$ Grössen $w_1^\gamma, w_2^\gamma \ldots w_{n-\mu}^\gamma$ bestimmen, so kann man sich hiezu der $n - \mu$ letzten Gleichungen der ersten Gruppe bedienen. Man findet sie, wenn $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^{n-\mu})$ nicht Null ist, aus

$$\Delta(u^1, u^2 \ldots u^{n-\mu})\, w_\lambda^\gamma = \sum_{k=\mu+1}^{n} U_k^\lambda W_k = \frac{C_\gamma}{\Delta} \sum_{k=\mu+1}^{n} A_{\gamma k} U_k^\lambda$$

$$\lambda = 1, 2 \ldots n -$$

Durch diese Werthe der w_λ^γ werden aber die μ ersten Gleichungen des Systems von selbst befriedigt. Denn multiplicirt man den Ausdruck für W_k mit $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}$ und addirt von $k=1$ bis n, so erhält man aus Δ die μ Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} W_k = C_\gamma \sum_{k=1}^{n} A_{\gamma k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} = 0$$

$$i = 1, 2 \ldots \mu.$$

Nun ist aber auch

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} u_k^\lambda w_\lambda^\gamma = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} w_\lambda^\gamma \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} u_k^\lambda = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots \mu$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \left(W_k - \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} u_k^\lambda w_\lambda^\gamma \right) = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots \mu.$$

Da nun für $k = \mu+1, \mu+2 \ldots n$ in Folge der Werthe der w_λ^γ die Differenzen verschwinden, so schrumpft dies System auf

$$\sum_{k=1}^{\mu} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \left(W_k - \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} u_k^\lambda w_\lambda^\gamma \right) = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots \mu$$

zusammen, woraus wegen der Voraussetzung über

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_\mu)}{\partial(y_1, y_2 \ldots y_\mu)}$$

folgt

$$W_k = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} u_k^\lambda w_\lambda^\gamma$$

für

$$k = 1, 2 \ldots \mu.$$

Durch Substitution dieser Werthe gewinnt man also

$$\omega_\gamma(z)\Delta(u^1, u^2 \dots u^{n-\mu}) = \frac{C_\gamma}{\Delta}\sum_{\lambda=1}^{n-\mu}\sum_{\nu=\mu+1}^{n} A_{\gamma\nu}U_\nu^\lambda \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r) +$$

$$+ \frac{UC_\gamma}{\Delta}\sum_{\lambda=1}^{m} \varphi_\lambda^\gamma \bar{\varphi}_\lambda(z)$$

$$= C_\gamma z'_\gamma + \sum_{i=1}^{n} q_i z_i.$$

Wählt man nun die $n-\mu$ Systeme

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2 \dots u^{n-\mu}, \rho^{n-\mu}$$

so, dass je zwei zu einander conjugirt sind und die Determinante

$$\Delta(u^1, u^2 \dots u^{n-\mu})$$

nicht verschwindet, so sind

$$\psi(u^\lambda, \rho^\lambda; u^k, r^k) = 0, \quad \bar{\varphi}_i(u^k) = 0$$

$$\text{für } \left.\begin{matrix}\lambda\\ k\end{matrix}\right\} = 1, 2 \dots n-\mu, \quad i = 1, 2 \dots m,$$

und diese Systeme befriedigen daher die n nach $z_1, z_2 \dots z_n$ linearen Differentialgleichungen der ersten Ordnung:

$$\omega_1(z) = 0, \ \omega_2(z) = 0 \dots \omega_n(z) = 0.$$

Zieht man nur solche Systeme $z_1, z_2 \dots z_n$ in Betracht, welche den μ Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} z_k = 0 \qquad i = 1, 2 \dots \mu$$

genügen, so sind die zugehörigen $\omega_1(z), \omega_2(z) \dots \omega_n(z)$ nicht mehr unabhängig, sobald man noch

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = 1$$

wählt. Denn es ist dann

$$\sum_{\gamma=1}^{n} w_\lambda^\gamma \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_\gamma} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=\mu+1}^{n} U_k^\lambda \sum_{\gamma=1}^{n} A_{\gamma k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_\gamma} = 0 \qquad i = 1, 2 \dots \mu$$

und daher

$$\sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_\gamma} \omega_\gamma(z) = 0, \qquad i = 1, 2 \dots \mu,$$

woraus wegen der über $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_\mu)}{\partial(y_1, y_2 \dots y_\mu)}$ bestehenden Voraussetzung die $\omega_1(z)$, $\omega_2(z) \dots \omega_n(z)$ sich als homogene lineare Functionen der $\omega_{\mu+1}(z)$, $\omega_{\mu+2}(z) \dots \omega_n(z)$ ergeben. Aus demselben Grunde sind aber auch die $z_1, z_2 \dots z_\mu$ abhängig von den $z_{\mu+1}, z_{\mu+2} \dots z_n$, und zwar in derselben Weise wie die $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_\mu$ von den $\omega_{\mu+1}, \omega_{\mu+2} \dots \omega_n$, so dass unter dieser Annahme die n linearen Differentialgleichungen der ersten Ordnung

$$\omega_1(z) = 0, \; \omega_2(z) = 0 \dots \omega_n(z) = 0$$

zwischen den $z_1, z_2 \dots z_n$ sich auf die $n-\mu$ linearen Differentialgleichungen der ersten Ordnung

$$\omega_{\mu+1}(z) = 0, \; \omega_{\mu+2}(z) = 0 \dots \omega_n(z) = 0$$

zwischen $z_{\mu+1}, z_{\mu+2} \dots z_n$ reduciren.

Die Theile der früher erwähnten conjugirten Systeme:

$$\begin{matrix} u_{\mu+1}^1, & u_{\mu+2}^1 \dots u_n^2 \\ u_{\mu+1}^2, & u_{\mu+2}^2 \dots u_n^2 \\ \dots & \dots\dots\dots \\ \dots & \dots\dots\dots \\ u_{\mu+1}^{n-\mu}, & u_{\mu+1}^{n-\mu} \dots u_n^{n-\mu} \end{matrix}$$

bilden dann ein Fundamentalsystem dieser linearen Differentialgleichungen und führen mit der einzigen Änderung von n in $n-\mu$ wieder zu den Sätzen über conjugirte Systeme auf Seite 1271.

Denkt man sich also in

$$\omega_{\mu+1}(z) = 0, \ \omega_{\mu+2}(z) = 0 \ldots \omega_n(z) = 0$$

vermöge der μ Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} z_k = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots \mu$$

die $z_1, z_2 \ldots z_\mu$ eliminirt, so haben die resultirenden linearen Differentialgleichungen obiges Fundamentalsystem, und es ist daher nach bekannten Sätzen

$$\omega_\gamma(z) = \frac{1}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u_{n-\mu})} \begin{vmatrix} z_\gamma^1; & z_{\mu+1} \ldots z_n \\ (u_\gamma^1)'; & u_{\mu+1}^1 \ldots u_n^1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ (u_\gamma^{n-\mu})'; & u_{\mu+1}^{n-\mu} \ldots u_n^{n-\mu} \end{vmatrix} = \frac{\chi_\gamma(z)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)},$$

wo wieder der Kürze halber die Determinante mit $\chi_\gamma(z)$ bezeichnet wurde. Diese Relation gilt zunächst nur für $\gamma > \mu$, aber man erkennt leicht, dass sie auch für $\gamma < \mu + 1$ besteht. Denn setzt man

$$\omega_i(z) = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} B_\lambda^i \, \omega_{\mu+\lambda}(z) \qquad i = 1, 2 \ldots \mu,$$

so ist auch

$$z_i = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} B_\lambda^i z_{\mu+\lambda}$$

und daher

$$z_i' = \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} B_\lambda^i z_{\mu+\lambda}' + \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} (B_\lambda^i)' z_{\mu+\lambda}.$$

Also ist

$$\omega_i(z) = \frac{1}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^{n-\mu})} \begin{vmatrix} \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} B_\lambda^i z'_{\mu+\lambda}; & z_{\mu+1} \ldots z_n \\ \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} B_\lambda^i (u_{\mu+\lambda}^1)'; & u_{\mu+1}^1 \ldots u_n^1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} B_\lambda^i (u_{\mu+\lambda}^{n-\mu})'; & u_{\mu+1}^{n-\mu} \ldots u_n^{n-\mu} \end{vmatrix}$$

und somit

$$\omega_i(z) = \frac{1}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^{n-\mu})} \begin{vmatrix} z'_i; & z_{\mu+1} \ldots z_n \\ (u_i^1)'; & u_{\mu+1}^1 \ldots u_n^1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ (u_i^{n-\mu})'; & u_{\mu+1}^{n-\mu} \ldots u_n^{n-\mu} \end{vmatrix} = \frac{\chi_i(z)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^{n-\mu})}$$

für

$$i = 1, 2 \ldots n.$$

Geht man auf die Bedeutung von $\omega_\gamma(z)$ zurück, so erhält man

$$\chi_\gamma(z) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} \sum_{\nu=\mu+1}^{n} A_{\gamma,\nu} U_\nu^\lambda \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r) + \frac{U}{\Delta} \sum_{\lambda=\mu+1}^{n} \bar{\varphi}_\lambda(z) \varphi_\lambda^\gamma$$

für

$$\gamma = 1, 2 \ldots n,$$

wobei zwischen den χ_γ die Gleichungen bestehen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \chi_k(z) = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots \mu.$$

Wählt man nun für die $z_1, z_2 \ldots z_n, r_1, r_2 \ldots r_m$ ein Integralsystem von (XII, 1), so vereinfacht sich hiefür obige Formel in

$$\chi_\gamma(z) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\lambda=1}^{n-\mu} \sum_{\nu=\mu+1}^{n} A_{\gamma,\nu} U_\nu^\lambda \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r),$$

da dann

$$\overline{\varphi}_\lambda(z) = 0$$

auch für $\lambda = \mu+1, \mu+2 \dots m$, ist. Sie reducirt sich noch weiter, wenn man überdies voraussetzt, dass das System

$$z_1, z_2 \dots z_n;\ r_1, r_2 \dots m$$

mit jedem der Systeme

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2 \dots u^{k-1}, \rho^{k-1};\ u^{k+1}, \rho^{k+1} \dots u^{n-\mu}, \rho^{n-\mu}$$

conjugirt sei, aber nicht mit u^k, ρ^k. Denn dann ist bloss

$$\psi(u^k, \rho^k; z, r)$$

nicht Null und die obige Formel schrumpft zusammen in

$$\chi_\gamma(z) = \frac{\psi(u^k, \rho^k; z, r)}{\Delta} \sum_{\nu=\mu+1}^{n} A_{\gamma,\nu} U_\nu^k.$$

Der Determinanten-Ausdruck für $\chi_\gamma(z)$ lehrt zugleich, dass diese Grössen, die den Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \chi_k(z) = 0 \qquad i = 1, 2 \dots \mu$$

genügen, auch die Relationen befriedigen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} \chi_k(z) = 0 \qquad i = \mu+1, \mu+2 \dots n.$$

Verknüpft man die erhaltenen Formeln nach der in (XI, 2) befolgten Methode, so gelangt man schliesslich zu dem Resultate

$$\Delta(u^1, u^2 \dots u^{n-\mu}) \Delta'(z, u^1 \dots u^{k-1}, u^{k+1} \dots u^{n-\mu}) -$$
$$- \Delta'(u^1, u^2 \dots u^{n-\mu}) \Delta(z, u^1 \dots u^{k-1}, u^{k+1} \dots u^{n-\mu}) =$$
$$= (-1)^{k-1} \sum_{\lambda,\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu} \chi_\lambda(z) \chi_\nu(z),$$

wo die $\chi_\lambda(z)$ denselben Relationen genügen, wie die ζ_λ und die rechtsstehende quadratische Form in die bei der Transformation

der zweiten Variation gefundene (XIII, 1) übergeht, wenn man für $\chi_\lambda(z)$: ζ_λ setzt.

XIV.

1. Wie die vorangegangenen Entwickelungen zeigten, kommt für die Transformation der zweiten Variation jenen Integralsystemen des accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen, welche conjugirte Systeme (X und S. 24) genannt wurden, eine besondere Bedeutung zu und es wird daher, bevor die Untersuchungen über die Permanenz des Zeichens der zweiten Variation unternommen werden, zweckmässig sein, einige wichtige Eigenschaften der conjugirten Systeme abzuleiten, und zwar soll dies für den zweiten Fall geschehen, wo also jede Bedingungsgleichung auch erste Derivirte der $y_1, y_2 \ldots y_n$ enthält.

Nach (X, 6) hat $\psi(z, r; u, \rho)$ die Form

$$\psi(z, r; u, \rho = \sum_{i=1}^{n} \left\{ z_i \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} u'_k + b_{ik} u_k) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \rho_k \right] - u_i \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} z'_k + b_{ik} z_k) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k \right] \right\}$$

oder, wenn man in dieser Summe den Factor von z_i mit P_i und den von u_i mit Q_i bezeichnet

$$\psi(z, r; u, \rho) = \sum_{i=1}^{n} (z_i P_i - u_i Q_i).$$

Sind nun

$$\begin{array}{l} u_1^1 \ldots u_n^1;\ \rho_1^1 \ldots \rho_m^1 \\ u_1^2 \ldots u_n^2;\ \rho_1^2 \ldots \rho_m^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_1^{2n} \ldots u_n^{2n};\ \rho_1^{2n} \ldots \rho_m^{2n} \end{array}$$

$2n$ Integralsysteme des accessorischen Systems linearer Differential-Gleichungen zweiter Ordnung (IX, 3), so hat man die $2n$ Gleichungen

$$\psi(z, r; u^1, \rho^1) = \sum_{i=1}^{n} (z_i P_i^1 - u_i^1 Q_i)$$

$$\psi(z, r; u^2, \rho^2) = \sum_{i=1}^{n} (z_i P_i^2 - u_i^2 Q_i)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi(z, r; u^{2n}, \rho^{2n} = \sum_{i=1}^{n} (z_i P_i^{2n} - u_i^{2n} Q_i),$$

wo

$$P_i^k = \sum_{\lambda=1}^{n} [a_{i\lambda}(u_\lambda^k)' + b_{i\lambda} u_\lambda^k] + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y_i'} \rho_\lambda^k$$

gesetzt wurde und sämmtliche Grössen auf der linken Seite der Gleichungen Constante werden, wenn auch z, r ein Integralsystem des accessorischen Systems linearer Differential-Gleichungen ist.

Sieht man in dem obigen Gleichungssystem die $z_1, z_2 \ldots z_n$; $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$ als Unbekannte an, so hängt die Auflösung desselben wesentlich von seiner Determinante D_1 ab, welche explicite die Form hat

$$D_1 = \begin{vmatrix} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} [a_{1\lambda}(u_\lambda^1)' + b_{1\lambda} u_\lambda^1] + \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y_1'} \rho_\lambda^1; \ldots \sum\limits_{\lambda=1}^{n} [a_{n\lambda}(u_\lambda^1)' + b_{n\lambda} u_\lambda^1] + \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n'} \rho_\lambda^1; & u_1^1 \ldots u_n^1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{n} [a_{1\lambda}(u_\lambda^{2n})' + b_{1\lambda} u_\lambda^{2n}] + \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y_1'} \rho_\lambda^{2n} \ldots \sum\limits_{\lambda=1}^{n} [a_{n\lambda}(u_\lambda^{2n})' + b_{n\lambda} u_\lambda^{2n}] + \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n'} \rho_k^{2n}; & u_1^{2n} \ldots u_n^{2n} \end{vmatrix}.$$

Fügt man zu den obigen $2n$ Integralsystemen des accessorischen noch m seines kanonischen Differentialgleichungssystems (IX)

$$\begin{array}{ll}
u_1^{2n+1} \ldots u_n^{2n+1}; & \rho_1^{2n+1} \ldots \rho_m^{2n+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_1^{2n+m} \ldots u_n^{2n+m}; & \rho_1^{2n+m} \ldots \rho_m^{2n+m},
\end{array}$$

so ergibt die zeilenweise Multiplication der Determinante $(2n+m)^{\text{ten}}$ Grades D der Grössen

$$\begin{array}{lll}
(u_1^1)' \ldots (u_n^1)'; & \rho_1^1 \ldots \rho_m^1; & u_1^1 \ldots u_n^1 \\
(u_1^2)' \ldots (u_n^2)'; & \rho_1^2 \ldots \rho_m^2; & u_1^2 \ldots u_n^2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

mit der Determinante

$$\Delta = \begin{array}{lll}
a_{11}, \quad a_{12} \ldots a_{1n}; & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1'} \ldots \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y_1'}, & 0, 0 \ldots 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{n1}, \quad a_{n2} \ldots a_{nn}; & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_n'} \ldots \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y_n'}, & 0, 0 \ldots 0 \\
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1'}, \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_2'} \ldots \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_n'}; & 0 \quad \ldots 0, & 0, 0 \ldots 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y_1'}, \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y_2'} \ldots \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y_n'}; & 0 \quad \ldots 0, & 0, 0 \ldots 0 \\
0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 & 0 \quad \ldots 0, & 1, 0 \ldots 0 \\
0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 & 0 \quad \ldots 0, & 0, 1 \ldots 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 & 0 \quad \ldots 0, & 0, 0 \ldots 1
\end{array}$$

wo also Δ die frühere Bedeutung auf (S. 4) hat, für das Product $D\Delta$ eine Determinante $(2n+m)^{\text{ten}}$ Grades $\mathfrak{D}$, in der die einzelnen Zeilen aus

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(u_k^i)' + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \rho_k^i; \ldots \sum_{k=1}^{n} a_{nk}(u_k^i)' + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_k'} \rho_k^i); \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} (u_k^i)' \ldots \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_k'} (u_k^i)'; u_1^i \ldots u_n^i \right|$$

für $i = 1, 2 \ldots 2n+m$ erhalten werden. Indem man die letzten n Colonnen benützt, kann man dieselbe in eine andere umformen, die aus

$$\left| \sum_{k=1}^{n} [a_{1k}(u_k^i)' + b_{1k}u_k^i] + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n'} \rho_k^i; \ldots \sum_{k=1}^{n} [a_{nk}(u_k^i)' + b_{nk}u_k^i] + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n'} \rho_k^i; \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_k'} (u_k^i)' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_k} u_k^i\right] \ldots \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_k'} (u_k^i)' + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_k} u_k^i\right]; u_1^i \ldots u_n^i \right|$$

für $i = 1, 2 \ldots 2n+m$ gewonnen wird. In dieser neuen Determinante ist aber

$$\sum_{k=1}^{n} [a_{\lambda k}(u_k^i)' + b_{\lambda k} u_k^i] + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_\lambda'} \rho_k^i = P_\lambda^i$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y_k'} (u_k^i)' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} u_k^i \right] = C_\lambda^i,$$

wo C_λ^i eine Constante bedeutet. Man hat somit

$$D.\Delta = (-1)^{mn} \mathfrak{D},$$

wo nun die Zeilen der Determinante $\mathfrak{D}$ aus

$$| P_1^i, \ldots P_n^i; u_1^i \ldots u_n^i; C_1^i \ldots C_m^i |$$

für $i = 1, 2 \ldots 2n+m$ erhalten werden. Von diesen Constanten sind aber, weil die $2n$ anfänglichen Integralsysteme

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2; \ldots u^{2n}, \rho^{2n}$$

dem accessorischen Systeme von Differentialgleichungen genügen, gewiss alle, bei denen $i < 2n+1$ gleich Null und es reducirt sich also D auf das Product

$$D_1 \Sigma \pm C_1^{2n+1} \ldots C_m^{2n+m},$$

so dass man hat

$$D.\Delta = CD_1,$$

wo

$$C = (-1)^{mn} \Sigma \pm C_1^{2n+1} \ldots C_m^{2n+m}$$

ist. Wählt man nun die m^2 Constante $C_1^{2n+1} \ldots C_m^{2n+m}$ so, dass $C \neq 0$ ist, was immer leicht erreicht werden kann, so wird D, welches im ganzen Integrationsintervall Null oder davon verschieden ist, dann und nur dann verschwinden, wenn die Systeme

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^{2n} \rho^{2n}$$

linear abhängig sind.

Denn ist letzteres der Fall, so ist sie selbstverständlich Null, trifft aber wieder dieses ein, so muss zwischen den Systemen

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2; \ldots u^{2n} \rho^{2n}; u^{2n+1}, \rho^{2n+1} \ldots u^{2n+m}, \rho^{2n+m}$$

eine homogene lineare Relation bestehen. Wären nun in dieser die letzten $2n$ Coëfficienten nicht alle Null, so würde eine lineare Verbindung der letzten m Systeme gleich einer linearen Verbindung der ersten $2n$ Systeme sein, also existirte eine lineare Verbindung der letzten m Systeme, welche dem Systeme accessorischer Differentialgleichungen genügte und es müssten dann die diesem neuen Integralsysteme zugehörigen Constanten Null sein. Da diese aber wieder sich linear aus den obigen Grössen $C^{2n+1} \ldots C^{2n+m}$ zusammensetzten, so müsste $C = 0$ sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Es wird somit auch D dann und nur dann nicht verschwinden, wenn die $2n$ Systeme

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2 \ldots u^{2n}\, \rho^{2n}$$

linear unabhängig sind.

Nach der obigen Formel sind aber, da Δ nirgends verschwindet, D und D_1 zugleich Null oder davon verschieden. Man erhält daher:

»Die Determinante D_1 ist im ganzen Integrationsintervalle Null oder davon verschieden und verschwindet dann und nur dann, wenn die $2n$ Integralsysteme des accessorischen Systems von Differentialgleichungen

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2, \ldots u^{2n}, \rho^{2n}$$

linear abhängig sind. Und umgekehrt: Es verschwindet D_1 dann und nur dann nicht, wenn diese Systeme linear unabhängig sind«.

3. Eine weitere Erkenntniss erschliesst sich, wenn man

$$(-1)^n D_1 = \begin{vmatrix} P_1^1 \ldots P_n^1; & -u_1^1 \ldots -u_n^1 \\ P_1^2 \ldots P_n^2; & -u_1^2 \ldots -u_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ P_1^{2n} \ldots P_n^{2n}; & -u_1^{2n} \ldots -u_n^{2n} \end{vmatrix}$$

zeilenweise mit

$$\begin{vmatrix} u_1^1 \ldots u_n^1; & P_1^1 \ldots P_n^1 \\ u_1^2 \ldots u_n^2; & P_1^2 \ldots P_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ u_1^{2n} \ldots u_n^{2n}; & P_1^{2n} \ldots P_n^{2n} \end{vmatrix} = (-1)^{nn} D_1$$

multiplicirt. Man erhält dann

$$(-1)^{n(n+1)} D_1^2 = \begin{vmatrix} 0; & \sum_{i=1}^{n} (P_i^1 u_i^2 - u_i^1 P_i^2); & \ldots & \sum_{i=1}^{n} (u_i^{2n} P_i^1 - u_i^1 P_i^{2n}) \\ \sum_{i=1}^{n} (P_i^2 u_i^1 - u_i^2 P_i^1); & 0; & \ldots & \sum_{i=1}^{n} (u_i^{2n} P_i^2 - u_i^2 P_i^{2n}) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} (P_i^{2n} u_i^1 - u_i^{2n} P_i^1); & \sum_{i=1}^{n} (P_i^{2n} u_i^2 - u_i^{2n} P_i^2) & \ldots & 0, \end{vmatrix}$$

wo nun aber die Elemente der Determinante eine einfache Bedeutung haben, denn es ist

$$\sum_{i=1}^{n} (P_i^k u_i^\lambda - u_i^k P_i^\lambda) = \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; u^k, \rho^k)$$

und daher sind sie constant, da es die Grösse rechts ist.

Man hat somit die Relation

$$D_1^2 = \begin{vmatrix} \psi(u^1,\rho^1; u^1,\rho^1); & \psi(u^2,\rho^2; u^1,\rho^1) \ldots & \psi(u^{2n},\rho^{2n}; u^1,\rho^1) \\ \psi(u^1,\rho^1; u^2,\rho^2); & \psi(u^2,\rho^2; u^2,\rho^2) \ldots & \psi(u^{2n},\rho^{2n}; u^2,\rho^2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi(u^1,\rho^1; u^{2n},\rho^{2n}); & \psi(u^2,\rho^2; u^{2n},\rho^{2n} \ldots & \psi(u^{2n},\rho^{2n}; u^{2n},\rho^{2n}) \end{vmatrix},$$

woraus hervorgeht, dass D_1 die Wurzel aus der rechtsstehenden halbsymmetrischen Determinante ist, die mit Ψ bezeichnet werden möge. An Stelle von D_1 kann man nun in den obigen Sätzen überall Ψ treten lassen und ihnen die folgende Fassung geben:

Die Determinante Ψ verschwindet dann und nur dann, wenn die $2n$ Integralsysteme des accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2; \ldots u^{2n}, \rho^{2n}$$

linear abhängig sind.

Umgekehrt verschwindet Ψ dann und nur dann nicht, wenn diese Systeme linear unabhängig sind.

In anderer Fassung:

Ist z, r ein Integralsystem des accessorischen Systems, so folgt aus den $2n$ Gleichungen

$$\psi(z, r; u^1, \rho^1) = 0, \ \psi(z, r; u^2, \rho^2) = 0 \ \ldots \psi(z, r; u^{2n}, \rho^{2n}) = 0,$$

dass die Integralsysteme

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2; \ldots u^{2n}, \rho^{2n}$$

nicht linear unabhängig sind.

Diese Betrachtungen lassen sich leicht weiterführen für den Fall, dass die Determinante Ψ sammt allen Unterdeterminanten bis zur $2n-\mu$ Ordnung verschwindet, aber von letzteren mindestens eine nicht Null ist. Man erhält dann ein ähnliches Resultat, wie bei der Determinante, die aus den Integralsystemen eines kanonischen Systems linearer, homogener Differentialgleichungen gebildet ist.

Diese Sätze führen zunächst wieder indirect zu dem schon früher (S. 1271) gewonnenen Satze:

Bilden n Integralsysteme ein conjugirtes System, so ist jedes Integralsystem, das zu jedem derselben conjugirt ist, von ihnen linear abhängig,

aber sie führen auch unmittelbar zu einer Methode für die Bestimmung solcher Systeme.

XV.

1. Zu dem Behufe werden jetzt die $2n$ erwähnten Integralsysteme als linear unabhängig vorausgesetzt. Da dann Ψ nicht Null ist, so existirt kein Integralsystem des accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen, das zu jedem dieser $2n$ Systeme conjugirt wäre, aber wohl lässt sich die Aufgabe lösen:

E i n I n t e g r a l s y s t e m $z_1, z_2 \ldots z_n, r_1, r_2 \ldots r_m$ z u f i n d e n, d a s z u $(2n-1)$ I n t e g r a l s y s t e m e n e i n e s F u n d a m e n t a l s y s t e m s c o n j u g i r t i s t.

Es werden die Glieder des gesuchten Systems nach (IX) die Form haben

$$z_1 = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k u_1^k,\; z_2 = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k u_2^k \ldots z_n = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k u_{2n}^k$$

und wenn dasselbe etwa mit den $(2n-1)$ ersten der gegebenen Systeme conjugirt sein soll, so hat man die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n}$ aus den $2n-1$ Gleichungen zu bestimmen

$$\psi(z, r; u^1, \rho^1) = 0 \ldots \psi(z, r; u^{2n-1}, \rho^{2n-1}) = 0;$$
$$\psi(z, r; u^{2n}, \rho^{2n}) = c,$$

wo $c \neq 0$ ist, oder

$$0 = \psi(z, r; u^i, \rho^i) =$$

$$= \alpha_1 \psi(u^1, \rho^1; u^i, \rho^i) + \alpha_2 \psi(u^2, \rho^2; u^i, \rho^i) + \ldots + \alpha_{2n} \psi(u^{2n}, \rho^{2n}; u^i, \rho^i)$$

$$i = 1, 2 \ldots 2n-1$$

und

$$\alpha_1 \psi(u^1, \rho^1; u^{2n}, \rho^{2n}) + \alpha_2 \psi(u^2, \rho^2; u^{2n}, \rho^{2n}) + \ldots$$

$$+ \alpha_{2n} \psi(u^{2n}, \rho^{2n}; u^{2n}, \rho^{2n}) = c.$$

was immer möglich ist, da die Determinante des Gleichungssystems Ψ ist.

Man erkennt nun sofort, dass unter den $2n$ anfänglichen Systemen

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^{2n}, \rho^{2n}$$

$(2n-1)$ bestehen, die mit dem neuen z, r ein System von $2n$ linear unabhängigen Integralsystemen bilden.

Denn ist α_i eine von den Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n}$, die nicht Null ist, so kann man Ψ in der Weise transformiren, dass man ihre i^{te} Zeile mit α_i multiplicirt und dazu die übrigen addirt, nachdem man sie beziehungsweise mit $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n}$ multiplicirte. Die neue Determinante $\alpha_i \Psi$ unterscheidet sich von Ψ nur dadurch, dass in ihrer i^{ten} Zeile statt $\psi(u^k, \rho^k; u^i, \rho^i)$ für $k = 1, 2 \ldots 2n$ $\psi(u^k, \rho^k; z, r)$ tritt.

Verfährt man in derselben Weise auch mit den Colonnen, so erhält man eine neue Determinante Ψ_1, die aus der ursprünglichen entsteht, indem überall in ihr z, r statt $u^i \rho^i$ gesetzt wird und die mit ihr in der Relation steht

$$\Psi_1 = (\alpha_i)^2 \Psi.$$

Da nun Ψ_1 die der Ψ entsprechende Determinante des Systems

$$u^1, \rho^1; \ldots u^{i-1}, \rho^{i-1}; z, r; u^{i+1}, \rho^{i+1}; \ldots u^{2n}, \rho^{2n}$$

ist und, wie die obige Relation zeigt, nicht Null ist, so sind nach der früheren Bemerkung diese Systeme linear unabhängig.

Da in der Determinante Ψ_1 alle Glieder der i^{ten} Zeile und Colonne mit Ausnahme des letzten, welches gleich c ist, Null sind, so ist Ψ_1 gleich dem Producte aus $c^2 = \psi(z, r; u^{2n} \rho^{2n})^2$ in

eine Determinante $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, die aus Ψ hervorgeht, wenn man in ihr die i^{te} und letzte Zeile und Colonne streicht.

Daraus erhellt auch, dass man im anfänglichen Systeme nicht das letzte $u^{2n}\rho^{2n}$ durch z, r ersetzen kann, was damit im Einklange steht, dass $\alpha_{2n} = 0$ ist und dass dann in Ψ_1 die letzte Zeile und Colonne verschwänden.

Da man nun jedes der $2n$ gegebenen Integralsysteme als das letzte betrachten darf, so kann man die gewonnenen Resultate in den folgenden Satz zusammenfassen:

Aus einem Fundamentalsysteme des accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen kann man stets ein Integralsystem ableiten, das nur zu $2n-1$ vorgegebenen Integralsystemen des Fundamentalsystems conjungirt ist und mit $2n-2$ derselben sammt dem noch übrigen des Fundamentalsystems wieder ein Fundamentalsystem bildet. Die Determinante des letzteren unterscheidet sich bloss um einen nicht verschwindenden Factor von der analogen Ψ des ursprünglichen und lässt sich als das Product aus einem von Null verschiedenen Factor in eine nicht verschwindende Determinante $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grades darstellen, die aus Ψ entsteht, wenn man darin nur die Zeilen und Colonnen beibehält, die von den $2n-2$ ursprünglichen Integralsystemen herrühren, welche im neuen Fundamentalsystem zu dem gefundenen Integralsysteme conjugirt sind.

Man sieht klar, wie man diesen Gedankengang fortsetzen kann.

Nimmt man etwa an, dass im obigen Fundamentalsysteme sich $u^1\rho^1$ durch z^1r^1 ersetzen lasse, so dass dieses zu allen folgenden

$$u^2\rho^2;\ u^3\rho^3 \ldots u^{2n-1}\rho^{2n-1},$$

aber nicht zu $u^{2n}\rho^{2n}$ conjugirt ist und mit

$$u^2\rho^2; \ldots u^{2n-1}\rho^{2n-1};\ u^{2n}\rho^{2n}$$

ein Fundamentalsystem bildet, so bezeichne man mit Ψ_1 seine Determinante.

Nach dem Satze zerfällt Ψ_1 in ein Product aus einer Constanten, die hier $\psi(z, r; u^{2n}, \rho^{2n})^2$ ist, und eine Determinante Ψ_2, die aus Ψ_1 entsteht, wenn man darin die Zeilen und Colonnen streicht, in denen eines der beiden Systeme z, r oder u^{2n}, ρ^{2n} vorkommt. Da Ψ_2 nicht Null ist, so kann man nun analog dem Früheren ein System z^2, r^2 bestimmen, das nur zu $2n-1$ der Systeme

$$z^1, r^1;\ u^2, \rho^2;\ u^3, \rho^3 \ldots u^{2n-1}, \rho^{2n-1};\ u^{2n}, \rho^{2n},$$

unter denen sich auch u^{2n}, ρ^{2n} befindet, conjugirt ist.

Wählt man für das ausgeschlossene von den n Systemen $u^{2n-1}\rho^{2n-1}$, so hat man

$$z_i^2 = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k u_i^k \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

und die $\alpha_1 \ldots \alpha_{2n-1}$ so zu bestimmen, dass die Gleichungen erfüllt werden:

$$\psi(z^2, r^2; u^1, \rho^1) = 0 \ \ldots\ \psi(z^2, r^2; u^{2n-2}, \rho^{2n-2}) = 0;$$

$$\psi(z^2, r^2; u^{2n-1}, \rho^{2n-1}) \neq 0 \qquad \psi(z^2, r^2; u^{2n}, \rho^{2n}) = 0$$

oder explicite geschrieben, dass

$$\alpha_1\psi(u^1, \rho^1; u^{2n-1}, \rho^{2n-1}) + \alpha_2\psi(u^2, \rho^2; u^{2n-1}, \rho^{2n-1}) + \ldots$$
$$+ \alpha_{2n}\psi(u^{2n}, \rho^{2n}; u^{2n}, \rho^{2n}) = c \neq 0$$

und

$$\alpha_1\psi(u^1, \rho^1; u^i, \rho^i) + \alpha_2(u^2, \rho^2; u^i, \rho^i) + \ldots + \alpha_{2n}\psi(u^{2n}, \rho^{2n}; u^i, \rho^i) = 0$$

wird für $i = 1, 2 \ldots 2n-2, 2n, \ldots$, wobei

$$u^1 = z^1,\ \rho^1 = r^1$$

zu setzen ist.

Aus der Gleichung

$$\alpha_1\psi(z^1, r^1; z^1, r^1) + \alpha^2\psi(u^2, \rho^2; z^1, r^1) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{2n-1}\psi(u_{2n-1}, \rho_{2n-1}; z^1, r^1) + \alpha_{2n}\psi(u^{2n}, \rho^{2n}, z^1, r^1) = 0$$

folgt zunächst $\alpha_{2n} = 0$.

Die Gleichungen, die sich für $i = 2, 3 \ldots 2n-1$ ergeben, sind frei von α_1 und enthalten somit bloss die Unbekannten

$\alpha_2 \ldots \alpha_{2n-1}$. Die Determinante dieses Gleichungssystems ist Ψ_2 und also nicht Null, so dass die Bestimmung der Unbekannten immer möglich ist. Daraus ergibt sich, dass $\alpha_{2n-1} = 0$ und mindestens eine der übrigen von Null verschieden sein muss. Aus der letzten Gleichung, für $i = 2n$:

$$\alpha_1 \psi(z^1, r^1; u^{2n}, \rho^{2n}) + \alpha_2 \psi(u^2, \rho^2; u^{2n}, \rho^{2n}) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{2n-1} \psi(u^{2n-1}, \rho^{2n-1}; u^{2n}, \rho^{2n}) = 0$$

lässt sich dann noch α_1 bestimmen, da $\psi(z^1, r^1; u^{2n}, \rho^{2n}) \neq 0$ ist.

Ist α_i eine von den Grössen $\alpha_2 \ldots \alpha_{2n-1}$, die nicht Null ist, so kann man in Ψ_1 dieselben Umformungen vornehmen, wie früher mit Ψ, und $(\alpha_i)^2 \Psi_1$ stellt sich als eine Determinante dar, die aus Ψ_1 gewonnen wird, wenn man darin das System $u^i \rho^i$ durch z^2, r^2 ersetzt. Es sind daher die Integralsysteme

$$z^1, r^1; z^2, r^2; u^2 \rho^2 \ldots u^{i-1}, \rho^{i-1}; u^{i+1}, \rho^{i+1} \ldots u^{2n} \rho^{2n}$$

linear unabhängig.

Verändert man die Indices des u^k, ρ^k, indem man, falls i nicht schon zwei sein sollte, dasselbe mit zwei vertauscht, so bilden

$$z^1, r^1; z^2, r^2; u^3, \rho^3 \ldots u^{2n-1}, \rho^{2n-1}; u^{2n}, \rho^{2n}$$

ein Fundamentalsystem, in dem das erste System zu allen nachfolgenden bis auf das letzte, das zweite zu allen übrigen mit Ausnahme des vorletzten conjugirt ist. Die Determinante dieses Fundamentalsystems lässt sich als ein Product aus $\psi(z^1, r^1; u^{2n}, \rho^{2n})^2 \psi(z^2, r^2; u^{2n-1} \rho^{2n-1})^2$ in eine Determinante $2(n-2)$ Grades Ψ_4 darstellen, welche aus der ursprünglichen Ψ hervorgeht, wenn man darin die Colonnen und Zeilen unterdrückt, die eines der Systeme $u^1, \rho^1; u^2, \rho^2; u^{2n-1}, \rho^{2n-1}; u^{2n}, \rho^{2n}$ enthalten.

Es ist klar, dass dieses Resultat sich auch unmittelbar aus obigem Satze in Anwendung auf das System

$$z^1, r^1; u^2, \rho^2 \ldots u^{2n} \rho^{2n}$$

hätte ableiten lassen und dass diese Überlegungen noch $(n-2)$-mal sich wiederholen lassen. Man gelangt so zu folgendem Ergebnisse:

Aus einem Fundamentalsystem des accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen lässt sich stets ein Fundamentalsystem

$$z^1, r^1 \ldots z^n, r^n; z^{n+1}, r^{n+1} \ldots z^{2n}, r^{2n}$$

ableiten, in dem die n letzten Integralsysteme auch dem ursprünglichen Fundamentalsysteme angehören und jedes der n ersten Integralsysteme $z^i r^i$ zu allen übrigen conjugirt ist bis auf $z^{2n-(i-1)} r^{2n-(i-1)}$, zu dem es nicht conjugirt ist. Die Determinante des neuen Fundamentalsystems ist gleich dem Producte

$$\psi(z^1, r^1; z^{2n}, r^{2n})^2 \psi(z^2, r^2; z^{2n-1}, r^{2n-1})^2 \ldots \psi(z^n, r^n; z^{n+1}, r^{n+1})^2.$$

Das erhaltene Fundamentalsystem kann man aber noch weiter specialisiren in ein anderes, in dem auch jedes der n letzten Integralsysteme, z. B. z^{n+k}, ρ^{n+k}, zu allen übrigen conjugirt ist mit Ausnahme von z^{n+1-k}, r^{n+1-k}. Es lässt sich nämlich in obigem Fundamentalsysteme das System z^{n+k}, r^{n+k} durch

$$\alpha_1 z^1 + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \alpha z^{n+k}; \; \alpha_1 r^1 + \alpha_2 r^2 \ldots + \alpha_n r^n + \alpha r^{n+k}$$

ersetzen, wo die $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ unbestimmte Constanten bedeuten und den $z^1, z^2 \ldots z^n, z^{n+k}, r^1, r^2 \ldots r^n, r^{n+k}$ derselbe untere Index beizusetzen ist als dem betreffenden Gliede des Integralsystems z^{n+k}, r^{n+k} — ohne seine im Satze angeführten Eigenschaften zu zerstören, dass jedes der n ersten Systeme zu allen übrigen, mit Ausnahme eines einzigen, conjugirt ist.

Über die $\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ kann man nun so verfügen, dass, wenn mit v, r das neue Integralsystem bezeichnet wird, dasselbe den Gleichungen genügt:

$$\psi(v, r; z^i, r^i) = \alpha \psi(z^{n+k}, r^{n+k}; z^i, r^i) + \alpha_1 \psi(z^1, r^1; z^i, r^i) + \ldots \\ \ldots + \alpha_n \psi(z^n, r^n; z^i, r^i) = 0 \quad (1)$$

für $i = 1, 2 \ldots n-k, n-k+2 \ldots 2n$ und

$$\psi(v, r; z^{n+1-k}, r^{n+1-k}) \neq 0,$$

denn für $i = 1, 2 \ldots n-k, n-k+2 \ldots n$ sind die Gleichungen (1) in Folge der Eigenschaft der $z^1, r^1; z^2, r^2 \ldots z^n, r^n$ erfüllt und die $\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ haben also nur noch die $(n+1)$ Gleichungen

$$\alpha\psi(z^{n+k}, r^{n+k}; z^{n+1-k}, r^{n+1-k}) \neq 0$$

$$\alpha\psi(z^{n+k}, r^{n+k}; z^i, r^i) + \alpha_{2n-i+1}\psi(z^{2n-i+1}, r^{2n-i+1}; z^i, r^i) = 0$$

$$(i = n+1 \ldots 2n)$$

zu befriedigen. Da $\psi(z^{n+k}, r^{n+k}; z^{n+1-k}, r^{n+1-k}) \neq 0$ ist, so lässt sich die erste Bedingung immer erfüllen, und da auch $\psi(z^{2n-i+1}, r^{2n-i+1}; z^i, r^i) \neq 0$ ist, so lassen sich auch die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ aus den übrigen Gleichungen berechnen. Die Determinante Ψ des Systems

$$z^1, r^1 \ldots z^n, r^n; z^{n+1}, r^{n+1} \ldots z^{n+k-1}, r^{n+k-1}; v, r;$$
$$z^{n+k+1}, r^{n+k+1} \ldots z^{2n} r^{2n}$$

ist dann

$$\psi(z^1, r^1; z^{2n}, r^{2n})^2 \ldots \psi(z^{n+1-k}, r^{n+1-k}; v, r)^2 \ldots \psi(z^n, r^n; z^{n+1}, r^{n+1})^2$$

und somit von Null verschieden. Daher bilden diese $2n$ Integralsysteme ein Fundamentalsystem und man findet so den Satz:

Es bestehen Fundamentalsysteme, in deren jedem die einzelnen Integralsysteme einander derart paarweise zugeordnet sind, dass jedes zu allen übrigen Integralsystemen mit Ausnahme seines zugeordneten Integralsystems conjugirt ist. Ein solches Fundamentalsystem soll ein involutorisches heissen.

2. Wegen späterer Anwendung soll hier noch die Aufgabe gelöst werden:

Aus zwei conjugirten Systemen, die ein Fundamentalsystem bilden, durch lineare Transformation des einen, während das andere ungeändert bleibt, ein involutorisches Fundamentalsystem zu bilden.

Ist

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

das eine,

$$v^1, r^1; v^2, r^2 \ldots v^n, r^n$$

das andere conjugirte System, so bilde man aus letzterem das conjugirte System

$$z^1, R^1; z^2, R^2 \ldots z^n, R^n,$$

wo

$$z^k = \beta_1^k v^1 + \beta_2^k v^2 + \ldots + \beta_n^k v^n$$

gesetzt wurde und die einzelnen Glieder durch Anfügen des gemeinsamen unteren Zeigers hieraus erhalten werden. Die n^2 unbekannten Grössen

$$\beta_1^1 \ldots \beta_n^1 \ldots \beta_1^n \ldots \beta_n^n$$

bestimme man aus den Gleichungen

$$\psi(z^k, R^k; u^i, \rho^i) = 0, \qquad \psi(z^{n+1-i}, R^{n+1-i}; u^i, \rho^i) \neq 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\lambda=1}^{n} \beta_\lambda^k \psi(v^\lambda, r^\lambda; u^i, \rho^i) = 0 \\ &\sum_{\lambda=1}^{n} \beta_\lambda^{n+1-i} \psi(v^\lambda, r^\lambda; u^i, \rho^i) = c_i \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &k = 1, 2 \ldots n-i, n+2-i \ldots n \\ &i = 1, 2 \ldots n, \end{aligned}$$

wo c_i eine willkürliche, aber von Null verschiedene Grösse ist. Fasst man die n Gleichungen zusammen, wo die β denselben oberen Index k haben, so ergibt sich, wenn die Determinante des Gleichungssystems mit Ψ' und darin die Subdeterminante von $\psi(v^\lambda, r^\lambda; u^i, \rho^i)$ mit $\Psi'_{\lambda, i}$ bezeichnet wird,

$$\beta_\lambda^k = c_{n+1-k} \frac{\Psi'_{\lambda, n+1-k}}{\Psi'},$$

da Ψ' zugleich die Determinante Ψ' des vorgelegten Fundamentalsystems und daher nicht Null ist. Da die Determinante

$$\Sigma \pm \beta_1^1 \beta_2^2 \ldots \beta_n^n = c_1 c_2 \ldots c_n (\Psi')^{n-2}$$

nicht Null ist, so bilden daher erstens die

$$z^1, R^1; z^2, R^2 \ldots z^n R^n,$$

wo

$$z^k = \frac{c_{k+1-k}}{\Psi'} \sum_{\lambda=1}^{n} \Psi'_{\lambda, n+1-k} v^\lambda$$

und die $c_1, c_2 \ldots c_n$ willkürlich sind, ein conjugirtes System, und zweitens mit

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n \rho^n$$

ein involutorisches Fundamentalsystem.

3. Mit Hilfe solcher involutorischer Fundamentalsysteme erhält das früher gestellte Problem:

Alle conjugirten Systeme anzugeben,

eine besonders einfache Form, aus der unmittelbar seine Lösung hervorgeht.

Sind

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^{2n}, \rho^{2n}$$

die Glieder eines Fundamentalsystems, so lässt sich v^i_λ eines jeden anderen Integralsystems $v^i r^i$ durch

$$v^i_\lambda = \sum_{\gamma=1}^{n} \alpha^i_\gamma u^\gamma_\lambda$$

darstellen und analog v^k_μ des Systems v^k, r^k durch

$$v^k_\mu = \sum_{\nu=1}^{2n} \alpha^k_\nu u^\nu_\mu,$$

wo die α constante Grössen sind. Diese beiden Systeme sind dann und nur dann zu einander conjugirt, wenn

$$\psi(v^i, r^i; v^k, r^k) = 0$$

ist, d. h. wenn die Grössen α^i und α^k der Gleichung

$$\sum_{\gamma, \nu=1}^{2n} \alpha^i_\gamma \alpha^k_\nu \psi(u^\gamma, \rho^\gamma; u^\nu, \rho^\nu) = 0$$

genügen. Es werden daher n Integralsysteme

$$v^1, r^1; v^2, r^2 \ldots v^n, r^n$$

dann und nur dann ein conjugirtes System bilden, wenn die zugehörigen

$$\begin{array}{l} \alpha_1^1, \alpha_2^1 \ldots \alpha_{2n}^1 \\ \alpha_1^2, \alpha_2^2 \ldots \alpha_{2n}^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots \alpha_{2n}^n, \end{array}$$

die $\frac{1}{2} n(n-1)$ Gleichungen

$$\psi(v^i, r^i; v^k, r^k) = 0 \qquad i, k = 1, 2 \ldots n$$

oder

$$\sum_{\gamma, \nu = 1}^{2n} \alpha_\gamma^i \alpha_\nu^k \psi(u^\gamma, \rho^\gamma; u^\nu, \rho^\nu) = 0 \qquad i, k = 1, 2 \ldots n$$

befriedigen.

Ist nun das Fundamentalsystem involutorisch und sind u^i, ρ^i und u^{2n+1-i}, ρ^{2n+1-i} immer für $i = 1, 2 \ldots n$ einander zugeordnet, so fallen in den obigen Gleichungen alle Glieder weg, wo $\gamma + \nu \neq 2n+1$ ist, und sie vereinfachen sich in

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu^k \alpha_{2n+1-\nu}^i - \alpha_{2n+1-\nu}^k \alpha_\nu^i) \psi(u^\nu, \rho^\nu; u^{2n+1-\nu}, \rho^{2n+1-\nu}) = 0$$
$$i, k = 1, 2 \ldots n.$$

Eine noch einfachere Gestalt erhalten dieselben, wenn man

$$\psi(u^\nu, \rho^\nu; u^{2n+1-\nu}, \rho^{2n+1-\nu}) \alpha_{2n+1-\nu}^k = a_\nu^k$$

einführt, wodurch sie in

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu^i a_\nu^k - \alpha_\nu^k a_\nu^i) = 0 \qquad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n \qquad (1)$$

übergehen.

Diese Gleichungen, die auch Clebsch[1] vermöge partieller Differentialgleichungen ableitete, sollen nun nach einer Methode aufgelöst werden, die in der Richtung der bisherigen Betrachtungsweise liegt.

---

[1] Journal für Math., Bd. 56.

Zunächst zeigt eine kurze, eigentlich überflüssige Überlegung, dass von den $2n^2$ Unbekannten durch die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen gerade so viele Unbekannte festgelegt werden und diese also als Functionen von $n^2+\frac{1}{2}n(n+1)$ willkürlichen Grössen sich darstellen lassen müssen.

Sieht man nämlich in den obigen Gleichungen (1) die Grössen α_ν^1, a_ν^1 $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ als willkürliche an, so geben die nach den übrigen linearen Gleichungen, in denen $i = 1$ mit $k = 2, 3 \ldots n$ combinirt wird, $(n-1)$ der Unbekannten, mit verschiedenen oberen Zeigern $2, 3 \ldots n$. Nimmt man nun $i = 2$, so sind von den Grössen mit diesem oberen Zeiger nur mehr $2n-1$ willkürlich. Hält man sie als solche fest und combinirt in dem Gleichungssystem, ähnlich wie früher, $i = 2$ mit $k = 3, 4 \ldots n$, so ergeben sich aus dieser Gruppe von linearen Gleichungen $(n-2)$ Unbekannte mit verschiedenen oberen Zeigern $3, 4 \ldots n$. Von den Grössen mit dem oberen Index 3 sind jetzt nur mehr $2n-2$ willkürlich. Sieht man sie als solche an, so gibt die Gruppe der linearen Gleichungen $i = 3$, $k = 4, 5 \ldots n$ von den Unbekannten mit oberem Zeiger $4, 5 \ldots n$ je eine, also $2n-3$. Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen sieht man, dass in obigem Gleichungssystem $2n+(2n-1)+\ldots$ $\ldots+2n-(n-1) = n^2+\frac{1}{2}n(n+1)$ Grössen willkürlich und $1+2+\ldots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ durch diese bestimmt sind.

Um nun diese Abhängigkeit darzustellen, gehe man von der Bemerkung aus, dass ein conjugirtes System seine Eigenschaft bei linearer Substitution nicht verliert. Denn sind

$$v^1,\, r^1;\; v^2,\, r^2 \ldots v^n,\, r^n$$

die Glieder eines conjugirten Systems, so dass also immer

$$\psi(v^i, r^i; v^k, r^k) = 0$$

ist, so gelten auch für die linearen Substitutionen

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k^1 v^k,\; \sum_{k=1}^{n} \beta_k^1 r^k;\; \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 v^k,\; \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 r^k \ldots \sum_{k=1}^{n} \beta_k^n v^k,\; \sum_{k=1}^{n} \beta_k^n r^k,$$

wo also

$$\begin{matrix} \beta_1^1, \beta_2^1 \ldots \beta_n^1 \\ \beta_1^2, \beta_2^2 \ldots \beta_n^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \beta_1^n, \beta_2^n \ldots \beta_n^n \end{matrix}$$

die Substitutionscoëfficienten sind, die analogen Gleichungen

$$\psi\left(\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^i v^\nu, \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^i r^\nu; \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^k v^\nu, \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^k r^\nu\right) =$$

$$\sum_{\lambda,\nu=1}^{n} \beta_\lambda^i \beta_\nu^k \psi(v^\lambda, r^\lambda; v^\nu, r^\nu) = 0.$$

Hieraus folgt:

Genügen die n Systeme

$$\alpha_1^i, \alpha_2^i \ldots \alpha_n^i; \quad a_1^i, a_2^i \ldots a_n^i$$
$$i = 1, 2 \ldots n$$

den obigen Gleichungen (1), so genügen ihnen auch die Systeme

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_1^r \beta_i^r, \sum_{r=1}^{n} \alpha_2^r \beta_i^r \ldots \sum_{r=1}^{n} \alpha_n^r \beta_i^r, \sum_{r=1}^{n} a_1^r \beta_i^r, \sum_{r=1}^{n} a_2^r \beta_i^r \ldots \sum_{r=1}^{n} a_n^r \beta_i^r$$
$$i = 1, 2 \ldots n,$$

wo die $\beta_1^1, \beta_2^2 \ldots \beta_n^n$ willkürliche Grössen bedeuten.

In der That befriedigen auch diese Grössen, wie man sich direct durch Einsetzen überzeugt, die obigen Gleichungen.

Zählt man nun alle conjugirten Systeme, die durch lineare Substitutionen auf die obige Art aus einander hervorgehen, zur selben Gruppe, so handelt es sich nur mehr, die Repräsentanten dieser einzelnen Gruppen aufzusuchen, deren allgemeiner Typus nach den vorgenommenen Überlegungen also $\frac{1}{2} n(n+1)$ willkürliche Grössen enthalten wird. Da nun die $2n^2$ Unbekannten, wie sich eben zeigte, linear von n^2 willkürlichen Grössen abhängen, so kann man diese benützen, um entweder den $\alpha_1^i, \alpha_2^i \ldots \alpha_n^i$ oder den $a_1^i, a_2^i \ldots a_n^i$, wo i die Werthe $1, 2 \ldots n$ zu

durchlaufen hat, specielle Werthe zu ertheilen. Gibt man etwa dem ersteren Grössensystem die Werthe

$$\alpha_k^i = 0 \text{ für } i \neq k$$
$$= 1 \quad » \quad i = k,$$

so ergeben sich aus den obigen Gleichungen (1) für das zweite Grössensystem bloss die Bedingungen

$$a_i^k = a_k^i.$$

Setzt man also

$$\psi(u^\nu, \rho^\nu; u^{2n+1-\nu}, \rho^{2n+1-\nu}) = b_\nu,$$

so constituiren die n linear unabhängigen Integralsysteme

$$v_\mu^k = u_\mu^k + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^k}{b_\nu} u_\mu^{2n+1-\nu}; \qquad r_\mu^k = \rho_\mu^k + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^k}{b_\nu} \rho_\mu^{2n+1-\nu}$$

$$\left.\begin{matrix} k \\ \mu \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n \qquad \begin{matrix} k = 1, 2 \ldots n \\ \mu = 1, 2 \ldots m, \end{matrix}$$

wo die a_i^k ganz willkürlich sind und nur der Bedingung

$$a_i^k = a_k^i$$

genügen, ein conjugirtes System. Da die Glieder dieses Systems somit von $\frac{1}{2} n(n+1)$ Constanten abhängen, so stellen sie nach den vorangegangenen Bemerkungen den allgemeinen Gruppentypus der conjugirten Systeme dar. Gibt man den a_i^k Werthe, die den Bedingungen entsprechen, so liefern sie ein conjugirtes System, und die Gesammtheit aller, welche aus ihm durch lineare Substitutionen obiger Art gewonnen werden, bilden dann seine Gruppe.

Dieser Begriff wird demnach nur dann ein wohl begrenzter sein, wenn sich zeigen lässt, dass die so erhaltenen Gruppen sich nicht vermischen können, wenn also nicht conjugirte Systeme der einen Gruppe durch lineare Transformationen der angegebenen Art sich in solche einer anderen Gruppe überführen lassen.

Bilden die a_i^k ein beliebiges Werthsystem, in dem $a_i^k = a_k^i$ ist, so stellen

$$u_i^k + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^k}{b_\nu} u_i^{2n-1-\nu}$$

$$\left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n$$

mit den zugehörigen zweiten Gliedern den Repräsentanten einer Gruppe conjugirter Systeme dar. Die Glieder der Gruppe werden aus

$$t_\mu^k = \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda^k \left[u_\mu^\lambda + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^\lambda}{b_\nu} u_\mu^{2n+1-\nu} \right]$$

$$\left.\begin{matrix} k \\ \mu \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n$$

erhalten, wenn man den n^2 Grössen

$$\begin{matrix} \alpha_1^1, \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2, \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n \end{matrix}$$

alle Werthe ertheilt, für welche ihre Determinante nicht Null ist, welche einschränkende Bedingung deshalb erforderlich ist, weil die Integralsysteme eines conjugirten Systems linear unabhängig sein müssen.

Nimmt man statt der a_i^k ein anderes gleichartiges Grössensystem c_i^k, wo also nicht durchgängig $a_i^k = c_i^k$ sein soll, und statt der Grössen α ein anderes Werthesystem

$$\begin{matrix} \gamma_1^1, \gamma_2^1 \ldots \gamma_n^1 \\ \gamma_1^2, \gamma_2^2 \ldots \gamma_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \gamma_1^n, \gamma_2^n \ldots \gamma_n^n \end{matrix}$$

mit nicht verschwindender Determinante, so bilden

$$V_\mu^k = \sum_{\lambda=1}^{n} \gamma_\lambda^k \left[u_\mu^\lambda + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu^\lambda}{b_\nu} u_\mu^{2n+1-\nu} \right]$$

$$\left.\begin{matrix} k \\ \mu \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n$$

mit den zugehörigen zweiten Gliedern ein conjugirtes System einer zweiten Gruppe. Liesse sich nun ein System dieser Gruppe in eines der ersten linear transformiren, so müssten Grössen α und γ bestehen, wofür

$$V^k_\mu = v^k_\mu$$
$$\left.\begin{matrix}k\\ \mu\end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n$$

oder

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \alpha^k_\lambda \left[u^\lambda_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a^\lambda_\nu}{b_\nu} u^{2n+1-\nu}_\mu\right] = \sum_{\lambda=1}^{n} \gamma^k_\lambda \left[u^\lambda_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c^\lambda_\nu}{b_\nu} u^{2n+1-\nu}_\mu\right]$$
$$\left.\begin{matrix}k\\ \mu\end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n$$

wird. Da die

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2 \ldots\ u^{2n}, \rho^{2n}$$

linear unabhängig sind, so wäre dann

$$\alpha^k_\lambda = \gamma^k_\lambda \quad \text{und} \quad \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{a^\lambda_\nu \alpha^k_\lambda - c^\lambda_\nu \gamma^k_\lambda}{b_\nu} = 0$$
$$\left.\begin{matrix}k\\ \nu\end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n$$

oder

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (a^\lambda_\nu - c^\lambda_\nu)\alpha^k_\lambda = 0$$
$$\left.\begin{matrix}k\\ \nu\end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n.$$

Diese Gleichungen hätten wegen

$$\Sigma \pm \alpha^1_1 \alpha^2_2 \ldots \alpha^n_n \pm 0$$

zur Folge

$$a^\lambda_\nu = c^\lambda_\nu$$
$$\left.\begin{matrix}\lambda\\ \nu\end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Die bisherigen Betrachtungen führen somit zu der Erkenntniss:

Bilden die Integralsysteme

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^{2n}, \rho^{2n}$$

ein involutorisches Fundamentalsystem, so liefert jedes System von n^2 Grössen a_i^k, in dem

$$a_i^k = a_k^i$$

ist, ein conjugirtes Integralsystem

$$v_\mu^k = u_\mu^k + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^k}{b_\nu} u_\mu^{2n+1-\nu}; \quad r_\mu^k = \rho_\mu^k + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^k}{b_\nu} \rho_\mu^{2n+1-\nu}$$

$$\left.\begin{matrix} k \\ \mu \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n \qquad \begin{matrix} k = 1, 2 \ldots n \\ \mu = 1, 2 \ldots m, \end{matrix}$$

wenn

$$b_\nu = \psi(u^\nu, \rho^\nu; u^{2n+1-\nu}, \rho^{2n+1-\nu})$$

gesetzt wird. Jedes einzelne dieser conjugirten Systeme kann als Repräsentant einer Gruppe conjugirter Systeme betrachtet werden, deren Glieder alle linearen Transformationen mit nicht verschwindender Determinante der Integralsysteme des Repräsentanten enthalten.

Diese Gruppen umfassen die gesammten conjugirten Systeme, und jedes derselben ordnet sich einer, aber nur einer Gruppe ein.

XVI.

1. Unter den conjugirten Systemen besitzen für die weiteren Untersuchungen diejenigen

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

ein besonderes Interesse, deren Determinante

$$\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n$$

an einer Stelle des Integrationsintervalls verschwindet. Da die Determinanten der conjugirten Systeme, die zur selben Gruppe

gehören, nur um constante Grössen, die nicht Null sind, sich unterscheiden, so werden an derselben Stelle die Determinanten aller conjugirten Systeme der Gruppe zugleich verschwinden oder nicht verschwinden.

Zu diesen conjugirten Systemen gehören auch jene speciellen, deren sämmtliche Elemente u_k^i an derselben Stelle verschwinden und die der betreffenden Stelle oder dem betreffenden Punkte conjugirt genannt werden sollen.

Die Herstellung der einzelnen Integralsysteme aus Anfangselementen lässt sofort die Existenz solcher einem beliebigen Punkte conjugirter Systeme, in denen keines der einzelnen Integralsysteme lauter identisch verschwindende Glieder besitzt, erkennen, denn man kann die Anfangselemente so wählen, dass die Sätze in IX erfüllt sind.

Man erhält aber die dem Punkte ξ conjugirten Systeme am einfachsten, indem man von einem Fundamentalsystem

$$z^1, r^1; z^2, r^2 \ldots z^{2n}, r^{2n}$$

ausgeht und daraus n Systeme

$$u_k^i = \sum_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda^i z_k^\lambda$$

$$\left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n$$

bildet, in denen die α_k^i den n^2 Bedingungsgleichungen

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_\lambda^i (z_k^\lambda)_\xi = 0$$

$$\left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n$$

genügen, wenn $(z_k^\lambda)_\xi$ den Werth bedeutet, den z_k^λ im Punkte ξ annimmt. Diese Gleichungen kann man in n Gruppen zu je n zusammenfassen, in deren jeder i denselben Werth besitzt. In jeder einzelnen Gruppe lassen sich n der Unbekannten

$$\alpha_1^i, \alpha_2^i \ldots \alpha_{2n}^i$$

durch dieselben n anderen linear und homogen ausdrücken, da in der Matrix

$$\begin{vmatrix} z_1^1, z_1^2 \ldots\ldots z_1^{2n} \\ z_2^1, z_2^2 \ldots\ldots z_2^{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n^1, z_n^2 \ldots\ldots z_n^{n} \end{vmatrix}$$

mindestens eine der darin enthaltenen Determinanten n^{ter} Grades in ξ nicht Null sein kann, weil sonst die $2n$ Integralsysteme

$$z^1, r^1; z^2, r^2 \ldots z^{2n}, r^{2n}$$

nicht linear unabhängig sein könnten.

Ist etwa $\Sigma \pm z_1^1 z_2^2 \ldots z_n^n$ eine solche nicht verschwindende Determinante und wäre in jeder der Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda^i (z_k^\lambda)_\xi = -\sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{n+\lambda}^i (z_k^{n+\lambda})_\xi$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

die rechte Seite für alle Systeme der $\alpha_{n+1}^i, \alpha_{n+2}^i \ldots \alpha_{2n}^i$ gleich Null, so müsste $(z_k^{n+\lambda})_\xi = 0$ für $\lambda, k = 1, 2 \ldots n$ und $z_k^{n+1}, r_k^{n+1}; z_k^{n+2}, r_k^{n+2} \ldots z^{2n}, r^{2n}$ $(k = 1, 2 \ldots n)$ würde das gesuchte System sein. Ist dies nicht der Fall, so ergeben sich die $\alpha_1^i, \alpha_2^i \ldots \alpha_n^i$ aus den Gleichungen als homogene lineare Functionen der $\alpha_{n+1}^i \ldots \alpha_{2n}^i$, die nicht sämmtlich Null sein können.

Jeder derartigen Bestimmung der α_i^k, für welche nicht sämmtliche Determinanten n^{ten} Grades der Matrix

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1, \alpha_1^2 \ldots\ldots \alpha_1^{2n} \\ \alpha_2^1, \alpha_2^2 \ldots\ldots \alpha_2^{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n^1, \alpha_n^2 \ldots\ldots \alpha_n^{2n} \end{vmatrix}$$

verschwinden, entspricht dann nach (X) ein conjugirtes System, das also dem Punkte ξ zugehört. Aus einem derselben ergeben sich alle anderen durch lineare Transformation.

Ist nun

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

dem Punkte ξ conjugirt und bilden die $2n$ Systeme

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n;\ u^{n+1}, \rho^{n+1} \ldots u^{2n}, \rho^{2n}$$

ein Fundamentalsystem, so kann

$$\Sigma \pm u_1^{n+1}, u_2^{n+2} \ldots u_n^{2n}$$

in ξ nicht verschwinden. Ist hingegen v, r ein Integralsystem, dessen sämmtliche Glieder $v_1, v_2 \ldots v_n$ in ξ verschwinden, so müssen die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n}$ in

$$v_i = \sum_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda u_i^\lambda$$

den n Bedingungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{n+\lambda} (u_i^{n+\lambda})_\xi = 0$$

$$i = 1, 2 \ldots n$$

genügen, d. h. es ist

$$\alpha_{n+\lambda} = 0$$

für $\lambda = 1, 2 \ldots n$.

Verschwinden die Glieder $v_1, v_2 \ldots v_n$ eines Integralsystems v, r in ξ und bilden

$$u^1 \rho^1, u^2 \rho^2 \ldots u^n \rho^n$$

ein zu ξ conjugirtes System, so ist

$$v_i = \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda u_i^\lambda.$$

Und umgekehrt.

Es sind somit alle demselben Punkte conjugirten Systeme lineare Substitutionen von einander und bilden eine Gruppe conjugirter Systeme, welche die dem Punkte zugehörige Gruppe genannt werden soll.

Die Determinante eines solchen dem Punkte ξ conjugirten Systems

$$\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n,$$

die in der Folge mit $\Delta(x, \xi)$ bezeichnet werde, ist also das Product der beiden Matrices

$$\begin{vmatrix} z_1^1, & z_1^2 \ldots\ldots & z_1^{2n} \\ z_2^1, & z_2^2 \ldots\ldots & z_2^{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n^1, & z_n^2 \ldots\ldots & z_n^{2n} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1^1, & \alpha_2^1 \ldots\ldots & \alpha_{2n}^1 \\ \alpha_1^2, & \alpha_2^2 \ldots\ldots & \alpha_{2n}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n, & \alpha_2^n \ldots\ldots & \alpha_{2n}^n \end{vmatrix},$$

und kann auch aus dem Producte der Determinante

$$Z = \begin{vmatrix} z_1^1, & z_1^2 & \ldots & z_1^{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_n^1, & z_n^2 & \ldots & z_n^{2n} \\ (z_1^1)_\xi, & (z_1^2)_\xi & \ldots & (z_1^{2n})_\xi \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (z_1^n)_\xi, & (z_1^2)_\xi & \ldots & (z_n^{2n})_\xi \end{vmatrix}$$

mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1, & \alpha_2^1 \ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha_{2n}^1 \\ \alpha_1^2, & \alpha_2^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha_{2n}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n, & \alpha_2^n \ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha_{2n}^n \\ \beta_1^1, & \beta_2^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & \beta_{2n}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1^n, & \beta_2^n \ldots\ldots\ldots\ldots & \beta_{2n}^n \end{vmatrix} = B,$$

wo die $\beta_1^1, \beta_2^2 \ldots \beta_{2n}^n$ willkürliche Grössen sind, erhalten werden, denn es ist

$$Z.B = \Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{2n} \beta_k^1 (z_1^k)_\xi; & \sum_{k=1}^{2n} \beta_k^1 (z_2^k)_\xi \ldots & \Sigma \beta_k^1 (z_n^k)_\xi \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{k=1}^{n} \beta_k^n (z_1^k)_\xi; & \sum_{k=1}^{2n} \beta_k^n (z_2^k)_\xi \ldots & \sum_{k=1}^{2n} \beta_n^k (z_n^k)_\xi \end{vmatrix}.$$

Da die $(2n^2)$ Grössen $\beta_2^1, \beta_2^1 \ldots \beta_{2n}^n$ so gewählt werden können, dass sowohl B, als auch die Determinante an zweiter Stelle rechts, die das Product zweier Matrices ist, nicht Null sind, so erkennt man:

Die Determinante des conjugirten Systems und Z unterscheiden sich bloss um einen constanten Factor, der nicht Null ist.

2. Von Wichtigkeit für die weiteren Untersuchungen ist es, festzustellen, dass stets conjugirte Systeme bestehen, deren Determinante in einem angenommenen Punkte des Integrations-Intervalles nicht verschwindet.

Ist ξ eine gegebene Stelle, so muss jedes conjugirte System, dessen Determinante in ξ verschwindet, einer Gruppe angehören, die conjugirte Systeme mit mindestens einem in ξ verschwindenden Integralsysteme besitzt. Denn ist

$$v^1, r^1; \; v^2, r^2; \ldots v^n, r^n$$

dieses conjugirte System, wofür $\Sigma \pm v_1^1 v_2^2 \ldots v_n^n$ in ξ Null ist, so lassen sich stets n Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ bestimmen, welche den n Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 (v_1^1)_\xi + \alpha_2 (v_1^2)_\xi + \ldots + \alpha_n (v_1^n)_\xi = 0 \\
&\alpha_1 (v_2^1)_\xi + \alpha_2 (v_2^2)_\xi + \ldots + \alpha_n (v_2^n)_\xi = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\alpha_1 (v_n^1)_\xi + \alpha_2 (v_n^2)_\xi + \ldots + \alpha_n (v_n^n)_\xi = 0.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

Es gibt in der Gruppe, der das conjugirte System mit in ξ verschwindender Determinante angehört, mindestens eines, das mit einem conjugirten Systeme des Punktes ξ mindestens ein Integralsystem gemeinsam hat.

Und umgekehrt:

Verschwindet die Determinante eines conjugirten Systems in ξ nicht, so gibt es in seiner Gruppe kein conjugirtes System, das mit einem zu ξ gehörigen ein Integralsystem gemeinsam hätte.

Sonach:

Die Determinante eines conjugirten Systems verschwindet dann und nur dann in einem Punkte des Integrations-Intervalles, wenn seine Gruppe mindestens ein conjugirtes System enthält, das mit dem des Punktes mindestens ein Integralsystem gemeinsam hat.

Sind daher nach (XV, 2):

$$\left.\begin{aligned} v_i^k &= \sum_{\lambda=1}^{n}\left[u_i^\lambda + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu^\lambda}{b_\nu}u_i^{2n+1-\nu}\right]\alpha_\lambda^k; \\ & \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n \\ r_i^k &= \sum_{\lambda=1}^{n}\left[\rho_i^\lambda + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu^\lambda}{b_\nu}\rho_i^{2n+1-\nu}\right]\alpha_\lambda^k \\ & i = 1, 2 \ldots m \\ & k = 1, 2 \ldots n \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

die Glieder eines conjugirten Systems, das zur Gruppe des obigen gehört, und stellen

$$V_i^k = u_i^k + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{c_\nu^k}{b_\nu}u_i^{2n+1-\nu}; \quad R_i^k = \rho_i^k + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{c_\nu^k}{b_\nu}\rho_i^{2n+1-\nu} \quad (2)$$

$$\left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n \qquad \begin{matrix} i = 1, 2 \ldots m \\ k = 1, 2 \ldots n \end{matrix}$$

den Repräsenten der dem Punkte ξ zugeordneten Gruppe dar, so verschwindet also die Determinante

$$\Sigma \pm v_1^1, v_2^2 \ldots v_n^n$$

dann und nur dann in ξ, wenn ein Grössensystem

$$\alpha_1^1, \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^1; \ \ldots \alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n$$

von nicht verschwindender Determinante $\Sigma \pm \alpha_1^1 \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^n$ besteht, so zwar, dass das conjugirte System (1) mit einem conjugirten System der Gruppe (2) ein Integralsystem gemeinsam hat. Dies

ist aber dann und nur dann der Fall, wenn die conjugirten Systeme (1) und (2) linear von einander abhängen, was wiederum nach (XIV, 2) dann und nur dann eintritt, wenn die Determinante Ψ' beider Systeme verschwindet.

Nun ist

$$\psi(v^k, r^k; v^\lambda, r^\lambda) = \psi(V^k, R^k; V^\lambda, R^\lambda) = 0$$

und wegen

$$b_\nu = \psi(u^\nu, \rho^\nu; u^{2n+1-\nu}, \rho^{2n+1-\nu})$$

ist

$$\psi(v^k, r^k; V^\lambda, R^\lambda) = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu^k (c_\lambda^\mu - a_\mu^\lambda);$$

daher schrumpft die Determinante Ψ' zusammen auf das Quadrat der Determinante

$$\begin{vmatrix} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu^1 (a_1^\mu - c_\mu^1); & \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu^1 (a_2^\mu - c_\mu^2) \ldots & \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu^1 (a_n^\mu - c_\mu^n) \\ \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu^2 (a_1^\mu - c_\mu^1); & \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu^2 (a_2^\mu - c_\mu^2) \ldots & \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu^2 (a_n^\mu - c_\mu^n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu^n (a_1^\mu - c_\mu^1); & \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu^n (a_2^\mu - c_\mu^2) \ldots & \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu^n (a_n^\mu - c_\mu^n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (a_1^1 - c_1^1); & (a_1^2 - c_2^1) \ldots & (a_1^n - c_n^1) \\ (a_2^1 - c_1^2); & (a_2^2 - c_2^2) \ldots & (a_2^n - c_2^n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_n^1 - c_1^n); & (a_n^2 - c_2^n) \ldots & (a_n^n - c_n^n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1^1; & \alpha_2^1 \ldots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2; & \alpha_2^2 \ldots & \alpha_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^n; & \alpha_2^n \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

Da in diesem Producte der zweite Factor nicht Null ist, so wird, wenn auch der erste nicht Null ist, Ψ' selbst nicht Null sein und also dann die Determinante

$$\Sigma \pm v_1^1, v_2^2 \ldots v_n^n$$

in ξ nicht verschwinden.

Da mit dem Punkte ξ auch die

$$c_1^1, c_2^1 \ldots c_n^1; \ldots c_1^n, c_2^n \ldots c_n^n$$

bekannt sind, so kann man unendlich viele Grössensysteme

$$a_1^1, a_2^1 \ldots a_n^1; \ldots a_1^n, a_2^n \ldots a_n^n$$

bestimmen, für welche auch der erste Factor nicht verschwindet.

Man erkennt hieraus:

Es existiren stets unendlich viele conjugirte Systeme, deren jedes eine Determinante besitzt, welche an einer beliebig angenommenen Stelle des Integrations-Intervalls nicht verschwindet.

Die Betrachtungen zeigen zugleich, dass der Satz nicht auf eine Stelle beschränkt ist, man kann ihn aber auch nach anderer Richtung noch ausdehnen.

Sind

$$z_i^k = \sum_{\lambda=1}^{n} \left[u_i^\lambda + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{b_\lambda^\nu}{b_\nu} u_i^{2n+1-\nu} \right] \beta_\lambda^k \qquad (3)$$

$$\left. \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2 \ldots n$$

sammt den zugehörigen r die Glieder eines dritten conjugirten Systems, so lassen sich die

$$b_1^1, b_2^1 \ldots b_n^1 \ldots \ldots b_1^n, b_2^n \ldots b_n^n$$

derart wählen, dass dieselben weder die Determinante Ψ der Systeme (1) und (3), noch von (2) und (3) zu Null machen. Man erkennt dies am deutlichsten, wenn man

$$b_k^i = 0 \text{ für } i \neq k \text{ und } b_i^i = b \text{ für } i = 1, 2 \ldots n$$

setzt, denn dann ist b, wie man sich leicht überzeugt, nur so zu wählen, dass es keiner der beiden Gleichungen

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - b, & a_1^2 \ldots a_1^n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_n^1, & a_n^2 \ldots a_n^n - b \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} c_1^1 - b, & c_1^2 \ldots c_1^n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ c_n^1, & c_n^2 \ldots c_n^n - b \end{vmatrix} = 0$$

genügt. Das dritte conjugirte System, das diesen Werthen der b entspricht, hat dann weder mit dem conjugirten System (1), noch (3) ein Integralsystem gemeinsam, was man durch den Satz ausdrücken hann:

Zu einem conjugirten System lassen sich immer andere conjugirte Systeme finden, deren jedes mit dem ersteren ein Fundamentalsystem bildet und eine Determinante besitzt, die in einem beliebig angenommenen Punkte des Integrationsintervalls nicht verschwindet.

3. Diese Bemerkung in Verbindung mit der am Schlusse von (XV, 1) gelösten Aufgabe ermöglicht es auch, in einfacher Weise festzustellen, dass die Formel (2) in (XI, 1) und somit auch die daraus fliessende fundamentale (9) in (XI, 1), welche nur unter der Voraussetzung erhalten wurden, dass die Determinante

$$U = \Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$$

an der betreffenden Stelle nicht verschwinde, hievon unabhängig sind. Es genügt, die Richtigkeit dieser Behauptung für die erstere der beiden Formeln nachzuweisen, da für die Ableitung der zweiten aus ihr der Umstand, ob U verschwindet oder nicht, gleichgiltig ist. Sie ist nun unmittelbar einleuchtend für den Fall einer isolirten Nullstelle, lässt sich aber auch allgemein darthun.

Ist ξ eine Stelle, an der die Determinante U des conjugirten Systems

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n \tag{1}$$

verschwindet, so gibt es, wie eben in (2) gezeigt wurde, conjugirte Systeme, deren Determinante in ξ nicht Null ist und deren jedes zusammen mit ihm ein Fundamentalsystem bildet. Durch lineare Transformation dieses zweiten Systems kann man daraus nach (XV, 2) ein neues conjugirtes System

$$v^1, r^1; v^2, r^2 \ldots v^n, r^n$$

ableiten, das mit dem ersteren (1) ein involutorisches Fundamentalsystem bildet, in dem je zwei Integralsysteme

$$u^i, \rho^i \text{ und } v^{n+1-i}, r^{n+1-i}$$

einander zugeordnet sind. Man erkennt nun leicht (s. XIX), dass die Integralsysteme

$$u^1+c_1v^n, \rho^1+c_1r^n;\ u^2+c_2v^{n-1}, \rho^2+c_2r^{n-1}\ldots u^n+c_nv^1, \rho^n+c_nr^1, \quad (2)$$

wo die $c_1, c_2 \ldots c_n$ beliebige Constante sind, wieder ein conjugirtes System bilden.

Seine Determinante

$$\Delta(u^1+c_1v^n,\ u^2+c_2v^{n-1}\ldots u^n+c_nv^1) \quad (3)$$

kann an der Stelle ξ nicht für alle Werthsysteme $c_1, c_2 \ldots c_n$ verschwinden, da sonst auch $\Delta(v^1, v^2 \ldots v^n)$ in ξ Null sein müsste. Es gibt also ein Werthsystem

$$x = \xi,\ c_1 = c_1^0,\ c_2 = c_2^0 \ldots c_n = c_n^0, \quad (4)$$

für welches obige Determinante (3) nicht Null ist, und somit besteht wegen der Stetigkeit dieser Function bezüglich aller Grössen $x, c_1, c_2 \ldots c_n$ eine Umgebung der Stelle (4), in der die Determinante (3) nicht verschwindet. Für das conjugirte System (2) gilt also bezüglich aller x und $c_1, c_2 \ldots c_n$, die dieser Umgebung angehören, die Formel (2) in (XI, 1). Aus ihrer Entwickelung nach den Grössen $c_1, c_2 \ldots c_n$ folgt dann unmittelbar, dass sie auch für das System (1) an der Nullstelle ξ (und überdies auch noch in einer gewissen Umgebung derselben) gilt.

Man gelangt also zu dem für die Folge überaus wichtigen Resultate:

Die Formel (9) in (XI, 2) behält ihre Geltung, auch wenn $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$ verschwindet.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVII. BAND. X. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XXV. SITZUNG VOM 1. DECEMBER 1898.

Erschienen: Denkschriften, 66. Band, I. Theil.

Der Vorsitzende, Herr Präsident E. Suess, theilt mit, dass das Bureau der kaiserlichen Akademie die Ehre hatte, heute zur Mittagsstunde von Sr. kaiserl. Hoheit dem durchlauchtigsten Curator Herrn Erzherzog Rainer empfangen zu werden, um der Huldigung und den unterthänigsten Glückwünschen der kaiserlichen Akademie aus Anlass der Feier der 50jährigen Regierung Seiner Majestät des Kaisers Ausdruck zu geben.

Se. kaiserl. Hoheit versprach gnädigst, Seiner Majestät von diesem Schritte der kaiserlichen Akademie Kenntniss zu geben.

Von dem am 23. November erfolgten Ableben des wirklichen Mitgliedes, General-Secretärs und Secretärs der philosophisch-historischen Classe, Hofrath Professor

DR. ALFONS HUBER,

wurde in der Gesammtsitzung vom 24. November bereits Mittheilung gemacht und dem Beileide der Akademiker durch Erheben von den Sitzen Ausdruck gegeben.

Se. Eminenz der Cardinal-Fürst-Erzbischof Gruscha ladet zur Theilnahme an dem feierlichen Hochamte mit Te Deum in der Metropolitankirche zu St. Stephan am 2. December, als dem Tage des 50jährigen Regierungsjubiläums Seiner k. und k. Apostolischen Majestät, ein.

Der Vorsitzende spricht dem w. M. Herrn Prof. Becke für die seit der Resignation des w. M. Herrn Hofrathes Mach übernommene Stellvertretung der Secretärstelle den Dank aus.

Der prov. Secretär legt das im Auftrage Sr. k. und k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserlichen Akademie, durch die Buchdruckerei H. Mercy in Prag eingesendete Druckwerk »Ustica« vor.

Herr Ingenieur Fréd. Hesselgren in Turin übersendet ein Manuscript, betitelt: »Étude sur la Gamme musicale et ses Intervalles harmoniques, Mémoire présenté à l'Académie Impériale des Sciences de Vienne«.

Herr Prof. Luigi Cremona in Rom dankt für seine Wahl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Das w. M. Herr Hofrath Dr. L. Schmarda übersendet eine Abhandlung von Prof. Dr. Alfred Nalepa: »Zur Kenntniss der Gattung *Eriophyes* Sieb., em. Nal.«

Das w. M. Herr Prof. Dr. F. Lippich in Prag übersendet eine Abhandlung von Dr. Egon v. Oppolzer, betitelt: »Die photographische Extinction«.

Das c. M. Herr Prof. Dr. R. v. Wettstein übersendet eine im botanischen Institute der deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit des Herrn P. C. A. Fuchs, betitelt: »Untersuchungen über *Cytisus Adami*«.

Das c. M. Herr Prof. H. Molisch in Prag übersendet eine Arbeit unter dem Titel: »Botanische Beobachtungen auf Java. II. Abhandlung: Die Secretion des Palmweins und ihre Ursachen«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung: »Über die Berechnung der wahren Anomalie in stark excentrischen Bahnen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Vogl, Dr. A. E.: Die wichtigsten vegetabilischen Nahrungs- und Genussmittel mit besonderer Berücksichtigung der mikroskopischen Untersuchung auf ihre Echtheit, ihre Verunreinigungen und Verfälschungen. Wien und Leipzig, 1898. 8°.

Nettl, Dr. Anton: Die elektrolytische Gewinnung von Ätznatron, Ätzkali und Chlorkalk. Prag, 1898. 8°.

Schwab, P. Franz: Beiträge zur Witterungskunde von Oberösterreich im Jahre 1897. Linz, 1898. 8°.

XXVI. SITZUNG VOM 9. DECEMBER 1898.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt den VIII. Band des im Wege des k. und k. Ministeriums des Äussern eingelangten Werkes: »Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia«.

Der prov. Secretär bringt einen weiteren Bericht des w. M. Herrn Prof. D. H. Müller über die südarabische Expedition de dato 21. November l. J. aus Aden zur Kenntniss.

Die Herren Regierungsrath Dr. J. M. Eder und E. Valenta sprechen für die ihnen von der kaiserlichen Akademie bewilligte Subvention von 200 fl. behufs Anschaffung von Materialien zur Fortsetzung ihrer Arbeiten über das Spectrum des Chlors den Dank aus.

Das w. M. Herr Oberbergrath Dr. E. v. Mojsisovics legt namens der Erdbeben-Commission einen Bericht des Erdbeben-Referenten für die böhmischen Gebiete von Böhmen, Herrn Prof. Dr. J. N. Woldřich, über die unterirdische Detonation von Melnik in Böhmen vom 6. April 1898 vor, welcher als IX. Stück der Mittheilungen der akademischen Erdbeben-Commission in den Sitzungsberichten abgedruckt werden wird.

Herr Hofrath Prof. Dr. Philipp Knoll übersendet eine Arbeit aus dem Institute für experimentelle Pathologie in Prag von Dr. Rudolf Funke unter dem Titel: »Über die Schwankungen des Fettgehaltes fettführender Organe im Kreislaufe des Jahres. Eine histologisch-biologische Studie an Amphibien und Reptilien.«

XXVII. SITZUNG VOM 15. DECEMBER 1898.

Der prov. Secretär bringt einen weiteren Bericht der Herren Graf Landberg und Prof. Dr. H. Müller über die südarabische Expedition, ddo. 27. November l. J., Bal Hâf, zur Kenntniss.

Die Leitung des ärztlichen Lesezimmers des k. k. Allgemeinen Krankenhauses in Wien spricht den Dank für die Gewährung ihres Ansuchens um Betheilung mit den Sitzungsberichten (Abtheilung II. b) aus.

Das c. M. Herr Prof. Dr. G. Haberlandt in Graz übersendet eine Arbeit: »Über den Entleerungsapparat der inneren Drüsen einiger Rutaceen«.

Herr Prof. W. Binder in Wien übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Über das quadratische Contact-Theorem höherer Plancurven«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. F. Mertens überreicht eine Abhandlung: »Über eine Eigenschaft der Riemann'schen ζ-Function«.

Das w. M. Prof. Franz Exner legt die 14. Mittheilung der von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Dr. E. Haschek ausgeführten Untersuchung über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente vor.

Das w. M. Herr Prof. Dr. G. v. Escherich legt die III. Mittheilung seiner Abhandlung: »Die zweite Variation der einfachen Integrale« vor.

Das w. M. Herr Oberbergrath Ed. v. Mojsisovics verliest eine die südarabische Expedition betreffende Mittheilung des Herrn Dr. F. Kossmat.

Herr Dr. Friedrich Bidschof, Assistent an der k. k Universitäts-Sternwarte zu Wien, macht eine Mittheilung über den Lauf des am 13. August 1898 von dem Astronomen der Berliner »Urania«, Herrn G. Witt, auf photographischem Wege entdeckten Asteroiden (433), welcher sich innerhalb der Bahn des Planeten Mars um die Sonne bewegt.

Herr Dr. Max Šoštarić legt eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit, betitelt: »Anatomische Untersuchungen über den Bau des Stammes der Salicineen« vor.

Herr Privatdocent Dr. Sigmund Fränkel in Wien überreicht eine Arbeit aus dem II. chemischen Universitäts-Laboratorium: »Über die Spaltungsproducte des Eiweisses bei der Verdauung (II. Mittheilung: Über die Reindarstellung der sogenannten Kohlehydratgruppe des Eiweisses)«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Beneden, Edouard van: Les Anthozoaires de la »Plankton-Expédition«. (Die Anthozoen der Plankton-Expedition.) Avec 16 planches, une carte et 59 figures dans le texte. Kiel und Leipzig, 1898; 8°.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(XIV. Mittheilung)

(enthaltend das Spectrum von U)

von

Prof. **Franz Exner**, w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek.**

XLI. Uran.

Das Bogenspectrum des Uran ist bisher ganz unbekannt, das Funkenspectrum wurde nur in kleinen Partien untersucht, und zwar zwischen $\lambda = 3900-4000$ AE. vor längerer Zeit von Lockyer[1] und zwischen $\lambda = 4000-4700$ AE. in neuerer Zeit von Lohse.[2] Beide Beobachter haben nur die stärkeren Linien gemessen.

Wir erzeugten den Funken zwischen Stücken geschmolzenen Urans, die wir der Güte des Herrn H. Moissan in Paris verdanken. Der Funke ist weiss und sehr hell, so dass eine Expositionszeit von wenigen Secunden zur Aufnahme genügte. Das Spectrum ist ungemein linienreich, doch fehlen charakteristische Linien und Liniengruppen vollständig. Alle Linien sind verhältnissmässig schwach, so dass Intensitäten über $i = 7$ nicht vorkommen. Auch zeigt sich ein schwacher continuirlicher Hintergrund, der nur an wenigen Stellen von (im Negativ) hellen Streifen unterbrochen ist, die Umkehrungen sehr ähnlich sehen, ohne dass sich mit Sicherheit entscheiden liesse, ob es wirklich solche sind.

---

[1] Lockyer, Phil. Trans. 173 (1881).

[2] Lohse, Berl. Akad. 12 (1897).

Das benutzte Uran erwies sich als sehr rein, indem nur Fe und Ca und vielleicht Spuren von Mg und Pb nachgewiesen werden konnten. Die Zahl der gemessenen Linien beträgt 5270.

λ	i	λ	i	λ	i
2194·85	1	2248·83	1	2277·65	1
2200·80	1	49·35	1+	78·0	1+
06·05	1+	49.93	1	78·5	1+
10 96	1+	51·18	1	78·7	1+
15·45	1+	52·47	1	79·15	1
16·15	1+	52·8	1+	80·05	1
17·63	1+	54·60	1+	80·20	1
19·32	1+	58·00	1+	81·03	1
21·5	1+ br.	59·70	1	81·20	1
22·35	1	61·5	1+	81·9	1+
27·18	1+	62·45	1+	82·85	2
27·95	1+	62·80	1+	83·42	1+
28·23	1+	63·37	1+	83·80	2
28·39	1+	63·90	1+	84·90	1
28·88	1	64·4	1+ br.	85·23	1+
29·6	1+ br.	65·50	2+	85·76	1+
30·67	1+	66·02	2+	86·82	1
32·41	1+	67·3	1+ br.	87·85	1
32·88	1+	68·55	1+	88·35	1
34·0	1+ br.	68·9	1+ br.	88·66	1
35·88	1+	69·8	1+ br.	88·97	1
36·57	1	70·37	1	89·33	1
37·46	2	71·85	1+	90·60	1
38·02	1	72·40	1	90·70	1
39·9	1+	72·73	1	91·69	1
40·18	1	73·44	2	93·65	2
42·73	1+	73·93	1	94·53	1
43·45	1+	74·15	2	94·93	1
43·65	1+	74·55	1	95·40	1
44·17	1+	74·65	1	95·70	1
44·40	1+	75·18	1	95·93	1
45·00	1+	76·10	2	96·29	1
46·34	1	76·25	1+	96·91	2
47·12	1	76·80	1+	97·06	1+
48·06	2	77·15	1+	97·77	1

λ	i	λ	i	λ	i
2298·41	2	2327·45	1	2354·3	1+ br.
99·22	1	27·93	1	54·83	1
2300·80	1+	28·35	1+	55·20	1
01·0	1+ br.	28·58	1	55·40	1+
01·55	1+	28.95	1	55·70	1
01·97	1+	29·40	1	56.13	1
02·75	1	29·50	1	56·53	1+
03·70	1+	30·28	1	56·95	1
03·95	1	31·93	1	57·67	1
04·46	1	32·23	1	58·02	1
05·68	2	32·65	1	58·28	1
06·94	2	33·13	1	58·92	1+
08·35	1+	34·37	1+	59·5	1+ br.
08·80	1+	35·20	1	60·85	1+
09·80	1	35·88	1+	61·23	1
10·43	2	36·50	1+	61·53	1
10·71	2	37·01	2	62·1	1+ br.
11·67	2	38·07	2+ (Fe)	62·44	1
12·60	2	38·57	1	62·8	1+ br.
13·23	1	38·98	1+	63·50	1
13·87	1	40·44	1	64·0	1+ br.
14·22	1	40·99	1	64·34	1
14·43	1	41·45	2	65·28	1+
15·07	1+	42·50	1+	65·7	1+ br.
15·92	1+	42·96	1	66·05	1+
17·2	1+ br.	44·02	1+	66·7	1+ br.
17·6	1+	44·65	1	67·20	1+
17·9	1+	45·08	1+	67·5	1+ br.
18·21	3	45·50	1+	68·2	1+ br.
18·51	3	46·26	2	68·50	1+
20·22	1+	47·08	1	69·12	1+
21·1	1+ br.	47·6	1+ d.	70·17	1+
21·6	1+ br.	48·35	1+	70·8	1+ br.
23.44	1	49·00	1+	70·96	1
24·07	1+	49·70	2	71·6	1+
24·90	2	49·97	2	72·0	1+
25·51	2	50·2	1+ br.	72·85	1+
25·72	1+	51·96	2	73·00	1
26·50	2	52·9	1+ br.	74·2	1+ br.
27·07	1	53·6	1+ br.	75 92	1

λ	i	λ	i	λ	i
2376·24	1	2402·28	1	2426·65	1
76·61	1	02·58	1	27·20	1
77·05	1	03·00	1+	27·56	1
77·58	1	03·50	2+	27·73	1
77·91	2	04·51	1	28·19	1
78·24	2	05·87	1+	28·53	1
78·67	1	06·3	1+	29·1	1+ br.
79·85	1	06·54	1	29·55	1+ br.
80·8	1+	06·77	1	30·23	1
83·00	1	07·15	1	30·95	1+ d.
83·45	1+ br.	07·67	1	31·35	1
85·18	1	09·37	1	31·7	1+
85·39	1	09·67	1	31·92	1+
85·65	1	10·35	1+	32·41	1
87·0	1+ br.	11·50	1	32·64	1
87·30	1	11·97	1	32·97	1
88·51	1	12·38	1	33·37	1
89·33	1	12·60	1	33·85	2
90·2	1+ br.	13·05	1	34·44	1
90·48	1	13·77	1	34·84	1
90·80	1	14·20	1+	35·13	1
91·07	1	14·7	1+ d.	36·45	1
91·68	1+	16·52	1+	36·70	1
92·1	1+	16·85	1+	37·55	1
92·4	1+	17·73	1	37·75	1+
92·8	1+	18·00	1	38·13	1
93·32	1+	18·44	2	38·60	1
94·14	1	18·90	1	39·14	1
96·23	1	19·69	1	39·44	1
97·20	2	20·6	1+ br.	39·6	1+ br.
97·45	2	22·0	1+ br.	40·52	1+ d.
97·80	1	22·7	1+ br.	41·40	1
98·65	1+	23·15	1	41·63	1
99·85	1	23·35	1+	42·0	1+ br.
2400·09	1	23·84	1	42·50	1
00·42	1	24·28	1	42·97	2 r.
00·55	1	24·5	1+	43·60	1
01·2	1+	25·1	1+	44·12	2
01·4	1+	25·46	1+	44·65	1
01·55	1+	26·20	1	44·9	1+ d.

λ	i	λ	i	λ	i
2445·78	1+ d.	2462·40	1	2481·60	1+
46·22	1	62·50	1	82·00	1
46·60	1+ d.	63·45	1+ d.	82·30	1
46·95	1	63·87	1+	82·76	1
47·52	1	64·13	1+	83·08	1
47·9	1+	65·01	1	83·37	1
48·37	1	65·25	1	83 88	1
48·61	1	65·93	1	84 08	1
48·98	1	66·80	2+ br.	84·30	1
49 21	1	67·41	1	84·72	1
49 55	1	67·98	1	85·00	1
49 80	1	68·35	1	85·18	1
49·92	1	68·43	1	85·85	1
50·51	1	69·23	1	86·27	1
50·68	1	69·55	1	86·50	1
50·90	1	69·67	1	86·83	1
51·20	1	70·52	1	87·17	1
51·83	1	70·76	1	87·50	1
52·21	1	70·93	1	87·70	1
52·78	1	71·22	1	87·95	1
53·52	1	72·28	1	88·25	1
53·9	1+ d.	72·82	1	88·63	1
54·46	2	72·98	1	88·87	1
55·1	1+	73·22	1	89·12	1
55·5	1+	73·46	1	89·33	1
55·77	1	73·75	1+	89·87	1
56·30	1	74·26	1	90·72	1
57·25	2	75·1	1+ br.	91·03	2
57·72	1	75·40	1 v.	91·43	1+
58·03	1	75·71	1	92·4	1+ br.
58·4	1+	76·56	2	93·00	1
58·88	2+	77·27	1	93·8	1+ br.
59·30	1	77·88	1	94·3	1+
59·79	1	78·10	1+	94·5	1+
60·22	1	78·69	3	94·86	1
60·4	1+	79·67	2	95·4	1+
60·75	1	80·25	1	95·85	1+
60·95	1+	80·58	1	96·13	1+
61·47	1	80·73	1	97·05	2+
62·00	1	81·10	1+	97·85	1

λ	i	λ	i	λ	i
2498·35	1	2518·56	1	2535·65	2
98·90	1	19·05	1	36·00	1
99·68	2+	19·20	1	36·33	1
2500·95	2	19·50	1+	36·70	1
01·45	1	20·35	1	36·88	1
02·00	1	20·8	1+	37·36	1
02·5	1+	20·99	1	37·80	1
03·4	1+ br.	21·45	1	38·3	1+
04·0	1+ d.	21·9	1	38·51	1
04·7	1+ d.	22·17	1	38·83	1
05·38	1	23·1	1+	39·05	1
06·12	1	23·8	1+	39·38	1
06·55	1+	23·98	1	39·60	1
07·05	1	24·4	1	39·98	1
07·18	1	24·55	1	40·40	1
07·50	1	25·02	1	40·50	1
07·80	1	25·46	2	40·77	1
08·02	1	26·0	1+ br.	41·14	1
08·45	1+	26·62	1	41·47	1
09·23	1+	27·23	1	41·60	1
09·60	1+	27·50	1	41·95	2
10·23	1	27·80	1	42·80	1
10·45	1	28·17	1	43·30	1+
10·97	1	28·44	1	43·46	1+
11·05	1+	28·65	1	44·12	1
12·10	1	28·83	1	44·45	1
12·29	1	29·06	1	44·73	1
12·7	1+	29·60	1	45·12	1
13·4	1+	30·14	1	45·55	1+
13·8	1+	30·38	1	45·9	1+
14·17	2	30·95	1+ d.	46·00	1
14·50	1	31·5	1+	46·45	1+
14·86	1	31·65	1	47·52	1+
15·20	1 d.	31·88	1	47·47	1
15·63	1	32·40	1	47·74	1
15·80	1	32·80	1+	48·08	1
16·20	1	33·03	1	48·40	1
17·06	1+	33·32	1	49·26	1
17·27	1+	34·95	1	49·43	2
18·0	1+	35·03	1	50·1	1+

λ	i	λ	i	λ	i
2550·7	1+	2570·43	1	2592·67	1
50·9	1+ br.	70·77	1	93·67	1+
51·2	1+	71·16	1	93·9	1+
51·55	1	71·60	1	94·40	1
52·00	1	71·90	1	95·10	1+
52·47	1+	72·43	2	95·45	1
53·53	1+	72·73	2	95·71	1
53·82	1+	73·04	1+	96·23	1
54·52	1+	73·3	1+	97·10	1+
54·9	1+	74·8	1+ br.	97·40	1+
55·27	1+	75·3	1+	97·77	1
55·62	1+	75·53	1	98·95	1
55·95	1+	76·25	1	99·90	1
56·29	2	77·14	1	2600·4	1+ br.
57·1	1+ br.	77·46	1	00·9	1+ br.
57·5	1+ br.	78·40	1	01·62	2+
58·07	1+	79·23	1+	02·51	1+
58·43	1+	79·62	2+	03·10	1
59·30	2	80·67	1	03·50	1
59·60	1	81.22	2	03·68	1
60·10	1	81·83	1	04·00	1
60·35	1+	82·23	1	04·37	1
61·03	1	82·72	1	04·74	1
61·76	1	83·5	2+ br.	04·93	1
62·19	1	84·50	1	05·48	1
62·68	1	84·9	2+ br.	05·86	1
62·93	1	85·30	1	06·26	1
63·07	1	86·33	1	06·60	1
63·60	1+	87·16	2	06·80	1
64·02	1+	87·60	1	07·55	1
64·55	1+ d.	87·9	1+ d.	08·25	1
65·52	2	88·65	1+	08·62	1
66·00	1	89·00	1	09·13	1
66·75	1	89·27	1	09·34	1
67·00	1	89·70	1	09·82	1
67·22	1	90·22	1	10·01	1
68·05	1	90·55	1	10·51	1
68·95	1 d.	90·90	1	10·75	1+
69·46	1	91·35	2	11·23	1
69·85	1	92·2	1+ br.	11·70	1

λ	i	λ	i	λ	i
2612·52	1	2635·91	1	2654·3	1+ br.
13·00	1	36·33	1+	54·70	1
13·35	1+	37·3	1+ br.	55·05	1+
14·0	1+	37·48	1	55·5	1+ br.
15·21	1 u.	37·82	1 r.	56·6	1+ br.
16·13	1	38·4	1+ br.	57·25	1+
16·99	1	38·7	1+ br.	57·45	1+
17·36	1	39·10	1	57·96	1
18·25	1+	39·45	1	58·20	1
19·37	1	39·70	1	58·49	1
20·18	1	40·00	1	58·85	1
20·30	1	40·43	1	59·19	1+
20·80	1	41·2	1+	59·60	1
21·08	1	41·66	1	60·00	2
21·39	1	42·00	1	60·23	1
21·86	1+	42·9	1+	61·27	1
22·50	1+	43·38	1	62·2	1+ br.
23·62	1+	43·62	1	62·90	1
24·99	1	44·22	1	63·3	1+ br. Pb?
25·30	1	44·50	1	63·5	1+ br.
25·98	1	45·54	2	63·95	1
26·70	1	46·6	1+ br.	64·24	2
27·62	2	47·1	1+ br.	65·76	1
28·02	1	47·47	1+	65·96	1
28·57	1	47·65	1+	66·6	2+ br.
28·99	1	48·00	1+	67·25	1+
29·26	1	48·3	1+ br.	68·11	1
29·95	1+	48·84	1+	68·28	1
30·7	1+ br.	49·15	2	69·02	1
31·15	2	49·65	1	69·31	2
31·42	2	50·25	1+	69·9	1+
31·74	1	50·95	1+	70·50	1+
32·08	1	51·40	1	70·65	1+
32·50	1	51·96	1	70·99	1
32·74	1	52·27	1	71·40	1
33·35	1 r.	52·8	1+	72·08	1
34·2	1+ br.	52·95	2	72·38	1
34·6	1+ br.	53·20	1	72·80	1
35·3	1+ br.	53·50	1	73·25	1
35·59	2	54·00	1	73·51	1

λ	i	λ	i	λ	i
2673·73	1	2696·40	1	2714·40	1
74·10	1+	96·68	1	14·68	1
74·63	1+	97·15	1	15·10	1
75·18	2 d.	97·52	1	15·40	1+
76·00	1	98·15	3	15·66	1
76·50	2	98·57	2	16·09	1
76·75	1	99·46	1	16·20	1
77·25	1	99·75	1	16·48	1
77·68	1	2700·38	1	16·63	1
78·14	1	01·08	1	17·10	1+
78·53	1	01·50	1	17·25	1+
78·96	1	01·68	1	17·65	1
79·1	1+	01·95	1	18·18	1
80·0	1+	02·9	1+ br.	18·72	1
80·3	1+	03·83	1+	19·00	1
80·75	1	04·2	1+ br.	19·15	1
81·23	1+	04·90	2+	19·43	1
81·80	1	05·33	1	19·63	1
82·40	2+	05·87	1	20·00	1
83·40	2	06·3	1+ br.	20·33	1
84·17	1	06·6	1+ br.	20·50	1
84·40	1	06·85	1	20·78	1
84·70	1	07·09	2	20·99	1
85·7	1+	07·59	1	21·25	1
86·06	2	07·79	1	21·53	1
86·9	1+ br.	08·05	1	21·95	1+
87·55	1+	08·45	1	22·90	1
88·07	1	08·60	1	23·25	1
88·76	1	09·12	1	23·43	1
89·23	1	09·63	1	23·80	1
90·15	1	10·20	1+	23·90	1
90·65	1	10·70	1+	24·2	1+ br.
91·17	2	11·23	1	24·55	1+
91·93	1+	11·64	1	25·14	1
92·49	2	11·86	1	25·56	1
93·41	2	12·20	1	25·78	1
93·88	2	12·68	1+	26·01	1
94·35	1	13·33	1+	26·61	1
95·60	2	13·57	2	26·75	1+
96·00	1	14·04	1	27·40	1

λ	i	λ	i	λ	i
2727·65	1	2741·88	1	2758·26	1
28·3	1+ br.	42·18	1	58·53	1
28·65	1+	42·70	1 d.	58·62	1
28·8	1+	43·32	1	59·05	1
29·15	1	43·50	2	59·90	1
29·35	1	43·79	1	60·46	1
29·75	1 d.	44·38	1	61·33	1
30·20	1	44·50	1	61·55	1
30·43	1	44·95	1	61·90	1 d.
30·90	1+	45·22	1	62·50	1+
31·38	1	45·99	1	62·98	1
31·52	1	46·27	1	63·57	1
32·15	1+	46·82	1	63·82	1+
32·60	1+ br.	47·26	1	64·35	1
33·06	1	47·47	1	64·80	1
33·41	1+	48·03	1	65·3	1+ br.
33·85	1+	48·60	1	65·50	1
34·04	1	48·98	1	65·78	1
34·34	1	50·05	1	66·00	1
34·80	1	50·23	1	66·26	1
35·05	1	50·50	1	66·97	1
35·42	1	50·69	1	67·52	1+
35·65	1	50·95	1	67·85	1
35·86	1	51·32	1	68·30	1
36·10	1	52·03	2	68·53	1
36·45	1	52·57	1	68·95	1
37·19	1	53·09	1	69·17	1
37·75	1	53·42	1	69·40	1
37·93	1	53·52	1	69·56	1
38·23	1	53·87	1	70·15	1
38·50	1	54·27	2	70·41	1
38·65	1	54·70	1+ d.	70·85	1
39·08	1	55·06	1	71·35	1+
39·50	1	55·26	1	71·69	1
40·40	1	56·40	1	72·02	1
40·63	1	57·25	1	72·33	1
40·94	1	57·40	1	72·45	1
41·19	1	57·65	1	72·75	1
41·34	1	57·93	1	73·20	1
41·70	1	58·03	1	73·74	1

λ	i	λ	i	λ	i
2773·90	1	2789·9	1+ br.	2810·50	1
74·25	1	90·4	1+ br.	10·87	1+
74·54	1	90·78	1+	11·2	1+
74·88	1	91·16	1	11·49	1
75·16	1	91·4	1+	11·8	1+
75·37	1	92·15	1+	12·32	1+
75·50	1	93·54	1	12·8	1+ br.
75·60	1	94·05	2	13·10	1
75·95	1+	94·50	1+	13·4	1+
76·45	1+	95·00	1	13·7	1+
76·66	1	95·30	2	13·9	1+
77·27	1	95·65	1 Mg?	14·12	1+
78·35	1	96·1	1+ br.	14·73	1+
79·05	1+	96·80	1	14·90	1
79·53	1+	97·25	1+	15·18	1
80·13	1	97·45	1+	15·30	1
80·89	1+	97·87	1	15·85	1
81·16	1	98·28	1	16·05	1+
81·52	1	99·2	1+ br.	16·15	1+
81·67	1	99·8	1+ br.	16·52	1
81·90	1	2800·22	1+	16·88	1
82·22	1	00·42	1+	17·00	1
82·52	1+	00·93	1	17·3	1+ br.
83·33	1+	01·43	1	17·75	1
83·55	1+	01·75	1	18·05	2
83·99	1	02·30	1	18·43	1
84·12	1	02·65	2	18·70	1
84·57	1	03·07	1	18·85	1
84·77	1	03·90	1	19·06	1
85·02	1	04·10	1	19·26	1+
85·30	1	05·33	1	19·89	1
85·50	1	05·79	1	20·34	1
85·76	1+	06·4	1+ d.	20·57	1
86·0	1+	06·80	1	20·75	1+
86·27	1+	07·20	1	21·20	2
86·9	1+ br.	08·50	1	21·48	1
87·45	1	08·66	1	22·08	1
88·24	1	09·08	1	22·27	1
88·7	1+ br.	09·70	1	22·63	1
89·2	1+ br.	10·05	1	22·80	1

λ	i	λ	i	λ	i
2823·24	1	2840·00	1	2853·90	1+ d.
23·65	1	40·60	1	54 30	1
24·45	1	40·78	1	54·55	1
24·70	1	41·25	1	55·00	1
24·95	1	41·48	1	55 67	1
25·5	1+	42·20	1	56·05	1
25·65	1	42·30	1	56·30	1+
25·90	1	42·60	1	56·63	1
26·28	1	42·98	1	57·15	1+
26·60	1	43·95	1+	57·53	1+
26·77	1	44·60	1+	58·25	1+
27·05	1	44·78	1	58·40	1+
27·47	1	45·10	1	58·95	2
27·90	1+	45·43	1+	59·36	1
28·1	1+ br.	45 70	1+	59·85	2
29·00	1	46·00	1	60 53	1
29·4	1+ br.	46·21	1	60·86	1
29·96	1+	46 44	1	61·31	1
30·5	1+	46·70	1	61·8	1+ br.
31·05	1+	46·95	1	62·45	1+
31·7	1+ br.	47·50	1+	62·72	1+
32·16	2	47 83	1	62·90	1+
32·53	1	48·12	1	63·28	1
32·75	1	48·35	1	63·65	1+
33·35	1+	48·75	1+	64·18	1
33 90	1	49·00	1	64·35	1
34·2	1+ br.	49·26	1	64·70	1
34·70	1	49·55	1	64·95	1
34·82	1	49·8	1+	65·20	1
35·68	1	50·0	1+	65·40	1
35 88	1	50·57	1	65·73	2
36·1	1+ d.	50·95	1	66·22	1+
37·00	2	51·35	1+	66·47	1
37·31	1	51 90	1	66·90	1+
37·40	1	52·20	1 Mg?	67·15	1+
37·86	1	52·50	1	67·45	1
38·10	1	52·83	1	67·89	1+
38·40	1+	53·07	1	68 20	1+
38·73	1	53·50	1	68·51	1
39·2	1+ br.	53·60	1	68·87	1

λ	i	λ	i	λ	i
2869·00	1	2886·50	1	2902·50	1
69·49	1	86·87	1	03·08	1
70·4	1+ br.	87·00	1	03·63	1
70·80	1+	87·31	1	04·07	1
71·04	1	87 65	1	04·52	2+
71·30	1	87·97	1	05·32	1
72·15	1	88·28	1	05·8	1+ br.
72·53	1	88·42	1	06·85	2
73·1	1+ br.	88·75	1	07·00	1+
73·35	1+	89·12	1	07·65	1+ d.
73·60	1+	89·32	1	08·31	3
73·75	1+	89·69	2	08·8	1+ br.
74·16	1	90·15	1	09·30	1
74·81	1+	90·50	1	09·78	1+
75·24	1	90·82	1	10·3	1+ br.
75·9	1+ br.	91·10	1	10·75	1+
76·55	1+	91·80	1+	10·88	1
77·10	1	92·25	1	11·22	1
77·65	1+	92·70	1	11·60	1
77·86	1	93·5	1+ br.	11·90	1
78·3	1+ br.	93 80	1+	12·65	1
78·95	1+	94·20	1	12·83	1
79·70	1	94·60	1	13·50	1
80·00	1	94·98	1	14·03	1
80·28	1	95·30	1	14·30	1
80·50	1	95·60	1+	14·69	1
81·1	1+	95·96	1	14·82	1
81·67	1	96·15	1+	15·32	1
82·00	1+	96·52	1	15·57	1. Mg?
82·82	1	96·77	1	15·80	1+
83·00	1	97·00	1+	16·54	1
83·50	1+	97·45	1	16·90	1+
83·87	1+	97·70	1	17·2	1+ br.
84·43	1+	98·12	1+	17·8	1+ br.
84·70	1+	98·80	1	18·48	1+
85·05	1	99·65	1+	18·73	1
85·28	1	2900·22	1+	18·98	1
85·49	1	01·27	1	19·08	1
85·70	1	01·70	1	19·50	1+
86·10	1	02·1	1+ br.	20·00	1

λ	i	λ	i	λ	i
2920·23	1	2935·60	1+	2952·85	1+
20·46	1	36·46	1	53·0	1+
20·77	1	36·85	1+ Mg?	53·45	1+
21·15	1	37·00	1+	53·9	1+ br.
21·76	1	37·23	1+	54·46	1
22·10	1	37·40	1	54·92	2
22·23	1	38·1	1+ br.	55·20	1
22·71	1	38·60	1+	55·73	1
22·90	1	38·95	1	56·15	2
23·20	1	39·50	1	56·46	1
23·52	1+	40·02	1	56·85	1
24·62	1	40·39	2	57·3	1+
25·25	1	40·80	1	57·85	1+
25·61	1	41·35	1+	58·25	1+
26·00	1	41·95	2	59·20	1+
26·18	1	42·13	1	59·96	1
26·42	1	42·90	1 d.	60·38	1+
26·64	1	43·25	1	61·02	1
27·30	1	43·50	1	61·28	1
27·45	1	43·93	2	62·87	1
27·77	1	44·22	1	63·30	1
28·16	1	44·62	1	63·70	1
28·61	1	44·73	1+	64·35	1
29·16	1	45·92	1	64·76	1
29·70	1	46·38	1+	65·17	1
29·85	1	46·8	1+ br.	65·5	1+
30·47	1	47·52	1	65·8	1+
30·68	1	48·12	1+	66·26	1
30·87	1	48·56	1	66·77	1
31·45	1	49·03	1	68·02	1
31·60	1	49·64	1+	68·45	1+
31·90	1	50·04	1	68·68	1+
32·23	1	50·37	1	69·35	1+
32·65	1	50·62	1	69·6	1+
33·03	1	50·93	1	69·85	1+
33·33	1+	51·16	1	70·56	1
33·65	1	51·45	1	70·90	1
33·86	1	51·67	1	71·17	2
34·5	1+ br.	52·00	1	71·72	1+
35·0	1+ br.	52·46	1	72·3	1+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
2972·75	1+	2995·6	1+	3012·83	1
73·20	1	95·9	1+	13·08	1
73·40	1	96·2	1+	13·49	1
74·2	1+ br.	96·50	1	13·60	1
75·0	1+ br.	96·90	1+	13·96	1
75·25	1	97·15	1+	14·35	1+
75·73	1	97·48	1+	15·03	1
75·97	1	97·70	1+	15·78	1
76·46	1+	98·2	1+	16·16	1
77·41	1	98·50	1+	16·50	1
77·95	1+	99·15	1	17·05	1
78·30	1	99·28	1	17·50	1+
79·31	1	3000·26	1	18·2	1+ br.
80·46	1	00·90	1+	18·68	1
80·80	1+	01·32	1	18·95	1
81·18	1	01·76	1	19·40	1
81·3	1+	02·15	1	19·9	1+ br.
81·95	1+	02·50	1	20·35	1
82·40	1+	02·80	1	20·71	1
82·89	1	03·17	1	21·02	1
83·60	1	03·45	1	21·30	1
83·85	1	04·1	1+	21·68	1
84·19	1	04·30	1	22·31	2
84·74	1	04·70	1	22·58	1
85·24	1	04·9	1+	22·94	1
85·90	1	05·23	1	23·4	1+
86·35	1+	05·65	1	23·9	1+
87·93	1	06·2	1+ br.	24·57	2
88·05	1+	06·95	1	25·16	1
89·51	1	08·02	1	26·25	1
89·85	1	08·29	1	26·55	1+
90·1	1+ br.	09·00	1	26·77	1
90·65	1+	09·51	1	26·99	1+
91·10	1+	09·80	1	27·77	1
91·8	1+ br.	10·49	1	28·33	1
92·85	1	10·87	1	28·48	1
93·46	1	11·30	1	28·7	1+
93·80	1	11·66	1	29·23	1
94·57	1	12·04	1	29·52	1
95·00	1 d.	12·22	1	30·45	1

λ	i	λ	i	λ	i
3030·9	1+ br.	3052·00	1	3071·6	1+ br.
31·65	1+	52·56	1	71·87	1
32·09	1	52·96	1	72·47	1
32·52	1	53·42	1	72·91	2
33·27	1	54·5	1+ br.	73·3	1+ br.
33·52	1	54·86	1	73·60	1
33·86	1	55·18	1	73·93	1
34·15	1	55·71	1	74·47	1+
34·50	1	55·99	1	74·62	1+
35·60	1	56·83	1	75·15	1
36·05	1	57·35	1+	75·60	1
36·53	1+	58·05	2 r.	75·93	1
36·7	1+	59·1	1+	76·2	1+ br.
37·38	1+	59·3	1+	76·7	1+ br.
37·63	1+	59·68	1	77·50	1+
38·01	2	60·15	1	77·7	1+
38·58	1+	60·80	1	77·95	1+
39·3	1+	61·30	1+	78·55	1+
40·00	1	61·74	1	79·05	1+
40·6	1+ br.	62·23	1 d.	79·40	1+
41·3	1+ br.	62·62	1	80·10	1
42·0	1+ br.	62·97	1	80·83	1
42·85	1+	63·25	1+	81·18	1
43·3	1+ br.	63·62	1	82·14	1
44·1	1+	63·98	1	82·7	1+ br.
44·26	2	64·30	1	83·2	1+ br.
45·1	1+	64·70	1	83·75	1+
45·55	1	65·02	1	84·37	1
46·6	1	65·4	1+ br.	84·8	1+ br
46·96	1	65·8	1+ br.	85·60	1+
47·66	1	66·43	1	86·13	1+
47·98	1	67·00	1	86·90	1
48·45	1	67·37	1	87·23	1
48·75	1	67·85	1+	87·80	1
49·05	1+	68·74	1	88·05	1
49·9	1+ br.	69·3	1+ br.	88·68	1+
50·30	1	69·6	1+ br.	89·10	1
50·61	1 d.	70·40	1	89·98	1+
51·20	1	70·80	1	90·45	1+
51·43	1	71·17	1	90·70	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3091·4	1+ br.	3108·79	1+	3126·78	1
91·7	1+ br	09·4	1+	27·35	1
93·15	2	09·9	1+	27·75	1+
93·51	1	10·3	1+	28·20	1+
93·97	1	10·65	1	28·88	1+
94·57	1	10·96	1	29·86	2
94·92	1	11·52	1	30·67	2+
95·15	1	11·76	1	31·42	1+
95·33	1	12·35	1+	31·72	1+
95·85	1	12·50	1+	32·07	1
95·97	1	13·16	1	32·32	1+
96·70	1	13·75	1	32·75	1
97·00	1	14·42	1+	33·50	1+
98·15	1	14·75	1	33·69	1
98·77	1	15·12	1	33·99	1
98·88	1	16·02	2	34·9	1+ br.
99·2	1+	16·53	1	35·92	1
99·4	1+	16·83	1	36·30	1+
99·9	1+	17·14	1	37·01	1
3100·23	1+	17·75	1	37·85	1 Pb?
00·97	1+	18·13	1	38·4	1+
01·05	1+	18·51	1+	38·6	1+
01·85	1+	18·88	1+	38·99	1
02·55	1	19·13	1+	39·29	1
02·70	1+	19·42	2	39·69	2
03·10	1	19·99	1+	41·75	1
03·87	1	20·25	1+	42·03	1
04·27	2	20·77	1+	42·46	1
04·8	1+ br.	20·97	1	42·74	1
05·20	1	21·15	1	43·45	1+
05·50	1	21·49	1	44·84	1
05·73	1	21·97	1+	45·09	1
06·29	1	22·43	1+	45·47	1
06·42	1	22·8	1+	45·67	1
06·9	1+ br.	23·70	1	46·2	1+
07·47	1+	23·82	1	46·43	1
07·65	1+	24·28	1	46·85	1
07·79	1+	24·53	1	47·19	2
08·07	1+	25·03	2	47·93	1
08·43	1+	26·28	2	48·28	1

λ	i	λ	i	λ	i
3148·40	1	3164·29	1	3184·15	1+
48·73	1	65·20	1	84·60	1+ br.
48·85	1	65·41	1	84·9	1+ br.
49·17	1	65·62	1	85·33	1+
49·34	2	66·64	1	85·85	1
49·76	1	67·22	2	86·35	1+
50·10	1+	67·9	1+ br.	87·65	1+
50·50	1	68·33	1+	88·50	1+
50·62	1	68·55	1+	89·17	1
50·90	1	69·2	1+ br.	89·65	1
51·2	1+ br.	70·2	1+ br.	90·6	1+
51·81	1	70·48	1	90·86	1
52·45	1	70·69	1	91·02	1
52·57	1	70·96	1	91·90	1
53·36	2	71·22	1	92·30	1
53·62	1	71·53	1	92·82	1
54·30	1+	71·95	1	93·36	1
54·55	1 d.	72·24	1+	93·45	1
55·02	1	72·8	1+ br.	94·1	1+ br.
55·40	1	73·82	1	95·0	1+ br.
55·53	1	74·15	1	95·7	1+ br.
55·98	1	74·96	1	96·2	1+ br.
56·22	2	75·50	1	96·90	1
56·70	1	76·34	2	98·30	1
57·57	1	76·78	1	98·45	1+
57·97	1	77·48	2	99·0	1+ d.
58·3	1+	77·79	1	99·38	1
58·7	1+	78·45	1	99·75	1
59·06	1	79·03	1	3200·30	2
59·41	1	79·18	1	00·80	1
59·94	1	79·50	1	01·4	1+ br.
60·06	1	79·98	1	01·75	1
60·48	1	80·33	1	02·65	1+
60·90	1	80·48	1+	02·95	1+
61·66	1	80·75	1+	03·38	1
61·95	1	81·2	1+ br.	03·55	1
62·4	1+ br.	81·5	1+	03·9	1+ d.
62·95	1	82·72	1	04·45	1
63·10	1	83·00	1	04·79	1
63·90	1	83·63	1	05·25	1

λ	i	λ	i	λ	i
3205·9	1+	3226·97	1	3248·52	1
06·18	1	27·33	1	49·12	1
06·37	1	27·6	1+ br.	49·37	1
07·4	1+ br.	28·7	1+ br.	49·62	1
08·27	1+	29·65	3	50·07	1
08·7	1+ br.	30·3	1+ br.	50·50	1
09·32	1	31·2	1+ br.	51·00	1
09·8	1	32·13	1	51·15	1+
10·10	1	32·33	2	52·3	1+
10·8	1+ br.	32·83	1+	52·50	1
11·20	1	33·53	1	52·80	1
11·45	1+	34·14	1+	52·95	1+
12·00	1	34·70	1+	53·50	1
12·77	1	35·20	1+	54·44	1
13·25	1	35·44	1	54·73	1+
13·52	1	36·4	1+	55·00	1
13·80	1	36·93	1	55·20	1
14·05	1	37·4	1+ br.	55·50	1
14·42	1	38·10	1+	56·18	1
14·87	1	38·62	1	56·60	1
14·96	1	39·65	1	56·88	1
15·29	1	39·80	1	57·40	1
16·13	1	40·30	1	57·50	1
16·75	1	40·55	1	57·95	1
17·18	1	41·00	1	58·23	1
17·89	1	41·30	1	58·55	1
18·29	1	41·77	1	59·08	1+
18·50	2	42·17	1	59·65	1+
19·36	1	42·90	1 d.	59·99	1
19·9	1+	43·85	1	60·70	1
21·55	1+	44·39	2	61·05	1
22·16	1	44·69	1	61·15	1
22·46	1	44·98	1	61·27	1
22·65	1	45·95	1+	61·89	1
23·2	1+ br.	46·33	2	62·80	1
23·65	1	46·55	1	63·00	1
23·88	1	47·43	1	63·28	1
24·45	2	47·75	1	63·67	1
25·9	1+	47·96	1	63·93	1
26·33	2	48·17	1	64·55	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3264·83	1+	3281·26	1	3296·95	1
65·99	2	81·70	1	97·30	1
66·07	1	81·83	1	97·72	1
66·35	1	82·3	1+	98·06	2
66·68	1	82·68	1	98·61	1
67·17	1	82·8	1+	99·25	1
67·40	1	83·30	1+	99·86	1
67·80	1	83·92	1	99·99	1
67·93	1	84·17	1	3300·33	1
68·35	1	84·53	1	00·60	1
68·8	1+	84·80	1	00·87	1
68·95	1+	85·20	1	00·95	1
69·20	1	85·44	2	01·32	1
69·65	1	85·76	1	01·47	1
69·95	1	86·09	1	01·75	1
70·32	2	86·42	1	01·97	1
70·73	1	86·63	1	02·43	1
71·3	1+ br.	86·8	1+	02·67	1
72·65	1	87·63	2	03·02	1
72·33	1+	88·06	1	03·17	1
72·75	1+ d.	88·38	2	03·46	1
73·25	1+	88·75	1	03·73	1
73·45	1+	89·50	1	04·85	1+
73·65	1+	89·60	1	05·3	1+ br.
74·12	1	90·27	1	06·06	3
74·40	1	90·63	1	06·39	1
74·70	1	91·10	1	06·70	1
75·6	1+ br.	91·23	1	07·4	1+ br.
76·32	1	91·51	3	07·72	2
76·80	1	92·51	1	08·1	1+
77·27	1	93·15	1	08·40	1+
77·7	2+ br.	93·77	1	08·60	1+
78·6	1+ br.	94·13	1	09·08	1
79·25	1	94·28	1+	09·37	1
79·38	1	95·00	1	09·45	1
79·75	1	95·37	1	09·82	1
80·20	1	95·69	1	10·65	1
80·53	1	95·95	1	11·1	1+ d.
80·80	1	96·42	1	11·55	1+
80·95	1	96·67	1	11·87	2

λ	*i*	λ	*i*	λ	*i*
3312·0	1+	3329·15	1	3344·45	1+
12·64	1	29·47	1	45·00	2
13·25	1+	29·65	1	45·67	1
13·91	1	30·08	2 d. (Mg)	46·00	1
14·13	1	30·50	1	46·13	1
14·22	1	30·65	1	46·35	1
14·73	1	30·93	1	46·56	1
15·23	1	31·12	1	46·87	1
16·1	1+ br.	31·45	1	47·17	1
16·7	1+ br.	31·93	1	47·72	1
16·90	1	32·12	1	48·00	1
17·37	1	32·60	1 d.	48·45	1+
17·62	1	33·40	1	48·85	1+
17·99	1	34·10	1	49·19	1
18·35	1	34·40	1	49·56	2
18·43	1	34·60	1	50·20	1+
19·00	1	34·99	1	50·45	1+
19·46	2	35·4	1+ br.	50·80	1 d.
20·46	1	35·78	1	51·05	1
21·07	1	36·12	1+	51·40	1
21·37	1	36·42	1	51·83	1
21·51	1	36·84	1	51·98	1
21·9	1+	37·50	1	52·81	1
22·26	1	37·93	2	53·20	1
22·55	1	38·10	1	53·40	1
22·83	1	38·62	1	53·75	1
23·13	1	39·00	1	54·22	1+
23·25	1	39·15	1	54·65	2
23·50	1+	39·37	1	54·94	1
24·77	1+	39·56	1	55·24	1
25·36	1+	40·23	1	55·56	1+
25·84	1	40·47	1	56·00	1
26·32	1	40·80	1+	56·15	1
26·52	1	41·1	1+	56·35	1
26·88	1	41·83	2	56·65	1+
27·20	1	42·5	1+	57·32	1+
27·42	1	42·83	2	57·7	1+
27·66	1	43·1	1+	58·06	2
28·40	1	43·60	1	58·60	1
28·70	1	44·2	1+ br.	58·75	1

λ	i	λ	i	λ	i
3359·05	1+	3373·84	1	3390·45	2
59·2	1+	74·22	1	90·98	1
59·73	1	74·32	1	91·19	1
60·27	1	74·6	1+	91·37	1
60·50	1	75·05	1	92·5	1+ br.
60 80	1	75·95	2	92·81	1
60·97	1	76 68	1	93·12	1
61·37	1	77·2	1+ br.	93·33	1
61·86	1	77·55	1	94·05	2
62·15	1+	78·15	1+	94·45	1
62·87	1+	78·4	1+	94·92	2
63·40	1	78·87	1+	95·48	2
63·60	1	79·0	1+	95·73	2
64·05	1+	79·52	1	96·20	1
64·78	1+	79·80	1	96·58	1
65·3	1+	79·95	1	96·71	1
65·77	1+	80·37	1+	97·1	1+ br.
66·50	1	80·83	2	97·3	1+ br.
66·70	1	81·00	1	97·75	1
66·99	1	82·11	2	98·10	1
67·50	1	82·45	1	98·40	1
67·68	1	82·80	1	98·75	1
67·85	1	83·55	1	99·40	1
68·02	1	83·94	1	99·64	1
68·44	1	84·15	1	99·83	1
68·90	1	84·37	1	3400·06	1
69·00	1	84·58	1	00·35	1
69·4	1+ br.	84·7	1+	00·45	1
69·82	1	85·50	1	00·66	1
70·11	1	85·97	1	00·90	1
70·28	1	86·26	2	01·15	1
70·60	1	86·65	1+	01·37	1
70·83	1	87·3	1+ br.	02·03	1
71·06	1	88·17	1+	02·60	1 d.
71·15	1	88·50	1+	02·90	1
71·45	2	88·65	1+	03·37	1+
72·18	1	89·21	1 d.	03·72	1
72·74	1+ d.	89·5	1+	04·02	1
73·20	1+	89·88	1	04·40	1
73·57	1+	90·1	1+	05·08	1

λ	i	λ	i	λ	i
3405·32	1+	3418·55	1+	3433·2	1+ br.
05·73	1	18·73	1+	33·6	1+ br.
05·88	1	19·2	1+	33·85	1
06·44	1	19·55	1+	34·42	2
06·76	1	19·72	1+	34·70	1
07·05	1	20·02	1	34·92	1
07·50	1	20·22	1	35·32	1
08·03	1	20·67	1+ d.	35·65	2
08·17	1+	21·17	1	36·20	1
08·74	1	21·30	1	36·93	2
08·96	1	21·52	1	37·18	1
09·11	1	21·85	2	37·31	1
09·36	1	22·45	1	38·08	1
09·52	1	22·63	1	38·56	1
09·85	1	23·16	2	38·84	1
09·96	1	23·9	1+	39·25	1
10·31	1	24·25	1	39·58	1
10·55	1	24·45	1	40·07	1
10·75	1	24·69	1	40·20	1
11·25	1	24·96	1	40·37	1
11·40	1	25·24	1+	40·74	1
11·70	1	25·48	1+	41·15	1
12·26	2	25·66	1+	41·65	1+
12·50	2	25·97	1	41·95	1
12·9	1+	26·52	2	42·45	1
13·22	1+	26·72	1	42·55	1
13·50	1+	27·20	1	42·80	1
14·00	2	27·58	1	43·10	1
14·50	1	27·90	1	43·66	1
14·80	1+	28·06	1	43·97	1+
15·53	1+	28·3	1+ br.	44·53	1
15·75	1	29·05	1+	44·85	1
16·04	1	29·47	1+	44·90	1
16·28	1	30·35	1	45·15	1+
16·46	1	30·60	1	45·45	1+
16·70	1	30·87	1+	45·83	1
17·00	1	31·23	1	46·00	1
17·50	1	31·65	1	46·23	1
17·62	1	32·15	1	46·47	1
18·30	1	32·67	1	46·73	1

λ	i	λ	i	λ	i
3446·88	1	3462·17	1	3478·01	1
47·47	1+	62·40	1	78·47	1
47·95	1+	62·87	1+	79·40	1
48·36	1	63·50	1	79·99	1
48·57	1	63·82	2	80·49	2
48·94	1	64·41	1	81·3	1+ br.
49·40	1	64·82	1	81·9	1+ br.
50·15	1+	65·12	1	82·40	1
51·41	2	65·6	1+ d.	82·67	2
51·8	1+	66 05	1+	83·30	1
52·1	1+ br.	66·50	1	83·73	1+
52·52	1+	66·80	1	83·98	1
52·63	1+	67·3	1+ br.	84·48	1
52·92	1+	67·85	1+	84·71	1
53·1	1+	68·26	1+	85·10	1
53·72	2	68·70	1+	85·45	1
53·98	1	69·28	1	86·16	1
54·26	1	69·38	1	86·47	1
54·40	1+	69·7	1+ br.	87·07	1+
54·80	1+	69·96	1	87·25	1+
55·00	1	70·47	1	87·75	1+
55·57	1	70·8	1+	88·35	1+
55·91	1	71·26	1	89·00	1
56·1	1+	71 90	1	89·53	1
56·50	1	72·25	1	89·75	2
56·74	1	72·67	1	90·43	2
57·24	2	72·73	1	90·77	1
57·89	2	73·00	1	90·97	1
58·37	1	73·19	1	91·55	1
58·85	1	73·57	1+	92·0	1+ br.
59·1	1+ br.	73·90	1+	92·4	1+ br.
59·3	1+	74·35	1	92·97	1
59·5	1+	74·75	2	93·52	2
59·88	1	75·18	1	93·87	1
60·10	1	75·88	1	94·19	1
60·55	1	76·08	1	95·04	2
60·64	1	76·30	1	95·87	1
61·00	1	76 65	1	96·13	1
61·19	1	77·26	1	96·57	1
61·65	1+	77·68	1	96·7	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3497·05	1	3510·65	1+ d.	3525·98	1
97·23	1	11·03	1	26·25	1
97·45	1	11 20	1+	26·74	1
97·81	1	11·65	1	27·00	1
98·37	1	11·80	1	27·78	1
98·57	1	12·06	1	28·20	1 d.
98·78	1	12·40	1	28·50	1
98·90	1	12·64	1	28·87	2
99·25	1	12·86	1	29·26	1
99·52	1	13·25	1	29·35	1
99·98	1	13·56	1	29·75	1
3500·27	1	13·85	1+	29·95	1+
00·55	1	14·65	1+	30·30	1
00 65	1	14·83	1	31·1	1+
01·15	1+ d.	15·10	1	31·29	2
01·47	1	15·43	1	31·85	1
01·9	1+ br.	15·56	1	32·3	1+
02·48	1+	16·65	1	32·80	1
02·79	1	17·03	1	32·97	1
03 16	1+	17·23	1	33·18	1
03·50	1+	17·40	1	33 75	2
03·97	1+	17·62	1	34·23	1
04·17	1+	17·84	1	34·50	1
04·62	1	18·69	1	35·1	1+ br.
04·85	1	18·92	1	35·3	1+ br.
05·20	1	19·16	1	35·8	1+ br.
05·28	1	19·55	1+	36·0	1+ br.
05·65	1+	19·91	1	36·25	1+
06 50	1	20·15	2	36·52	1
06·75	1	20·98	2	36 95	1
06·95	1	21·67	1	37·23	1
07·22	1	22·22	1	37·60	1
07·47	1	22·72	1+	38·00	1
07·9	1+	22·9	1+ br.	38·35	1
08·49	1+	23·52	1	38·57	1
09 01	1	23·77	2	38·81	1
09·25	1	24·62	1	39·10	1
09·52	1	24·93	1	39·40	1
09·85	2	25·35	1	39·60	1
10·25	1	25·88	1	39·81	1

λ	i	λ	i	λ	i
3540·64	2	3555·70	1	3569·85	1
40·82	1	56·05	1	70·05	1
41·15	1	56·43	1	70·34	1
41·45	1	56·75	1	70·80	1
42·06	1	57·15	1	71·19	1
42·5	1+	57·49	1	71·42	1
42·9	1+	57·75	1	71·85	1
43·35	1	58·00	1	72·27	1
43·58	1	58·22	1	72·55	1
43·90	1	58·71	1	72·75	1+
44·11	1	59·21	1	73·10	1
44·40	1	60·10	1	73·40	1
44·86	1	60·5	1+	74·25	1
45·86	2	60·65	1+	74·55	1
46·31	1	61·24	1	74·98	1+
46·55	2	61·62	1	75·64	1
46·90	2	61·95	2	75·97	1
47·36	2	62·25	1+	76·41	2
47·70	1	63·23	1	76·78	1
47·96	1	63·50	1	77·05	1
48·4	1+ br.	63·60	1	77·26	1
48·95	1+	63·85	1	78·1	1+ br.
49·36	1	64·1	1+	78·53	1
49·88	1+	64·40	1	78·97	1+
50·43	1	64·78	1	79·12	1
50·68	1	65·07	1	79·56	1
50·77	1	65·20	1+	79·96	1
51·02	2	65·56	1 Fe?	80·30	1+
51·24	1	65·93	2	80·45	1+
51·49	1	66·55	1	81·41	1
51·95	1+	66·78	2	82·02	2
52·36	2	67·18	1	82·23	2
52·84	1	67·65	1	83·00	1
53·1	1+ br.	67·97	1	83·4	1+
53·62	1+	68·19	1	83·6	1+
54·00	1+	68·45	1	84·13	1
54·43	1	68·83	1	85·05	3
54·70	1+	68·97	1	85·33	1
55·00	1+	69·25	2	85·54	1
55·52	1	69·72	1	86·02	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3586·5	1+ br.	3603·65	1	3616·90	2
87·2	1+ br.	03·95	1	17·28	1
87·70	1	04·35	1	17·72	1 d.
88·05	1+	04·58	1	18·2	1+ br.
88·5	1+ br.	04·80	1	18·65	2
89·3	1+ br.	05·35	1	18·94	1 Fe?
89·9	1+ br.	05·65	1	19·32	1
90·1	1+ br.	05·90	1	19·56	1
90·48	1	06·00	1	19·95	1
90·71	1	06·26	1	20·31	2
91·4	1+	06·51	2	20·68	1
91·74	1	07·15	1	21·03	1
92·03	1	07·52	1	21·20	1
92·50	1	07·18	1+	21·65	1
92·92	1 d.?	07·97	1	21·72	1
93·40	1	08·20	1	22·00	1
93·68	1	08·55	1	22·25	1
93·88	1	08·84	1	22·45	1
94·25	1 d.	09·13	1	22·83	1
95·14	2	09·53	1	23·21	2
95·69	1	09·86	2	23·6	1+
96·2	1+	10·65	2	24·00	1+
97·01	1	10·87	2	24·42	1
97·31	1	11·20	1	24·75	1
97·40	1	11·44	1	25·00	1
97·78	1	11·85	1+	25·25	1
97·95	1	12·05	1+	25·65	1
98·25	1+	12·7	1+	26·60	2 r.
98·4	1+	12·88	1	26·95	1+
98·72	1	13·30	1	27·2	1+
99·13	1	13·55	1+	27·60	1
99·50	1	13·95	1	27·86	1
3600·02	2	14·16	1+	28·23	1
00·7	1+	14·4	1+	28·51	1
00·9	1+	14·85	1	28·96	1
01·3	1+ br.	15·15	1	29·25	1
01·6	1+	15·42	1	29·70	1
02·45	1+	15·6	1+	30·17	1
02·67	1	15·98	1	30·40	1
03·28	1	16·49	1	30·84	3

λ	i	λ	i	λ	i
3632·0	1+	3649·53	1	3664·92	1
32·33	1	49·83	1	65·3	1+
32·9	1+	50·16	1	65·6	1+
33·05	1	50·55	1+	66·28	1
33·42	2	50·8	1+ br.	66·35	1
34·40	1+	51·6	1+ br.	66·95	1 d.
34·70	1	52·21	1	67·30	1
35·17	1	53·34	1	67·9	1+
35·45	1	53·65	1	68·13	1
35·74	1+	54·25	1	68·25	1+
36·3	1+ br.	54·43	1	68 90	1
36·7	1+ br.	54·80	1	69·33	1
37·63	1	55·05	1	69·50	1
38·03	1	55 35	1	70·26	3
38·33	1	55·61	1	70·40	1
38·79	1	56·09	1	70·7	1+
39·31	1	56·30	1	71·75	1+ Pb?
39·75	1+ Pb?	56·40	1	71·98	1+
40·17	1	56·80	1	72·75	2
40·84	2	57·09	1	73·22	1
41·09	1	57·50	2	73·56	1
41·37	1	58·01	1	74·25	1
42·20	1	58·30	1	74·90	1
42·59	1	58·8	1+	75·19	1
42·95	1	59·19	1	75·26	1
43·2	1+ br.	59·28	1	75·75	1 d.
43·75	1	59·76	1	76·75	2 d.
44·38	1	60·27	1	77·2	1+
44·93	1	60·5	1+	77·60	1
45·19	1	60·90	1+	77·82	1
45·60	1	61·47	1	78·3	1+
45·82	1	61·60	1	78·93	2
46·13	1	62·10	1	79·54	1
46·63	1	62·50	1	79·99	1
47·00	1	62·8	1+	80·10	1
47·7	1+	63·2	1+	80·45	1
47·9	1+	63·5	1+	80·68	1
48 27	1	64·0	1+	81·07	1 d.
48·65	1	64·40	1	81·85	1
49·02	1	64·69	1	82·25	2

λ	i	λ	i	λ	i
3682·63	1	3697·69	1	3715·85	1
83·00	1	98·10	1	16·32	1
83·75	1	98·63	1 d.	16·72	1
84·30	1	99·60	1	16·95	1
84·45	1	99·83	1	17·23	1
84·77	1+	3700·00	1	17·60	1
85·45	1	00·74	1	18·25	2
85·71	1	01·68	2	18·78	1
85·94	1	01·9	1+	18·98	1+
86·63	1	02·38	1+	19·50	1
86·93	1	02·80	1	19·75	1
87·12	1	03·45	1	20·13	1 Fe?
87·27	1	03·80	1	20·54	1
87·55	1	04·25	1	21·55	1+
87·88	1	04·50	1	21·95	1+
88·02	1	05·20	1	22·6	1+
88·53	1	05·72	2	22·92	1
88·93	1	06·10	2 r.	23·85	2+
89·19	1	06·86	1	24·35	1
89·37	1	07·45	1+	24·50	1
89·80	1	07·80	1	25·18	1
90·18	1	08·10	1	25·26	1
90·43	1	08·75	1+	25·55	1
91·00	1+	09·2	1+	25·80	1
91·15	1+	09·45	1+	25·93	1+
91·65	1+	09·65	1+	26·22	1
92·07	1	10·05	1	26·49	1
92·15	1	10·36	1	26·72	1
92·48	1	10·73	1	27·02	1
93·08	1+	11·00	1	27·30	1
93·46	1	11·10	1	27·91	1
93·89	2	11·98	1	28·01	1
94·46	1	12·4	1+ br.	28·60	1
94·95	1+	13·82	1	29·00	1
95·35	1+	13·95	1	29·49	1
95·98	1	14·40	1	30·00	2
96·25	1	14·60	1	30·37	1
96·48	1	14·93	1	30·98	1
96·98	1	15·15	1	31·10	1
97·32	1	15·63	1	31·64	1

λ	i	λ	i	λ	i
3731·9	1+	3749·35	1	3767·33	1 Fe?
32·43	1	50·02	1	67·62	1
32·77	2	50·14	1	68·02	1+
33·25	2	50·51	1	68·22	1+
33·75	1	51·3	1+	68·57	1
33·95	1	51·46	1	68·67	1
34·83	1	51·92	1	68·95	1
35·05	1 Fe?	52·30	1	69·68	2
35·7	1+	52·49	1	70·30	1
36·2	1+	52·84	1	70·60	1
36·75	1+	53·02	1	71·55	1
37·45	2+	53·22	1	72·50	1
38·23	2	53·7	1+	72·97	2
38·48	1	53·85	1+	73·57	1
38·80	1	54·12	1	73·72	1
39·18	1	54·46	1	73·82	1
39·50	1	55·2	1+ br.	74·22	1
40·4	1+ br.	55·7	1+ br.	74·57	1
40·85	1+	56·82	1+	75·02	1
41·12	1	57·09	1	75·42	1
41·43	1	58·2	1+	75·65	1
41·56	1	59·38	2	75·74	1
41·87	1	60·00	1	76·15	1
42·50	1	60·5	1+	76·63	1
42·67	1+	61·02	1	76·87	1
42·96	1	61·23	1	77·17	1
43·07	1+	61·74	1	77·50	1+
43·55	1	62·11	1	77·61	1
43·97	1 d.	62·27	1	77·83	1
44·39	1	62·89	1	78·15	1
44·65	1	63·13	1	78·5	1+
44·95	1	63·43	1	78·75	1+
45·15	1	64·00	1	79·18	1
45·53	1	64·30	1	79·3	1+
45·75	1	64·71	1	80·44	1
46·10	1+	64·95	1+	80·90	2
46·60	2	65·47	1+	81·23	1
46·82	1+	66·00	1	81·33	1
47·34	2	66·6	1+ br.	81·60	1
48·90	2	67·05	1	82·1	1+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
3782·5	1+ br.	3797·93	1 d.	3813·94	2
82·99	2	98·40	1	14·25	2
83·80	1+	98·99	1	14·96	1
84·02	1	99·36	1	15·30	1
84·90	1	99·75	1	15·50	1
85·30	1	3800·30	1+	16·22	1
85·5	1+	00·43	1+	16·75	1
86·30	1+	00·9	1+	17·30	1
86·74	1	01·35	1	17·80	1
86·99	1	01·45	1	18·28	1
87·40	1	01·90	1+	18·62	1
88·15	1	02·10	1	18 86	1 d.
88·37	1	02·43	1	19·19	1
88·77	1	03·00	1	19·46	1
89·02	1	03·25	1	21·15	1
89·36	1	03·50	1	21·38	1
89·76	1	04·1	1+ br.	22·14	1
90·03	1	04·52	1+	22·56	1
90·36	1	05·00	1	22·71	1
90·50	1	05·20	1+	23·10	1
90·94	1	05·83	1	23·26	1
91·25	1	05·99	1	23·62	1
91·50	1	06·40	1	24·1	1+
92·03	1	06·5	1+	24·85	1
92·50	1 d.	07·4	1+ br.	25·29	1
92·69	1	07·75	1	25·61	1
93·24	2	08·35	1+	26·65	2
93·45	1	09·12	1	27·02	1
93·74	1	09·36	1	27·56	1
94·15	1	09·73	1+	27·93	1 Fe?
94·50	1	10·33	1	28·22	1
95·29	1	11·05	1	28·92	1
95·76	1	11·20	1	29·20	1
96·20	1	11·67	1	29·50	1 Mg?
96·38	1	11·81	1	29·95	1
96·62	1	12·16	1	30·36	1
96·70	1	12·42	1	30·77	1
96·98	1	12·72	1	31·60	3
97·2	1+ br.	12·86	1	32·07	1
97·70	1	13·40	1	32·75	1

λ	i	λ	i	λ	i
3833·16	1	3850·95	1+	3867·32	1
33·90	1	51·10	1	68·57	1
34·72	1	51·45	1	68·95	1
34·94	1	52·0	1+	69·05	1
35·25	1	52·28	1+	69·90	1
36·05	1	52·86	1+	70·22	1
36·45	1+	53·16	1	70·73	1
36·6	1+	53·53	1 d.	71·18	1
37·0	1+	53·95	1	71·52	1
37·40	1	54·42	1 Mg?	71·69	1
37·63	1	54·80	2	72·06	1
37·95	1	55·00	1	72·50	1
38·28	2	55·60	1	72·70	1
39·15	2	55·96	1	73·03	1
39·63	1	56·5	1+ (Fe)	73·22	1
39·77	1	56·74	1	73·28	1
40·05	1	56·94	1	74·20	2
40·50	1	57·35	1+	74·68	1
41·20	1 d. (Fe)	57·8	1+	75·15	1+
42·00	1	58·35	1+	75·66	1
42·36	1	58·8	1+	76·28	1
42·86	1	59·16	1	76·48	1
43·61	1	59·75	3	76·75	1
43·92	1	60·75	1+	77·1	1+
44·13	1	61·30	1	77·50	1+
44·33	1+	61·9	1+	77·60	1+
44·85	1	62·45	1+	78·23	2
45·27	1	63·25	1+	79·12	1
45·50	2	63·57	1	79·73	1
45·98	1	63·90	1	79·88	1
46·38	1	64·24	1	80·8	1+
46·70	1	64·48	1	81·61	2
47·25	1+	64·65	1	82·05	1
47·95	1+	64·85	1+	82·52	1
48·24	1	65·26	1	82·79	1
48·77	1	65·65	1 (Fe)	83·20	1
48·9	1+	66·08	2	83·4	1+
49·6	1+ Mg?	66·62	1	84·09	1
49·87	1+	66·89	1	84·47	1
50·5	1+	67·17	1	84·83	2

λ	i		λ	i		λ	i	
3885·12	1		3905·00	1		3921·2	1+	
85·83	1		06·1	1+ br.		21·40	1	
86·6	1+ br.		06·7	2+ br.		21·74	1	
87·36	1		07·17	1		22·18	1	
87·85	1		07·42	1		22·35	1	
88·32	1		07·72	1		22·60	1	
88·72	1		08·01	1		23·25	1	
89·54	1		08·60	1+		23·5	1+	
90·51	3		09·10	1		23·8	1+	
91·22	1		09·22	1		24·11	1	
91·93	1		09·88	1		24·45	1	
92·22	1	Mg?	10·37	1		24·67	1	
92·56	1		10·67	1		25·0	1+	
92·85	2		11·15	1+		25·17	1+	
93·48	1		11·45	1+		25·45	1+	
93·96	1		11·90	1		25·7	1+	
94·26	1		12·60	1		26·45	1+	
94·89	1		12·95	1+		26·90	1	
95·20	1		13·48	1		27·10	1	
95·41	1		13·63	1		27·92	1	
95·82	1	Mg?	14·0	1+		28·20	1	
96·07	1		14·45	3		28·45	1	
96·27	1		14·94	1		28·60	1	
96·92	2		15·20	1		28·95	1	
97·22	1		15·5	1+		29·22	1	
97·44	1		16·05	2		29·38	1	
97·87	1		16·60	1+		29·90	1	
98·1	1+		16·75	1+		30·22	1	
98·97	1+		17·18	1		30·58	1	
99·24	1+		17·45	1		31·0	1+	
99·64	1		17·55	1		31·15	2	
99·98	2		17·78	1		31·37	1+	
3900·48	1		17·96	1		31·65	1	
01·75	1+		18·27	1		32·20	3	
02·70	1		18·57	1		33·18	1	
03·13	1		19·22	1		33·81	4	Ca
03·47	1		19·49	1		33·92	1	
04·06	1		19·95	1+		34·9	1+	
04·44	1		20·5	1+		35·52	2	
04·73	1		20·7	1+		36·18	1	

λ	i	λ	i	λ	i
3936·55	1 d.	3954·40	1	3970·30	1
36·88	1.	54·87	2	70·60	1
37·23	1	55·55	1	70·75	1
38·06	1+	55·91	1	71·3	1+
38·57	1+	56·2	1+	71·58	1
39·27	1+	56·45	1+	72·51	1
39·56	1	56·72	1	73·40	1
39·93	1	57·08	1	74·15	1
40·45	1	57·50	1	74·50	1+
40·64	1	57·65	1	74·70	1+
40·80	1	57·97	1	75·13	1
41·26	1	58·3	1+ br.	75·4	1+
41·60	1	59·5	1+ br.	76·6	1+ br.
42·22	1	59·9	1+ br.	77·22	1
42·43	1	60·4	1+	77·50	1
42·71	1	60·70	1	78·4	1+ br.
43·00	1	61·00	1	78·95	1
43·68	1	61·29	1	79·27	1
43·97	1	61·70	1+	79·67	1
44·32	2	61·88	1+	79·92	1
44·77	1	62·18	1	80·95	1
45·10	1	62·43	1	81·06	1
45·45	1	62·60	1	81·71	1
45·88	1+	62·95	1	81·93	1
46·40	1	63·13	1	82·27	1
46·88	1	64·32	1	82·69	1
47·05	1+	64·85	1	33·1	1+
48·13	1	65·15	1	83·45	1+
48·54	1	65·43	1	84·03	1
49·20	1	66·00	1	84·33	1
49·44	1	66·10	1	84·70	1
49·69	1	66·5	1+	84·90	1
50·27	1	66·73	2	85·19	1
50·90	1	67·25	1+	85·95	2
51·75	1+	67·6	1+	86·60	1+
52·03	1+	67·8	1+	87·03	1
52·45	1	68·16	1	87·19	1
52·67	1+	68·63	2 Ca	87·86	1
53·13	1	69·23	1	88·18	1
53·75	1	69·55	1	88·50	1

λ	i	λ	i	λ	i
3988·78	1	4005·83	1	4019·13	1
89·02	1	05·92	1	19·39	1
89·47	1+	06·5	1+ br.	20·35	1 d.
90·10	1	07·13	1	21·17	1
90·24	1	07·28	1	21·35	1+
90·61	1	07·60	1	21·65	1+
91·75	1+	07·86	1	22·0	1+
91·9	1+	08·10	1	22·2	1+
92·35	1+	08·22	1+	22·95	1+
92·70	2	08·59	1	23·05	1+
93·2	1+	08·89	1	23 40	1
94·0	1+	09·25	1	23·76	1+
94·42	1	09·37	1	24·33	1+
95·17	2 (L)	09·60	1	24·45	1
95·67	1	09·73	1	24·9	1+
96·1	1+ br.	10·53	1	25·22	1
96·90	1	10·88	1	25·60	1
97·26	1	11·00	1	26·19	2
97·49	1	11·20	1	27·18	1
98 36	2	11·64	1 d.	27·58	1
98·95	1+	11·93	1	27·97	1
99·33	1+	12·03	1	28·37	1
99·70	1	12·38	1	28·55	1+
4000·13	1	12·60	1	29·27	1+
00·47	1	12·93	1	29·90	1+
00·87	1	13·30	1	30·05	1+
01·08	1	13·6	1+	30·57	1
01·40	1	14·35	1	30·93	1
01·82	1	14·72	1	31·50	1+
02·14	1	14·99	1	32·00	1
02·51	2	15·43	1	32·6	1+ br.
03·32	1	15·55	1	33·58	1
03·58	1	16·22	1	33·93	1
03·95	1	16·52	1	34·15	1+
04·20	1	17·02	1 d.	34·50	1
04·30	1	17·40	1	34·67	1
04·70	1	17·65	1	35·45	1+
04·80	1	17·88	2	35·8	1+
05·00	1	18·43	1	36·3	1+
05·40	1	18 65	1	36·75	2+

λ	i	λ	i	λ	i
4037·2	1+ br.	4057·5	1+ br.	4077·95	1
38·10	1	58·05	1+ Pb?	78·35	1+
38·36	1+	58·35	2	79·00	1
38·8	1+ br.	59·0	1+ br.	79·51	1
39·9	1+	59·3	1+ br.	80·05	1+
40·6	1+	59·8	1+ br.	80·79	3
41·23	1+	60·28	1	81·45	1
41·78	1+	60·38	1	82·20	1
42·15	1+	61·10	1+	82·80	1
42·63	1	61·51	1	83·15	1+
42·96	1	61·90	1	83·85	1+
43·4	1+ br.	62·72	2	84·31	1
44·2	1+ br.	63·26	1	84·69	1
44·63	2	63·78	1	85·1	2+
45·10	1	64·32	2	86·28	1
45·40	1	66·0	1+	86·63	1
45·99	2 (Fe)	66·2	1+	86·83	1
46·2	1+ br.	66·4	1+	86·92	1
47·26	1	66·65	1	87·51	1
47·78	1	66·97	1	87·87	1
48·25	1	67·33	1	88·40	2
48·70	1	67·90	2	88·98	1
49·40	1+	68·75	1	90·28	4
49·70	1	69·15	1	91·66	2 d.
49·95	1	69·23	1	92·05	1+
50·21	3	69·90	1	92·47	1+
51·1	1+	70·20	1	92·97	1+
51·3	1+	70·6	1+	93·43	1+
52·07	2	70·9	1+	93·80	1+
52·2	1+	71·30	2	94·2	1+ br.
52·65	1+	71·63	1	94·75	1
53·20	1	72·20	1	95·03	1
53·8	1+	73·00	1	95·8	1+
54·46	1	73·3	1+	95·90	1
54·87	1	73·80	1	96·56	1
54·99	1	73·93	1	96·83	1
55·3	1+ br.	74·68	1 d.	96·93	1
55·86	1	75·83	1+	97·23	1
56·20	1	76·3	1+ br.	97·55	1+
56·55	1	76·86	2	97·9	1+

λ	i	λ	i	λ	i
4098·20	1	4119·1	1+	4142·09	1
98·30	1	19·90	1+	42·32	1
99·2	1+ br.	20·3	1+	42·42	1
99·45	1+	21·0	1+	42 59	1
4100·10	1	21·45	1+	43·19	1
00·67	1+	22·39	1+	43·76	1
01·5	1+	22·58	1+	44·15	1+
02 10	1	23·3	1+	44·92	1
02·41	1	23·5	1+	45·58	2
02·98	1	23·83	1	46·45	1
03·29	1	24·19	1	46·83	1
03·73	1	24·92	3	47·20	1
04·22	1+	25·3	1+	47·30	1
04·58	1+	26·6	1+ br.	47·62	1
04·95	1+	27·05	1+	48·33	1+
05·48	1+	27·65	1 d.	48·76	1
05·9	1+	28·13	1	48·97	1
06·08	1	28·52	2	49·38	1+
06·52	2	29·18	1	49·57	1+
07·11	1	29·65	1+	50·25	1+
08·60	1	29·9	1+	50·61	2
08·9	1+	30·89	1	51·00	1
10 20	1	31·55	1	51·48	1
10·7	1+	31·98	1	51·83	1
11·05	1	32·30	1	53·75	2
11·8	1+ br.	33·40	2	54·16	2
12·70	1	33·71	2	55·58	3
12·95	1	34·23	1+	56·81	2
13·27	1	35·03	1	58·48	2
13·77	1	35·39	1	58·8	1+
14·10	1	35·97	1	59·15	1
14·18	1	36·32	1	59·30	1
14·42	1	36·68	1	59·59	1
14·82	1	37·00	1	60·05	1
15·10	1	38·15	1	60·5	1+ br.
16·30	3	38·84	1	61·14	1
16·6	1+	39 34	2	62·00	2
17·10	1	40·53	1+	62·62	1
17·75	1+	40·80	1+	62·88	1
18·59	2	41·45	3	63·22	1

λ	i	λ	i	λ	i
41[illegible]·44	1	4185·04	1	4203·27	1
63·[illegible]	2	85·85	1	04·51	2
64·6	1—	85·97	1	04·63	1
64·97	1	86·22	1	05·2	1+
65·35	1—	86·63	1	06·14	1
65·87	2	86·95	1	06·54	1 d.
66·8	1—	87·15	1	07·4	1+ br.
67·25	1—	87·57	1	09·7	1+ br.
67·87	1—	88·02	1	10·64	2
68·3	1— br.	88·33	2	11·05	1 d.
69·25	1	89·0	1+	11·52	1
69·7	1—	89·40	2	11·87	2
70·17	1	90·5	1+ br.	12·35	1
71·6	1—	91·76	1	12·47	2
71·00	1	92·15	1	12·67	1
71·8	3	92·35	1+	12·94	1
72·4	1	93·15	1+	13·19	1
72·8	1—	93·60	1—	13·50	1
7[illegible]	2	93·95	1—	13·9	1—
73·90	1	94·15	1+	14·10	2
74·[illegible]	1	94·55	1	14·51	1
74·45	2	95·22	1—	14·61	1
75·63	1	95·4	1+	15·20	1
76·11	1	95·7	1+	15·44	1
76·75	1—	96·0	1—	15·69	1
77·1	1—	96·70	1	16·17	1
77·76	1	96·9	1+	16·47	1
78·[illegible]	1	97·35	1+	16·75	1
78·69	1	97·69	2 d.?	17·0	1+
79·22	2	98·39	1	17·3	1+
80·3	1+	98·9	1—	17·65	1
80·58	1—	99·8	1—	17·93	1
80·90	1	4200·30	2	18·3	1+
81·73	1	01·13	1	18·55	1+
82·88	1	01·30	1	19·5	1+
83·15	1	01·59	1	19·70	1
83·47	1	01·86	1—	19·89	1
83·79	1	02·45	1—	20·20	1
84·27	1—	02·65	1—	20·30	1
84·67	1—	02·9	1—	20·87	1

λ	i	λ	i	λ	i
4221·4	1+	4242·52	1	4261·1	1+
21·99	1	42·70	1	61·25	1+
22·32	1	43 25	1	61·73	1
22·57	1	43·53	1	62·40	1+
22·90	1	44·53	3	62·75	1
23·13	1	45·10	1	63·12	1
23·50	1+	45·60	1	63·38	1
23·8	1+	45·96	1	63·66	1
24·5	1+ br.	46·18	1	63·97	1
25·55	2+	46·45	2	64·05	1
25·97	1	47·33	1	64·49	1
26·25	1	47·57	1	64·95	1
26·90	2+ Ca?	48·13	1	65·45	1
27·50	2	48·8	1+ br.	65 8	1+
28·57	1	49·3	1+ br.	66·53	1+
28·95	2	49·73	1	66·89	1
29·45	1	50·2	1+	67·50	2
29·9	1+	50·42	1+	67·76	1
30·0	1+	51·1	1+ br.	68·12	1
30·5	1+	51·60	1+	68·22	1
31·40	1+	51·9	1+	68·67	1
31·86	2	52·30	1+	69·05	2
32·23	2	52·65	2	69·84	4
32·58	1	53·9	1+	70·50	1 d.
33·32	1	54·10	1	70·88	1
33·70	1	54·45	1+	71·12	1
33·92	1	54·6	1+	71·46	1
34·25	1	55·0	1+	72 03	1+
34·77	1	55·50	1	72·52	1
34·90	1	55·65	1	73·16	1+
35·60	1	55·95	1	73·64	1
36·21	3	56·75	1+	74 20	3
36·62	1	57·21	1	75·2	1+
37·93	1+	57·9	1+	75·46	1
38·8	1+ br.	58·3	1+	75·94	1
39·33	1	58·45	1+	76 2	1+
39·9	1+	58·7	1+	76·69	2
40·35	1+	59·10	1	77·08	1
40·80	2	59·43	2	77·43	1+
41·88	4	59·65	1	77·76	1

λ	i	λ	i	λ	i
4278·37	2	4298·6	1+	4315·4	1+
79·53	1+	99·05	1+	15·7	1+
80·4	1+	99·26	1+	16·08	1+
80·86	1+	99·61	2	16·20	1+
81·5	1+	4300·08	1	16·70	1
82·00	1	00·26	1	17·27	1
82·25	3	00·53	1	17·46	1
82·67	3	00·95	1+	17·78	1
83·3	1+	01·05	1+	18·2	1+ br.
83·65	1+	01·60	1	18·5	1+ br.
84·15	1+	01·70	1	19·22	1
84·73	1	01·9	1+	19·67	1
85·03	1	02·30	1	19·97	2
85·20	1	02·51	1	20·6	1+ br.
85·45	1	02·60	1	21·2	1+ br.
85·63	1	03·00	1	21·51	1
85·96	1	03·43	1	22·2	1+ br.
86·5	1+	03·53	1	22·55	1+
87·10	3	04·25	1+	23·92	2
88·05	3	04·67	1	24·75	1
88·56	1	04·9	1+	24·90	1
89·05	2	05·4	1+	25·32	1
89·72	1	06·1	1+	26·06	3
90·05	2	06·48	1	27·18	2 d.?
91·08	2	06·71	1	28·0	1+ br.
91·81	1	06·99	1	28·35	1
92·87	1+	07·06	1	28·92	1
93·53	1	07·50	1	29·40	1
93·95	1+	08·13	1+	29·7	1+ br.
94·13	1	08·8	1+ br.	30·20	1+
94·40	1+	09·40	1+	30·9	1+ br.
94·85	1	09·95	1+	31·63	1
95·32	1	10·62	2	32·05	1
95·47	1	11·3	1+ br.	32·47	1
95·93	1	11·65	1+	33·15	1
96·49	1	11·95	1+	33·71	1
96·77	1	12·51	1	34·66	1
97·31	3	12·87	1	35·13	1
97·78	1	13·39	2+	35·44	1
98·2	1+	14·08	2	35·92	2+

λ	i	λ	i	λ	i
4336·60	2+	4357·06	1	4377·00	1
36·93	1+	57·8	1+	77·48	1+
37·61	1	58 0	1+	78·0	1+
38·1	1+ br.	58·36	1	78·50	1+
38·48	1	58·60	1	78·75	1+
38·80	1	58·83	1	79·41	1
38·93	1	59·10	1	79 9	1+
39·16	1 d.	59·68	1+	80·49	1
39·55	1	59·92	1+	80·95	1
39·94	1	60·45	1+	81·35	1
40·63	1	61·2	1+	81·60	1
40 86	1+	61·36	1	82·04	1
41·89	4	62·23	2	82·32	1
42·60	1	62·48	3	82·60	1
43·5	1+	63·00	1	83·50	2
44·15	1	63·15	2	83·77	2
44·45	1	64·03	1	84·82	1
44 88	1	64·50	1	84·95	1
46·20	1	64·61	1	85·76	1+
46·48	1	65·00	1	86·21	1+
46·95	1	65·18	1	86·35	1+
47·36	3	65·28	1	86 9	1+ Pb?
48·32	1	65·77	1	87·45	1+
48·8	1+	67·6	1+	87·8	1+
49·8	1+	67·95	1	87·95	1+
50·1	1+	68·33	1	88·4	1+
50·3	1+	68·42	1	88·9	1+
50·5	1+	69·0	1+	90 20	1
51·84	1	69·5	1+	90·36	1
51·98	1	69·75	1+	90 50	1
52·30	1	70·21	1	90·74	1
52·62	1	71·26	1	91·1	1+
52·98	1	71·99	2	91·30	1
53·3	1+	72·78	2	91·46	1
53·95	1	72·95	1+	91·69	1
54·25	1	73·61	2	92 04	1
54·53	2	74·22	1	92·40	1
54·77	2	75·79	1+	92·73	1
55·89	4	75·95	1	93·80	2
56 75	1	76·37	1+	94·83	1

λ	i	λ	i	λ	i
4395·1	1+	4415·46	2	4437·12	1+
95·45	1+	16·05	1	38·16	1+
95·96	1+	16·73	1	38·42	1+
97·50	1	17·00	1	38·61	1
98·0	1+	17·61	1	38 90	1
99·81	1	17·94	1	39·32	1
4400·65	1+	18·22	1	40·22	1+
01·1	1+	18·68	1	40·54	1
02·06	1	19·3	1+	40·94	1
02·57	1	19·8	1+	41·20	1
02·70	1	20·57	1	41·29	1
03·52	1	20·89	2+	41·75	1+
04·22	1	22·2	1+	42·20	1+
04 53	1	22·78	1	42·80	1+
04·99	1 Fe?	23·15	1	42·95	1+
05·09	1	23·49	1	43·47	1
05·47	1	23·96	2	43·60	1
06·0	1+	24·73	1+	43·80	1
06·13	1	25·35	1+	44·90	1
06·74	1	25·6	1+ Ca?	45·38	1
07·4	1+	26·03	1	45·70	1 d.
08·15	1	26·25	1	46·18	1
08·73	1	26·85	2	47·30	2 (L)
08·92	1	27·14	1	48·2	1+ br.
09·1	1+	27·81	3	48·5	1+ br.
09·90	1	28·53	1	49·2	1+ br.
10·3	1+	29·05	1	49·74	1
10·6	1+	29·79	1	50·59	2
11·10	1	30·27	1	50·75	2
11·31	1	31·8	1+ br.	51·18	1+
11·50	1	32·2	1+ br.	51·72	1
11·65	1	32·60	1	52·19	1
12·0	1+	32 90	1	52·48	1
12·5	1+	33·35	1+	53·46	1
12·7	1+	33·58	1+	53·68	1
13·07	1	34·08	3	53·95	1+
13·33	1	34·81	2	54·1	1+
14·50	1	35·72	1+	55·3	1+
14·85	1	36·5	1+	56·08	1
14·97	1	36·97	1	56·44	1

λ	i	λ	i	λ	i
4457·0	1+	4474·73	1+	4497·7	1+ br.
57·33	1	75·04	1+	98·47	1+ d.
57·67	1	75·50	1+	99·40	1
58·03	1	75·91	1	99·87	1+
58·15	1+	76·70	1	4500·00	1+
58·85	1+ d.	77·67	1+	00·9	1+
59·97	1+	77·93	2	01·65	1+
60·77	1	79·15	1+	02·11	1
61·13	1	79·63	1+	02·56	1+
61·62	1	80·55	1+	03·86	1
62·04	1	80·83	1+	03·97	1
62·45	1	81·25	1+ Mg?	04·47	1+
62 59	1	82·4	1+ br.	04·95	1
62·99	1	82 91	1	06·31	2
63·19	3	83·67	1	06·42	2
63·98	1	83·99	1	06·85	1+
64·38	1	84·7	1+ br.	07·67	1
64·50	1	85·40	1	07·96	1
65·35	3	86·12	1	08·4	1+ br.
65·92	1	86·52	1	09·1	1+ br.
66·5	1+ br.	87·15	1	09·55	1+
67·27	1	87 27	1	10·08	1
67·55	1	87·90	1+	10 53	3
68·03	1	88·40	1	11·46	1
68·16	1	89·1	1+	11·88	1
68·34	1	89·29	1	11·98	1
68·49	1	90·4	1+ br.	12·37	1
68·57	1	91·02	3	12·62	1
69·05	1	91·53	1	13·04	1
69·42	1	91·71	1	13·55	1
69·52	1	92·20	1	13 89	1
70·0	1+	92·60	1	14·30	1
70 50	1	93·28	1	14·49	1
70·65	1+	94·09	1+	15·50	4
71·82	1	94·90	1	15·8	2+ br.
72·55	6	95·3	1+	16·95	1
73 6	1+ br.	95·5	1+	17·45	1
74·0	1+ br.	95·85	1+	18·30	1+
74·4	1+	96 35	1+	18·80	1+
74·5	1+	96·83	1+	19·4	1+

λ	i	λ	i	λ	i
4519·97	1+	4545·01	1	4571·16	1
20·7	1+ d.	45·16	1	71·50	1
21·81	2+	45·76	4	71·8	1+
23·1	1+ br.	46·43	1	72·47	1+
23·43	1	47·65	1+	73·2	1+
24·3	1+ br.	48·2	1+	73·50	1
25·14	1	48·4	1+	73·90	3 d
25·57	1	48·75	1+	74·6	1+
25·87	1	49·4	1+	75·00	1
25·98	1	50·05	2	75·3	1+ br.
26·20	1+	50·55	1+	76·25	1+
26·85	1	50·68	1+	76·85	1
27·85	1	51·31	1+	77·40	1
28·20	1	51·87	1+	78·5	1+ br
28·74	1 d.	52·24	1+	79·20	1
29·3	1+ br.	52·63	1+	79·87	1
29·92	1	53·1	1+	81·02	1+
30·93	1+	54·03	2	81·33	1+
31·50	1+	55·30	4	81·98	2
31·95	1+	56·18	1	82·65	1+
32·7	1+ br.	56·50	1	83·00	1
33·25	1+	57·99	1	83·52	1
33·91	1	58·07	1	84·5	1+
34·73	1+	58·32	1	85·03	2
35·32	1+	58·60	1	85·75	1+
35·45	1+	60·0	1+ br.	86·5	1+
36·24	1	60·50	1	87·1	1+
36·80	1	61·45	1+	87·45	1+
37·0	1+	61·6	1+	88·1	1+
37·35	1	62·10	1	88·6	1+
38·37	4	63·56	1+	89·55	1+
39·4	1+	64·26	1+	90·21	1+
40·41	1	64·50	1+	90·46	1+
40·70	1	65·8	1+ br.	91·0	1+
41·90	1	67·1	1+ br.	91·96	1
42·25	1+	67·89	3	92·75	1+
42·75	1+	68·41	1	94·49	1
43·21	1+	69·40	1	95·30	1
43·83	7	70·11	3	95·73	1+
44·57	1	70·87	1	95·91	1+

λ	i	λ	i	λ	i
4596·95	1+	4630·4	1+ br.	4663·2	1+ br.
97·77	1	31·1	1+ br.	63·97	1
98·05	1	31·81	1	64·30	1
98·51	1	31·92	1	64·98	1
99·03	1	34·2	1+	65·42	1
99·73	1+	35·2	1+	66·23	1
4600·13	1	35·73	1+	67·07	2
00·96	1	38·16	1+	67·45	1
01·38	2	39·3	1+ br.	68·67	1
02·04	1	40·57	1	69·05	1
03·88	4	41·91	2	69·22	1
05·38	3	42·72	1+	69·55	1
06·4	1+	43·86	1	71·66	2
09·0	1+ br.	44·30	1	74·0	1+
10·07	2+	45·13	1+	74·45	1+
11·70	2	45·80	1+	75·6	1+
12·47	1+	46·30	1	78·1	1+ br.
12·8	1+	46·85	4	78·8	1+ br.
14·50	1+	48·15	1	80·4	1+
14·90	1	49·37	2+	80·85	1+
15·18	1+	50·24	1	81·40	1+
15·32	1+	50·7	1+	82·33	1+
15·85	1+	51·75	1+	82·77	1
16·7	1+	52·09	1	82·90	1
17·33	1+	53·05	1	83·29	1
17·80	1+	53·25	1	83·85	1
18·60	2 d.	53·65	1	84·20	1
19·4	1+	54·43	1+	84·87	1+
20·42	3 r.	55·03	2	85·9	2+
22·13	1	55·40	1+	87·1	1+
22·23	1	56·7	1+	88·0	1+
23·68	1	57·6	1+ br.	89·27	3
24·27	1+	58·4	1+ br.	90·1	1+ br.
24·91	1+	58·92	1+	90·95	1+
25·26	1+	59·52	1+	91·45	1+
26·14	1	60·1	1+	92·15	1+
27·30	5	61·0	1+	92·32	1+
28·5	1+ br.	61·87	1+	92·6	1+ br.
29·37	1+	62·40	1	93·95	1+
29·94	1	62·78	1	95·4	1+ br.

λ	i
96·30	1
96·77	1
97·55	1+
99·02	1+
99·3	1+
99·95	1+

Von einer Reproduction des Uranspectrums haben w[illegible] abgesehen, da dasselbe bei der grossen Anzahl und [illegible] mässigen Vertheilung der Linien nichts Charakteristisches [illegible]

Die zweite Variation der einfachen Integrale

(III. Mittheilung)

von

G. v. Escherich,

w. M. k. Akad.

In diesem letzten Theile der Arbeit werden die Consequenzen aus den in den beiden vorhergehenden Theilen abgeleiteten Sätzen gezogen und die Kriterien für die Permanenz des Vorzeichens der zweiten Variation aufgestellt.

Zuvörderst erschien es da unerlässlich, vollständig einwurfsfrei zu beweisen, dass die quadratische Form, die in der reducirten Form der zweiten Variation auftritt, nothwendig definit sein müsse. Aus dieser ersten nothwendigen Bedingung und der fundamentalen Formel in (XI, 2) ergaben sich dann weitere Bedingungen, unter denen die zweiten Variationen des Integrals für die hier benützten Variationen der Veränderlichen entweder sämmtlich von Null verschieden sind und einerlei Zeichen haben oder verschiedener Zeichen fähig sind. Die erhaltenen Sätze geben in allen Fällen Aufschluss, mit Ausnahme eines einzigen Falles.

Wenn nun auch dieselben sich Jedem, der mit der Theorie der zweiten Variation sich beschäftigt, als sehr bestimmte Vermuthungen aufdrängen werden, so bedurfte es doch aller in den beiden ersten Theilen dieser Arbeit entwickelten Begriffe und Sätze, um sie beweisen zu können.

XVII.

Nunmehr ist man in den Stand gesetzt, die in XIV erwähnte Untersuchung aufzunehmen und die Bedingungen

zu erörtern, unter denen die zweite Variation des Integrals bei allen hier anwendbaren Variationen der Variablen $y_1, y_2 \dots y$ ihr Zeichen beibehält oder nicht.

In den vorangehenden Capiteln hatte sich ergeben, dass die zweite Variation des Integrals

$$\delta^2 J = \int_\alpha^\beta \Omega(\eta_i, \eta_i')\, dx,$$

wo $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ ist, für alle Variationen $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ von der Form in II, die in den Endpunkten α und β verschwinden und den m Bedingungsgleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \eta_i' + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \eta_i \right) = 0,$$
$$k = 1, 2 \dots n$$

genügen, sobald ein conjugirtes Integralsystem besteht, dessen Determinante nirgends im ganzen Intervall α bis β, die Grenze eingeschlossen, verschwindet, stets transformirt werden kann in

$$\delta^2 J = \int_\alpha^\beta \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \zeta_i \zeta_k \right) dx,$$

wo die ζ_i die m Bedingungsgleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \zeta_i = 0$$
$$k = 1, 2 \dots m$$

befriedigen.

Hat also die quadratische Form

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \zeta_i \zeta_k = W(x)$$

sowohl an jeder einzelnen Stelle, als auch an allen Stellen des Intervalls $\alpha\beta$ für alle ζ_i, welche den obigen m Gleichungen

einer Umgebung der Stelle x_0 vom Radius δ nicht verschwinden und das Vorzeichen von

$$\sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik})_0 \zeta_i^{(0)} \zeta_k^{(0)}$$

besitzen.

Sind

$$v_1, v_2 \ldots v_{n+1}$$

$(n+1)$ in der erwähnten Umgebung von x_0 linear unabhängige Functionen des x, also etwa die Glieder eines Fundamentalsystems einer homogenen linearen Differentialgleichung der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, die in dieser Umgebung keine singuläre Stelle besitzt, und

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1}$$

willkürliche Constante, so genügt jedes der $(n+1)$ Systeme

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1 v_1 \zeta_1, & \alpha_1 v_1 \zeta_2, & \ldots & \alpha_1 v_1 \zeta_n \\
\alpha_2 v_2 \zeta_1, & \alpha_2 v_2 \zeta_2, & \ldots & \alpha_2 v_2 \zeta_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{n+1} v_{n+1} \zeta_1, & \alpha_{n+1} v_{n+1} \zeta_2, & \ldots & \alpha_{n+1} v_{n+1} \zeta_n
\end{array}$$

ebenfalls den m Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} Z_i = 0$$

$$k = 1, 2 \ldots m,$$

wenn man hierin für $Z_1, Z_2 \ldots Z_n$ bezüglich die aufeinanderfolgenden Glieder eines der obigen Systeme setzt.

Also werden diese Gleichungen auch durch

$$Z_i = \zeta_i \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k v_k$$

befriedigt. Zu den so construirten

$$Z_1, Z_2 \ldots Z_n$$

sollen nun die zugehörigen $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ gefunden werden.

Ist

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2 \dots u^n, \rho^n$$

ein conjugirtes System, dessen Determinante in x_0 nicht verschwindet (XVI, 2), so verschwindet sie auch in einer gewissen Umgebung von x_0 nicht. Der frühere Radius δ werde nun so klein genommen, dass in der Umgebung der Stelle x_0 vom Radius δ:

erstens

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\zeta_i\zeta_k$$

nirgends verschwindet und überall das Vorzeichen von

$$\sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik})_0\, \zeta_i^0 \zeta_k^0$$

hat und zweitens

$$\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \dots u_n^n = U$$

nirgends Null wird.

Sind x_1 und x_2, wo $x_1 \leqq x \leqq x_2$, zwei Stellen dieser Umgebung, so sollen die gesuchten

$$\eta_{i1}, \eta_{i2} \dots \eta_{in}$$

so bestimmt werden, dass sie in x_1 und x_2 verschwinden.

Um sie zu berechnen, hat man zunächst das System der n linearen Differentialgleichungen

$$\left|\begin{matrix} \eta_{i\nu}', & \eta_{i1} \dots \eta_{in} \\ (u_\nu^1)', & u_1^1 \dots u_n^1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ (u_\nu^n)', & u_1^n \dots u_n^n \end{matrix}\right| = UZ_\nu$$

$$\nu = 1, 2 \dots n$$

zu integriren. Setzt man zu dem Behufe

$$\eta_{ii} = \sum_{k=1}^{n} r_k u_i^k,$$

$$i = 1, 2 \dots n,$$

wo die

$$r_1, r_2 \ldots r_n$$

noch unbekannte Grössen sind, so erhält man zu ihrer Bestimmung

$$\sum_{k=1}^{n} u_\mu^k \frac{dr_k}{dx} = Z_\mu$$

$$\mu = 1, 2 \ldots n.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{dr_k}{dx} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{U_\mu^k}{U} Z_\mu$$

$$k = 1, 2 \ldots n,$$

wenn man mit U_μ^k die Subdeterminante des Elementes u_μ^k in

$$\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n$$

bezeichnet.

Daher ist

$$r_k = \sum_{\mu=1}^{n} \int_{x_1}^{x} \frac{U_\mu^k}{U} Z_\mu dx$$

und

$$\eta_i = \sum_{k,\mu=1}^{n} u_i^k \int_{x_1}^{x} \frac{U_\mu^k}{U} Z_\mu dx.$$

Die so gefundenen

$$\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$$

verschwinden bloss in x_1; man kann nun aber die darin enthaltenen willkürlichen Constanten

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1}$$

so bestimmen, dass sie auch in x_2 verschwinden. Man hat zu dem Ende bloss diesen Constanten solche Werthe zu ertheilen, dass die

$$r_1, r_2 \ldots r_n$$

ausser in x_1 auch in x_2 Null werden, also das System der n homogenen linearen Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n+1} \alpha_\lambda \int_{x_1}^{x_2} v_\lambda \left(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{U_\mu^k}{U} \zeta_\mu \right) dx = 0$$

$$k = 1, 2 \ldots n$$

nach den

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1}$$

aufzulösen. Bekanntlich besteht mindestens ein Lösungssystem, von dem nicht sämmtliche Glieder Null sind.

Die vermöge dieser Werthe der

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1}$$

gefundenen

$$\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$$

können nicht alle im ganzen Intervalle $x_1 x_2$ identisch Null sein. Denn dann müssten auch die sämmtlichen

$$Z_1, Z_2 \ldots Z_n$$

in $x_1 x_2$ identisch Null sein, es müsste also

$$\zeta_i \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k v_k = 0$$

$$i = 1, 2 \ldots n$$

im ganzen Intervalle $x_1 x_2$ sein. Da aber nach Voraussetzung die

$$\zeta_1^0, \zeta_2^0 \ldots \zeta_n^0$$

nicht alle Null sind und die

$$\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$$

in x_0 stetig sind, so müsste für eine gewisse Umgebung von x_0

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k v_k = 0$$

sein: es wären also dann die

$$v_1, v_2 \ldots v_{n+1}$$

nicht linear unabhängig, was der früheren Festsetzung widerspricht.

Die

$$\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$$

genügen auch den m Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \eta'_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \eta_i \right) = 0$$

$$k = 1, 2 \ldots m,$$

da dieselben eine Folge von

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} Z_i = 0$$

$$k = 1, 2 \ldots m$$

sind. Bezeichnet man daher mit ε eine differentiale Grösse, so kann man den

$$y_1, y_2 \ldots y_n$$

in der Strecke $x_1 x_2$ bezüglich die Variationen

$$\varepsilon\eta_1, \varepsilon\eta_2 \ldots \varepsilon\eta_n$$

ertheilen. Die zugehörige zweite Variation des Integrals ist dann

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} Z_i Z_k \right) dx$$

$$= \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k v_k \right)^2 \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \zeta_i \zeta_k \right) dx$$

und ist also, da der erste Factor nicht verschwindet und

$$\sum_{i,k} a_{ik} \zeta_i \zeta_k$$

im ganzen Intervalle $x_1 x_2$ kein anderes als das Vorzeichen von

$$\sum_{i,k} (a_{i,k})_0 \zeta_i^0 \zeta_k^0$$

besitzt, nicht Null und hat dasselbe Vorzeichen wie

$$\sum_{i,k} (a_{i,k})_0 \zeta_i^0 \zeta_k^0 .$$

Man gelangt somit zur Erkenntniss:

Wird den m Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \zeta_i = 0$$
$$k = 1, 2 \ldots m$$

an der Stelle x_0 durch die Grössen

$$\zeta_1^0, \zeta_2^0 \ldots \zeta_n^0$$

genügt und ist die Form

$$\sum_{i,k} (a_{ik})_0 \zeta_i^0 \zeta_k^0$$

nicht Null, so kann man stets den Veränderlichen

$$y_1, y_2 \ldots y_n$$

Variationen ertheilen, deren zweite Variation des Integrals dasselbe Vorzeichen wie

$$\Sigma (a_{ik})_0 \zeta_i^0 \zeta_k^0$$

hat.

Hieraus folgt:

Die zweiten Variationen des Integrals können nur dann einerlei Zeichen haben, wenn die Form

$$\sum_{i,k} (a_{ik})_0 \zeta_i^0 \zeta_k^0$$

für die sämmtlichen Systeme

$$\zeta_1^0, \zeta_2^0 \ldots \zeta_n^0,$$

welche in x_0 den m Bedingungsgleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \zeta_i^0 = 0$$
$$k = 1, 2 \ldots m$$

genügen, nicht verschiedene Vorzeichen annimmt.

Da aber die Determinante Δ in x_0 nicht Null ist, so folgt weiters:

Die Form

$$\sum_{i,k} (a_{ik})_0 \zeta_i^0 \zeta_k^0$$

muss für die zulässigen Systeme

$$\zeta_1^0, \zeta_2^0 \ldots \zeta_n^0$$

definit sein. Man hat also den Satz:

Die zweiten Variationen des Integrals können nur dann einerlei Zeichen haben, wenn die Form

$$\sum_{i,k} (a_{ik})_0 \zeta_i \zeta_k$$

für alle Systeme

$$\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n,$$

welche den m Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \zeta_i = 0$$

$$k = 1, 2 \ldots m$$

genügen, in jedem einzelnen Punkte des Integrationsintervalls definit ist.

Wäre die obige Form in verschiedenen Punkten des Integrationsintervalls nicht von derselben Art definit, so liessen sich Variationen der Variablen

$$y_1, y_2 \ldots y_n$$

herstellen, denen verschieden bezeichnete, zweite Variationen des Integrals entsprächen. Man gelangt so schliesslich zu dem Satze:

Die zweiten Variationen des Integrals können nur dann einerlei Vorzeichen haben, wenn die quadratische Form

$$W'(x) = \sum_{i,k} a_{ik} \zeta_i \zeta_k,$$

wo die

$$\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$$

den m Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \zeta_i = 0$$

$$k = 1, 2 \ldots m$$

genügen, in jedem Punkte des Integrationsintervalls definit und in allen Punkten von derselben Art ist.

Diese nothwendige Bedingung soll als die erste nothwendige Bedingung (I) für die Permanenz des Vorzeichens der zweiten Variation des Integrals bezeichnet und im Folgenden immer als erfüllt vorausgesetzt werden, wenn nicht ausdrücklich hievon abgesehen wird.

2. Man könnte versuchen, wie es Scheffer that, den Satz in der Weise abzuleiten, dass man, wie ich mich kurz ausdrücken will, unstetige oder gebrochene Variationen zulässt und benützt, d. h. solche, bei denen wohl die $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ im ganzen Verlaufe $\alpha\beta$ des x stetig sind, aber nicht mehr alle ihre ersten Derivirten $\eta_1', \eta_2' \ldots \eta_n'$, die an einer oder mehreren Stellen desselben unstetig werden. Solche Variationen hat zuerst Weierstrass in seinen Vorlesungen über Variationsrechnung für die Untersuchung des einfachsten Falles der Variationsrechnung, in dem also die Function unter dem Integralzeichen ausser der gesuchten Function nur ihre erste Derivirte enthält und des einfachsten isoperimetrischen Problems in äusserst fruchtbringender Weise verwerthet.

Es wird hier ein Beweis auf dieser Grundlage nicht etwa geführt werden, sondern es sollen nur die Voraussetzungen, auf denen er beruht, klar aufgewiesen werden.

Sind $x_0 - h$ und $x_0 + h$ die beiden angenommenen Punkte, so bilde man Variationen $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$, die sämmtlich in $x_0 - h$ verschwinden und in x_0 bezüglich die vorgegebenen Werthe $\zeta_1^0, \zeta_2^0 \ldots \zeta_n^0$ annehmen, dann Variationen $\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2 \ldots \overline{\eta}_n$, die in $x_0 + h$ verschwinden und in x_0 der Reihe nach dieselben vorgegebenen Werthe besitzen. Ein System solcher Variationen

erhält man in einfacher Weise durch Benützung der den Punkten $x_0 - h$ und $x_0 + h$ conjugirten Systeme.

Nimmt man an, dass $\Delta(x, x_0)$ für jedes x_0 eine Umgebung des x_0 mit nur isolirten Nullstellen besitzt, — was sich später erst als eine Folge des zu beweisenden Satzes herausstellen wird — so wähle man $x_0 - h$ und $x_0 + h$ in der Umgebung von x_0, in welcher $\Delta(x, x_0)$ keine weitere Nullstelle als x_0 hat, dann ist

$$\Delta(x_0 - h, x_0) \neq 0 \text{ und } \Delta(x_0 + h, x_0) \neq 0,$$

daher auch

$$\Delta(x_0, x_0 - h) \neq 0 \text{ und } \Delta(x_0, x_0 + h) \neq 0.$$

Bezeichnet man mit

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n \rho^n$$

das zu $x_0 - h$ und mit

$$v^1, r^1; v^2, r^2 \ldots v^n r^n$$

das zu $x_0 + h$ conjugirte System, so wird also weder

$$\Delta(x, x_0 - h) = \Sigma \pm u_1^1 u^2 \ldots u_n^n,$$

noch

$$\Delta(x, x_0 + h) = \Sigma \pm v_1^1 v_2^2 \ldots v_n^n$$

in x_0 verschwinden. Man wird daher die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ in

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \alpha_1 u_1^1 + \alpha_2 u_1^2 + \ldots + \alpha_n u_1^n \\ \eta_2 &= \alpha_1 u_2^1 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_n u_2^n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n &= \alpha_1 u_n^1 + \alpha_2 u_n^2 + \ldots + \alpha_n u_n^n \end{aligned}$$

und die $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ in

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= \beta_1 v_1^1 + \beta_2 v_1^2 + \ldots + \beta_n v_1^n \\ \bar{\eta}_2 &= \beta_1 v_2^1 + \beta_2 v_2^2 + \ldots + \beta_n v_2^n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{\eta}_n &= \beta_1 v_n^1 + \beta_2 v_n^2 + \ldots + \beta_n v_n^n \end{aligned}$$

so bestimmen können, dass sie in x_0 bezüglich die vorgegebenen Werthe $\zeta_1^0, \zeta_2^0 \ldots \zeta_n^0$ annehmen.

Da sowohl die $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$, als auch $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2 \ldots \bar{\eta}_n$ den m Bedingungsgleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} z_i' + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} z_i\right) = 0$$

$$k = 1, 2 \ldots n$$

genügen, weil dies von den u und v gilt, so kann man den $y_1, y_2 \ldots y_n$ in $x_0 - h$ bis $x_0 + h$ die folgende Variation ertheilen: Längs der Strecke $x_0 - h$ bis x_0 ändert man sie in $y_1 + \eta_1$, $y_2 + \eta_2 \ldots y_n + \eta_n$ und längs des Restes x_0 bis $x_0 + h$ in $y_1 + \bar{\eta}_1$ $y_2 + \bar{\eta}_2 \ldots y_n + \bar{\eta}_n$. Betrachtet man nun die Gesammtänderung, die das Integral durch diese Variation erfährt, so ergibt sich, dass die erste Variation desselben Null ist, und für die zweite $\delta^2 J$ erhält man X,

$$\delta^2 J = \int_{x_0 - h}^{x_0} \Omega(\eta, \eta') dx + \int_{x_0}^{x_0 + h} \Omega(\bar{\eta}, \bar{\eta}') dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\eta_k \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_k'} - \bar{\eta}_k \frac{\partial \Omega(\bar{\eta}, \bar{\eta}')}{\partial \bar{\eta}_k'} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} (r_i \bar{\eta}_k - r_i \eta_k)\right]_{x = x_0}$$

$$+ \int_{x_0 - h}^{x_0} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \psi_i(\eta, \rho') dx + \int_{x_0}^{x_0 + h} \sum_{i=1}^{n} \bar{\eta}_i \psi_i(\bar{\eta}, r') dx,$$

wenn man mit ρ' die zu den η und mit r' die zu den $\bar{\eta}$ gehörigen zweiten Glieder bezeichnet. Da nun

$$\psi_i(\eta, \rho') = \psi_i(\bar{\eta}, r') = 0$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \zeta_k^{0} = 0$$

ist, so wird

$$\delta^2 J = \sum_{k=1}^{n} \left[\eta_k \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_k'} - \bar{\eta}_k \frac{\partial \Omega(\bar{\eta}, \bar{\eta}')}{\partial \bar{\eta}_k'}\right]_{x = x_0}.$$

Wegen

$$(\eta_k)_0 = (\bar{\eta}_k)_0 = \zeta_k^{0}$$

vereinfacht sich dieser Ausdruck in

$$\delta^2 J = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_k \partial \eta'_i} (\eta_k \eta'_i - \bar{\eta}_k \bar{\eta}'_i) \right\}_{x=x_0}$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik})_0 (\bar{\eta}_k \eta'_i - \eta_k \bar{\eta}'_i)_0,$$

wo die unten angehängte Null anzeigen soll, dass der Werth der betreffenden Grössen in x_0 zu nehmen ist.

Geht man nun von x_0 zu $x_0 + \lambda$ über, so ist

$$\eta_k = (\eta_k)_0 + (\eta'_k)_0 \lambda + \varepsilon_k \lambda^2 = \zeta_k^0 + (\eta'_k)_0 \lambda + \varepsilon_k \lambda^2,$$

wo ε_k einen Mittelwerth von η''_k zwischen x_0 und $x_0 + \lambda$ bedeutet, der also eine endliche Grösse ist.

Daher ist für $\lambda = -h$

$$0 = \zeta_k^0 - (\eta'_k)_0 h + \varepsilon_k h^2 \quad \text{oder} \quad (\eta'_k)_0 h = \zeta_k^0 + \varepsilon_k h^2$$

und analog

$$0 = \zeta_k^0 + (\bar{\eta}'_k) h + \bar{\varepsilon}_k h^2 \quad \text{oder} \quad (\bar{\eta}'_k) h = -\zeta_k^0 - \bar{\varepsilon}_k h^2.$$

Somit ist

$$h \delta^2 J = \sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik})_0 [(\eta_k)_0 h (\eta'_i)_0 - (\eta_k)_0 h (\bar{\eta}'_i)_0]$$

$$= \sum_{i,k} (a_{ik})_0 [\zeta_k^0 (\zeta_k^0 + \varepsilon_i h^2) + \zeta_k^0 (\zeta_i^0 + \bar{\varepsilon}_i h^2)]$$

$$= \sum_{i,k} (a_{ik})_0 \zeta_i^0 \zeta_k^0 + h^2 \sum_{i,k} \zeta_k^0 (\varepsilon_i + \bar{\varepsilon}_i).$$

Um hieraus einen Schluss ziehen zu können, wäre es zunächst nothwendig, zu beweisen, was Scheeffer nicht gelang, dass die Grössen

$$\varepsilon_i \text{ und } \bar{\varepsilon}_i$$

für unendlich klein werdende h selbst endlich bleiben. Ist dies erwiesen, so geht aus der Formel wieder hervor, dass, wenn h genügend klein genommen wird, $h\delta^2 J$, und da h eine positive Grösse ist, $\delta^2 J$ selbst das Zeichen von $W(x_0)$ annimmt. Hiemit hätte man die Prämisse, aus der in (1) alle weiteren Folgerungen sich ergaben, wieder erlangt.

XVIII.

Die früher erhaltene Bedingung, wonach die Transformation der zweiten Variation des Integrals nur dann möglich ist, wenn ein conjugirtes Integralsystem existirt, dessen Determinante im ganzen Integrationsintervall nicht verschwindet, soll nun auf seine Bedeutung näher geprüft werden.

Bilden die n Integralsysteme

$$v^1, r^1; v^2, r^2 \ldots v^n, r^n$$

das dem Punkte x_0, wo $a \leqq x_0 \leqq b$ ist, conjugirte System und verschwindet seine Determinante $\Delta(x, x_0)$ ausser in x_0 auch in x_1, so existirt immer mindestens ein Integralsystem z, r, dessen sämmtliche Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ sowohl in x_0, als auch x_1 verschwinden. Denn die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ in

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha_1 v_1^1 + \alpha_2 v_1^2 + \ldots + \alpha_n v_1^n \\ z_2 &= \alpha_1 v_2^1 + \alpha_2 v_2^2 + \ldots + \alpha_n v_2^n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= \alpha_1 v_n^1 + \alpha_2 v_n^2 + \ldots + \alpha_n v_n^n \end{aligned}$$

lassen sich, da

$$(\Sigma \pm v_1^1 v_2^2 \ldots v_n^n)_{x_1} = \Delta(x_1, x_0) = 0$$

ist, stets so bestimmen, dass $z_1, z_2 \ldots z_n$ in x_1 Null werden.

Aber auch umgekehrt: Verschwinden die Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ eines Integralsystems z, r sowohl in x_0, als auch x_1 und hängen sie mit den Integralsystemen $u^1, u^2 \ldots u^n$ von n unabhängigen Systemen

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

linear zusammen, so muss $\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n$ sowohl in x_0, als auch x_1 verschwinden.

Verschwinden also $z_1, z_2 \ldots z_n$ sowohl in x_0, als auch x_1, ist aber die Determinante

$$\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n) = \Sigma u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n$$

von irgend n unabhängigen Integralsystemen

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

weder in x_0, noch x_1 Null, so sind das Integralsystem z, r und die Integralsysteme

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

linear von einander unabhängig.

Nun existiren, wie früher nachgewiesen wurde, conjugirte Systeme, deren Determinante in einem beliebig gegebenen Punkte nicht verschwindet. Ist

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

ein solches, dessen Determinante $\Delta(u^1, u^2 \ldots u_n)$ in x_0 nicht Null ist, so hängen diese Integralsysteme mit dem Systeme z, r, von dem $z_1, z_2 \ldots z_n$ in x_0 verschwinden, nicht linear zusammen, und daher können nicht sämmtliche $\psi(z, r; u^k, \rho^k)$ Null sein, da nach (XI) sonst z, r von

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

linear abhängig wäre. Es lässt sich dann zeigen, dass aus den $u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$ sich n andere Integralsysteme bilden lassen, von denen je zwei zu einander und nur $n-1$ zum Integralsystem z, r conjugirt sind.

Diese Erkenntniss allein würde aber für weitere Untersuchungen nicht genügen, wenn nicht zugleich dargelegt werden könnte, dass unter gewissen Bedingungen die Determinante des neu gebildeten conjugirten Systems ausserhalb x_0 nicht überall verschwindet. Als eine solche hinreichende Bedingung ergibt sich, wenn man die Bedingung I in XVII

noch nicht als erfüllt annimmt, dass eine Stelle ξ bestehe, in der weder $\Delta(x, x_0)$, noch $\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n$ verschwindet[1] Ist

$$v^1, r^1; v^2, r^2 \ldots v^n, r^n$$

das der Stelle ξ conjugirte System, so ist

$$\Delta(\xi, x_0) = \pm \Delta(x_0, \xi) \neq 0,$$

d. h. $\Delta(x, \xi)$ verschwindet nicht in x_0.

Die $2n$ Systeme

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n \qquad v^1, r^1; v^2, r^2 \ldots v^n r^n$$

sind dann linear unabhängig und bilden ein Fundamentalsystem, da, wenn dies nicht der Fall wäre, $\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n$ in ξ Null wäre. Vermöge dieses Fundamentalsystems werde das gesuchte System durch

$$z = a_1 u^1 + \ldots + a_n u^n + b_1 v^1 + \ldots + b_n v^n$$
$$r = a_1 \rho^1 + \ldots + a_n \rho^n + b_1 r^1 + \ldots + b_n r^n$$

ausgedrückt, woraus sich die einzelnen Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ ergeben, indem man den unteren Index des betreffenden z den $u^1, u^2 \ldots u^n, v^1, v^2 \ldots v^n$ unten anfügt.

Sowohl von den $a_1, a_2 \ldots a_n$, als auch von den $b_1, b_2 \ldots b_n$ können hierin nicht sämmtliche Grössen Null sein. Denn wäre z. B. letzteres der Fall, so würde aus

$$z = a_1 u^1 + \ldots + a^n u^n$$

folgen, dass $\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n$ in x_0 Null sei, da $z_1, z_2 \ldots z_n$ daselbst verschwinden; aus der ersteren Annahme hingegen würde in derselben Weise $\Delta(x_0, \xi) = 0$ folgen, welche beide Consequenzen den Voraussetzungen widersprächen.

[1] Die folgenden Auseinandersetzungen bis (2) gelten der Frage, inwieweit aus den blossen Eigenschaften des accessorischen Gleichungssystems geschlossen werden kann, dass die Determinante des einem Punkte conjugirten Systems in ihm nicht identisch verschwindet. In (2) wird dann dieselbe Frage unter der Annahme, dass die nothwendige Bedingung I bereits erfüllt sei, behandelt.

Wenn daher nicht schon im Vorhinein die sämmtlichen $a_1, a_2 \ldots a_n$ von Null verschieden sind, so kann man dies durch eine lineare Transformation des conjugirten Systems

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2 \ldots u^n \rho^n$$

erreichen, wodurch an seine Stelle nur ein anderes aus derselben Gruppe tritt. Man darf daher im Folgenden immer annehmen, dass keines der $a_1, a_2 \ldots a_n$ Null ist.

Nun bilde man n neue Systeme

$$z^1, R_1;\ z^2, R^2 \ldots z^n, R^n$$

mit Benützung der $2n^2$ unbestimmten Grössen

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 \ldots \alpha_n^1, & \beta_1^1 \ldots \beta_n^1 \\ \alpha_1^2 \ldots \alpha_n^2, & \beta_1^2 \ldots \beta_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^n \ldots \alpha_n^n, & \beta_1^n \ldots \beta_n^n \end{vmatrix},$$

indem man

$$z^\mu = \alpha_1^\mu u^1 + \ldots + \alpha_n^\mu u^n + \beta_1^\mu v^1 + \ldots + \beta_n^\mu v^n$$

setzt. Unterwirft man die

$$\alpha_1^1 \ldots \alpha_n^1,\ \alpha_1^2 \ldots \alpha_n^2; \ldots . \alpha_1^n \ldots \alpha_n^n$$

der Bedingung, dass $A = \Sigma \pm \alpha_1^1 \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^n$ nicht Null ist, so ergibt sich hieraus, wenn mit A_k^μ die Subdeterminante von α_k^μ in A bezeichnet wird,

$$Au^k = \sum_{\mu=1}^{n} A_k^\mu z^\mu - \sum_{\lambda, \mu=1}^{n} \beta_\lambda^\mu A_k^\mu v^\lambda$$

und z geht dann in

$$z = \sum_{\mu=1}^{n} (\varepsilon_\mu z^\mu + \varepsilon'_\mu v^\mu)$$

über, wo

$$\varepsilon_\mu = \frac{a_1 A_1^\mu + a_2 A_2^\mu + \ldots + a_n A_n^\mu}{A}$$

gesetzt wurde.

Setzt man nun

$$\beta_1^1 = \ldots = \beta_n^1 = \beta_1^2 = \ldots = \beta_1^{n-1} = \ldots = \beta_n^{n-1} = 0$$

und lässt die $\beta_1^n, \beta_2^n \ldots \beta_n^n$ willkürlich, so wird

$$\psi(z^\mu, R^\mu; z^\nu, R^\nu) = 0$$

für $\mu, \nu = 1, 2 \ldots n-1$,

also sind je zwei der Integralsysteme

$$z^1, R^1; z^2, R^2 \ldots z^{n-1} R^{n-1}$$

zu einander conjugirt. Bezeichnet man $\psi(z, r; z^\mu, R^\mu)$ mit c_μ, so ergibt sich

$$c_\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\mu \psi(z, r; u^k, \rho^k) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_k^\mu b_i \psi(v^i, r^i; u^k, \rho^k)$$

für $\mu = 1, 2 \ldots n-1$ und

$$c_n = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_k^n b_i \psi(v^i, r^i; u^k, \rho^k) + \sum_{i,k=1}^{n} \beta_k^n a_i \psi(u^i, \rho^i; v^k, r^k).$$

Die

$$\alpha_1^1 \ldots \alpha_n^1 \ldots \alpha_1^n \ldots \alpha_n^n$$

bestimme man nun gemäss den Bedingungen

$$c_\mu = 0 \qquad \mu = 1, 2 \ldots n-1,$$

was immer möglich ist. Denn die Determinante

$$\Psi = \begin{vmatrix} \psi(v^1, r^1; u^1, \rho^1); & \psi(v^2, r^2; u^1, \rho^1) \ldots & \psi(v^n, r^n; u^1, \rho^1) \\ \psi(v^1, r^1; u^2, \rho^2); & \psi(v^2, r^2; u^2, \rho^2) \ldots & \psi(v^n, r^n; u^2, \rho^2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi(v^1, r^1; u^n, \rho^n); & \psi(v^2, r^2; u^n, \rho^n) \ldots & \psi(v^n, r^n; u^n, \rho^n) \end{vmatrix}$$

ist die Determinante des Fundamentalsystems

$$u^1, \rho^1 \ldots u^n, \rho^n; v^1, r^1 \ldots v^n r^n,$$

daher kann sie nach (XIV) nicht Null sein, und da überdies nicht alle $b_1, b_2 \ldots b_n$ Null sind, so muss in c_μ mindestens einer der Coëfficienten von $\alpha_1^\mu, \alpha_2^\mu \ldots \alpha_n^\mu$ von Null verschieden sein. Ist etwa

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \psi(v^i, r^i; u^1, \rho^1) \neq 0,$$

so lassen sich aus den obigen $(n-1)$ Gleichungen die $\alpha_1^1, \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^{n-1}$ bestimmen, während die übrigen α willkürlich bleiben.

Aus den Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\mu \sum_{k=1}^{n} b_i \psi(v^i, r^i; u^k, \rho^k) = 0 \qquad \mu = 1, 2 \ldots \mu - 1$$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n \sum_{i=1}^{n} b_i \psi(v^i, r^i; u^k, \rho^k) + \sum_{i,k} \beta_k^n a_i \psi(u^i, \rho^i; v^k, r^k)$$

ergibt sich

$$c_n A_k^n = A \sum_{i=1}^{n} b_i \psi(v^i, r^i; u^k, \rho^k) +$$

$$+ A_k^n \sum_{i,k} \beta_k^n a_i \psi(u^i, \rho^i; v^k, r^k),$$

woraus

$$c_n \varepsilon_n = c_n \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k A_k^n}{A} = \sum_{i,k=1}^{n} \psi(v^i, r^i; u^k, \rho^k) b_i a_k$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k A_k^n}{A} \right) \sum_{i,k=1}^{n} \psi(u^i, \rho^i; v^k, r^k) \beta_k^n a_i$$

folgt. Die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k^n \sum_{i=1}^{n} \psi(u^i, \rho^i; v^k, r^k) a_i$$

ist nicht identisch Null, da die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(u^i, \rho^i; v^k, r^k) a_i = 0$$

$$k = 1, 2 \ldots n$$

wegen $\Psi \neq 0$ und weil nicht alle $a_1, a_2 \ldots a_n$ Null sind, nicht zusammen bestehen können. Sie wird also durch Wahl der willkürlichen $\beta_1^n, \beta_2^n \ldots \beta_n^n$ jeden beliebigen Werth erhalten können. Da auch A_1^n vollständig willkürlich und a_1 nicht Null ist, so kann man stets dem A_1^n einen solchen von Null verschiedenen Werth beilegen, dass $\sum_{k=1}^{n} a_k A_k^n$ nicht Null wird. Man vermag somit durch Wahl der $\beta_1^n, \beta_2^n \ldots \beta_n^n$ dem $c_n \varepsilon_n$ jeden beliebigen von Null verschiedenen Werth zu ertheilen. Aber auch die Bedingung $A \neq 0$ kann man befriedigen. Denn es ist

$$A \sum_{i=1}^{n} b_i \psi(v^i, r^i; u^1, \rho^1) = \begin{vmatrix} c_1 & \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^1 \\ c_2 & \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ c_{n-1} & \alpha_2^{n-1} \ldots \alpha_n^{n-1} \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n \sum_{i=1}^{n} b_i \psi(v^i, r^i; u^k, \rho^k); & \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n \sum_{i=1}^{n} b_i \psi(v^i, r^i; u^k, \rho^k) . A_1^n,$$

da $c_1 = c_2 \ldots = c_{n-1} = 0$ ist. Nun ist $A_1^n \neq 0$ und die $\alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n$ in der nicht identisch verschwindenden Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n \sum_{i=1}^{n} b_i \psi(v^i, r^i; u^k, \rho^k)$$

sind ganz willkürlich. Daher kann man durch geeignete Wahl derselben stets bewirken, dass das Product auf der rechten Seite der Gleichung und daher A von Null verschieden ist.

Das so erhaltene System

$$z^1, R^1 \ldots z^{n-1}, R^{n-1}; z^n, R^n; v^1 r^1 \ldots v^n r^n$$

ist aber ein Fundamentalsystem, da die Determinante (IX, 2)

$$\begin{vmatrix} z_1^1, z_1^2 \ldots z_1^n; & v_1^1, v_1^2 \ldots v_1^n \\ z_2^1, z_2^2 \ldots z_2^n; & v_2^1, v_2^2 \ldots v_2^n \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ z_n^1, z_n^2 \ldots z_n^n; & v_1^n, v_2^n \ldots v_n^n \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = D$$

durch zeilenweise Multiplication der Determinante des Fundamentalsystems

$$\begin{matrix} u_1^1, u_1^2 \ldots u_1^n; & v_1^1, v_1^2 \ldots v_1^n \\ u_2^1, u_2^2 \ldots u_2^n; & v_2^1, v_2^2 \ldots v_2^n \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ u_n^1, u_n^2 \ldots u_n^n; & v_n^1, v_n^2 \ldots v_n^n \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{matrix}$$

mit

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1, \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^1; & \beta_1^1, \beta_2^1 \ldots \beta_n^1 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n; & \beta_1^n, \beta_2^n \ldots \beta_n^n \\ 0 \;\; 0 \ldots 0 & 1 \;\; 0 \ldots 0 \\ \cdots\cdots\cdots 0 & 1 \ldots\ldots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 \;\; 0 \ldots 0 & 0 \;\; 0 \ldots 1 \end{vmatrix} = A \neq 0$$

entsteht.

Bildet man nun $\varepsilon_n D$, indem man die n^{te} Colonne in D mit ε_n multiplicirt und darauf die bezüglich mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1}$, $\varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_n$ multiplicirten Colonnen zu ihr addirt, so geht $\varepsilon_n D$ in die Determinante der Systeme

$$z^1, R^1 \ldots z^{n-1}, R^{n-1};\; z, r;\; v^1, r^1 \ldots v^n, r^n$$

über, die also von Null verschieden ist. Somit bilden sie ein Fundamentalsystem, und daher kann in ξ, wo die letzten n Colonnen der Determinante mit den ersten n Zeilen lauter verschwindende Elemente gemeinsam haben, nicht auch die Determinante

$$\Sigma \pm z_1^1 \ldots z_{n-1}^{n-1}, z_n$$

verschwinden, da sonst alle nach (IX, 2) gebildeten Determinanten daselbst Null wären.

Beachtet man nun, dass

$$z^{\mu} = \alpha_1^{\mu} u^1 + \alpha_2^{\mu} u^2 + \ldots + \alpha_n^{\mu} u^n$$

sich ergab, dass

$$u^1, \rho^1; \; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

zur Gruppe des vorgelegten conjugirten Systems gehört und dass z, r zu allen unter einander conjugirten Systemen

$$z^1, R^1; \; z^2, R^2 \ldots z^{n-1}, R^{n-1}$$

conjugirt ist, so kann man diese Betrachtungen in den Satz zusammenfassen:

»Verschwinden an einer Stelle x_0 die Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ des Systems z, r, ist aber daselbst die Determinante des conjugirten Systems

$$u^1, \rho^1; \; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

nicht Null und ist unter den Nichtnullstellen dieser Determinante eine, ξ vorhanden, deren conjugirtes System eine in x_0 nicht verschwindende Determinante besitzt, so besteht in der Gruppe des letzteren ein System, von dem $(n-1)$ Integralsysteme mit z, r ein conjugirtes System bilden, dessen Determinante in ξ nicht Null ist.

Hat somit die Determinante des x_0 conjugirten Systems nur isolirte Nullstellen im Integrationsintervalle, so liegen in jeder noch so kleinen Umgebung von x_0 solche Stellen; verschwindet sie hingegen an jeder Stelle des Integrationsintervalls, so existiren keine derartigen Stellen.«

2. Dieser Satz wurde ohne Benützung der früher XVII gefundenen nothwendigen Bedingung (I) für die Permanenz des Zeichens der zweiten Variation bloss aus den allgemeinen Eigenschaften des accessorischen Systems linearer Differentialgleichung abgeleitet. Ist jedoch diese Bedingung erfüllt, so lässt sich zeigen, dass die im zweiten Theile des obigen Satzes über $\Delta(x, x_0)$ gemachte Voraussetzung, dass die Determinante $\Delta(x, x_0)$ des zu x_0 conjugirten Systems für alle Punkte einer Strecke nicht verschwindet, schon erfüllt ist.

Ist z, r ein Integralsystem, von dem die Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ in x_0 verschwinden und bilden

$$u^1, \rho^1;\; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

ein conjugirtes System, dessen Determinante in x_0 nicht verschwindet, so können z und $u^1, u^2 \ldots u^n$ nicht linear mit einander zusammenhängen. Man kann nun aus diesem conjugirten Systeme durch lineare Transformation der Glieder ein neues

$$z^1, r^1;\; z^2, r^2 \ldots z^n, r^n$$

bilden, in dem $(n-1)$ Integralsysteme etwa

$$z^1, r^1;\; z^2, r^2 \ldots z^{n-1}, r^{n-1}$$

zu z, r conjugirt sind, aber nicht z^n, r^n.

Man hat zu dem Behufe die

$$\alpha_1^1, \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^1 \ldots \alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n$$

in

$$\begin{aligned} z^k &= \alpha_1^k u_1 + \alpha_2^k u^2 + \ldots + \alpha_n^k u^n \\ r^k &= \alpha_1^k \rho^1 + \alpha_2^k \rho^2 + \ldots + \alpha_n^k \rho^n \\ k &= 1, 2 \ldots n \end{aligned}$$

bloss den Bedingungen zu unterwerfen

$$\begin{aligned}
\psi(z, r; z^1, r^1) &= \alpha_1^1 \psi(z, r; u^1, \rho^1) + \alpha_2^1 \psi(z, r; u^2, \rho^2) + \ldots + \alpha_n^2 \psi(z, r; u^n, \rho^n) = 0 \\
\psi(z, r; z^2, r^2) &= \alpha_1^2 \psi(z, r; u^1, \rho^1) + \alpha_2^2 \psi(z, r; u^2, \rho^2) + \ldots + \alpha_n^2 \psi(z, r; u^n, \rho^n) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi(z, r; z^{n-1}, r^{n-1}) &= \alpha_1^{n-1} \psi(z, r; u^1, \rho^1) + \alpha_2^{n-1} \psi(z, r; u^2, \rho^2) + \ldots + \alpha_n^{n-1} \psi(z, r; u^n, \rho^n) = 0 \\
\psi(z, r; z^n, r^n) &= \alpha_1^n \psi(z, r; u^1, \rho^1) + \alpha_2^n \psi(z, r; u^2, \rho^2) + \ldots + \alpha_n^n \psi(z, r; u^n, \rho^n) \neq 0.
\end{aligned}$$

Da das Integralsystem z, r nicht zu sämmtlichen Integralsystemen des conjugirten Systems conjugirt sein kann, da sonst zwischen z, r und

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

eine lineare Relation bestünde, so muss von den n Grössen

$$\psi(z, r;\ u^1, \rho^1),\ \psi(z, r;\ u^2, \rho^2) \ldots \psi(z, r;\ u^n, \rho^n)$$

mindestens eine von Null verschieden sein. Ist etwa $\psi(z, r; u^1, \rho^1) \neq 0$, so lassen sich aus den $(n-1)$ ersten der obigen Gleichungen

$$\alpha_1^1, \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^{n-1}$$

bestimmen, während alle anderen α willkürlich bleiben. Wählt man daher diese so, dass in

$$\Sigma \pm \alpha_1^1 \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^n = A$$

die Subdeterminante A_1^n des Elementes α_1^n nicht Null wird und nimmt man auch dieses selbst von Null verschieden an, so ist

$$A\psi(z, r;\ u^1, \rho^1) = \alpha_1^n A_1^n \neq 0$$

und daher auch $A \neq 0$. Die gestellte Aufgabe ist somit gelöst, und man hat nun die beiden conjugirten Systeme

$$z^1, r^1;\ z^2, r^2 \ldots z^{n-1}, r^{n-1};\ z^n, r^n$$
$$z^1, r^1;\ z^2, r^2 \ldots z^{n-1}, r^{n-1};\ z, r.$$

Auf diese kann man nun die Formel 9 in (XI, 2) anwenden und erhält dann

$$\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)\Delta'(z_1 \ldots z^{n-1}, z) - \Delta'(z^1, z^2 \ldots z^n)\Delta(z_1^1 \ldots z^{n-1}, z)$$
$$= \frac{1}{\psi(z, r;\ z^n, \rho^n)} \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z), \qquad (1)$$

wo

$$\chi_\lambda(z) = \begin{vmatrix} z_\lambda^1, & z_1 \ldots z_n \\ (z_\lambda^1)', & z_1^1 \ldots z_n^1 \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ (z_\lambda^n)', & z_1^n \ldots z_n^n \end{vmatrix} \qquad (2)$$

und

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_\lambda} \chi_\lambda(z) = 0$$

$$k = 1, 2 \ldots m$$

ist. Da nun die auf der rechten Seite der Gleichung stehende quadratische Form der $\chi_1(z), \chi_2(z) \ldots \chi_n(z)$ in jedem Punkte des Integrationsintervalls nach XVII, I definit ist, so verschwindet sie dann und nur dann in allen Punkten einer Strecke, wenn in derselben überall

$$\chi_1(z) = \chi_2(z) = \ldots = \chi_n(z) = 0$$

ist, d. h. wenn $z_1, z_2 \ldots z_n$ diesen n linearen Differentialgleichungen genügen. Man hat somit die Bemerkung:

Die quadratische Form

$$\sum_{\lambda, \mu = 1}^{n} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_\lambda} \chi_\lambda(z) = 0$$

$$k = 1, 2 \ldots m$$

verschwindet dann und nur dann identisch längs einer Strecke, wenn die Integralsysteme

$$z, r;\ u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

nicht linear unabhängig sind.

Im vorliegenden Falle verschwindet sie also wegen der gemachten Voraussetzungen in keiner noch so kleinen Strecke identisch, woraus weiter folgt:

Die Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ eines Systems z, r verschwinden in keiner Strecke des Integrationsintervalls alle zugleich identisch.

Bilden die n Integralsysteme

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

ein conjugirtes System, dessen Determinante in x_0 verschwindet, und ist z, r ein von diesen linear unabhängiges Integralsystem, dessen Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ nicht sämmtlich in x_0 Null sind, so erhält man in derselben Weise den Satz:

Die Determinante eines conjugirten Systems kann in keiner Strecke des Integrationsintervalls identisch verschwinden.

Sind speciell die im Problem vorkommenden Functionen durchwegs analytische, so hat also eine solche Determinante nur isolirte Nullstellen.

Verschwinden nun die $z_1, z_2 \ldots z_n$ ausser in x_0 noch in anderen Punkten alle zusammen und ist x_0' ein anderer im Integrationsintervalle gelegener derartiger Nullpunkt, so verschwindet $\Delta(z^1, z^2 \ldots z^{n-1}, z)$ ausser in x_0 auch in x_0'. Verschwindet $\Sigma \pm u^1, u^2 \ldots u^n_n$, das der Voraussetzung nach in x_0 nicht Null ist, auch in x_0' nicht, so verschwindet auch

$$\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n) = A\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$$

weder in x_0, noch x_0'. Würde nun $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$ auch nirgends innerhalb $x_0 x_0'$ verschwinden, so wäre dies auch mit $\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)$ der Fall, und man könnte obige Gleichung (1) durch $\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2$ dividiren.

Für die ganze Strecke x_0, x_0' (einschliesslich der Grenzen) würde also die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)} = \frac{1}{\psi(z, r; z^n, r^n)}\,\frac{\sum\limits_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2}$$

bestehen. Da in derselben auf der rechten und linken Seite endliche, stetige Functionen stünden, so ergäbe sich hieraus

$$\frac{1}{\psi(z, r; z^n, r^n)} \int_{x_0}^{x_0'} \frac{\sum\limits_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2}\, dx = \left[\frac{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z)}{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z^n)}\right]_{x_0}^{x_0'}$$
$$= 0,$$

was widersinnig ist, nachdem die quadratische Form und daher der ganze Ausdruck in der ganzen Strecke überall dasselbe Zeichen hat und daselbst nicht identisch Null ist. Man erhält also den Satz:

Verschwinden alle Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ eines Integralsystems z, r in zwei Punkten des Integrationsintervalls, so verschwindet die Determinante eines jeden conjugirten Systems, für die keiner der beiden Punkte eine Nullstelle ist, mindestens einmal innerhalb der von ihnen begrenzten Strecke.

Da also in diesem Falle die Determinante eines conjugirten Systems, die weder in x_0, noch x'_0 verschwindet, innerhalb $x_0 x'_0$ Null wird, so ergibt sich weiter:

Verschwinden alle Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ eines Integralsystems z, r in zwei Punkten des Integrationsintervalls, so verschwindet die Determinante eines jeden conjugirten Systems innerhalb der von den Punkten begrenzten Strecke oder an mindestens einer Grenze derselben. Die Transformation der zweiten Variation des Integrals in die reducirte Form ist in diesem Falle nicht durchwegs ausführbar.

Verschwinden alle Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ eines Integralsystems z, r in zwei Punkten x_0 und x'_0, so verschwindet auch $\Delta(x, x_0)$ in x'_0 und $\Delta(x, x'_0)$ in x_0, und umgekehrt verschwindet $\Delta(x, x_0)$ in x'_0, so besteht ein Integralsystem z, r, dessen sämmtliche Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ ausser in x_0 auch in x'_0 verschwinden. Man kann daher obigem Satze auch folgende Fassung geben:

Verschwindet die Determinante des einem Punkte conjugirten Systems ausser in diesem noch in einem zweiten Punkte des Integrationsintervalls, so verschwindet die Determinante eines jeden conjugirten Systems innerhalb oder an mindestens einer Grenze der von den Punkten bestimmten Strecke. Die Transformation der zweiten Variation des Integrals in die reducirte Form ist dann nicht immer möglich.

Wenn die Determinante $\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n$ des conjugirten Systems

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

in x_0 nicht verschwindet — und dass conjugirte Systeme, deren Determinante in x_0 nicht verschwindet, bestehen, wurde früher bewiesen — so existirt, da sie in x_0 stetig ist, eine Umgebung von x_0, in der sie nirgends verschwindet. Würde nun $\Delta(x, x_0)$ in jeder noch so kleinen Umgebung von x_0 einen Nullpunkt haben und nähme man diesen Punkt in der Umgebung von x_0, in der $\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n$ nicht Null ist, so hätte man nach obigem Satze den Widerspruch, dass diese Determinante zwischen x_0 und dem angenommenen Punkte verschwinden müsste. Daraus folgt also:

Zu jedem Punkte des Integrationsintervalls gehört eine Umgebung, innerhalb der die Determinante seines conjugirten Systems nur ihn zur Nullstelle hat.

Ist $x_0 < x_0'$ und nicht zugleich $x_0 = a$ und $x_0' = b$, so sei x_1 eine Stelle des Integrationsintervalls ausserhalb $x_0 x_0'$. Dann muss die Determinante des zu x_1 conjugirten Systems $\Delta(x, x_1)$ entweder in x_0 oder x_0' oder innerhalb $x_0 x_0'$ verschwinden. Die Anwendung dieser Bemerkung auf den Anfangspunkt a des Integrals führt somit zu folgender Einsicht:

Verschwindet die Determinante des Systems, das dem Anfangspunkte des Integrals conjugirt ist, innerhalb oder im Endpunkte des Integrationsintervalls, so verschwindet die Determinante eines jeden conjugirten Systems innerhalb oder an mindestens einer Grenze des Integrationsintervalls, und es gibt Variationen der Veränderlichen, für welche die zweite Variation des Integrals sich nicht in die reducirte Form überführen lässt.

XIX.

Verschwindet die Determinante $\Delta(x, a)$ des dem Anfangspunkte a conjugirten Systems weder innerhalb des Integrationsintervalls ab, noch an der oberen Grenze b, so kann auch die Determinante $\Delta(x, b)$ des dem Punkte b conjugirten Systems nicht innerhalb ab verschwinden, da anderenfalls nach den oben entwickelten Sätzen auch $\Delta(x, a)$ zwischen den beiden

Nullpunkten von $\Delta(x, b)$ oder in dem von b verschiedenen verschwinden müsste. Ferner ist wegen

$$\Delta(a, b) = \pm \Delta(b, a)$$

auch $\Delta(x, b)$ in a nicht Null, und somit verschwindet jede von den beiden Determinanten $\Delta(x, a)$ und $\Delta(x, b)$ nur im zugehörigen Endpunkte des Integrationsintervalls.

Wenn nun alle hier in Betracht kommenden Grössen zu beiden Seiten eines der Endpunkte a und b stetig sind, so lehrt der obige Satz am Schlusse von XVIII unmittelbar, dass unter der über $\Delta(x, a)$ gemachten Voraussetzung conjugirte Systeme bestehen, deren Determinanten im ganzen Integrationsintervalle nirgends verschwinden. Aber auch in dem Falle, wo an keinem der Endpunkte diese zweiseitige Stetigkeit statthat, lässt sich die Existenz solcher conjugirter Systeme nachweisen.

Ist zu dem Ende

$$u^1, \rho^1;\; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

ein dem Anfangspunkte a conjugirtes System, so ist es zu jedem dem Endpunkte b conjugirten Systeme wegen der Voraussetzung über $\Delta(x, a)$ linear unabhängig. Es lässt sich daher nach (XV, 2) zu obigem Systeme ein dem Punkte b conjugirtes construiren, das mit ihm ein involutorisches Fundamentalsystem bildet.

Wird dieses dem Punkte b conjugirte System mit

$$v^1, r^1;\; v^2, r^2 \ldots v^n, r^n$$

bezeichnet und sind hiebei

$$u^i, \rho^i \text{ und } v^{n+1-i}, r^{n+1-i}$$

die einander im involutorischen Fundamentalsysteme zugeordneten Integralsysteme, so bilden die Integralsysteme

$$c_1 v^1 + u^n.\; c_1 r^1 + \rho^n;\; c_2 v^2 + u^{n-1},\; c_2 r^2 + \rho^{n-1} \ldots c_n v^n + u^1,\; c_n r^n + \rho^1,$$

wo die $c_1, c_2 \ldots c_n$ willkürliche Grössen bezeichnen, wieder ein conjugirtes System. Denn es ist

$$\psi(c_i v^i + u^{n+1-i},\ c_i r^i + \rho^{n+1-i};\ c_k v^k + u^{n+1-k},\ c_k r^k + \rho^{n+1-k})$$
$$= c_i c_k \psi(v^i, r^i;\ v^k, r^k) + c_i \psi(v^i, r^i;\ u^{n+1-k}, \rho^{n+1-k})$$
$$+ c_k \psi(u^{n+1-i}, \rho^{n+1-i};\ v^k, r^k) + \psi(u^{n+1-i}, \rho^{n+1-i};\ u^{n+1-k}, \rho^{n+1-k}).$$

Auf der rechten Seite dieser Identität verschwindet nun jedes Glied, wenn $i \neq k$ ist; ist aber $i = k$, so zeigt schon der Anblick der linken Seite, dass der Ausdruck verschwindet. Es ist daher immer

$$\psi(c_i v^i + u^{n+1-i},\ c_i r^i + \rho^{n+1-i};\ c_k v^k + u^{n+1-k},\ c_k r^k + \rho^{n+1-k}) = 0$$

und überdies sind die Integralsysteme linear unabhängig, wie die Annahme des Gegentheils zeigt.

Die beiden conjugirten Systeme

$$v^1, r^1; \qquad v^2, r^2; \ldots . v^n, r^n$$

und

$$c_1 v^1 + u^n,\ c_1 r^1 + \rho^n;\ v^2, r^2; \ldots . v^n, r^n$$

haben die $(n-1)$ letzten Integralsysteme gemeinsam, während die beiden ersten nicht conjugirt sind, da

$$\psi(c_1 v^1 + u^n;\ c_1 r^1 + \rho^n;\ v^1, r^1) = c_1 \psi(v^1, r^1;\ v^1, r^1)$$
$$+ \psi(u^n, \rho^n;\ v^1, r^1) = \psi(u^n, \rho^n;\ v^1, r^1)$$

und somit nicht Null ist.

Man kann daher auf die beiden Systeme die Formel (1) in XVIII anwenden und erhält

$$\Delta'(c_1 v^1 + u^n; v^2 \ldots v^n)\Delta(v^1, v^2 \ldots v^n) - \Delta(c_1 v^1 + u^n; v^2 \ldots v^n)\Delta'(v^1, v^2 \ldots v^n)$$
$$= \frac{\Sigma a_{\lambda\mu} \chi_\lambda \chi_\mu}{\psi(c_1 v^1 + u^n,\ c_1 r^1 + \rho^n;\ v^1, r^1)} = \frac{\Sigma a_{\lambda\mu} \chi_\lambda \chi_\mu}{\psi(u^n, \rho^n; v^1, r^1)}.$$

Da $\Delta(v^1, v^2 \ldots v^n)$ nur im Endpunkte des Integrationsintervalls verschwindet; so ergibt sich hieraus

$$\frac{d}{dx} \frac{\Delta(c_1 v^1 + u^n;\ v^2 \ldots v^n)}{\Delta(v^1, v^2 \ldots v^n)} = \frac{\Sigma a_{\lambda\mu} \chi_\lambda \chi_\mu}{\psi(u^n, \rho^n;\ v^1, r^1)\,\Delta(v^1, v^2 \ldots v^n)^2}$$

für alle x von a bis exclusive b.

Die rechts vom Gleichheitszeichen stehende quadratische Form ist der Voraussetzung nach definit und $\psi(u^n, \rho^n; v^1, r^1)$

eine von Null verschiedene und von c_1 unabhängige Constante. Es wird daher der Bruch auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, der nicht identisch verschwinden kann, sein Zeichen nicht wechseln, wenn x von a bis b sich ändert. Im Anfangspunkte a hat der Bruch links

$$\frac{\Delta(c_1 v^1 + u^n; v^2 \ldots v^n)}{\Delta(v^1, v^2 \ldots v^n)}$$

den Werth c_1. Gibt man daher c_1 das constante, von c_1 unabhängige Zeichen der rechten Seite, so wird dieser Bruch, wenn die rechte Seite das positive Zeichen hat, von $c_1 > 0$ aus mit von a nach b stetig zunehmendem x wachsen und wenn sie das negative Zeichen besitzt, von $c_1 < 0$ mit von a nach b stetig wachsendem x abnehmen. In beiden Fällen wird also, wenn x das Integrationsintervall von a bis exclusive b durchlauft, der obige Bruch nicht verschwinden. Da aber während dieser Änderung das x der Nenner nicht Null wird, so kann auch der Zähler für alle Werthe des x von a bis exclusive b nicht verschwinden.

Vergleicht man nun die beiden conjugirten Systeme

$$c_1 v^1 + u^n,\ c_1 r^1 + \rho^n; \quad v^2,\ r^2; \quad v^3, r^3 \ldots v^n, r^n$$
$$c_1 v^1 + u^n,\ c_1 r^1 + \rho^n; \quad c_2 v^2 + u^{n-1},\ c_2 r^2 + \rho^{n-1}; \quad v^3, r^3 \ldots v^n, r^n,$$

so haben dieselben wieder $(n-1)$ Integralsysteme gemeinsam, und die beiden anderen

$$v^2, r^2 \text{ und } c_2 v^2 + u^{n-1},\ c_2 r^2 + \rho^{n-1}$$

sind nicht einander conjugirt, da

$$\psi(c_2 v^2 + u^{n-1}, c_2 r^2 + \rho^{n-1}; v^2, r^2) = c_2 \psi(v^2, r^2; v^2, r^2) + \psi(u^{n-1}, \rho^{n-1}; v^2, r^2)$$
$$= \psi(u^{n-1}, \rho^{n-1}; v^2, r^2)$$

und somit nicht Null ist.

Auf dieselbe Weise wie früher erhält man dann

$$\Delta'(c_1 v^1 + u^n; c_2 v^2 + u^{n-1}; v^3 \ldots v^n)\, \Delta(c_1 v^1 + u^n; v^2 \ldots v^n) -$$
$$\Delta(c_1 v^1 + u^n; c_2 v^2 + u^{n-1}; v^3 \ldots v^n)\, \Delta'(c_1 v^1 + u^n; v^2 \ldots v^n) =$$
$$= \frac{\Sigma a_{\lambda\mu} \chi_\lambda \chi_\mu}{\psi(u^{n-1}, \rho^{n-1}; v^2, r^2)}$$

oder

$$\frac{d}{dx}\frac{\Delta(c_1v^1+u^n;\ c_2v^2+u^{n-1};\ v^3\ldots v^n)}{\Delta(c_1v^1+u^n;\ v^2\ldots v^n)} =$$

$$= \frac{\Sigma a_{\lambda\mu}\chi_\lambda\chi_\mu}{\psi(u^{n-1},\ \rho^{n-1};\ v^2,\ r^2)\Delta(c_1v^1+u^n;\ v^2\ldots v^n)^2}$$

für alle x von a bis exclusive b.

Gibt man wieder c_2 das constante Zeichen der rechten Zeichen, so wird auch

$$\Delta(c_1v^1+u^n;\ c_2v^2+u^{n-1};\ v^3\ldots v^n)$$

für keinen Werth des x von a bis exclusive b verschwinden. Man sieht, wie man durch wiederholte Anwendung dieses Gedankenganges schliesslich zu einem conjugirten Systeme

$$c_1v^1+u^n,\ c_1r^1+\rho^n;\ c_2v^2+u^{n-1},\ c_2r^2+\rho^{n-1}\ldots c_nv^n+u^1;\ c_nr^n+\rho^1$$

gelangt, dessen Determinante

$$\Delta(c_1v^1+u^n;\ c_2v^2+u^{n-1}\ldots c_nv^n+u^1)$$

für keinen Werth des x von a bis exclusive b verschwinden kann. Weil aber diese Determinante in b den Werth

$$\Delta(u^n u^{n-1}\ldots u^1) = \pm\Delta(b,\ a)$$

annimmt, so ist sie auch in b von Null verschieden.

Da die n Constanten $c_1, c_2\ldots c_n$ nur ihrem Zeichen nach bedingt sind, so gelangt man zu der Erkenntniss:

Verschwindet die Determinante des dem Anfangspunkte des Integrals conjugirten Systems weder innerhalb, noch im Endpunkte des Integrationsintervalls, so lassen sich unendlich viele conjugirte Systeme herstellen, die nirgends im Integrationsintervalle inclusive Grenzen verschwinden. In diesem Falle lassen sich alle zweiten Variationen des Integrals für die hier angewandten Variationen der Functionen in die reducirte Form überführen.

Da die Bedingung I in XVII als erfüllt vorausgesetzt wird, so haben alle nicht verschwindenden derartigen zweiten Variationen des Integrals in diesem Falle einerlei Zeichen. Man sieht

aber leicht ein, dass in diesem Falle auch keine zweite Variation des Integrals Null sein kann. Denn ist

$$z^1, r^1; \; z^2, r^2 \ldots z^n, r^n$$

ein conjugirtes System, dessen Determinante im ganzen Integrationsintervalle nirgends verschwindet, und sind

$$\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$$

die Variationen, die bezüglich

$$y_1, y_2 \ldots y_n$$

längs der Strecke $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ ertheilt werden, so sind die zugehörigen

$$\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$$

durch die Gleichungen bestimmt

$$\begin{vmatrix} \eta_\mu; & \eta_1 \ldots \eta^n \\ (z^1_\mu)'; & z_1 \ldots z^1_n \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ (z^n_\mu)'; & z^n_1 \ldots z^n_n \end{vmatrix} = \Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)\zeta_\mu$$

$$\mu = 1, 2 \ldots n.$$

Die zweite Variation des Integrals könnte, da sie in diesem Falle sich immer in die reducirte Form überführen lässt, nur dann verschwinden, wenn in der Strecke $\alpha\beta$ allenthalben

$$\zeta_1 = \zeta_2 \ldots = \zeta_n = 0$$

wäre. Es müsste dann aber

$$\eta_\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z^k_\mu$$

$$\mu = 1, 2 \ldots n$$

sein, wo die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ Constante bedeuten und daher

$$\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)$$

sowohl in α, als auch β verschwinden, was unmöglich ist.

Man hat daher den Satz:

Verschwindet die Determinante des dem Anfangspunkte conjugirten Systems nirgends sonst im Integrationsintervalle, so sind alle zweiten Variationen des Integrals, welche durch die hier angewandten Variationen der Veränderlichen erhalten werden, von Null verschieden und haben einerlei Vorzeichen.

XX.

Es hat sich früher (XVIII) ergeben, dass, wenn die Determinante $\Delta(x, a)$ des dem Anfangspunkte a conjugirten Systems zwischen a und b einen Nullpunkt besitzt, dann die Transformation der zweiten Variation des Integrals in die reducirte Form auf dem angegebenen Wege nicht ausnahmslos möglich ist. Daher erscheint es zweifelhaft, ob alle zweiten Variationen des Integrals in diesem Falle ungleich Null sind und einerlei Zeichen haben.

Um diesen Zweifel zu lösen, nehme man an, dass die Determinante $\Delta(x, x_0)$ des der Stelle x_0, wo $a \leqq x_0 < b$, sei, conjugirten Systems

$$u^1, \rho^1;\; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n \qquad (1)$$

nochmals zwischen a und b verschwinde. Wird mit x_0' der dem x_0 zunächst gelegene Nullpunkt von $\Delta(x, x_0)$ bezeichnet, so kann derselbe, der nach XVIII in endlicher Entfernung von x_0 liegen muss, als zwischen x_0 und b liegend angenommen werden, da $\Delta(x, x_0)$ in x_0 aber nirgends zwischen x_0 und x_0' verschwindet und man daher x_0 und x_0' und entsprechend $\Delta(x, x_0)$ und $\Delta(x, x_0')$ mit einander vertauschen darf. Es besteht dann ein Integralsystem u, ρ des accessorischen Systems von Differentialgleichungen, dessen Glieder

$$u^1, u^2 \ldots u^n$$

sämmtlich sowohl in x_0 als auch x_0' verschwinden. Bezeichnet daher k eine differentiale Grösse, so kann man die Glieder $k u^1, k \rho^1 \ldots k \rho^n$ des Integralsystems $ku, k\rho$ benützen, um dem vorgelegten Integral eine Variation zu ertheilen. Die zugehörige zweite Variation ist dann nach (X) durch

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x'_0} \sum_{i=1}^{n} ku_i \psi_i(ku, kr)\, dx$$

gegeben und ist wegen

$$\psi_i(ku, kr) = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

selbst Null.

Es bestehen also in diesem Falle Variationen der Veränderlichen, für welche die zweite Variation des Integrals Null ist.

Aber noch mehr: es bestehen in diesem Falle verschieden bezeichnete zweite Variationen des Integrals.

Da $\Delta(x, x'_0)$ in einer gewissen Umgebung von x'_0 ausser in x'_0 nicht mehr und $\Delta(x, x_0)$ daselbst nicht identisch verschwindet, so gibt es in derselben immer Stellen, in denen auch $\Delta(x, x_0)$ nicht Null ist. Ist x_1 eine derartige Stelle, so muss daher $\Delta(x, x_1)$ innerhalb $x_0 x'_0$ Null werden. Ist x'_1 ein solcher Nullpunkt, so besteht ein Integralsystem z, r des Systems accessorischer Differentialgleichungen, dessen sämmtliche Glieder

$$z_1, z_2 \ldots z_n$$

nach früheren Bemerkungen sowohl in x_1, als auch x'_1 verschwinden. Das System z, r hängt dann nicht mit den Integralsystemen des dem Punkte x_0 conjugirten Systems linear zusammen, da anderenfalls die Determinante des letzteren in x_1 und x'_1 verschwinden müsste, und es gibt daher nach (XVIII, 2) in der Gruppe dieses Systems solche conjugirte Systeme, von denen $(n-1)$ Integralsysteme, aber nicht mehr, zu z, r conjugirt ist. Um ein solches conjugirtes System

$$z^1, r^1; \; z^2, r^2 \ldots z^n, r^n$$

zu finden, hat man nach (XVIII, 2) in

$$z^k = \alpha_1^k u^1 + \alpha_2^k u^2 + \ldots + \alpha_n^k u^n$$

die n^2 Grössen

$$\alpha_1^1, \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^1; \; \alpha_1^2, \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^2; \ldots \ldots \alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n$$

so zu bestimmen, dass die Gleichungen

$$\psi(z, r; z^1, r^1) = 0;\ \psi(z, r; z^2, r^2) = 0 \ldots \psi(z, r; z^{n-1}, r^{n-1}) = 0$$
$$\psi(z, r; z^n, r^n) = C,$$

wo C eine willkürliche Grösse bedeutet, die nicht Null ist, befriedigt werden.

Bezeichnet man die Determinante

$$\Sigma \pm \alpha_1^1 \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^n$$

mit A und die Subdeterminante von α_k^i darin mit A_k^i, so ergeben diese Gleichungen

$$\begin{aligned} \psi(z, r; u^k, \rho^k) A &= \psi(z, r; z^n, r^n) A_k^n \\ &= C A_k^n \qquad (k = 1, 2 \ldots n). \end{aligned}$$

Es bestimmen somit dieselben bloss die Verhältnisse

$$\frac{A_k^n}{A},$$

während die übrigen Grössen und insbesondere

$$\alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n$$

willkürlich bleiben.

Auf die beiden so erhaltenen conjugirten Systeme

$$z,\ r;\ z^1, r^1 \ldots z^{n-1}, r^{n-1}$$

und

$$z^1, r^1;\ z^2, r^2 \ldots z^n,\ r^n$$

kann man nun die Formel 2 in XVIII anwenden, wodurch sich für alle x innerhalb $x_0 x_0'$

$$\frac{d}{dx} \frac{\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1})}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)} = \frac{(-1)^n}{C} \frac{\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda \chi_\mu}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2}$$

ergibt.

Daraus folgt zunächst, dass der Quotient

$$\frac{\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1})}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)}$$

innerhalb $x_0 x_0'$ nur einmal Null werden kann und somit verschwindet der Zähler

$$\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1})$$

innerhalb $x_0 x_0'$ nur in x_1'.

Da ferner in x_1' und somit auch in einer gewissen Umgebung davon die Determinante im Nenner

$$\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n) = A\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$$

gemäss Voraussetzung nicht Null wird und die rechte Seite der Gleichung in dieser Umgebung überall dasselbe Zeichen hat, so folgt:

Die Determinante $\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1})$, die in x_1' Null wird, wechselt ihr Zeichen, wenn x sich stetig ändernd die Stelle x_1' überschreitet.

Dieser Determinante kann man eine durchsichtigere Form geben. Es ist

$$\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1}) = \begin{vmatrix} z_1, u_1^1 \ldots u_1^n \\ z_2, u_1^2 \ldots u_2^n \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ z^n, u_1^n \ldots u_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 & \ldots & 0 \\ 0, & \alpha_1^1, & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

oder entwickelt

$$\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1}) = \sum_k (-1)^{n+k} \Delta(z, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n) A_k^n$$

$$= (-1)^n \sum_k \Delta(u_1 \ldots u^{k-1}, z, u^{k+1} \ldots u^n) A_k^n.$$

Substituirt man hierin den früher für A_k^n gefundenen Werth, so geht diese Gleichung in

$$\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1}) =$$

$$= \frac{(-1)^n A}{C} \sum_k \Delta(u^1 \ldots u^{k-1}, z, u^{k+1} \ldots u^n) \psi(z, r; u^k, \rho^k)$$

über.

Wählt man die willkürlichen $\alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n$ so, dass

$$A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n A_k^n$$

den Werth C annimmt, d. h. setzt man

$$C = \Sigma \alpha_k^n \psi(z, r; u^k, \rho^k) \neq 0,$$

so vereinfacht sich der obige Ausdruck in

$$\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1}) =$$
$$= (-1)^n \sum_k \Delta(u^1 \ldots u^{k-1}, z, u^{k+1} \ldots u^n)\, \psi(z, r; u^k, \rho^k), \quad (2)$$

der nun unabhängig von den α ist.

Bildet man zu dem bisherigen Systeme accessorischer Differentialgleichungen

$$\psi_i(v, r) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} v_k' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} v_k \right) = 0 \quad (3)$$
$$i = 1, 2 \ldots n \qquad\qquad i = 1, 2 \ldots m$$

das neue System von Differentialgleichungen

$$\psi_i(\bar{v}, \bar{r}) = \varepsilon \bar{v}_i; \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \bar{v}_k' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \bar{v}_k \right) = 0, \quad (4)$$

wo ε eine beliebige Constante sei, so lässt sich dieses ebenfalls als ein System accessorischer Differentialgleichungen auffassen.

Denn man erhält dasselbe bei Behandlung der Aufgabe:

Die Functionen $y_1, y_2 \ldots y_n$, die unter einander durch die früheren m Gleichungen

$$\varphi_k(x, y_1', y_2' \ldots y_n'; y_1, y_2 \ldots y_n) = 0$$
$$k = 1, 2 \ldots m$$

zusammenhängen, so zu bestimmen, dass das Integral

$$\int_a^b \left[f - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right] dx,$$

wo f wieder die frühere Function bedeutet, zu einem Maximum oder Minimum wird.

Es wird daher das neue System von Differentialgleichungen

$$\psi_i(\bar{v}, \bar{r}) = \varepsilon v_i; \qquad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k'}\bar{v}_k' + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}\bar{v}_k\right) = 0$$

$$i = 1, 2 \ldots n \qquad\qquad i = 1, 2 \ldots m$$

alle früher entwickelten Eigenschaften der accessorischen Systeme von Differentialgleichungen, die im Probleme der zweiten Variation auftreten, besitzen.

Hat man nun ein Integralsystem v, r des ersten Systems accessorischer Differentialgleichungen (3) aus gewissen Anfangswerthen an einer Stelle ξ abgeleitet, so kann man ihm im zweiten Systeme accessorischer Differentialgleichungen (4) jenes $\bar{v}, \bar{r}$ entsprechen lassen, das aus denselben Anfangswerthen in ξ nach dem Verfahren in (I) gebildet wird. Es ergibt sich dann für das Integralelement in ξ, wenn ε genügend klein genommen wird, und daher auch für seine Fortsetzungen

$$v_i = v_i + \varepsilon \mathfrak{P}_i(x, \varepsilon),$$

wo $\mathfrak{P}_i(\varepsilon)$ eine stetige Function[1] des ε und x bezeichnet.

Construirt man auf diese Weise aus den Anfangswerthen der dem Punkte x_0 conjugirten Systeme (1)

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

in x_0 die correspondirenden Integralsysteme

$$u^1, \rho^1;\ \bar{u}^2, \bar{\rho}_2 \ldots u^n, \bar{\rho}^n \tag{5}$$

für das accessorische System (4) und aus den Anfangswerthen des Integralsystems z, r das correspondirende $\bar{z}, \bar{r}$, so ist das neue conjugirte System ein zu dem Punkte x_0 conjugirtes System im zweiten System accessorischer Differentialgleichungen (4) und

[1] Die Glieder der durch das Verfahren unmittelbar erhaltenen Reihe sind zunächst selbst Potenzreihen von ε, die zugleich mit ε verschwinden. Man überzeugt sich aber leicht, dass wenn $|\varepsilon|$ unter einer gewissen Grenze liegt, die Doppelreihe sich in eine einzige Potenzreihe von ε zusammenziehen lässt. Es ist aber der Umstand, dass $\mathfrak{P}_i(x, \varepsilon)$ eine Potenzreihe ist, für das Folgende ganz belanglos. Es genügt festzuhalten, dass $\mathfrak{P}_i(x, \varepsilon)$ eine bei endlichem, beschränktem Intervalle *ab* endliche stetige Grösse ist.

im Integralsysteme $\bar{z}, \bar{r}$ sind $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \ldots \bar{z}$ in x_1 Null, da sie daselbst bezüglich $z_1, z_2 \ldots z_n$ gleich sind.

Es lässt sich nun zeigen, dass bei passender Wahl des ε die Determinante $\Delta(\bar{u}_1, \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_n)$ des dem Punkte x_0 conjugirten Systems

$$\bar{u}^1, \bar{\rho}^1;\ \bar{u}^2, \bar{\rho}^2 \ldots \bar{u}^n, \bar{\rho}^n$$

nochmals innerhalb $x_0 b$ verschwinden muss.

Verschwindet sie in x_1, so ist die Behauptung richtig, wenn aber nicht, so ist das Integralsystem $\bar{z}, \bar{r}$ von den Integralsystemen (5) des zu x_0 conjugirten Systems linear unabhängig. Man kann dann in der früher auseinandergesetzten Weise aus

$$\bar{u}^1, \bar{\rho}^1;\ \bar{u}^2, \bar{\rho}^2 \ldots \bar{u}^n, \bar{\rho}^n \qquad (5)$$

und $\bar{z}, \bar{r}$ ein neues zu x_0 conjugirtes System

$$\bar{v}^1, \bar{r}^1;\ \bar{v}^2, \bar{r}^2 \ldots \bar{v}^n, \bar{r}^n$$

bilden, dessen $(n-1)$ erste Integralsysteme und diese allein zu $\bar{z}, \bar{r}$ conjugirt sind.

Nach (2) erhält man dann für die Determinante $\Delta(\bar{z}, \bar{v}^1 \ldots \bar{v}^{n-1})$ den Ausdruck

$$\Delta(\bar{z}, \bar{v}^1 \ldots \bar{v}^{n-1}) =$$
$$= (-1)^n \sum_k{}' \Delta(\bar{u}^1 \ldots \bar{u}^{k-1}, \bar{z}, \bar{u}^{k+1} \ldots \bar{u}^n)\, \psi(\bar{z}, \bar{r};\ \bar{u}_k, \rho_k). \qquad (6)$$

Bezeichnet man die früher in (2) erhaltene Determinante $\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1})$ mit $\Phi(x)$, also

$$\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1}) = \Phi(x),$$

so geht die rechte Seite der Gleichung (6), wenn man darin für die Grössen

$$\bar{u}^1, \bar{u}^2 \ldots \bar{u}^n$$

ihre Werthe substituirt, wie (2) lehrt, über in

$$\Phi(x) + \varepsilon Q(x, \varepsilon),$$

wo $Q(x, \varepsilon)$ eine nach ε und x endliche und stetige Function bedeutet.

Nimmt man $|\varepsilon| < \eta$, wo η eine beliebig kleine positive Zahl sei, so wird $Q(x, \varepsilon)$ in einer gewissen Umgebung der Stelle x_1' eine endliche obere und untere Grenze besitzen. Setzt man also

$$x = x_1' + \xi,$$

so wird sich stets eine endliche positive Zahl M angeben lassen, derart, dass

$$|Q(x, \varepsilon)| < M$$

ist, wenn $|\varepsilon| < \eta$ und $|\xi| < \delta$ ist.

Nach einer früheren Bemerkung ändert aber

$$\Phi(x_1' + \xi)$$

zugleich mit ξ sein Zeichen. Hat daher $\Phi(x_1' + \xi)$ für die entgegengesetzt bezeichneten Zahlen ξ_1 und ξ_2 entgegengesetztes Vorzeichen, sind überdies beide dem absoluten Betrage nach kleiner als δ gewählt, und genügt ε den Ungleichungen

$$|\varepsilon| < \eta,$$

$$|\varepsilon| < \frac{|\Phi(x_1' + \xi_1)|}{M} \quad \text{und} \quad |\varepsilon| < \frac{|\Phi(x_1' + \xi_2)|}{M},$$

so zeigt die Gleichung

$$\Delta(\bar{z}, \bar{v}^1 \ldots \bar{v}^{n-1}) = \Phi(x) + \varepsilon Q(x, \varepsilon),$$

dass

$$\Delta(\bar{z}, \bar{v}^1 \ldots \bar{v}^{n-1})$$

in $x_1' + \xi_1$ und $x_1' + \xi_2$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzt und somit für einen zwischen $x_1' + \xi_1$ und $x_1' + \xi_2$ gelegenen Werth $x_1' + \xi = x_1''$ verschwinden muss.

Würde nun $\Delta(\bar{v}^1, \bar{v}^2 \ldots \bar{v}^n)$, das in x_1 nach der Annahme nicht verschwindet, weder in x_1'', noch innerhalb $x_1'' x_1$ Null werden, so würde nach Formel (2) in XVIII

$$\frac{d}{dx} \frac{\Delta(\bar{z}, \bar{v}^1 \ldots \bar{v}^{n-1})}{\Delta(\bar{v}^1, \bar{v}^2 \ldots \bar{v}^n)} = \frac{(-1)^n \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \bar{\zeta}_\lambda \bar{\zeta}_\mu}{C \Delta(\bar{v}^1, \bar{v}^2 \ldots \bar{v}^n)^2}$$

für das Intervall $x_1 x_1''$ gelten, was unmöglich ist, da $\Delta(\bar{z}, \bar{v}^1 \ldots \bar{v}^{n-1})$ in x_1 und x'' Null ist und die rechtsstehende quadratische Form

$$\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda,\mu}\bar{\chi}_\lambda\bar{\chi}_\mu$$

in keinem noch so kleinen Intervalle identisch verschwinden kann.

Es verschwindet somit die Determinante

$$\Delta(u^1, u^2 \ldots \bar{u}^n),$$

die sich nur um einen constanten Factor, der nicht Null ist, von der obigen Determinante $\Delta(\bar{v}^1, \bar{v}^2 \ldots \bar{v}^n)$ unterscheidet, wenn nicht schon in x_1'' oder x_1, so innerhalb $x_1''x_1$, also in jedem Falle ausser in x_0 noch innerhalb $x_0 b$.

Bezeichnet man mit x_0'' einen solchen zwischen x_0 und b gelegenen Nullpunkt von $\Delta(\bar{u}^1, u^2 \ldots \bar{u}^n)$, so existirt also im zweiten Systeme accessorischer Differentialgleichungen (4) ein Integralsystem

$$w, r,$$

dessen Glieder $w_1, w_2 \ldots w_n$ sämmtlich sowohl in x_0, als auch x_0'' verschwinden. Man kann daher den Grössen $y_1, y_2 \ldots y_n$ in $x_0 x_0''$ beziehungsweise die Variationen ertheilen

$$kw_1, kw_2 \ldots kw_n,$$

wo k eine differentiale Grösse bedeutet.

Die zugehörige zweite Variation des Integrals kann dann durch

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_0''} \sum_{i=1}^{n} [kw_i \psi_i(kw, kr)]\, dx$$

ausgedrückt werden. Da aber

$$\psi_i(kw, kr) = \varepsilon k w_i$$

ist, so geht sie über in

$$\delta^2 J = \varepsilon \int_{x_0}^{x_0''} \sum_{i=1}^{n} (kw_i)^2\, dx.$$

Da die

$$w_1, w_2 \ldots w_n$$

nach (XVIII, 2) in keiner Strecke des Integrationsintervalls zugleich identisch verschwinden, so ist das Integral rechts nicht Null und hat das Zeichen des ε.

Nun unterliegt ε bloss der Bedingung, dass sein absoluter Betrag kleiner als eine gewisse Grösse sei und ist sonst willkürlich. Je nachdem man daher dem ε unter Beobachtung dieser Bedingung einen positiven oder negativen Werth ertheilt, erhält man auch positive oder negative zweite Variationen des Integrals.

Lässt man x_0 in a rücken, so gewinnt man also den Satz:

Verschwindet die Determinante des dem Anfangspunkte des Integrals conjugirten Systems innerhalb des Integrationsintervalls, so gibt es Variationen der Veränderlichen, denen entgegengesetzt bezeichnete zweite Variationen des Integrals entsprechen.

2. Im dritten, noch zu erledigenden Falle, wo also $\Delta(x, a)$ zwar nicht innerhalb ab, aber in b verschwindet, besteht ein Integralsystem z, r, dessen Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ sämmtlich in a und b verschwinden. Dasselbe lässt sich nun benützen, um Variationen der $y_1, y_2 \ldots y_n$ herzustellen, deren entsprechende zweite Variation des Integrals Null ist. Man findet also den Satz:

Verschwindet die Determinante des dem Anfangspunkte des Integrals conjugirten Systems zwar nicht innerhalb des Integrationsintervalls, aber in dessen Endpunkte, so besteht eine Variation der Veränderlichen, deren entsprechende zweite Variation des Integrals Null ist.

XXI.

Fasst man die bisherigen Untersuchungen zusammen, so gelangt man zu folgendem Endergebnisse:

Um die Functionen $y_1, y_2 \ldots y_n$ zu bestimmen, die den m Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\varphi_k(x, y_1, y_1' \ldots y_n, y_n') = 0$$
$$k = 1, 2 \ldots m$$

genügen, das Integral

$$\int_a^b f(x, y_1, y_1' \ldots y_n, y_n')\, dx$$

zu einem Maximum oder Minimum machen und an seinen Grenzen vorgegebene Werthe annehmen, dienen, wenn nach Lagrange

$$F = f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k$$

gesetzt wird, die $(n+m)$ Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

$$\varphi_k = 0 \qquad k = 1, 2 \ldots m.$$

Ist die Determinante $(n+m)$ Grades

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_n}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_n \partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_n \partial y_n}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}; & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n}; & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

im Integrationsintervalle nirgends Null, so ergeben sich hieraus die $(n+m)$ Grössen

$$y_1, y_2 \ldots y_n;\ \lambda_1 \ldots \lambda_m$$

als Functionen des x und $2n$ willkürlicher Constanten $c_1, c_2 \ldots c_{2n}$. Lassen sich diese aus den $2n$ Grenzbedingungen bestimmen und ergeben sich hiebei die $y_1, y_2 \ldots y_n$ als im ganzen Integra-

tionsintervalle eindeutige Functionen des x, so gelten folgende Sätze:

1. Die sämmtlichen zweiten Variationen des Integrals können nur dann einerlei Zeichen haben, wenn die quadratische Form

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \zeta_i \zeta_k,$$

wo die $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$ den m Bedingungsgleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \zeta_i = 0$$

$$k = 1, 2 \ldots m$$

genügen, an jeder Stelle des Integrationsintervalls definit vom selben Zeichen ist.

2. Bezeichnet $\left(\frac{\partial y_i}{\partial c_k}\right)$ den Werth von $\frac{\partial y_i}{\partial c_k}$ an der unteren Grenze des Integrals und setzt man

$$\Delta(x, a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial c_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial c_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial c_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial c_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial c_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial c_{2n}} \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_1}\right), & \left(\frac{\partial y_2}{\partial c_2}\right) & \ldots & \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_{2n}}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{\partial y_n}{\partial c_1}\right), & \left(\frac{\partial y_n}{\partial c_2}\right) & \ldots & \left(\frac{\partial y_n}{\partial c_{2n}}\right) \end{vmatrix},$$

so sind, wenn man den Veränderlichen

$$y_1, y_2 \ldots y_n$$

bezüglich die Variationen

$$\varepsilon u_1, \varepsilon u_2 \ldots \varepsilon u_n$$

ertheilt, wo die $u_1, u_2 \ldots u_n$ von ε unabhängige, sammt ihren ersten Differentialquotienten im Integrationsintervalle eindeutige, stetige Functionen von x sind, die sämmtlichen zugehörigen zweiten Variationen des Integrals dann und nur dann von Null verschieden und haben einerlei Vorzeichen, wenn $\Delta(x, a)$ ausserhalb a nirgends im Integrationsintervalle Null wird.

Verschwindet $\Delta(x, a)$ auch innerhalb der Integrationsgrenzen, so bestehen verschieden bezeichnete zweite Variationen des Integrals.

Verschwindet hingegen $\Delta(x, a)$ im Integrationsintervalle ausser an der unteren nur noch an der oberen Grenze des Integrals, so sind nicht mehr sämmtliche zweite Variationen des Integrals von Null verschieden.

3. Diese Sätze erlauben noch den Schluss zu ziehen:

Ist entweder die vorstehende Bedingung (1) nicht erfüllt oder verschwindet $\Delta(x, a)$ auch innerhalb des Integrationsintervalls, so hat das Integral weder ein Maximum, noch Minimum.

Die obigen Sätze wurden hier allerdings nur für den ersten Fall der Variationsrechnung bewiesen, wo also jede der m Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_m = 0$$

auch erste Derivirte der Functionen enthält und sich dieses System nicht in ein anderes umgestalten lässt, in dem nicht mehr jede Gleichung von dieser Beschaffenheit ist. Da aber die Entwickelungen in diesem zweiten Falle in Folge der Bemerkungen in (XII und XIII) keinen principiellen Schwierigkeiten mehr begegnen, so können sie hier übergangen werden.

Über eine Eigenschaft der Riemann'schen ζ-Function

von

F. Mertens,
w. M. k. Akad.

1.

Die Herren[1] Hadamard und De la Vallée Poussin haben zuerst den Beweis geführt, dass die Riemann'sche ζ-Function, welche für Werthe von z mit über 1 liegendem reellen Bestandtheil durch die Gleichung

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \ldots$$

definirt wird, für keinen Werth von der Form $1+ia$ verschwindet. Hadamard's Beweis stützt sich auf die Thatsache, dass $\zeta(1+2ia)$ nicht unendlich gross sein kann und führt zu einer interessanten Ungleichung zwischen $\zeta(1+\rho+ia)$ und $\zeta(1+\rho+2ia)$, welche in dem Folgenden mitgetheilt werden soll.

2.

Es seien ρ, a positive Grössen. Man hat, wenn der reelle Theil von z über 1 liegt, die bekannten Gleichungen

$$\zeta(z) = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}}$$

$$\log \zeta(z) = \sum \frac{1}{p^z} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{p^{2z}} + \frac{1}{3} \sum \frac{1}{p^{3z}} + \ldots,$$

[1] Bull. de la soc. math., XXIV, 1896; Annales de la soc. scientif. de Bruxelles, XX, 1895, 1896.

wo das Product und die Summen sich auf alle Primzahlen beziehen. Hieraus folgt

$$\log \zeta(1+\rho+ia) = \sum \frac{1}{p^{1+\rho+ia}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{p^{2+2\rho+2ia}} + \ldots$$

$$\log \zeta(1+\rho-ia) = \sum \frac{1}{p^{1+\rho-ia}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{p^{2+2\rho-2ia}} + \ldots$$

$$\log \zeta(1+\rho) = \sum \frac{1}{p^{1+\rho}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{p^{2+2\rho}} + \ldots$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit 2, 2, 4 und addirt, so folgt

$$4 \log |\zeta(1+\rho+ia)| + 4 \log \zeta(1+\rho)$$
$$= \sum \frac{4(1+\cos a \log p)}{p^{1+\rho}} + \frac{1}{2}\sum \frac{4(1+\cos 2a \log p)}{p^{2+2\rho}} + \ldots$$

Es ist aber

$$4(1+\cos ma \log p) \geqq 2(1-\cos ma \log p)(1+\cos ma \log p)$$
$$\geqq 1-\cos 2ma \log p).$$

Daher wird

$$4 \log |\zeta(1+\rho+ia)| + 4 \log \zeta(1+\rho)$$
$$\geqq \sum \frac{1-\cos 2a \log p}{p^{1+\rho}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1-\cos 4a \log p}{p^{2+2\rho}} + \ldots$$
$$\geqq \log \zeta(1+\rho) - \log |\zeta(1+\rho+2ia)|,$$

und es ergibt sich

$$4 \log |\zeta(1+\rho+ia)| + 3 \log \zeta(1+\rho) > -\log |\zeta(1+\rho+2ia)|$$

$$|\zeta(1+\rho+ia)| > \frac{1}{\zeta^{\frac{3}{4}}(1+\rho)\,|\zeta(1+\rho+2ia)|^{\frac{1}{4}}}.$$

Da

$$\frac{1}{(n-1)^\rho} - \frac{1}{n^\rho} = \frac{\rho}{n^{1+\rho}} + \frac{\rho(\rho+1)}{2n^{2+\rho}} + \dots$$

$$> \frac{\rho}{n^{1+\rho}}$$

ist, so folgt, wenn $n = 2, 3, \dots$ gesetzt und addirt wird,

$$1 > \rho\zeta(1+\rho) - \rho$$

oder

$$\zeta(1+\rho) < \frac{1+\rho}{\rho}.$$

Man hat daher

$$|\zeta(1+\rho+ia)| > \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{3/4} \frac{1}{|\zeta(1+\rho+2ia|^{1/4}}.$$

3.

Aus der gefundenen Ungleichung kann auch der fragliche Satz erschlossen werden.

Nach dem binomischen Satze ist von $n = 2$ an

$$\frac{1}{(n-1)^{\rho+ia}} - \frac{1}{n^{\rho+ia}} = \frac{\rho+ia}{n^{1+\rho+ia}} + \frac{(\rho+ia)(1+\rho+ia)}{1.2n^{2+\rho+ia}} + \dots.$$

Wird $n = 2, 3, 4, \dots$ gesetzt und addirt, so folgt

$$1 = (\rho+ia)(\zeta(1+\rho+ia)-1) + \frac{(\rho+ia)(1+\rho+ia)}{1.2}(\zeta(2+\rho+ia)-1) + \dots$$

oder

$$\zeta(1+\rho+ia) = 1 + \frac{1}{\rho+ia} - \frac{(1+\rho+ia)}{1.2}(\zeta(2+\rho+ia)-1) - \frac{(1+\rho+ia)(2+\rho+ia)}{1.2.3}(\zeta(3+\rho+ia)-1),$$

welche Gleichung auch noch für $\rho = 0$ gilt.

wo das Product und die Summen sich auf alle Primzahlen beziehen. Hieraus folgt

$$\log \zeta(1+\rho+ia) = \sum \frac{1}{p^{1+\rho+ia}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{p^{2+2\rho+2ia}} + \dots$$

$$\log \zeta(1+\rho-ia) = \sum \frac{1}{p^{1+\rho-ia}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{p^{2+2\rho-2ia}} + \dots$$

$$\log \zeta(1+\rho) = \sum \frac{1}{p^{1+\rho}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{p^{2+2\rho}} + \dots$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit 2, 2, 4 und addirt, so folgt

$$4 \log |\zeta(1+\rho+ia)| + 4 \log \zeta(1+\rho)$$
$$= \sum \frac{4(1+\cos a \log p)}{p^{1+\rho}} + \frac{1}{2}\sum \frac{4(1+\cos 2a \log p)}{p^{2+2\rho}} + \dots$$

Es ist aber

$$4(1+\cos ma \log p) \geqq 2(1-\cos ma \log p)(1+\cos ma \log p)$$
$$\geqq 1-\cos 2ma \log p).$$

Daher wird

$$4 \log |\zeta(1+\rho+ia)| + 4 \log \zeta(1+\rho)$$
$$\geqq \sum \frac{1-\cos 2a \log p}{p^{1+\rho}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1-\cos 4a \log p}{p^{2+2\rho}} + \dots$$
$$\geqq \log \zeta(1+\rho) - \log |\zeta(1+\rho+2ia)|,$$

und es ergibt sich

$$4 \log |\zeta(1+\rho+ia)| + 3 \log \zeta(1+\rho) > -\log |(1+\rho+2ia)|,$$

$$|\zeta(1+\rho+ia)| > \frac{1}{\zeta^{3/4}(1+\rho)\,|\zeta(1+\rho+2ia)|^{1/4}}.$$

Da

$$\frac{1}{(n-1)^\rho} - \frac{1}{n^\rho} = \frac{\rho}{n^{1+\rho}} + \frac{\rho(\rho+1)}{2n^{2+\rho}} + \ldots$$

$$> \frac{\rho}{n^{1+\rho}}$$

ist, so folgt, wenn $n = 2, 3, \ldots$ gesetzt und addirt wird,

$$1 > \rho\zeta(1+\rho) - \rho$$

oder

$$\zeta(1+\rho) < \frac{1+\rho}{\rho}.$$

Man hat daher

$$|\zeta(1+\rho+ia)| > \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{3/4} \frac{1}{|\zeta(1+\rho+2ia)|^{1/4}}.$$

3.

Aus der gefundenen Ungleichung kann auch der fragliche Satz erschlossen werden.

Nach dem binomischen Satze ist von $n = 2$ an

$$\frac{1}{(n-1)^{\rho+ia}} - \frac{1}{n^{\rho+ia}} = \frac{\rho+ia}{n^{1+\rho+ia}} + \frac{(\rho+ia)(1+\rho+ia)}{1.2n^{2+\rho+ia}} + \ldots.$$

Wird $n = 2, 3, 4, \ldots$ gesetzt und addirt, so folgt

$$1 = (\rho+ia)(\zeta(1+\rho+ia)-1) + \frac{(\rho+ia)(1+\rho+ia)}{1.2}(\zeta(2+\rho+ia)-1) + \ldots$$

oder

$$\zeta(1+\rho+ia) = 1 + \frac{1}{\rho+ia} - \frac{(1+\rho+ia)}{1.2}(\zeta(2+\rho+ia)-1) - \frac{(1+\rho+ia)(2+\rho+ia)}{1.2.3}(\zeta(3+\rho+ia)-1),$$

welche Gleichung auch noch für $\rho = 0$ gilt.

Hieraus folgt zunächst, wenn man sich $\rho \leqq 1$ denkt,

$$|\zeta(1+\rho+2ia)| < 1 + \frac{1}{2a} + \sqrt{1+\frac{(2a)^2}{2^2}}\,(\zeta 2 - 1)$$

$$+ \sqrt{1+\frac{(2a)^2}{2^2}}\,\sqrt{1+\frac{(2a)^2}{3^2}}\,(\zeta 3 - 1) + \ldots ;$$

es ist aber

$$\left(1+\frac{4a^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{4a^2}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{4a^2}{m^2}\right)$$

$$< \frac{e^{2a\pi}-e^{-2a\pi}}{4a\pi} < \frac{e^{2a\pi}}{4a\pi}$$

$$(\zeta 2 - 1) + (\zeta 3 - 1) + \ldots = \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$$

Daher ergibt sich

$$|\zeta(1+\rho+2ia)| < 1 + \frac{1}{2a} + \frac{e^{a\pi}}{2\sqrt{a\pi}}.$$

Ferner wird

$$\frac{\zeta(1+\rho+ia)-\zeta(1+ia)}{\rho} = -\frac{1}{ia(\rho+ia)}$$

$$-\frac{(1+\rho+ia)-(1+ia)}{2!\,\rho}\,(\zeta(2+\rho+ia)-1)$$

$$-\frac{(1+ia)}{2!}\,\frac{1}{\rho}\,(\zeta(2+\rho+ia)-\zeta(2+ia))$$

$$-\frac{(1+\rho+ia)(2+\rho+ia)-(1+ia)(2+ia)}{3!\,\rho}\,(\zeta(3+\rho+ia)-1)$$

$$-\frac{(1+ia)(2+ia)}{3!}\,\frac{1}{\rho}\,(\zeta(3+\rho+ia)-\zeta(3+ia)) - \ldots ;$$

es ist aber

$$\left|\frac{(1+\rho+ia)(2+\rho+ia)\ldots(k+\rho+ia)-(1+ia)(2+ia)\ldots(k+ia)}{(k+1)!\,\rho}\right|$$

$$\leqq \frac{(1+\sqrt{1+a^2})(1+\sqrt{2^2+a^2})\ldots(1+\sqrt{k^2+a^2})-\sqrt{1+a^2}\sqrt{2^2+a^2}\ldots\sqrt{k^2+a^2}}{(k+1)!}$$

$$< \frac{1}{k+1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2^2+a^2}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\sqrt{k^2+a^2}}\right)\sqrt{1+\frac{a^2}{1^2}}\sqrt{1+\frac{a^2}{2^2}}\cdots\sqrt{1+\frac{a^2}{k^2}}$$

$$< \frac{1}{k+1}\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{e^{\frac{a\pi}{2}}}{\sqrt{2a\pi}}$$

$$< \frac{e^{\frac{a\pi}{2}}}{\sqrt{2a\pi}};$$

$$\frac{\zeta(k+\rho+ia)-\zeta(k+ia)}{\rho} \leqq \frac{1}{\rho}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n^k}\left(1-\frac{1}{n^\rho}\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{1}{n^\rho}\right) = \frac{n^\rho-1}{\rho n^\rho} = \frac{\log n}{n^\rho}\left(1+\frac{\rho\log n}{2!}+\frac{\rho^2\log^2 n}{3!}+\ldots\right)$$

$$< \frac{\log n}{n^\rho}\,e^{\rho\log}$$

$$< \log n.$$

Daher ist

$$\left|\frac{\zeta(1+\rho+ia)-\zeta(1+ia)}{\rho}\right| < \frac{1}{a^2} + \frac{e^{\frac{1}{2}a\pi}}{\sqrt{2a\pi}}(\zeta 2 - 1 + \zeta 3 - 1 + \ldots)$$

$$+ \frac{e^{\frac{1}{2}a\pi}}{\sqrt{2a\pi}}\left(\frac{1}{2}\sum_2^\infty \frac{\log n}{n^2} + \frac{1}{3}\sum_2^\infty \frac{\log n}{n^3} + \ldots\right)$$

$$< \frac{1}{a^2} + \frac{e^{\frac{1}{2}a\pi}}{\sqrt{2a\pi}}\left(1 + \frac{1}{2}\sum_2^\infty \frac{\log n}{n(n-1)}\right).$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$A = 1 + \frac{1}{2a} + \frac{e^{a\pi}}{2\sqrt{a\pi}}$$

$$B = \frac{1}{a^2} + \frac{e^{\frac{1}{2}a\pi}}{\sqrt{2a\pi}}\left(1 + \frac{1}{2}\sum \frac{\log n}{n(n-1)}\right)$$

und bestimmt ρ_0 aus der Ungleichung

$$\rho_0(1+\rho_0)^3 AB^4 \leqq \frac{1}{16},$$

so wird

$$|\zeta(1+ia)| + B\rho_0 > \left(\frac{\rho_0}{1+\rho_0}\right)^{3/4} \frac{1}{A^{1/4}}$$

und daher

$$|\zeta(1+ia)| > B\rho_0.$$

Die Meteore des 20. bis 30. November mit besonderer Berücksichtigung der Bieliden

von

Adolf Hnatek.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. November 1898.)

Die vorliegende Arbeit war ursprünglich in der Absicht unternommen worden, eine grössere Anzahl von Positionen des Hauptdivergenzpunktes der Periode vom 20. bis 30. November, nämlich des Radianten der Bieliden- oder Andromedenmeteore, für verschiedene Tage und Jahre zu bestimmen, um daraus einen Werth für die aus der Combination der Änderungen von Erd- und Meteorbewegung sich ergebenden Verschiebungen ableiten zu können. Speciell dieser Radiant musste solchen Untersuchungen äusserst günstig sein, da die kosmische Geschwindigkeit der aus demselben kommenden Meteore verhältnissmässig gering ist und daher eine Änderung der Bewegungsrichtung der Erde, die ja täglich ungefähr um einen Grad im Raume um die Sonne weiterrückt und ihren Apex daher um ungefähr ebensoviel verschiebt, einen ganz bedeutenden Einfluss auf die scheinbare Position des Radiationspunktes ergeben musste. Aber gar bald zeigte es sich, dass das vorhandene Beobachtungsmateriale für eine derartige Untersuchung nicht recht geeignet war.

Es war zwar gelungen, für das Jahr 1872, in welchem der Bielidenstrom eine ungeheure Lebhaftigkeit entfaltet hatte, welche sogar den grossen Schwarm vom November 1866 (Leoniden) erreichte, wo nicht gar übertraf, fünf Beobachtungsreihen zu erhalten, die in die Untersuchung einbezogen wurden, aber bei der damals äusserst strengen Localisation der Thätigkeit auf den 27. November — alle fünf Beobachtungsreihen

betreffen auch nur diesen einen Tag — konnten jene sehr zahlreichen Beobachtungen zwar einen äusserst genauen Werth für die Position des scheinbaren Radiationspunktes liefern, der jedoch als nur für diesen einen Tag geltend, wohl den Vortheil bot, dank seiner verhältnissmässig hohen Genauigkeit und Sicherheit eine recht sichere Bahnbestimmung zu ermöglichen, nichtsdestoweniger aber für den zuerst vorgenommenen Zweck ohne jeglichen Nutzen war.

Besser allerdings, sollte man meinen, hätte es um das Jahr 1885 bestellt sein können, wo die Localisation des Phänomens bei weitem nicht mehr so strenge war, wie im Jahre 1872. Die Meteore fielen in einer so ungeheuren Anzahl, dass sogar der schöne Sternschnuppenregen vom 27. November 1872 weit übertroffen wurde. Doch war hier wieder die Anzahl der Meteorbahnen, welche behufs Bestimmung der thätigen Radianten notirt worden waren, eine nur sehr geringe. Man hatte sich hauptsächlich darauf beschränkt, entweder die Anzahl der gefallenen Meteore überhaupt oder die stündliche Frequenz derselben zu bestimmen.

Allerdings hatte Denning eine Reihe von Beobachtungen aus diesen Tagen (26. bis 30. November 1885) bereitwilligst zur Verfügung gestellt, da er jedoch bereits die zum Andromedenradianten gehörigen Meteore ausgewählt und leider auch nur diese übersendet hatte, so konnte keine rechte Controle über die Art der Auswahl der Meteorbahnen geübt werden und weil vorläufig nur selbstbestimmte Positionen in die Untersuchung einbezogen werden sollten, so blieb nichts anderes übrig, als die einmal gefasste Absicht gänzlich fallen zu lassen. Nichtsdestoweniger ist es gelungen, eine grössere Anzahl von verhältnissmässig sicher bestimmten Positionen nicht nur des Radianten der Bieliden, sondern auch anderer Divergenzpunkte zu erhalten, die sich meist mit schon bekannten, hauptsächlich von Schmidt, Heis, Greg, Herschel, Schiaparelli und Denning bestimmten Radiationscentren decken.

Was die zahlreichen Beobachtungen betrifft, die ich grösstentheils der Güte des Herrn Prof. Weiss verdanke, so standen mir zur Verfügung: Die in den Annalen der Wiener Sternwarte gedruckten Sternschnuppenbeobachtungen, welche

während der Jahre 1867—1877 von österreichischen Beobachtern ausgeführt worden waren; ebenso einige ebendortselbst gedruckte Beobachtungen älteren Datums, sowie die im Jahre 1837 an der alten Wiener Sternwarte angestellten und von Littrow ein Jahr später veröffentlichten Beobachtungen. Weiters die Beobachtungen, welche in den »Pubblicazioni del Reale Osservatorio di Brera in Milano« enthalten sind und die sich über die Jahre 1867—1872 ausdehnen. Einer Privatmittheilung verdanke ich die Beobachtungen Denning's vom Jahre 1885, sowie einige von ihm notirte hieher gehörige Meteorbahnen aus den Jahren 1876, 1877 und 1880. Von Prof. Giov. Schiaparelli in Mailand habe ich auf meine briefliche Bitte hin einige Beobachtungsreihen erhalten, welche am »Osservatorio meteorologico, Seminario V« in Pavia von Prof. Maffi beobachtet worden waren und die lediglich das Jahr 1897 betreffen. Doch gaben diese Beobachtungen äusserst wenig Andromeden und auch die übrigen Radianten dieser Periode waren so schwach vertreten, dass von den ohnedies nicht sehr zahlreichen Flugbahnen noch eine grosse Zahl von Meteoren, welche keinem der abgeleiteten Radianten zugetheilt werden konnten, übrig blieb. Auch Nyiland, der nunmehrige Director der Sternwarte in Utrecht, hat mir einige Beobachtungen von Meteorbahnen gesendet. Dieselben sind in Rohrbach'schen Karten in gnomonischer Projection eingezeichnet und betreffen die Jahre 1895 und 1897. Auch sie ergaben äusserst wenig Meteore, die aus den Bielidenradianten kamen. Ebenso liessen die mir von Dr. Otto Knopf in Jena auf meine in A. N. 3477 veröffentlichte Bitte um Überlassung von Meteorbahnen hin zur Verfügung gestellten Beobachtungen meist teleskopischer Sternschnuppen wegen ihrer geringen Zahl eine Zusammenfassung in Radianten nicht zu. Nicht vergessen will ich auch die Schrift: »Astronomische Beobachtungen über Meteorbahnen und deren Ausgangspunkte« von Dr. J. F. Schmidt, die mir gleichfalls Herr Director Weiss zur Verfügung gestellt hat und der ich einige Meteorbahnen entnehmen konnte. Später fand ich noch die von Prof. Herschel am 27. November 1872 beobachteten Meteorbahnen im Band XXXIII der »Monthly notices« veröffentlicht. Es sei mir gleich hier gestattet, allen Jenen, welche mir

durch freundliche Übersendung von Beobachtungen das spärliche Material erweitern halfen, meinen besten Dank für ihre Bereitwilligkeit auszusprechen.

Was nun die Art und Weise anbelangt, wie die Radianten bestimmt wurden, so wurde unter Benützung der von E. Heis zu diesem Zwecke entworfenen »centrischen Projectionen« im Princip diejenige Methode befolgt, die Prof. Weiss in seiner im Jahre 1868 in diesen Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlung vorgeschlagen hat.[1] Dieselbe wurde nur insoweit modificirt, dass nicht die Rectascensionen und Declinationen derjenigen Punkte der verlängerten Sternschnuppenbahnen, welche dem Radianten am nächsten waren, sondern gleich die Differenzen der Positionen dieser Punkte und des angenommenen Radiationspunktes in AR. und D. angeschrieben wurden, deren arithmetisches Mittel eventuell mit Berücksichtigung der Gewichte für die einzelnen Flugbahnen als Correction des supponirten Radianten genommen wurde. Dieses Verfahren wurde dort, wo sich der verbesserte Werth des Radianten um mehr als einen halben Grad von dem ursprünglichen Werth verschoben ergab, so lange fortgesetzt und wiederholt, bis diese Correction unmerklich wurde. In der Regel erreicht man im schlimmsten Falle mit drei Näherungen einen hinreichend genauen Werth.

Welcher hohen Genauigkeit diese Methode fähig ist, geht aus dem Umstande hervor, dass auf diese Weise aus den zwei italienischen Beobachtungsreihen für den 27. November 1872 ein Werth für den Andromedenradianten abgeleitet werden konnte, der nur um den zehnten Theil eines Grades in Declination — die Rectascension war vollkommen übereinstimmend — von dem aus den zu Ofen und Genf angestellten Beobachtungen erhaltenen Orte dieses Radiationspunktes verschieden war. Diese Genauigkeit geht beinahe unter die Grenzen der bei so relativ ungenauen Beobachtungen möglichen Sicherheit herab. Aus diesem Beispiele geht zur Genüge hervor, dass diese Methode, die ja eigentlich eine graphische Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ist, gewiss das Möglichste gibt, was aus einer Beobachtungsreihe gezogen werden kann.

[1] Dr. E. Weiss, Beiträge zur Kenntniss der Sternschnuppen. Diese Sitzungsber., 1868.

Die nach dieser Methode abgeleiteten Radianten, die nunmehr näher besprochen werden sollen, lassen sich, wie schon oben erwähnt, meist mit ähnlichen Divergenzpunkten von Heis, Greg, Denning[1] u. A. identificiren. Dabei möge gleich hier hervorgehoben werden, dass der Vergleich mit den von anderen Beobachtern gefundenen Positionen erst nach Aufarbeitung des gesammten Beobachtungsmateriales und nach vollständiger Festlegung der grossen Mehrzahl der angegebenen Radiationen durchgeführt wurde. Erst dann wurde, um die Anzahl der unbestimmbar gebliebenen Meteore zu vermindern und die Thätigkeit anderer Radianten zur Zeit der Beobachtungen nachzuweisen, auf die bereits von anderer Seite her bestimmten Radiationspunkte Rücksicht genommen. Jedesmal ist dies aber im folgenden, bei der näheren Besprechung der einzelnen Radiationen hervorgehoben.

Die Mehrzahl der angeführten Radiationspunkte ist fast ausschliesslich aus den Beobachtungen vom 27. November 1872 abgeleitet, und in ganz besonderem Maasse gilt dies von den mit I bis X bezeichneten Radianten. Um jedoch zu zeigen, dass viele derselben auch früher oder später, wenn auch bedeutend weniger thätig waren, mögen in der nun folgenden Besprechung der einzelnen Positionen auch jene Tage hervorgehoben werden, wo sich einige wenige Meteore dem betreffenden Punkte zutheilen liessen. Aus diesen wenigen Meteoren eine Position für den Radianten zu bestimmen, wurde in vielen Fällen desshalb unterlassen, weil dieselbe bei der geringen Zahl der Meteore mit allzugrosser Unsicherheit behaftet erschienen wäre und es unzulänglich gewesen wäre, mehrere Meteore vielleicht von verschiedenen Beobachtungstagen und oft sogar verschiedenen Jahren zusammenzuzeichnen und zusammenzufassen. Die Radiationspunkte theilen sich von selbst

---

[1] Bei Vergleichung der erhaltenen Positionen mit Denning's Radianten konnte ein Verzeichniss der letzteren benutzt werden, das ich einer brieflichen Mittheilung Denning's verdanke und das sich lediglich auf die Periode der Bieliden bezieht. In A. N. 3513 hat Denning neuerdings ein Verzeichniss der von ihm für die Perioden der Quadrantiden, Lyriden, Perseiden, Orioniden, Leoniden und Geminiden gefundenen Positionen zusammengestellt. Von dieser Zusammenstellung wurden nun auch die Leoniden und Geminiden einbezogen.

in zwei Gruppen, deren erste diejenigen umfasst, welche sich mit vollkommener Sicherheit aus den Beobachtungen ergaben, wo also der angegebene Ort nur mit verhältnissmässig geringer Unsicherheit behaftet ist, während sich in die zweite die mehr unsicheren, sowie auch diejenigen Radianten einstellen, welche in ihrer Thätigkeit nur dadurch erkannt wurden, dass die von anderen Beobachtern gegebenen Radiationspunkte in die Karten eingezeichnet und einbezogen wurden.

A. Sichere Radianten.

I. 25·3+43·7.

Der Hauptradiant dieser Periode, der seine Thätigkeit den Trümmern des Biela'schen Kometen verdankt, welcher seit 1852, wo er zum letzten Male beobachtet werden konnte, verschollen ist.

Wie bereits oben erwähnt, standen zur Bestimmung dieses Radiationspunktes fünf Beobachtungsreihen vom 27. November 1872 zur Verfügung. In den »Annalen der Wiener Sternwarte« sind unter den von Prof. Weiss veröffentlichten Sternschnuppenbeobachtungen die Beobachtungsreihen, die in Ofen und in Genf erhalten wurden, enthalten. In den »Pubblicazioni del reale osservatorio di Brera in Milano« finden sich die Beobachtungen in Moncalieri und Mondoví. Bei einer nur cursorischen Bestimmung, welche, wie mir Prof. Weiss mittheilte, hauptsächlich dazu dienen sollte, die stärksten Radianten, die an diesem Tage thätig waren, hervortreten zu lassen, hatte Letzterer für den Ausgangspunkt der Bieliden gefunden:

25·0+44·1.

Dieser Werth wurde als erste Näherung bei der genauen Bestimmung des Ortes des Radianten benützt. Für die ersten vier Beobachtungsreihen ergaben sich nach der oben auseinandergesetzten Methode, wobei sowohl die österreichischen, als auch die italienischen Beobachtungen gesondert behandelt worden waren, folgende Positionen:

Für Ofen und Genf........... 25·3+43·7 aus 64 Meteoren,
für Moncalieri und Mondoví ... 25·3+43·8 aus 66 Meteoren.

Später wurden noch im Band XXXIII der »Monthly notices« die von Prof. Al. Herschel beobachteten Meteorbahnen veröffentlicht gefunden. Die aus ihnen abgeleitete Position, welche jedoch ziemlich bedeutend in Declination von obigen zwei Werthen abweicht, ergab:

Herschel's Beobachtung...... 25·6+40·6 aus 25 Meteoren.

Wegen dieser ziemlich starken Verschiedenheit wurde auch dieser Werth des Radiation punktes nicht für die Bahnbestimmung verwendet. Dieser Vorgang erscheint umsomehr gerechtfertigt, als ja die ersten zwei Bestimmungen aus den österreichischen und italienischen Beobachtungen doch zwei Werthe geliefert hatten, die weit innerhalb der Grenzen der bei solchen Bestimmungen erreichbaren Genauigkeit übereinstimmten. Man könnte noch meinen, dass vielleicht die in der grösseren Breite des Beobachtungsortes in Folge der geringeren Höhe des Radiationspunktes über dem Horizonte grössere Zenithattraction diese Abweichung verursacht habe; aber schon die erste Überlegung muss sagen, dass bei grösserer Zenithdistanz die Declination eher zu gross, als zu klein hätte ausfallen müssen. So musste also die Elimination des Einflusses der Zenithattraction den Fehler der Position nicht nur nicht beseitigen, sondern ihn sogar noch vergrössern.

Wie sehr die Position eines Radianten durch die Auswahl der Meteorbahnen, die zur Bestimmung desselben verwendet werden sollen, beeinflusst werden kann, mag aus der folgenden Zusammenstellung ersehen werden, welche eine von Prof. Al. Herschel in den »Monthly notices«, Band XXXIII, gegebene Tabelle wiedergibt, die noch mit bedeutenden Erweiterungen, namentlich aus den Angaben in »Heis' Wochenschrift« versehen wurde. Sämmtliche Angaben betreffen lediglich den 27. November 1872. Es dürfte gewiss schwer fallen, manche auffallende Abweichungen in den einzelnene Werthen, wie sie hier für den Radianten der Andromeden gegeben sind, lediglich aus den Wirkungen der Zenithattraction zu erklären. Leider fehlt bei allen Angaben die Zahl der Meteore, aus denen die angeführte Position abgeleitet wurde.

Nr.	Beobachter	Beob.-Ort	Beob.-Zeit 1872 Nov. 27	Position des Radianten AR.	D.	Anmerkungen
1	W. H. Wood	Birmingham	$6^{h}-10^{15h}$	5	+50	
2	E. V. Pigott	Malpas	7	9	+50	
3	J. J. Plummer	Durham	7	15	+46·5	
4	»	»	9^{45}	27	+56	
5	H. Weightman	Oundle	$5^{30}-8^{15}$	18	+51	
6	A. S. Herschel	Newcastle on Tyne	$6-6^{45}$	20	+40	
7	J. G. Galle	Breslau	$6^{20}-7^{50}$	22	+42	
8	»	»	8	22	+42	
9	»	»		35	+45	nach Mitternacht
10	Knobel	Burton on Trent	$5^{35}-7^{50}$	22·5	+44	
11	Marth	Gateshead	6^{30}	25·5	+43	
12	T. P. Barkas	Newcastle on Tyne	6^{30}	26·5	+43	
13	T. W. Backhouse	Sunderland	$5^{30}-11^{5}$	25	+44	
14	T. H. Waller, S. P. Thomson	York	$6-10^{15}$	25	+45	
15	Grant, Forbes	Glasgow	$5^{30}-10^{30}$	25	+45	
16	W. Swan	St. Andrews	$8^{20}-8^{25}$	25	+48	
17	S. J. Perry	Stonyhurst	$9^{20}-9^{40}$	26·6	+43·8	
18	E. Heis	Münster	8—9	24	+50	
19	J. B. Smith	Chesterfield	7—	29	+59	
20	E. J. Lowe	Beeston	$5^{50}-10^{30}$	26·2	+46·2	
21	W. F. Denning	Bristol	$6-6^{30}$	29	+46	geschätzt
22	G. Lespiault	Bordeaux	$5^{30}-10$	28	+42	
23	Glotin	»	—	29	+43	
24	H. van de Stade	Arnheim	—	29	+41·7	
25	F. Denza	Moncalieri	8	30	+28	

Nr.	Beobachter	Beob.-Ort	Beob.-Zeit 1872 Nov. 27	Position des Radianten AR.	D.	Anmerkungen
26	F. Denza	Moncalieri	später	29	+ 32	
27	»	»	»	37	+ 36	
28	W. Garnet	Clitheroe	$7^{50}-8^{35}$	40	+ 35	
29	H. A. Newton	New Haven V. S.	—	355	+ 43	ungefähr aus einigen Bahnen
30	?	Pölbitz	—	28	+ 55	
31	J. Schmidt	Athen	8^{45}	22·5	+ 42·5	Maximum des Phänomens
32	Fröhlich	Budapest	—	28·5	+ 42·0	
33	Heidorn	Göttingen	—	26	+ 37	gezeichnet
34	Konkoly	Ó Gyalla	—	(30±2)	+ (45±5)	
35	Zona	Caltanisetta	—	32	+ 43·5	
36	Tacchini	Palermo	11	40·9	+ 46·5	
37	Mohn	Christiania	—	27	+ 45	zu Beginn des Phänomens
38	Rubenson	»	—	25	+ 47	etwas später
39	Fearnley	»	—	27	+ 43	
40	J. Palisa	Bothkamp	7—	44·5	+ 40·5	
41	Karlinski	?	10—11	22	+ 43	
42	F. J. Pick	Pola	7^{30}	28·8	+ 41·7	Position von γ-Andromed.
43	A. Weiss	Prag	—	28·8	+ 41·7	
			Mittel....	25·7	+ 44·0	

Alle diese Angaben geben einen Mittelwerh von

$$25 \cdot 7 + 44 \cdot 0,$$

welcher sich auffallend gut der oben genau bestimmten Position anschliesst und nur versuchsweise gerechnet wurde, da es

wegen der verschiedenen Grösse der Verschiebungen durch die Zenithattraction in Folge der verschiedenen geographischen Breiten der Beobachtungsorte, sowie der Verschiedenheiten in den Beobachtungszeiten eigentlich unzulässig wäre, die Beobachtungen ohneweiters zusammenzufassen. Dabei wurde der von H. A. Newton angegebene Werth Nr. 29 ausgeschieden, da er sich mehr dem Werthe des Radianten IV nähert.

Was die nächsten Jahre anbelangt, so war das Phänomen da wohl recht spärlich, bis es im Jahre 1885 wieder eine bedeutende Steigerung erfuhr, so zwar, dass der Fall vom 27. November 1872 durch den Sternschnuppenschauer vom 27. November 1885 weit übertroffen wurde. Seit 1872 hat der Bielidenstrom auch noch ein drittes Mal eine bedeutende Thätigkeit entfaltet und zwar am 23. November 1892, wo er ungefähr in derselben Stärke auftrat, wie bei seiner ersten grossen Erscheinung im Jahre 1872. Das Phänomen hatte sich also bei seiner letzten Erscheinung um vier Tage verfrüht. Es zeigte sich, dass diese Verfrühung auf Kosten der Störungen Jupiters zu setzen sei, dem sich der Hauptschwarm in den Jahren 1889 und 1890 bedeutend genähert hatte.

Auch für den Zeitraum von 1872 bis 1897 wurden eine Reihe von durch verschiedene Beobachter festgestellten Positionen des Bielidenradianten zusammengestellt und in der folgenden Tabelle vereinigt. Auch die wenig zahlreichen Angaben für das Jahr 1885 und die noch spärlicheren Bestimmungen für 1892 wurden einbezogen.

Nr.	Datum	Beobachter	Zeit der Beob.	Position AR. D.	Bemerkungen
1	1872 Nov. 27	A. Weiss, Prag		28·8+41·7	Position von γ-Andromedae
2	1877 » 25	Denning		22 +45·5	18 Meteore
3	1878 » 29	Corder		23 +44	8 »
4	1879 » ?	»		24 +45	6 »
5	1883 » 26	»		25 +43	

Nr.	Datum	Beobachter	Zeit der Beob.	Position AR. D.	Bemerkungen
6	1885 Nov. 26	Denning	$5^{47}-12^{34}$	26 +44	25 Meteore
7	» 27	»	$5^{19}-9^{1}$	24 +44	26 »
8	» 28	»	$6^{25}-11^{27}$	22 +43·5	34 »
9	» 30	»	$6^{39}-9^{59}$	21 +42·5	10 »
10	Dec. 7	»		19 +43	
11	1885 Nov. 27	Denza, Moncal.	7^{35}	22 +44	
12	» 27	»	8^{20}	26 +43	
13	» 27	»	9^{8}	28 +42	
14	» 27	Corder	—	25 +44	Schätzung (1348 Meteore)
15	» 27	Ralph Copeland	$7^{17}-8^{3}$	25·9+46·4	19 Meteore
16	1885 Nov. 27	Schiaparelli	6^{35}	15 +45	
17	» 27	»	7^{12}	18·5+44	
18	» 27	»	8^{7}	23 +42	
19	» 27	R. Grant	—	24 +45·3	
20	» 27	G. L. Tupman	—	22·5+45·5	
21	1885 Nov. 27	W. H. Robinson		22·5+48	
22	» 27	G. Strahan		26¹/₄+46	
23	1892 » 20	Corder		23 +38	
24	» 26	»		29 +42	
25	1897 » 19 bis 27	Prof. M'affi		26·3+42·7	16 Meteore (aus den Beob. v. Verfasser selbst bestimmt).

Interessant sind hier wohl in höherem Masse die Positionen Denning's für das Jahr 1885, in welchen sich eine schwache Abnahme sowohl der AR., wie auch der D. im Laufe der Beobachtungen zeigt. Versuchsweise wurden aus den von Denning mitgetheilten Beobachtungen die Werthe für die einzelnen Beobachtungstage nach der oben auseinandergesetzten Methode neu bestimmt. Es ergab sich:

1885 Nov. 26.	5^{47}—12^{34}	G. m. T....	25·8+43·4	19	Meteore.
» 27.	5^{19}— 9^{01}	» » ...	25·4+43·9	20	»
» 28.	6^{25}—11^{27}	» » ...	21·7+43·5	18	»
» 30.	6^{39}— 9^{59}	» » ...	21·0+42·5	10	»

Auch aus diesen Bestimmungen bestätigt sich die Vermuthung Denning's, die mir dieser in einem Briefe vom 10. December 1897 mittheilt: »It appeared to me, that the radiant point moved slightly westwards during the progress of my observations; but I am not certain of this fact.« Einer späteren theoretischen Untersuchung möge es vorbehalten bleiben, zu entscheiden, inwieweit sich diese scheinbare Verschiebung aus dem Weiterrücken der Erde in ihrem Laufe um die Sonne erklären lässt.

Was die fortschreitende Zunahme der Rectascensionen und Abnahme der Declinationen in den von Denza und Schiaparelli gegebenen Positionen (Nr. 11—13 und 16—18) betrifft, so lassen sich dieselben vollkommen aus dem Wirken der Zenithattraction erklären und stimmen trotz der für die verschiedenen Zeiten relativ bedeutenden Unterschiede nichtsdestoweniger recht gut miteinander überein.

Die unter der Leitung von Prof. Maffi in Pavia am dortigen »Seminario meteorologico« im Jahre 1897 angestellten Beobachtungen gaben nur äusserst wenig Bieliden; aus ihnen wurde für den ganzen Zeitraum vom 19. bis 27. November 1897 die oben in der Tabelle gegebene Position abgeleitet, die einzige Angabe in dieser zweiten Tabelle, die ich selbst bestimmen konnte. Für eine Sonderbestimmung der Örter des Radianten für jeden Beobachtungstag reichte die Anzahl der Beobachtungen nicht hin.

Soweit die Beobachtungen von 1872 bis in die neueste Zeit. Was endlich den Zeitraum vor dem Jahre 1872 betrifft, so wäre es wohl höchst interessant und wünschenswerth gewesen, aus Meteorbeobachtungen, die zu einer Zeit angestellt worden waren, wo der Biela'sche Komet selbst noch als solcher sichtbar war, einen genauen Werth für den Ort der Radianten zu erhalten. Aber hier war die Ausbeute sehr gering. Es gaben nur:

19.	November	1849	Schmidt in Bonn...	1 Meteor,
29.	»	1869	Wien.............	1 »
17.	»	1870	Allessandria.......	3 Meteore,
24.	»	1870	Florenz............	1 Meteor,
29.	»	1870	Wien.............	2 Meteore.

Sonderbarer Weise ergeben die ziemlich zahlreichen Beobachtungen der »alten Wiener Sternwarte« aus dem Jahre 1837 (19., 28. November und 1. December) nicht eine einzige Andromede.

Gleichwohl ist auch dieses negative Resultat nicht ohne Wichtigkeit. Bekanntlich waren die Andromeden in jener Zeit erst Anfangs December thätig (so z. B. beobachtete Flaugergues am 6. December 1838 einen reichen Sternschnuppenfall). Der Umstand nun, dass in den Beobachtungen des 19. und 28. November, und sogar noch des 1. December 1837, jedwede Spur einer Andromedenthätigkeit fehlt, deutet auf eine ähnliche strenge Localisation des Phänomens, wie sie im Jahre 1872 stattfand. Von dem reichen Sternschnuppenschauer des 27. November 1872 war weder einen Tag vorher, noch ebensolange nachher eine Spur vorhanden und die Ausbeute an Meteoren war da recht spärlich. In den »Annalen der Wiener Sternwarte« ist der 28. November 1872 (Beobachtungen angestellt in Ó Gyalla) treffend charakterisirt mit den Worten: »Von dem reichen Sternschnuppenstrom des gestrigen Abends war keine Spur mehr vorhanden... — ...es war die Zahl der Meteore eine so geringe, wie in einer gewöhnlichen Nacht.« Dasselbe scheint auch 1837 der Fall gewesen zu sein, anderenfalls hätte doch das eine oder andere Meteor beobachtet werden müssen.

Die Auflösung des Schwarmes in seitlicher Richtung oder die Vergrösserung seines Querschnittes muss also erst in der Zeit nach 1872 einen grösseren Fortschritt gemacht haben, wenigstens scheint dies aus Denning's Beobachtungen vom Jahre 1885 hervorzugehen, welche schon über fünf Tage, 26. bis 30. November, vertheilt sind.[1] Noch am letzten Tage

[1] In Folge der Bahnlage des Biela ist diese längere Thätigkeitsdauer auch zum Theil auf Kosten einer Auflösung in der Bahn zu setzen.

konnte Denning in der Zeit von $^1/_2 7$ bis 10 Uhr Abends 10 Bieliden notiren.

Die Vergrösserung des Querschnittes scheint also anfangs nur sehr langsam und erst später mit grösserer Schnelligkeit vor sich gegangen zu sein. Auch die Beobachtungen in Pavia vom Jahre 1897 schliessen sich diesem Endergebniss an. Der Radiant war in diesem Jahre den ganzen acht Tage (19. bis 27. November) umfassenden Zeitraum der Beobachtungen hindurch thätig. Es ergaben:

19. November 1897	1 Meteor	(4·3 Procent)
20. »	4 Meteore	(17·2 »)
21. »	3 »	(11·1 »)
22. bis 25. November 1897 ..	bewölkt.	
26. November 1897	3 Meteore	(21·5 »)
27. »	4 »	(21·0 »)
28. »	unter 7 beobachteten Meteoren keine Andromede.	

An Stelle des Zeitraumes von fünf Tagen, während welcher im Jahre 1885 Bieliden in grösserer Zahl beobachtet werden konnten, waren also im Jahre 1897 bereits acht Tage, oder. wenn der 19. November wegen des geringen Procentsatzes ausgeschlossen wird, sieben Tage getreten. Vortheilhaft wäre es natürlich, wenn Beobachtungen des Falles vom Jahre 1892, November 23, vorhanden wären. Ohne Zweifel hätte sich der Radiant auch zu dieser Zeit schon einige Tage vorher, sowie auch noch nachher erkennen lassen.

Die Beobachtungen von 1897 sind auch noch aus einem anderen Grunde interessant. Die Erde soll, wie schon oben erwähnt, erst heuer (1898) durch den Kern des Schwarmes hindurchgehen und es beweist daher der verhältnissmässig hohe Procentsatz, der bei einem ehemals so streng localisirten Phänomen, wie es die Bielidenmeteore waren, eigentlich überraschend wirkt, dass nicht nur die, wenn man so sagen darf, laterale Verstreuung, sondern auch die Ausdehnung in der Bahn zugenommen hat. Der verhältnissmässig geringe Werth für die halbe grosse Axe der Bahn des Meteorstromes, welcher den Strom beständig weit innerhalb der Saturnbahn hält, so

dass derselbe fast fortwährend der auflösenden Wirkung der Sonne, sowie der Planeten ausgesetzt bleibt, scheint die raschere Auflösung zu bedingen.

Recht gespannt darf man auf das laufende Jahr 1898 sein. Gemäss der Umlaufszeit des Biela von ungefähr $6^1/_2$ Jahren stünde zu erwarten, dass auch in diesem Jahre das Phänomen des Bielidenschwarmes eine Steigerung erfahren sollte.[1] Dann wären mehr sichere Anhaltspunkte dafür gegeben, inwieweit die Jupiterstörungen die Bahnelemente beeinflusst haben und um wieviel die Auflösung fortgeschritten ist. Jedenfalls dürfte es sich empfehlen, schon einige Tage vor dem 23. November mit den Beobachtungen zu beginnen und dieselben auch einige Tage über diesen Tag des Maximums hinaus fortzusetzen. Auch vom Standpunkte der Theorie der Verschiebungen von Radianten in Folge der Erdbewegung und bei der, wie schon eingangs erwähnt, erhöhten Bedeutung, die der Bielidenstrom wegen seiner geringen Geschwindigkeit für dieselbe erlangt hat, wären über einen grösseren Zeitraum ausgedehnte Beobachtungen wünschenswerth. Leider dürfte der Mond das Phänomen arg beeinträchtigen.

II. 48·0+47·5.

Ein zweiter in den Beobachtungen des 27. November 1872 sehr stark vertretener Radiationspunkt. Höchstwahrscheinlich identisch mit folgenden von Denning bestimmten Positionen[2]

Nr. 8 . ... 48+43 für die Periode der Leoniden,
Nr. 6 .. .. 48+42 für die Periode der Geminiden.

Der Radiant ist auch in den Annalen der Wiener Sternwarte als

52·2+49·4

---

[1] Über die Störungen von 1892 bis 1898 hat Abelmann in A. N. 3516 die Resultate einer Untersuchung veröffentlicht, der zufolge sich dieselben als nur unbedeutend ergeben haben. Erst 1901 sollen die Jupiterstörungen wieder bedeutend anwachsen und eine weitere Verschiebung des Maximums auf den 17. November bewirken.

[2] Die Positionen sind einer Mittheilung Denning's in A. N. 3513: »Radiant points of the Minor showers visible during the chief meteoric epochs of the year« entnommen.

angeführt, eine genaue Nebenbestimmung ergab obigen äusserst sicheren Mittelwerth II.

Die meisten Meteore lieferten die Beobachtungen zu Ofen (16 Meteore) und Genf (5 Meteore). Dieselben gaben den Divergenzpunkt

48·0+47·4.

Die italienischen Beobachtungen stellten nur sechs Meteore, darunter fünf zu Moncalieri notirte, bei, mit einem Radiationspunkte in

48·0+47·8.

Als Mittel aus diesen beiden Bestimmungen mit Gewichtsvertheilung nach der Anzahl der verwendeten Meteore ergab sich der unter II angeführte Mittelwerth

48·0+47·5,

welcher für die Bahnbestimmung verwendet wurde.

Die übrige Zeit ist nur sehr spärlich vertreten. »Die meisten Meteore« gaben noch

29. November 1870	Wien	2 Meteore,
18. November 1871	Moncalieri	2 Meteore,

nicht zu vergessen auch

19. November 1849	Bonn (Jul. Schmidt) ...	3 Meteore,

welch letztere der eingangs citirten Abhandlung von Schmidt entnommen wurden.

Die starke Steigerung der Thätigkeit dieses Radianten am 27. November 1872 deutet möglicherweise auf einen Zusammenhang mit dem Hauptstrom dieser Periode, dem Bielidenstrom. Ein solcher Zusammenhang wäre sehr wahrscheinlich gemacht, wenn der Radiant auch im Jahre 1885 wieder eine grössere Lebhaftigkeit entwickelt hätte. Leider fehlten die Beobachtungen, um das entscheiden zu können, da mir Denning bloss seine Bielidenbahnen übermittelt hatte.

III. 20·05+23·9.

Vielleicht identisch mit Heis' Radianten

G_1 .... 24+27,

welchen dieser in seiner Schrift: »Resultate der in den 43 Jahren 1833—1875 angestellten Sternschnuppenbeobachtungen« als in der zweiten Hälfte des November thätig anführt. Eine genaue Bestimmung mit Unterlegung des in den Annalen der Wiener Sternwarte angeführten Werthes

21·1+24·6

als erster Näherung ergab aus 14 Ofener und 6 Genfer Meteorbahnen, die ganz bestimmt diesem Radianten angehörten, den genauen Werth

19·8+23·9.

Diesmal war auch die Ausbeute aus den in den »Pubblicazioni...« veröffentlichten Beobachtungen reicher und es konnte aus 13 Meteoren der genaue Werth

20·4+23·9

abgeleitet werden. Als Mittelwerth aus beiden Örtern resultirt obige Position III. Auch dieser Radiant gab zu anderen Zeiten nur wenige Meteore, selten konnte mehr als eine Sternschnuppe als zu ihm gehörig erkannt werden. Nur in den Beobachtungen vom 18. November 1871 von Moncalieri finden sich zwei Meteore, und ebenso gaben die Beobachtungen, die am 19. November 1897 unter Prof. Maffi in Pavia angestellt worden waren, zwei Meteore, die aus diesem Punkte kamen. In den Beobachtungen des Jahres 1837 ist dieser Radiant, sowie der vorhergehende überhaupt nicht zu constatiren gewesen.

IV. 347·6+39·2.

Diese Position ist wahrscheinlich identisch mit Denning's Radianten[1]

353+40.

---

[1] Nach brieflicher Mittheilung.

In den italienischen Beobachtungen fanden sich nur zwei Meteore, die diesem Radiationspunkt angehörten; mehr, allerdings auch nicht viel, in den Genfer Beobachtungen (6 Meteore) und die meisten in der Ofener Beobachtungsreihe (10 Meteore). Alle diese Meteore gaben den oben angesetzten Werth. Auch dieser Radiant blieb ebenso wie die zwei vorhergehenden ziemlich streng localisirt auf den 27. November 1872. Sogar in den kurz vorhergehenden Jahren fanden sich so wenige Meteore, dass ich sie hätte kaum in einen Radianten zusammenfassen können, hätte ich nicht gewusst, dass dort ein Ausgangspunkt existirt.

V. 13·14+59·1.

Vielleicht identisch mit dem von E. Heis in seiner obcitirten Schrift für die zweite Novembenhälfte angeführten Divergenzpunkt

$$\left.\begin{array}{l} A_{17} \cdots\cdots \\ A_{18} \cdots\cdots \end{array}\right\} 15+62.$$

Die Ofener und Genfer Beobachtungen gaben eine recht hübsche Anzahl von Meteoren (32), welche äusserst strenge einen Strahlungspunkt in

12·9+59·3

charakterisirten. Auch die italienischen Beobachtungen liessen den Radianten erkennen. Zwar war die Zahl der hierhergehörigen Meteore bedeutend geringer — nur etwa acht Meteore konnten zu diesem Radiationscentrum gezählt werden —, aber auch diese gaben einen wenigstens in Declination nahe übereinstimmenden Werth von

14·1+58·2.

Der grössere Unterschied in Rectascension ist wohl darauf zurückzuführen, dass die italienischen Beobachtungen im Mittel zu einer etwas früheren Tagesstunde angestellt worden waren, wie die österreichischen Beobachtungen, so dass die grössere Differenz in AR. wohl nur auf Rechnung der Zenithattraction zu setzen ist. Das Mittel aus beiden Bestimmungen ergab obige Position V.

Die Folgezeit war wieder nur sehr spärlich vertreten. Allerdings gab fast jeder Beobachtungstag ein Meteor, aber nur selten wurde die Zahl derselben grösser. Diese seltenen Tage waren:

17. November	1870	Allessandria	3 Meteore.
20. »	1897	Pavia	2 »
27. »	1897	»	2 »

Von diesem Radianten fanden sich auch in den Beobachtungen vom 28. November 1837 einige wenige Meteore (4), die einen Convergenzpunkt in

$$13 \cdot 3 + 59 \cdot 5$$

ergaben. Die oben angeführte Position V ist bei der verhältnissmässig grossen Anzahl von Meteoren, aus denen sie abgeleitet wurde, sowie bei der günstigen Vertheilung der Flugbahnen derselben, sehr genau.

VI. 50·0+30·1.

Der Radiant ist sehr sicher, hauptsächlich aus den Ofener Beobachtungen (1872, November 27), bestimmt. Es fanden sich dort 23 Meteore, die aus diesem Punkte kamen. Die Genfer Beobachtungen gaben nur ein Meteor und auch die italienischen Beobachtungen vom 27. November 1872 stellten nur ein in Mondoví beobachtetes Meteor bei, sowie einige andere, deren Zugehörigkeit zu diesem Radianten nicht ganz sicher schien und die daher ausgeschieden wurden.

Denning hat diesen Radianten, der für die Periode der zweiten Hälfte des November charakteristisch ist, ebenfalls beobachtet, allerdings auch während der Thätigkeit der Leoniden und der Geminiden, und gibt die fast vollkommen übereinstimmenden Werthe [1]

Nr. 9 ..... 50+30 für die Periode der Leoniden

und

Nr. 7 ..... 52+31 für die Periode der Geminiden.

---

[1] A. N. 3513.

Fünf in Moncalieri am 18. November 1871 beobachtete Meteore, die diesem Punkte angehörten, gaben den Werth

47+29.

Mehrere zu diesem Divergenzpunkte gehörende Meteore wurden auch gefunden in den folgenden Beobachtungsreihen:

1869	November	29	Wien	2 Meteore.
1870	»	17	Allessandria...	3 »
—	»	29	Florenz	2 »
1871	»	17	Lodi	2 »
1872	»	28	Ó Gyalla	3 »

VII. 52·8+38·7.

Vielleicht identisch mit dem von Heis a. a. O. für die Periode 15.—30. November gegebenen Radianten

St_{32} ...... 55+45.

Auch die schon oben zum Radianten II gezogenen Denning'schen Werthe[1]

Nr. 8 ..... 48+43 für die Periode der Leoniden,
Nr. 6 ..... 48+42 für die Periode der Geminiden

könnten hierhergehören. Vielleicht charakterisirt Denning's Radiant eine grössere Radiationsgegend, die in jene zwei Punkte II und VII auflösbar ist.

17 Meteore der Ofener und Genfer Beobachtungen des 27. November 1872 gaben den sehr genauen Werth

52·9+38·7.

Fast in vollkommener Übereinstimmung damit weisen vier Meteore aus den »Pubblicazioni...« auf einen Ausgangspunkt in

52·6+38·8

hin, aus welchen beiden Bestimmungen der obige Normalwerth VII gezogen wurde.

---

[1] A. N. 3513.

Die Beobachtungen vom 18. November 1871 zu Moncalieri gaben vier Meteore, die aus einem Punkte in

52·7+37·9

kamen, also in naher Übereinstimmung mit den obigen Resultaten. Auch an den anderen Beobachtungstagen wurde hie und da eine Meteorbahn notirt, die auf diesen Radianten hinwies.

VIII. 34·0+27·3.

Jedenfalls identisch mit dem von Schmidt in seiner Abhandlung »Astronomische Beobachtungen über Meteorbahnen und deren Ausgangspunkte« für die Decemberperiode gegebenen Radiationspunkt

34+28.

Wie überhaupt alle bisher angeführten Positionen, so ist auch dieser Radiant lediglich aus den Beobachtungen des Jahres 1872, November 27 entwickelt worden, und zwar gaben die österreichischen Beobachtungen aus 13 Meteoren den Divergenzpunkt in

34·1+27·4.

In den »Pubblicazioni...« fand sich fast die gleiche Anzahl von Meteoren, nämlich 12, die in naher Übereinstimmung die Position zu

33·9+27·2

ergaben. Bei der Spärlichkeit der anderen Jahre im Vergleiche mit jenem Hauptjahre der Sternschnuppenthätigkeit, kann es nicht Wunder nehmen, wenn dieselben nur wenig für diesen Radianten benutzbares Material beobachten liessen. Es fanden sich für diesen Radianten in anderen Beobachtungsreihen:

1869	November	29	Wien	2 Meteore.
1870	»	17	Allessandria ...	2 »

IX. 26·0+72·0.

Identisch mit Denning's Radianten[1]

Nr. 3	27+71	für die Periode der Leoniden,
Nr. 2	28+70	für die Periode der Geminiden.

[1] A. N. 3513.

Die anfängliche Untersuchung liess es sehr zweifelhaft erscheinen, ob diesem Radianten werde grosser Werth beigelegt werden können, da die zu Ofen und Genf gemachten Beobachtungen vom 27. November 1872 (6 Meteore) ausschliesslich nahe die NS-Richtung befolgten und man sich bei dieser einseitigen Bestimmung, ohne gerade grosse Störungen hervorzurufen, den Radianten dem Nordpol beliebig genähert denken konnte. Diese Beobachtungen ergaben als wahrscheinlichsten Werth

$$26+72.$$

Später kamen noch die italienischen Beobachtungen hinzu und mit diesen war es merkwürdiger Weise ähnlich bestellt. Nur wollte es ein günstiger Zufall, dass hier alle Meteore wieder ausschliesslich in WE-Richtung flogen, so dass sich hier die Declination genau bestimmen liess, während die Rectascension zweifelhaft blieb. Die vier Meteore aus den »Pubblicazioni...« gaben nichtsdestoweniger in guter Übereinstimmung

$$23+71 \cdot 5.$$

Das verhältnissmässig genaue Zusammenfallen dieser Resultate sowohl untereinander, als auch mit den Denning'schen Werthen, will nichts anderes, als abermals zeigen, dass die eingeschlagene Methode zur Bestimmung der Radianten,* die als graphische Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate den wahrscheinlichsten Werth des Ausgangspunktes gibt, gewiss das Möglichste leistet, was aus den vorhandenen Beobachtungen gezogen werden kann. Aus der Combination beider Werthe ergab sich ein Mittelwerth in der oben angeführten Position.

Drei Meteore, die am 18. November 1871 in Moncalieri beobachtet worden waren, gaben

$$23+71 \cdot 5,$$

also fast denselben Ort.

X. 7·0+29·5.

Vielleicht mit dem von Heis a. a. O. für die Periode des 15.—30. November gegebenen Radiationspunkt

$$T_3 \, \ldots\ldots\ldots \, 2+21.$$

sowie auch mit dem ebendortselbst für die Decemberperiode gegebenen Radiationspunkt

T_3 ...... 3+26

identisch. Auch Denning's Positionen[1]

Nr. 1 ..... 9+34 für die Leonidenperiode,
Nr. 1 ..... 9+33 für die Geminidenperiode

können möglicherweise hierhergehören.

Im Verlaufe der Untersuchung ergab sich die Nothwendigkeit, einen Radianten in dieser Position anzunehmen, da sonst, falls die Meteore anderen Radiationspunkten hätten zugetheilt werden sollen, grössere Beobachtungsfehler hätten angenommen werden müssen, als dies zulässig schien. Übrigens gaben die Meteore den Radianten ziemlich sicher und deutlich, und beweist auch schon die Übereinstimmung mit Heis' und Denning's Radianten das thatsächliche Vorhandensein eines Ausgangspunktes in dieser Richtung.

Der obige Werth ist aus vier Ofener und sieben Genfer Meteoren des 27. November 1872 abgeleitet. Die italienischen Beobachtungen gaben nur ein Meteor, das mit Sicherheit aus diesem Punkte kam.

XI. 66·9+51·5.

Identisch mit Denning's Radiationspunkt für die Periode der Andromeden:[2]

67+51

und fast gleichlautend mit seinen in der schon öfters citirten Abhandlung in den A. N. 3513 angeführten Werthen:

Nr. 12 .... 61+49 für die Periode der Leoniden,
Nr. 8 .... 60+49 für die Periode der Geminiden.

Möglicherweise gehören hierher auch die folgenden Positionen, die Greg und Herschel für diese Periode gefunden haben:

59+58,
45+60.

[1] A. N. 3513.

[2] Nach brieflicher Mittheilung.

Auch Heis' für die Zeit vom 15.—30. November entwickelter Radiant

H' .... 74+45

kann hierher gehören.

Der oben angeführte Werth des Radianten ist aus zusammen 13 Meteoren vom 27. November 1872 abgeleitet und gibt einen sicheren Werth für das Centrum einer Radiationsgegend, die in einem Kleinkreise enthalten ist, der mit einem Radius von circa 2—3 Graden um diesen Punkt beschrieben wird.

Auch in den Beobachtungen anderer Jahre finden sich einige Meteore, so besonders unter den in Pavia im Jahre 1897 beobachteten Meteorbahnen vom 19. November. Von diesem Tage ergaben vier Meteore die Position

63+52.

Auch Schmidt's Beobachtungen, welche von demselben in Bonn im Jahre 1849 gemacht worden waren, ergaben vier Meteore mit einem Divergenzpunkt in

70+51.

Von den Meteoren des Jahres 1837 scheint kein einziges diesem Punkte anzugehören.

XII. 77·4+68·6.

Wahrscheinlich ein Bindeglied zwischen Denning's Radianten[1]

Nr. 14 .... 70+66 für die Periode der Leoniden,
Nr. 10 .... 70+67 für die Periode der Geminiden.

Die Beobachtungen von Ofen und Genf (1872 November 27) gaben 12 Meteore. Aus den italienischen Beobachtungen desselben Jahres war der Radiant nicht zu erkennen. Aus drei Meteoren, die in Wien am 30. November 1867 beobachtet worden waren, ergab sich ein Werth:

82+70.

[1] A. N. 3513.

In der Folgezeit war der Radiant nur sehr schwach, höchstens durch ein oder das andere Meteor vertreten.

Auch hier hatten, ebenso wie bei X, die Beobachtungen den Radianten nur einseitig bestimmt, so dass ich beinahe versucht gewesen wäre, wegen zu grosser Unsicherheit zu eliminiren. Die gute Übereinstimmung mit Denning's Werthen bewies aber, dass der Radiant thatsächlich existirt.

XIII. 90·0+36·7.

Was diesen Punkt betrifft, so fällt er jedenfalls mit dem von Schmidt a. a. O. für die Decemberperiode gegebenen Radianten:

85+35

zusammen. Hierher gehören dürfte wahrscheinlich auch die von Greg und Herschel gegebene Position:

96+36.

Auch der von E. Heis in der schon öfters citirten Schrift für die erste Hälfte December gegebene Radiationspunkt in

G_5 .... 95+33

kann mit XIII identisch sein, so dass derselbe seine Hauptthätigkeit wahrscheinlich erst in den ersten Decembertagen entfalten dürfte.

Es ist dies zugleich der erste Radiant, welcher nicht aus den Beobachtungen des 27. November 1872 erhalten wurde. Er bestimmte sich ziemlich sicher aus vier Meteoren, die am 30. November 1872 in Wien beobachtet worden waren und fand sich dann auch in den Beobachtungen vom 28. November desselben Jahres zu Ó Gyalla durch zwei Meteore gekennzeichnet. Auch aus den Beobachtungen des Jahres 1867 (November 30) erhielt ich fünf hierhergehörige Meteore und die Beobachtungen zu Moncalieri vom 18. November 1871 lieferten ebenfalls fünf Meteore. Als dann später diejenigen Meteore des 27. November 1872, welche unbestimmbar geblieben waren, einer Durchsicht unterzogen wurden, ergaben sich aus der Beobachtungsreihe von Moncalieri weitere fünf Meteore, die diesem Ausgangspunkt angehörten.

Aus diesen Meteoren ergaben sich folgende Positionen:

1867	November	30...	90 +36·5	(5 Meteore)
1871	»	18...	89·6+36·5	(5 »)
1872	»	27...	90·0+36·7	(4 »)
—	»	28...		(2 »)
—	»	30...		(4 »).

Der Radiant hatte zu jenen Hauptzeiten der Sternschnuppenthätigkeit so wenig Meteore gegeben, dass eigentlich für die Folgezeit wenig zu erwarten stand; hie und da wurden aber doch zwei bis drei Meteore notirt, die ihm angehörten: eigentlich mehr als man hätte erwarten sollen.

B. Unsichere Radianten.

Die hierher gehörigen Radianten betreffen meist solche, welche erst durch Zusammenzeichnen der Beobachtungen verschiedener Tage erkannt wurden und in den weitaus besten Fällen nur ein Maximum von drei Meteoren für den ergiebigsten Tag erreichten. Die Positionen sind meist innerhalb 3—4 Graden unsicher und wurde es daher auch unterlassen, für dieselben die Bahnelemente des zugehörigen Meteorstromes zu rechnen.

Aus demselben Grunde fehlen in der unten folgenden Radiantentafel bei diesen Radianten zumeist sowohl die Zeitdaten, wie auch die Anzahl der Meteore, aus denen sie entwickelt sind; erstere deswegen, weil Beobachtungen mehrerer Tage zusammengezogen wurden (oft sogar von verschiedenen Jahren), letztere aus dem Grunde, weil die Zahl der Meteore doch für die einzelnen Tage hälte angegeben werden müssen und eben diese letzteren nicht aufgenommen wurden. Der Zusatz »Unsicher« bezieht sich nichtsdestoweniger nicht so sehr auf den Radianten selbst, als vielmehr auf die gegebene Position, da der Vergleich mit Denning, Heis u. A. gezeigt hat, dass diese Radianten thatsächlich vorhanden sind.

XIV. 83+47.

Zusammenfallend mit dem von Schmidt in der erwähnten Abhandlung gegebenen Punkte

82+45.

Auch Greg's und Herschel's Positionen

83+50,
74+45

dürften mit XIV identisch sein. Der Radiant ist nur aus zwei, höchstens drei Meteoren für einige Beobachtungstage vermuthet worden, daher äusserst unsicher. Später fiel die Ähnlichkeit mit obiger Position von Schmidt, Greg und Herschel auf, was auch Veranlassung bot, ihn hier anzuführen.

XV. 328+62.

Jedenfalls identisch mit einem von Heis a. a. O. für die erste Decemberhälfte gegebenen Radianten:

B_{10} .... 340+56.

Der Radiant ist im »Astronomischen Kalender« der Wiener Sternwarte mit obiger Position für den 28. November angeführt, gab aber nur einige wenige Meteore, die eine genauere Bestimmung nicht zuliessen, wesshalb der im »Astronomoischen Kalender« gegebene Werth adoptirt wurde. Der Radiationspunkt war überhaupt nur dadurch bemerkbar geworden, dass das Vorhandensein aus dem »Astronomischen Kalender« bekannt war, anderenfalls wäre er gewiss übersehen worden.

XVI. 35+12.

Dieser Punkt scheint mit Denning's, in A. N. 3513 für die Periode der Leoniden gegebenem Werth

Nr. 5...... 30+16

zusammenzufallen. Wurde hier jedoch bloss aus den italienischen Beobachtungen vermuthet. Es lieferten:

1871	November	18	Moncalieri	3 Meteore.
1872	»	27	»	3 »
—	»	28	Ó Gyalla	3 »

Dieser Punkt ist, ebenso wie Radiant XIV, sehr unsicher und unverbürgt.

XVII. 125+43.

Vielleicht identisch mit Heis' für die erste Hälfte December geltendem Radianten:

St_{35} ...... 120+40,

sowie gewiss auch mit Denning's für die Leonidenperiode in A. N. 3513 gegebener Position

125+40

und mit seinem für die Bieliden entwickelten Werth[1]

125+43.

Möglicherweise gehört auch der von Schiaparelli aus den Beobachtungen Zezioli's abgeleitete und in seinem Buche: »Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen« unter S_{172} gegebene Radiationspunkt

S_{172} ...... 120+40

hierher. Der Radiant ist auch im »Astronomischen Kalender« in der angesetzten Position XVII angeführt, gab jedoch nur sehr wenig Meteore mit einem Maximum am 27. November 1872, wo die Genfer Beobachtungen drei Meteore aus diesem Punkte gaben.

XVIII. Denning's Radiant 37—13.

Der einzige Tag, von dem zwei Meteore als mit Sicherheit diesem Ausgangspunkte angehörig betrachtet werden konnten, war:

1872 November 30..... Wien.

Selbst während des grossen Schwarmes vom 27. November 1872 wurde nur ein zugehöriges Meteor notirt (Moncalieri).

XIX. 58—22.

Möglicherweise existirt dort ein Radiationspunkt. Der Radiant wurde jedoch nur aus einigen wenigen Meteoren für einige Tage entwickelt und ist äusserst unsicher.

[1] Nach brieflicher Mittheilung.

XX. 340+2.

Von diesem Punkte gilt dasselbe wie vom vorhergehenden. Das Maximum am 17. November 1870 (Moncalieri) gab drei Meteore. Sonst würde höchstens ein Meteor notirt.

XXI. 5+10.

Wahrscheinlich zusammentreffend mit Heis' für die zweite Novemberhälfte geltendem Radiationspunkte:

T_4....... 10+5.

Die angegebene Position wurde aus drei Meteoren vom 18. November 1871 (Moncalieri) vermuthet. Auch zwei Meteorbahnen vom 27. November 1870, die am gleichen Orte beobachtet worden waren, schneiden sich in ihrer Verlängerung in diesem Punkte. Ebenso wie die zwei früheren, ist auch diese Position unsicher.

XXII. 170+60.

Wahrscheinlich identisch mit der von Schmidt a. a. O. für den November gegebenen Position:

180+65

und mit den von Greg und Herschel gegebenen Radianten:

157+71,
160+71.

Auch Denning's für die Geminidenperiode geltende Position (A. N. 3513):

Nr. 35........ 167+66

lautet ähnlich und dürfte beizuziehen sein.

Entwickelt wurde der Radiant aus drei Meteoren vom 17. November 1870, die in Allessandria notirt worden waren. Auch die Beobachtungen zu Neapel vom 19. November 1870 und zu Moncalieri vom 18. November 1871 gaben je drei Meteore.

XXIII. Denning's Radiant 105+34.

Vielleicht gehören auch die zwei Radianten hierher, die von Schiaparelli aus Zezioli's Beobachtungen abgeleitet worden sind:

S_{174} ...... 100+30,
S_{175} ...... 107+33.

Dieser Radiationsgegend gehörten von allen Beobachtungen nur sechs Meteore an, wobei zweimal je zwei Meteore fielen, und zwar:

1870 November 27 .... Moncalieri (näher an S_{175}),
1871 November 18 .... Moncalieri (näher an S_{174}).

Diese geringe Anzahl gab nicht die Möglichkeit, die Radiationen Schiaparelli's S_{174} und S_{175} auseinanderzuhalten.

XXIV. 22·5+35.

Zum Schlusse der Untersuchung waren noch, wie schon eingangs erwähnt, die Beobachtungen Herschel's in »Monthly notices«, Band XXXIII, gefunden und verwendet worden. Die Meteore kamen zumeist aus dem Bielidenradianten und aus einem Punkte in

22·5+35,

der durch zwei stationäre Meteore scharf definirt war.

Die Beobachtungen des Jahres 1837 haben noch zwei neue Radianten ergeben, deren jeder sich mit einem Denning'schen Werth identificiren lässt. Diese beiden Radiationscentren sind:

XXV. 73+18.

Ein ziemlich sicherer Werth für den Ausgangspunkt von fünf Meteoren des 28. November 1837 (Wien). Denning gibt (A. N. 3513) für die Leonidenperiode einen ähnlichen Werth von

Nr. 17...... 74+15,

der jedenfalls mit XXV identisch ist.

XXVI. 100+44.

Dieser Radiant ergab sich als Ausgangspunkt von drei Meteoren des 28. November 1837, und ebensovielen des 1. December 1837. Denning gibt in A. N 3513 zwei ähnliche Werthe:

Nr. 22..... 99+44 für die Periode der Leoniden,
Nr. 14..... 98+42 für die Periode der Geminiden.

Im Folgenden mögen nochmals die gefundenen Radianten in eine Tafel zusammengestellt werden. In dieselbe wurde der grösseren Übersichtlichkeit halber nochmals die Anzahl der Meteore, aus denen die Positionen entwickelt sind und das Datum des betreffenden Beobachtungstages aufgenommen. Auch die Parallelradianten von Heis, Denning, Schmidt, Herschel u. A. sind in die Tafel eingefügt, um den Vergleich zu erleichtern. Die in den mit »Denning« überschriebenen Columnen den Nummern der Radianten beigesetzten Buchstaben L., B., G. bedeuten die Epoche, für welche Denning's Radiantenwerth gilt, und zwar

L.: Leoniden (November 10—20),
B.: Bieliden (November 23—30)

und

G.: Geminiden (December 5—15).

Die in der vorletzten Columne der Tafel, welche mit dem Worte »Beobachter« überschrieben ist, angesetzten Buchstaben, nennen die Autorität, von welcher der in der letzten Spalte angegebene Radiantenwerth herrührt, und zwar bedeutet

G.: Greg und Herschel;
H.: Heis;
S.: Schiaparelli

und

Sch.: Schmidt.

Tafel *A*.

Nr.	Datum	Zahl der Meteore	Position des Radianten	Denning Nr.	Denning Position	Andere Beobachter Bezeich.	Andere Beobachter Beobachter	Andere Beobachter Position
a) Sichere Radianten								
I.	1872 November 27	130	25·3+43·7					
	1885 » 26	19	25·8+43·4					
	» 27	20	25·4+43·9					
	» 28	18	21·7+43·5					
	» 30	10	21·0+42·5					
	1897 » 19—27	16	26·3+42·7					
II.	1872 November 27	27	48·0+47·5	8 L.	48+43			
				6 G.	48+42			
III.	1872 November 27	33	20·1+23·9			G_1	H.	24+27
IV.	1872 November 27	18	347·6+39·2	B.	353+40			
V.	1837 November 28	4	13·3+59·5			A_{17}	H.	15+62
	1872 » 27	40	13·1+59·1			A_{18}	H.	15+62

VI.	1871 November 28	5	47·0+29·0	9 L.	50+30			
	1872 » 27	25	50·0+30·1	7 G.	52+31			
VII.	1871 November 18	4	52·7+37·9	8 L.	48+43	St_{32}	H.	55+45
	1872 » 27	21	52·8+38·7	6 G.	48+42			
VIII.	1872 November 27	25	34·0+27·3			—	Sch.	34+28
IX.	1871 November 18	3	23·0+71·5	3 L.	27+71			
	1872 » 27	10	26·0+72·0	2 G.	28+70			
X.	1872 November 27	11	7·0+29·5	1 L.	9+34	T_3	H.	2+21
				1 G.	9+33	T_3	H.	3+26
XI.						—	G.	59+58
	1872 November 27	13	66·9+51·5	12 L.	61+49	—	G.	45+60
	1897 » 19	4	62 +52	B.	67+51	H'	H.	74+45
				8 G.	60+49	—	Sch.	70+51
XII.	1867 November 30	3	82·0+70·0	14 L.	70+66			
	1872 » 27	12	77·4+68·6	10 G.	70+67			
XIII.	1867 November 30	5	90·0+36·5			—	G.	96+36
	1871 » 18	5	89·6+36·5	21 L.	87+34	G_5	H.	95+33
	1872 » 27, 28, 30	10	90·0+36·7			—	Sch.	85+35

Nr.	Datum	Zahl der Meteore	Position des Radianten	Denning		Andere Beobachter		
				Nr.	Position	Bezeich.	Beobachter	Position
				b) Unsichere Radianten				
XIV.	—	—	83 +47				G. G. Sch.	83+50 74+45 82+45
XV.	—	—	328 +62			B_{10}	H.	340+56
XVI.	1871 November 18 1872 » 27, 28	9	35 +12	5 L.	30+16			
XVII.	1872 November 27	3	125 +43	29 L. B.	125+40 125+43	St_{35} S_{172}	H. S.	120+40 120+40
XVIII.	1872 November 30	2	37 −13	4 G.	37−13			
XIX.	—	—	58 −22					

XX.	1870 November 17	3	340 + 2					
XXI.	1871 November 18	3	5 +10			T_4	H.	10+ 5
XXII.	—	—	170 +60	35 G.	167+66		G G. Sch.	157+71 160+71 180+65
XXIII.	—	—	105 +34			S_{174} S_{175}	S. S.	100+30 107+33
XXIV.	1872 November 27	2 stat.	22·5+35·0					
XXV.	1837 November 28	5	73 +18	17 L.	74+15			
XXVI.	1837 November 28 December 1	6	100 +44	22 L. 14 G.	99+44 98+42			

Bei vielen der hier aufgenommenen Radianten dürfte ein Zusammenhang mit dem Hauptradianten I des Bielidenstromes, der seine Thätigkeit den Trümmern des Biela'schen Kometen verdankt, bestehen. Trägt man nämlich alle diese Radianten in eine Sternkarte, so erkennt man sofort, dass ungefähr ein Drittel aller Radianten in einem Kleinkreise enthalten ist, welcher um die Position des Hauptradianten

$$25+44$$

als Pol mit einem Radius von ungefähr 25° beschrieben wird. Diese Bogengrösse von 25° wäre aber, als eine durch Störungen hervorgerufene Ablenkung der Bewegungsrichtung eines Theiles des Stromes, aus der anziehenden Kraft der Erde auf den nur mit geringer Geschwindigkeit in seiner Bahn dahinziehenden Strom oder Kometen leicht erklärlich. Auch der Umstand, dass die meisten Radianten zur selben Zeit das Maximum ihrer Thätigkeit erreichen, wie der Hauptradiant I, während zu anderen Zeiten die Ausbeute nur gering ist, scheint für einen solchen Zusammenhang zu sprechen.

Für einige dieser Radianten, und zwar für diejenigen, welche genauer bestimmt werden konnten, das sind also alle mit den Nummern I—XIII bezeichneten und in Gruppe *A* aufgenommenen Radianten, wurden nun mit Benützung der Formeln, welche Prof. Weiss in seiner Arbeit »Beiträge zur Kenntniss der Sternschnuppen« gegeben hat, die Elemente der Bahn gerechnet, welche der zu dem betreffenden Radianten gehörende Sternschnuppenschwarm um die Sonne beschreibt.

Nur beim Bielidenradianten I war es möglich, für die grosse Axe der Bahn einen bestimmten Werth:

$$a = 3 \cdot 526$$

aus den Elementen des Biela'schen Kometen, wie sie für die zuletzt beobachtete Erscheinung desselben im Jahre 1852 gerechnet worden sind, anzunehmen.

Was nun diesen Radianten betrifft, so ist bekannt, dass gerade dieser Divergenzpunkt durch die Anziehung der Erde

(Zenithattraction) in Folge der äusserst geringen relativen Geschwindigkeit der Meteore bedeutend verschoben werden kann. Es war also zuerst wünschenswerth, den ungestörten Ort zu ermitteln.

Anstatt der bei 130 Meteoren schon recht weitläufigen Schiaparelli'schen Methode habe ich mir für diesen Zweck der Befreiung der Position vom Einfluss der Zenithattraction folgende Methode zurechtgelegt. Zunächst wurden mit dem oben unter I gegebenen Werth des Radianten für das Mittel aller Beobachtungszeiten der einzelnen Meteore nach den Formeln

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{w-u}{w+u} \operatorname{tg} \frac{1}{2} z,$$

$$\zeta = z + \varphi$$

die ungefähre Correction φ der Zenithdistanz und damit die wahre Zenithdistanz ζ berechnet. In diesen Formeln bedeutet w die in Folge Erdanziehung beschleunigte Geschwindigkeit und u die ungestörte Geschwindigkeit der Meteore in ihrer Bahn.

Mit diesem ersten genäherten Werth für die wahre Position des Radianten in A (Azimut) und ζ wurde nun nach der für das umgekehrte Problem geltenden Formel

$$w \sin\left(z - \frac{\zeta}{2}\right) = u \sin \frac{\zeta}{2}$$

die scheinbare Zenithdistanz für eine Reihe von Stundenwinkeln gerechnet. Diese in AR. und D. verwandelten Örter wurden in die Kartenprojectionen eingetragen und miteinander durch eine Curve verbunden, welche die Bahn des gestörten Radianten auf der Himmelskugel während der Zeit der Beobachtungen darstellte. Hierauf wurden die einzelnen Meteore nochmals eingezeichnet und die Differenz der Positionen des der Beobachtungszeit entsprechenden Punktes der Curve des Radianten und des diesem Punkte nächsten Punktes der verlängerten Flugbahn des Meteors bestimmt. Das Mittel der Differenzen für alle vorhandenen Meteorbahnen wurde sodann als Correction des bei der Berechnung der Curve des gestörten Radianten angenommenen Werthes der ungestörten wahren

Position betrachtet. Ist der Radiant nicht allzuweit vom Zenith entfernt, so reicht man mit dieser ersten Näherung vollkommen aus. Sollte jedoch die Correction ziemlich gross ausfallen, so bleibt nichts anderes übrig, als die Rechnung mit dem corrigirten Werth zu wiederholen. Dieses Verfahren arbeitet ebenso exact wie das Schiaparelli'sche und hat noch den Vortheil, selbst bei einer Wiederholung der ersten Näherung behufs einer zweiten Correction, noch immer rascher zum Ziele zu führen.

Die von Prof. Weiss für die Bestimmung parabolischer Bahnen von Meteorströmen in seiner oben hervorgehobenen Schrift[1] gegebenen Formeln waren für die Bestimmung der Bielabahn aus dem Radianten I nicht ohneweiters anwendbar und mussten erst für elliptische Bahnen brauchbar gemacht werden. Das wird dadurch erreicht, dass in den dortigen Formeln IV anstatt der parabolischen Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{2}{r}}$ die elliptische $\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}}$ (wobei $k = 1$) eingeführt wird. Das Formelsystem wird demnach:

$$\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}}\,.\cos B\cos(L'-L) =$$
$$= +\sqrt{\frac{2-r}{r}}\sin(\odot'-L')-v'\cos B',$$

$$\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}}\,.\cos B\sin(L'-L) = +\sqrt{\frac{2-r}{r}}\cos(\odot'-L'),$$

$$\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}}\,.\sin B = -v'\sin B'.$$

Zur Bestimmung von v' erhält man dann dadurch, dass man alle drei Gleichungen quadrirt und addirt, die quadratische Gleichung:

$$v'^2-2v'\sqrt{\frac{2-r}{r}}\cos B'\sin(\odot'-L')+\frac{1-a}{a} = 0.$$

[1] Diese Sitzungsber., 1868.

Mit diesen Formeln ergaben sich für den Bielidenstrom aus den Beobachtungen der beiden Jahre 1872 und 1885 folgende zwei Elementensysteme, in denen die halbe grosse Axe der Bahn des Biela'schen Kometen vom Jahre 1852:

$$a = 3\cdot526$$

zugrundegelegt wurde:

	27. Nov. 1872	27. Nov. 1885
v'	9·72827	9·73456
π	103° 36′	104° 39′
π—☊	217 40	218 59
☊	245 58	245 40
i	12 33	12 48
log q	9·94906	9·94757
q	0·8893	0·8863
e	0·8075	0·8071
a	3·526	3·526.

Zur Vergleichung seien hierher auch die Elemente des Biela'schen Kometen bei seiner letzten Erscheinung im Jahre 1852 hergestellt:

π	109°	8′	17″
π—☊	223	16	51
☊	245	51	26
i	12	33	16
q	0·86060		
e	0·75592		
a	3·526.		

Bei der Unsicherheit, welche dem der Rechnung zugrundegelegten Radianten wegen der Flüchtigkeit des Phänomens jederzeit anhaften muss, kann die Übereinstimmung eine ziemlich gute genannt werden. Überdies darf nicht vergessen werden, dass sich die Bahn in dem Zeitraum 1852—1872 durch Störungen etwas geändert hat.

Was die anderen Radiationen betrifft, so wurden für diejenigen, welche wegen zu grosser Zenithdistanz einer

Correction wegen Zenithattraction bedurften, die Entfernungen vom Apex der Erde berechnet und mit diesen der von Schiaparelli a. a. O. gegebenen Tafel die entsprechenden Zenithattractionen entnommen. In der folgenden Tafel *B* sind die corrigirten Werthe der Radianten zusammengestellt, welche für die Bahnbestimmung benutzt wurden.

Tafel *B*.

	Position in AR., D.	Position in *L'* und *B'*
I. 1872......	24°8+43°3	39° 56'+30° 31'
1885......	24·8+43·3	39 56 +30 31
II.	48·0+47·5	58 52 +29 2
III.	20·0+21·5	26 59 +13 1
IV.	348·0+38·0	332 51 +29 58
V.	13·1+59·1	41 51 +47 47
VI.	49·8+29·9	55 14 +11 11
VII.	52·4+38·5	45 23 +15 47
VIII.	33·5+27·0	40 23 +12 46
IX.	26·0+72·0	58 24 +54 12
X.	7·0+29·5	18 46 +24 12
XI.	66·9+51·5	73 44 +29 21
XII.	77·4+68·5	83 29 +45 26
XIII.	90·0+36·7	90 0 +13 15

Aus diesen Werthen ergaben sich folgende parabolische Bahnelemente (Tafel *C*):

Tafel C.

	Position AR. D.	v'	π	$\pi - \Omega = \omega$	Ω	i	$\log q$	q
II.	48 +47·5	9·94783	132° 34'	246° 36'	245° 58'	21° 12'	9·83816	0·68890
III.	20 +21·5	9·74166	101 8	215 10	245 58	5 15	9·95238	0·89615
IV.	348 +38	9·65636	54 22	168 24	245 58	9 19	9·98948	0·97608
V.	13·1+59·1	9·87738	115 0	229 2	245 58	25 33	9·91188	0·81636
VI.	49·8+29·9	9·99116	184 38	198 40	245 58	7 46	9·98236	0·96020
VII.	52·4+38·5	9·84925	120 12	234 14	345 58	8 43	9·89280	0·78127
VIII.	33·5+27	9·81528	114 42	228 44	245 58	6 23	9·91290	0·81828
IX.	26 +72	9·96307	111 0	225 2	245 58	34 30	9·92506	0·84152
X.	7 +29·5	9·72140	170 4	284 6	245 58	14 16	8·76734	0·05852
XI.	66·9+51·5	10 34398	81 54	195 56	245 58	51 14	9·98552	0·96720
XII.	77·4+68·6	10·08879	137 36	251 38	245 58	49 11	9·81206	0·64873
XIII.	90 +36·7	10·16558	200 42	214 44	245 58	37 46	9·16448	0·14604

Alle diese Bahnelemente wurden mit den Elementen derjenigen Kometenbahnen verglichen, welche die Erdbahn in einem der Knoten durchschneiden, um einen etwaigen Zusammenhang zu constatiren. Eine Ähnlichkeit liess sich jedoch in keinem Falle mit Sicherheit vermuthen. Bei der Vergleichung kam eine von Prof. Weiss in seiner oben citirten Abhandlung gegebene Tafel sehr zu statten, welche für alle bis gegen 1868 erschienenen Kometen, welche sich in einem Knoten der Erdbahn bedeutend nähern, sowohl die Position des sich aus der Bahn ergebenden Radianten, als auch den Tag des Jahres gibt, wo sich die Erde in dem betreffenden Knoten befindet. Die nach dieser Zeit erschienenen Kometen wurden nach einer Zusammenstellung der Elemente aller bis jetzt berechneten Kometen verglichen, welche im »Astronomischen Kalender« der Wiener Sternwarte 1897 gegeben ist. Wie schon oben bemerkt, war keines der oben angeschriebenen Elementensysteme mit den Elementen einer der Kometenbahnen identificirbar.

Zum Schlusse darf ich es nicht unterlassen, dem Director der Wiener Sternwarte, Herrn Prof. Dr. Edm. Weiss, welcher mir in liebenswürdigster Weise Alles, was ich nur immer zu meiner Arbeit benöthigte, zur Verfügung stellte und mir überall dort, wo ich seines erfahrenen Rathes bedürftig war, bereitwilligst zur Seite stand, für diese geradezu väterliche Unterstützung meinen besten Dank auszusprechen.

Die photographische Extinction

von

Dr. **Egon v. Oppolzer,**

I. Assistent an der k. k. Sternwarte in Prag.

(Mit 1 Textfigur.)

Soviel mir bekannt ist, gilt bis in jüngste Zeit die Schaeberle'sche Arbeit:[1] »Terrestrial atmospheric absorption of the photographic rays of light« als die umfangreichste Untersuchung über den Einfluss der atmosphärischen Extinction auf die photographische Bestimmung der Sterngrössen. Er gelangt durch die Discussion seiner Beobachtungsreihe zu auffallend starken Extinctionen in kleinen Zenithdistanzen, die den allgemeinen Erfahrungen widersprechen.[2] Er stellt seine Beobachtungen durch die rein empirische Interpolationsformel

$$B = B_0\left[1-f\,\mathrm{tg}\left(\frac{z}{12}\right)^2\right]^2$$

dar. B und B_0 sind die photographischen Sterngrössen in der Zenithdistanz z und im Zenith, f eine Constante, die bloss von dem jeweiligen Zustande der Atmosphäre abhängen soll. Wie die Form des Ausdruckes sofort zeigt, lässt dieselbe an merkwürdiger Complicirtheit nichts zu wünschen übrig. Allerdings, wenn man mit Schaeberle der Ansicht ist — und man findet diese wiederholt auch auf anderer Seite —, dass die Laplace'sche Extinctionstheorie auch einen »empirischen Charakter« besitzt, wäre es nur zu billigen, den Beobachtungen einen

---

[1] Contributions from the Lick observatory No. 3; Sacramento, 1893.

[2] Scheiner, Die Photographie der Gestirne, S. 233; 1897.

Ausdruck von beliebiger Form möglichst genau anzupassen. Diese Ansicht aber ist nicht entschieden genug zurückzuweisen. Die Laplace'sche Theorie baut doch auf so natürlichen Grundlagen und erlaubt sich in Anbetracht der geringen Genauigkeit photometrischer Messungen ganz gestattete Vernachlässigungen. So kann es auch nicht verwundern, dass die neuesten Beobachtungen auf Bergstationen dieser Theorie in vollkommenster Weise genügen.[1] Ich möchte hier die Grundlagen der Theorie hervorheben, weil hiedurch die Berechtigung der folgenden Schlüsse klarer zum Ausdrucke gelangt.

Dringt ein Lichtstrahl von bestimmter Wellenlänge und Intensität i durch ein Medium, dessen Absorptionscoëfficient ν für die betreffende Wellenlänge, ebenso wie dessen brechende Kraft α eine Function des Ortes ist, so wird die Intensität J an einem bestimmten Punkte durch das bekannte Absorptionsgesetz

$$J = ie^{-\int \nu ds}$$

gefunden, wenn das Integral über den Strahl bis zu dem betreffenden Punkte ausgedehnt wird. ds bezeichnet, wie üblich, das Bogendifferential des Lichtstrahles. Nun nimmt Laplace an, dass der Absorptionscoëfficient proportional der Dichte oder der brechenden Kraft ist, ein für Gase höchst plausibles Gesetz. Da die Abnahme der Dichte in der Erdatmosphäre mit der Höhe sehr nahe bekannt ist, so ist das auftretende Integral vollständig definirt, und man gelangt, wenn eine isothermische Dichteabnahme angenommen wird — und dies ist, wie schon erwähnt, in Anbetracht der Ungenauigkeit der photometrischen Messungen, gestattet[2] — zu dem Ausdrucke:

$$\log \frac{J}{J_0} = -\nu_0 \alpha_0 \left(1 - \frac{R}{\alpha_0 \sin z}\right).$$

[1] Müller, Photometrische und spectroskopische Beobachtungen, angestellt auf dem Gipfel des Säntis. Publ. d. astroph. Obs. Potsdam, Bd. VIII, 1891. — Untersuchungen über die Absorption des Sternenlichtes in der Erdatmosphäre, angestellt auf dem Aetna in Catania, ib. Bd. XI, 1898.

[2] Seeliger, Über die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre. Sitzber. München, Bd. XXI, S. 247; 1891.

J = Intensität in der beobachteten Zenithdistanz z.

J_0 = Intensität im Zenith.

ν_0 = Absorptionscoëfficient für die Luftdichte-Einheit.

α_0 = Refractionsconstante = brechende Kraft am Beobachtungsorte.

R = astronomische Refraction für die Zenithdistanz z.

Ist also die Constante $\nu_0\alpha_0$ für einen Beobachtungsort gegeben, so ist die Extinctionsgrösse $\log\frac{J}{J_0}$ angebbar. ν_0 und α_0 sind Functionen der Wellenlänge, α_0 ist aber ausserdem noch abhängig von der Dichte, also dem Luftdruck und der Temperatur. Hingegen ist, wie die Refractionstheorie angibt, der Factor

$$\left(1 - \frac{R}{\alpha_0 \sin z}\right)$$

vom Standpunkte der Extinctionstheorie als unabhängig von α_0 bis $z = 85°$ anzusehen. Die Extinctionsgrössen für andere Wellenlängen sind daher einander proportional, also:

$$\log\frac{J'}{J'_0} = \frac{\nu'_0\alpha'_0}{\nu_0\alpha_0}\log\frac{J}{J_0}.$$

Der obige Laplace'sche Ausdruck gilt, wie aus der Art der Ableitung hervorgeht, für jede Wellenlänge, und er bietet sich von selbst dar, wenn man das Problem der photographischen Extinction in Angriff nehmen will.

Ganz abgesehen von der Bestätigung der Laplace'schen Theorie erscheint eine neue Discussion der Schaeberle'schen Beobachtungsreihe in Folge der auffallenden Resultate sehr erwünscht, die, wie wir später sehen werden, nur in der unglücklichen Wahl des Functionsausdruckes ihren Grund haben, indem dieser Ausdruck ganz ungeeignet erscheint, die wesentlichen Merkmale der Extinction darzustellen.

Die photographische Sterngrösse ist durch die Grösse der Sternbildscheibchen bestimmt. Das Problem der photographischen Extinction kann demnach als gelöst betrachtet werden, wenn es gelingt, aus dem Durchmesser D_z eines in der Zenithdistanz z aufgenommenen Sternes die

Grösse des Durchmessers D_0 im Zenith zu finden. Um überhaupt von einer photographischen Sterngrösse m' zu sprechen, ist die Aufstellung eines Durchmessergesetzes:

$$m = f(D)$$

nothwendig, das einen Zusammenhang zwischen der optischen Sterngrösse m und dem gemessenen Durchmesser D herstellt. Ist dieser Zusammenhang aus einigen Sternen bekannter Grösse für eine bestimmte Aufnahme ermittelt, so werden die Durchmesser der übrigen Sterne umgekehrt Grössen ergeben. die nun photographische genannt werden. Bei der Ermittlung dieses Zusammenhanges ist natürlich nothwendig, dass die Sterne bekannter Grösse einem Spectraltypus angehören, also dasselbe Energiespectrum besitzen. Setzt man nun vorläufig voraus. dass unsere Atmosphäre ein »graues«[1] Medium ist. d. h. dass durch sie jede Wellenlänge in dem gleichen Verhältnisse geschwächt wird, so wird auch das Energiespectrum der Sterne unverändert bleiben, und es müssen die in verschiedenen Zenithdistanzen durch die Extinction veränderten optischen Sterngrössen m_z gleich den photographischen m'_z gefunden werden. Oder mathematisch ausgedrückt, müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$m_z = m'_z = f(D_z)$$
$$m_0 = m'_0 = f(D_0).$$

Der Index Null drückt aus, dass die mit ihm behafteten Buchstaben sich auf das Zenith beziehen. Diese beiden Gleichungen ergeben:

$$\Delta m_z = m_z - m_0 = f(D_z) - f(D_0) = m'_z - m'_0 = \Delta' m_z. \quad (1)$$

Hiemit ist das Problem der photographischen Extinction unter den gemachten Voraussetzungen gelöst. Δm_z ist die Zenithreduction in Grössenclassen, die ja durch die Definition der Sterngrösse mit der oben besprochenen Zenithreduction in Helligkeitslogarithmen in einfachem Zusammenhange steht und daher auf Grund der Laplace'schen Theorie berechnet oder

[1] Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, S. 280; 1867.

aus den optischen Extinctionstabellen direct entnommen werden kann. Es bestehen ja die Beziehungen:

$$\Delta m_z = m_z - m_0 = -\frac{1}{0\cdot 4}\log\frac{J}{J_0} = \frac{1}{0\cdot 4}\nu_0\alpha_0\left(1-\frac{R}{\alpha_0\sin z}\right).$$

Die gemachte Voraussetzung, dass unsere Atmosphäre ein »graues« Medium ist, trifft jedoch nicht zu. Schon die unmittelbare Beobachtung der untergehenden Sonne oder der tief stehenden Sterne zeigt, dass die Atmosphäre die brechbareren Strahlen stärker extingirt, und zahlenmässig wurde dies durch die Untersuchungen Müller's und Langley's[1] unwiderleglich dargethan. Während von den rothen Strahlen 10% absorbirt werden, steigt die Absorption der brechbarsten bis zu 40% an. Da letztere vornehmlich auf die photographische Platte wirken, so wird unsere Voraussetzung offenbar nicht zutreffen. Die Atmosphäre ändert also das Energiespectrum wesentlich, und hiemit werden die durch die Extinction veränderten Sterngrössen, optisch und photographisch gemessen, von einander abweichen. Diesem Einflusse soll nun Rechnung getragen werden.

Es wird die Annahme gestattet sein, dass auf die photographische Platte vornehmlich Licht eines beschränkten Wellenlängenbezirkes wirkt. Dasselbe setzt man auch bei der optischen Extinction voraus, bei der allerdings die Berechtigung hiezu von Seeliger[2] nachgewiesen wurde. Dieser Wellenlängenbezirk möge für eine bestimmte Plattensorte an einer Stelle des Spectrums liegen, für den der Absorptionscoëfficient ν_0' und die brechende Kraft α_0' gelten soll. Dann besteht die vorhin erwähnte Proportionalität:

$$\log\frac{J'}{J_0'} = \frac{\nu_0'\alpha_0'}{\nu_0\alpha_0}\log\frac{J}{J_0}.$$

Geht man zu Sterngrössen über und setzt

$$\varkappa = \frac{\nu_0'\alpha_0'}{\nu_0\alpha_0}$$

[1] Müller, Die Photometrie der Gestirne, S. 140; 1897.

[2] Seeliger, l. c. S. 252 u. f.

eine Grösse, die man passend die Constante der photographischen Extinction nennen kann, so erhält man:

$$\Delta m'_z = \varkappa . \Delta m_z,$$

d. h. die photographischen Zenithreductionen sind den optischen proportional. Es ist hier gleich zu betonen, dass die Constante $\varkappa$ ganz wesentlich von der Plattensorte abhängt, dass z. B. für orthochromatische Platten sehr abweichende Werthe würden erhalten werden. Von einer absoluten Constanten der photographischen Extinction, die z. B. nur von der Luftbeschaffenheit abhängen würde, kann demnach keine Rede sein. Allerdings ist anzunehmen, dass für die allgemein gebrauchten Sorten die $\varkappa$ sehr übereinstimmen werden. Ferner ist auch anzunehmen, dass diese Constante auch von der Expositionsdauer abhängt, indem mit dem Wachsen der letzteren schliesslich auch weniger brechbare Theile des Spectrums zur Wirkung gelangen werden, so dass der wirkende Wellenlängenbezirk ausgedehnt und verschoben wird. Diese Überlegung führt also dahin, dass wahrscheinlich bei verhältnissmässig kurzen Expositionen — mit solchen haben wir es hier ausschliesslich zu thun, da die längsten 16^s betragen — unsere wesentliche Voraussetzung, dass vornehmlich nur ein beschränkter Wellenbezirk zur Wirkung gelangt, sehr nahe erfüllt ist. Die zuletzt gefundene Beziehung kann nun in die obige Gleichung 1) eingeführt werden, indem man statt $\Delta m'_z$ $\varkappa \Delta m_z$ einsetzt und erhält:

$$f(D_z) = f(D_0) + \varkappa \Delta m_z.$$

Diese Gleichung hat nun die Aufgabe, die photographische Extinction durch eine neu auftretende Constante $\varkappa$ und die bekannte optische Zenithreduction Δm_z darzustellen. Würden die Beobachtungen für $\varkappa$ einen der Einheit nahen Werth ergeben, so wäre die Atmosphäre sehr nahe ein graues Medium.

Ich gehe nun zur Discussion der Schaeberle'schen Beobachtungen auf Grund der eben erhaltenen Gleichung über. Vorher muss aber über die Function f, über das Durchmessergesetz, entschieden werden. Da will ich das Scheiner'sche Gesetz:[1]

$$m = a - bD$$

[1] Scheiner, l. c. S. 215.

anwenden, das sich unmittelbar wegen seiner Einfachheit empfiehlt und das bis zu 3^m Expositionsdauer und für Grössenintervalle bis zu vier Classen die Probe bestanden hat. Die zu discutirenden Beobachtungen erreichen lange nicht diese Grenzen, indem die längsten Expositionen 16^s, die durch die Extinction verursachten Grössenunterschiede höchstens zwei Grössenclassen betragen, weil wir nicht weiter als bis über 80° Zenithdistanz gehen wollen. Mir erscheint es nämlich ganz verfehlt, bei der Untersuchung der photographischen Extinction diese Grenze zu überschreiten, solange die photographischen Sterngrössen aus Durchmessern bestimmt werden. Die Luftunruhe wächst bereits in diesen Zenithdistanzen beträchtlich an, die bekanntlich auf Grössenbestimmungen ganz wesentlich einwirkt, so dass es an und für sich nicht abzuweisen ist, dass bei genügend langer Exposition und genügend hellen Sternen durch die Unruhe des Bildes der photographische Durchmesser bei grossen Zenithdistanzen mit der Zenithdistanz schliesslich sogar wächst. Hiezu kommt noch, dass die von uns gemachten Voraussetzungen für Zenithdistanzen über diese Grenze bedenklich werden, ferner der wesentliche Umstand, dass in so niedrigen Höhen kleine störende Ursachen sehr vergrössert einwirken.

Durch Einführung des Scheiner'schen Gesetzes in die allgemeine Form erhält man sofort:

$$D_z = D_0 - \frac{\varkappa}{b} \Delta m_z.$$

Dieser Ausdruck liesse sich nun bereits verwenden, da Schaeberle einen Stern in verschiedenen Zenithdistanzen aufgenommen, und zwar auf einer Platte, in einer Nacht und bei den Expositionszeiten 2^s, 4^s, 8^s und 16^s in jeder Zenithdistanz und den Bilddurchmesser D_z nach sorgfältigster Behandlung gemessen hat; ferner ist auch nach der Laplace'schen Theorie die Zenithreduction Δm_z berechenbar aus dem für andere Orte bestimmten Extinctionscoëfficienten und den üblichen Refractionstafeln. Erfahrungsgemäss ist aber diese theoretische Übertragung des Extinctionscoëfficienten sehr misslich, indem

dieser sehr vom Beobachtungsorte abzuhängen scheint. Ich habe mir daher den sehr einfachen Weg erlaubt, die von Müller aus seinen Säntis-Beobachtungen abgeleiteten Extinctionsgrössen (Δm_z) direct seiner Extinctionstabelle[1] zu entnehmen und zu verwenden. Da die Extinctionsgrössen bis zu den Zenithdistanzen, bis zu welchen wir gehen werden, den Luftdrucken proportional sind, so folgt:

$$\Delta m_z = \lambda.(\Delta m_z) \qquad \lambda = \frac{658}{569} = 1\cdot 16,$$

wo λ das Verhältniss des Luftdruckes auf dem Mount Hamilton (1283 m) zu dem auf dem Säntis (2500 m) ist. Die Einführung dieser Constanten ruft natürlich keine Complicationen hervor, da dieselbe mit der zu bestimmenden Grösse $\frac{\varkappa}{b}$ mitbestimmt wird, wenn wir die Säntis-Extinctionen verwenden. Unsere Gleichung lautet also:

$$D_z = D_0 - \frac{\varkappa}{b}\lambda\Delta m_z.$$

Setzt man

$$x = D_0 \quad \text{und} \quad y = \frac{\varkappa}{b}\lambda,$$

so werden die Bedingungsgleichungen so lauten:

$$D_z = x - y\Delta m_z,$$

in denen also Δm_z direct der Müller'schen Tabelle entlehnt wurden. Aus den Schaeberle'schen Platten habe ich zwei zur vierten Beobachtungsreihe gehörige ausgewählt, welch' letzterer Schaeberle auch das grösste Gewicht einräumt; wir werden sehen, dass auch die aus diesen zwei Platten auf Grund der Schaeberle'schen Formel abgeleiteten Extinctionen mit der von ihm aus der Gesammtheit aller Reihen abgeleiteten Extinctionstabelle übereinstimmen, so dass diese zwei Platten ganz seinen Bedingungen genügen. Ausserdem genügt die erste Platte unseren Voraussetzungen, indem dieselbe bis zu 80° Zenithdistanz geht und in niedrigeren Distanzen zahl-

[1] Müller, l. c. S. 515.

reichere Expositionen aufweist. Die zweite Platte genügt unseren Voraussetzungen nicht, indem diese fast ausschliesslich Zenithdistanzen von 80—89°5 enthält; aber ich ziehe sie doch bei, weil gerade durch den Vergleich der aus beiden Platten folgenden Resultate früher Erörtertes seine Bestätigung finden wird; sie soll also nur einen orientirenden Zweck haben.

Ich will die Schaeberle'schen Messungen ausführlich anführen und habe diese sammt den Rechnungsresultaten übersichtlich in den Tabellen I und II zusammengetragen.

Es enthält die

1. Columne: die scheinbare Zenithdistanz z;

2. Columne: die leider nur zweimal von Schaeberle gemessenen Durchmesser D_z in Einheiten der 4. Decimale englischen Zolles;

3. Columne: das Mittel aus den beiden Messungen;

4. Columne: die Differenzen (Rechnung—Beobachtung) nach meiner Formel auf Grund der nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelten x und y;

5. Columne: die Differenzen (Rechnung — Beobachtung) nach Schaeberle.

Diese fünf Columnen gelten für die 2ˢ Exposition, die weiteren sind daher keiner Erklärung mehr bedürftig. Die Bedeutung der 5. mit Sch. überschriebenen Columne bedarf noch einer Erläuterung. Schaeberle's Bedingungsgleichungen lauten:

$$Q = \alpha - \beta \operatorname{tg}\left(\frac{z}{12}\right)^2,$$

wo Q und α Helligkeiten bedeuten. Mit Hilfe einer Tabelle, die den Zusammenhang von Sterngrösse, Helligkeit, Durchmesser und Expositionsdauer darstellen soll, rechnet er die gemessenen Durchmesser in Helligkeiten um, und letztere treten erst in den Bedingungsgleichungen auf, wie man sieht eine unnöthige Einführung neuer Hypothesen. Ich habe daher aus den von Schaeberle nach der Methode der kleinsten Quadrate gefundenen α und β die Durchmesser mit Hilfe seiner Tabelle zurückgerechnet und diese mit den beobachteten verglichen; das ist dann das Resultat der Columne 5.

Tabelle I.

α Lyrae.

Platte I.
Mount Hamilton, 1891, Nov. 4.

Barom.: 25in92 = 658 4 *mm.*
Therm.: 57° F. = 13°9 C.

z	2s				4s				8s				16s			
	D_z	Mittel	Opp.	Sch.	D_z	Mittel	Opp.	Sch.	D_z	Mittel	Opp.	Sch.	D_z	Mittel	Opp.	Sch.
37°2	125 125	125	+ 2	− 1	160 145	152	+ 1	3	195 195	195	+ 1	− 2	230 220	225	− 1	− 6
42°9	125 120	122	− 0	− 2	155 145	150	0	− 2	195 190	192	− 1	− 1	235 225	230	+ 6	+ 2
53°8	125 115	120	+ 1	+ 3	150 140	145	0	+ 3	190 180	185	− 2	+ 3	225 210	217	− 1	+ 2
64°5	120 105	112	− 1	+ 2	140 130	135	− 1	+ 5	185 180	182	+ 4	+ 4	210 200	205	− 2	+ 7
73°0	110 95	102	+ 0	+ 2	130 115	122	+ 2	+ 8	170 150	160	− 1	+ 7	185 180	182	− 5	+ 3
77°5	95 80	87	− 4	− 3	100 90	95	− 8	− 6	145 130	137	− 6	− 5	170 160	165	− 1	− 2
79°5	90 85	87	+ 4	0	100 90	95	+ 4	− 1	145 125	135	+ 5	− 2	160 150	155	+ 4	− 6
		[nn] = 38		31		[nn] = 86		148		[nn] = 84		108		[nn] = 84		142
		$x = 126 \cdot 1$				$x = 155 \cdot 5$				$x = 198 \cdot 3$				$x = 231 \cdot 0$		
		$y = 71 \cdot 4$				$y = 107 \cdot 2$				$y = 113 \cdot 0$				$y = 133 \cdot 1$		

Tabelle II.

Platte II. α Lyrae. Barom.: 25 in 84 = 657 *mm.*

Mount Hamilton, 1891, Nov. 6. Therm.: 47° F. = 8°3 C.

z	2ˢ				4ˢ				8ˢ				16ˢ			
	D_z	Mittel	Opp.	Sch.	D_z	Mittel	Opp.	Sch.	D_z	Mittel	Opp.	Sch.	D_z	Mittel	Opp.	Sch.
48°5	145 140	142	+ 6	− 2	180 170	175	+14	− 1	200 195	197	+13	− 4	235	235	+15	− 9
59°6	140 135	137	+ 3	− 1	165 160	162	+ 4	− 1	190 175	182	+ 2	− 2	220	220	+ 5	+ 1
70°5	135 120	127	− 3	+ 2	150 145	147	− 4	+ 4	175 160	167	− 6	+ 4	210 195	202	− 4	+ 9
79°7	115 105	110	− 8	+ 2	125 120	122	−12	+ 3	150 140	145	−10	+ 9	175 160	167	−15	+11
85°2	100 85	92	− 1	+ 3	95 85	90	−10	+ 2	125 110	117	− 2	+ 9	125 120	122	−11	+ 2
86°1	95 75	85	− 0	+ 3	90 75	82	− 7	− 2	110 90	100	− 7	− 3	115 100	107	−10	− 6
87°2	85 65	75	+ 4	0	80 70	75	+ 7	0	100 80	90	+ 5	− 4	100 90	95	+ 7	− 7
87°5	75 60	67	0	− 9	75 65	90	+ 8	− 3	90 75	82	+ 4	− 9	95 85	90	+12	−10
		$[nn] = 135$		112		$[nn] = 634$		44		$[nn] = 403$		304		$[nn] = 905$		473
		$x = 138 \cdot 8$				$x = 164 \cdot 5$				$x = 187 \cdot 4$				$x = 224 \cdot 5$		
		$y = 34 \cdot 6$				$y = 49\ 3$				$y = 52 \cdot 5$				$y = 69 \cdot 9$		

Tabelle I zeigt eine ganz ausserordentlich gute Übereinstimmung sowohl bei Opp. und Sch., wie es ja auch nicht zu verwundern ist, wenn man auf die einzelnen Messungen desselben Durchmessers achtet, die Differenzen von 10 Einheiten häufig und 15 gar nicht selten aufweisen. Während aber bei Opp. gar kein Gang auftritt, ist ein solcher bei Sch. nicht hinwegzuleugnen, auch die Fehlerquadratsummen $[nn]$ sind bei Opp. kleiner. In den x und y drückt sich deutlich der Einfluss der Expositionsdauer aus; bei x, weil es den im Zenithe giltigen Durchmesser bedeutet, bei y, weil in ihm die von der Exposition stark abhängige Constante b steckt. Gehen wir zur

Tabelle II über, so drehen sich hier die Verhältnisse ganz um; wiewohl auch hier die Fehler bei Opp. und Sch. innerhalb der zulässigen Grenzen liegen, so ist die Übereinstimmung bei Opp. wesentlich schlechter als bei Sch., die Fehlerquadratsummen $[nn]$ sind bei Opp. wesentlich grösser. Bei Opp. ist ein entschiedener Gang wahrzunehmen, bei Sch. ebenfalls in demselben Sinne, wie bei der ersten Platte. Dass diese schlechte Übereinstimmung hauptsächlich ihren Grund in der Luftunruhe hat, ergibt sich aus Folgendem:

Schon bei der Platte I ist die Durchmesserabnahme von der Zenithdistanz 77°5 bis 79°5, also bei vollen zwei Graden, für die Expositionen 2^s und 4^s Null, für die 8^s und 16^s äusserst gering. Dieselbe Erscheinung tritt bei der Platte II auf. Man wird bemerken, dass in den grossen Zenithdistanzen kein rapides Anwachsen stattfindet, wie es jede Extinction erfordert, sondern dass von 85°2—86°1 und 86°1—87°2, also von Grad zu Grad, die Durchmesser um denselben Betrag abnehmen. Auch ersehen wir, was ich schon früher erwähnt habe, dass bei sehr kurzen Expositionen 2^s die Luftunruhe nicht von derartigem Belange ist und hier die beste Übereinstimmung herrscht. An und für sich ist das gar nicht zu erwarten, weil die Exposition durch das Abheben und Aufsetzen des Objectivdeckels bewerkstelligt wurde. Ein Fehler von einigen Zehntelsecunden, der bei dieser Art zu exponiren unvermeidlich ist, wirkt natürlich bei den kurzen Expositionen sehr stark ein. Trotz der schlechteren Übereinstimmung bei Opp., die also nur der Luftunruhe zuzuschreiben ist, muss meiner Darstellung doch der

Vorzug eingeräumt werden. Denn vergleicht man die aus der Platte I und II folgenden Zenithdurchmesser, die natürlich bei gleicher Luftbeschaffenheit, derselben Plattensorte und Behandlung, worauf möglichst geachtet wurde, auch gleich gross erhalten werden müssen, so ergibt meine Darstellung (Opp.) und die Schaeberle'sche (Sch.) folgende Durchmesserdifferenzen $D_0^{I}—D_0^{II}$ für die erste und zweite Platte:

	2^s	4^s	8^s	16^s
(Opp.) $D_0^{I}—D_0^{II}$	—13	— 9	+11	+ 6
(Sch.) »	—25	—33	—17	—36

Die Schaeberle'schen Durchmesserdifferenzen wurden wieder durch Umrechnung aus seinen berechneten Zenithhelligkeiten gewonnen. Während meine Durchmesser an beiden Abenden gut übereinstimmen, ist dies bei (Sch.) nicht der Fall. Um von der Bedeutung dieser Differenzen eine Vorstellung zu gewinnen, habe ich dieselben nach der Schaeberle'schen Tabelle in Grössenclassen umgerechnet und erhalten:

	2^s	4^s	8^s	16^s
Opp. Δm_0 =	—0·59	—0·25	+0·21	+0·10
Sch. » =	—0·97	—0·75	—0·29	—0·42.

Diese grossen Differenzen bei Schaeberle veranlassten ihn auch, die Platte II mit der Bemerkung auszuschliessen, dass dieser Abend offenbar von aussergewöhnlicher Klarheit war. Wir erhalten gerade das Gegentheil, weil ja doch die Expositionen von 8^s und 16^s von ausschlaggebender Bedeutung sind, und haben es nicht nöthig, zu obiger Massregel zu greifen.

Leider setzen uns die Platten nicht in den Stand, die Constante b streng zu bestimmen, denn wir könnten dann die Constante $\varkappa$ numerisch auswerthen. Es bleibt nur ein Weg übrig: aus den gefundenen Durchmessern mit Hilfe der Schaeberle'schen Umrechnungstabellen die Grössenclassen zu bestimmen und die Richtigkeit dieser Tabellen vorauszusetzen. So erhalten wir ein für die Platte vom 4. November giltige Extinctionstabelle auf Grund meiner Formel, die nun mit den Schaeberle'schen Extinctionen direct vergleichbar ist, weil in beiden Fällen

Tabelle III.

z	D_z	d_0	m'_z	$\Delta m'$ Opp.	$\Delta m'$ Sch$_1$	$\Delta m'$ Sch$_2$	Δm_z
8s Exposition							
0°	198	171	−0·60	0 00	−0·00	0·00	0·00
10	198	171	−0·60	0·00	0·02	0·01	0·00
20	197	170	−0·58	0·02	0·06	0·06	0·01
30	196	169	−0 57	0·03	0·14	0·15	0·02
40	194	167	−0·53	0·07	0·27	0·27	0·05
50	189	162	−0·43	0·17	0·43	0·45	0 09
60	182	155	−0·28	0·32	0·68	0·71	0·16
65	177	150	−0·17	0·43	0·87	0·89	0·22
70	169	142	+0·03	0·63	1·11	1·12	0·30
75	154	127	+0·44	1·04	1·38	1·45	0·45
80	127	100	+1·24	1·84	1·86	1·93	0·73
16s Exposition							
0°	231	204	−0·60	0·00	0·00	0·00	0·00
10	231	204	−0·60	0·00	0·02	0·01	0·00
20	230	203	−0·59	0·01	0·06	0·06	0 01
30	228	201	−0·56	0·04	0·14	0·15	0·02
40	226	199	−0·53	0·07	0·25	0·27	0·05
50	221	194	−0·45	0·15	0·43	0·45	0·09
60	212	185	−0·30	0·30	0·62	0·71	0·16
65	206	179	−0·20	0 40	0·79	0·89	0·22
70	197	170	−0·04	0·56	1·00	1·12	0·30
75	179	152	+0·32	0·92	1·42	1·45	0·45
80	147	120	+1·16	1·76	1·65	1·93	0·73

dieselben Beobachtungen und Umrechnungstabellen verwendet wurden. Diese Extinctionstabelle ist in Tabelle III*a* und III*b* berechnet für die Expositionen 8^s und 16^s, weil die Umrechnungstabellen für die kürzeren Expositionen, wie schon Schaeberle bemerkt, unbrauchbar werden.

Es enthält die

1. Columne: die Zenithdistanz z;

2. Columne: den mit x und y berechneten Durchmesser D_z;

3. Columne: den um 27 Einheiten verminderten Durchmesser $D_z(d_0)$ (eine von Schaeberle angegebene Correction);

4. Columne: die aus den Umrechnungstabellen mit dem Werthe d_0 folgenden photographischen Sterngrössen m'_z;

5. Columne: die aus letzteren abgeleiteten photographischen Zenithreductionen in Grössenclassen (Opp.);

6. Columne: die für die betreffende Platte aus Schaeberle's Formel folgende Extinction (Sch_1);

7. Columne: die aus dem gesammten Materiale von Schaeberle abgeleiteten Extinctionsgrössen (Sch_2);

8. Columne: die für Mount Hamilton giltigen optischen Zenithreductionen Δm_z durch Multiplication von $\lambda = 1{\cdot}16$ mit den Säntiswerthen gewonnen.

Vor Allem zeigt die Tabelle, dass die Umrechnungstabellen für die beiden Expositionen sehr nahe übereinstimmende Grössen m'_z ergeben, was für ihre nahe Richtigkeit spricht, und dass also den folgenden Schlüssen eine gewisse Berechtigung nicht abgesprochen werden darf.

Die Discussion der Beobachtungen nach meiner Formel ergibt also ungleich schwächere Extinctionen in den kleineren Zenithdistanzen, wie Schaeberle gefunden hat. Ich habe eben die beiden Columnen Sch_1 und Sch_2 dazugesetzt, welche zeigen, dass nicht gerade die Auswahl der Platte die Schuld trägt, und dass die für die betreffende Platte von Schaeberle abgeleiteten Extinctionen (Sch_1) mit den aus seiner Extinctionstabelle (Sch_2) folgenden ganz übereinstimmen. Ferner ergibt sich, dass die photographischen Extinctionsgrössen proportional den optischen sind, wie wir es voraussetzten, und zwar nahezu doppelt so gross, also $\varkappa = 2$, ein Resultat, das auch Scheiner aus

ähnlichen Überlegungen theoretisch vermuthet und aus einer allerdings wenig beweiskräftigen Aufnahme bestätigt gefunden hat.[1]

Nehmen wir mit Müller[2] als wahrscheinlichsten Werth des optischen Transmissionscoëfficienten t giltig für eine Atmosphäre zu

$$t = e^{-\nu_0 \alpha_0} = 0\cdot 83$$

an, so erhält man für den photographischen t' nach dem obigen Ergebniss ($\varkappa = 2$):

$$t' = e^{-2\nu_0 \alpha_0} = t^2 = 0\cdot 83^2 = \mathbf{0\cdot 69}.$$

Von den optischen Strahlen werden demnach im Zenith etwa 20%, von den photographischen 30% absorbirt.

Nun hat Müller in der oben erwähnten Untersuchung für die Wellenlängen $\mu\mu$ folgende Transmissionscoëfficienten direct optisch gefunden:[3]

$\mu\mu$	t
560	0·82
540	0·81
520	0·79
500	0·78
480	0·76
460	0·74
440	0·71
420	

Aus dieser Tabelle lässt sich mit genügender Sicherheit für die Wellenlänge 434 $\mu\mu$ extrapoliren, die ungefähr das Maximum der Empfindlichkeit der üblichen Platten repräsentiren soll,[4] und man erhält als Müller'schen Transmissionscoëfficienten t'' giltig für die photographisch wirksamsten Wellenlängen:

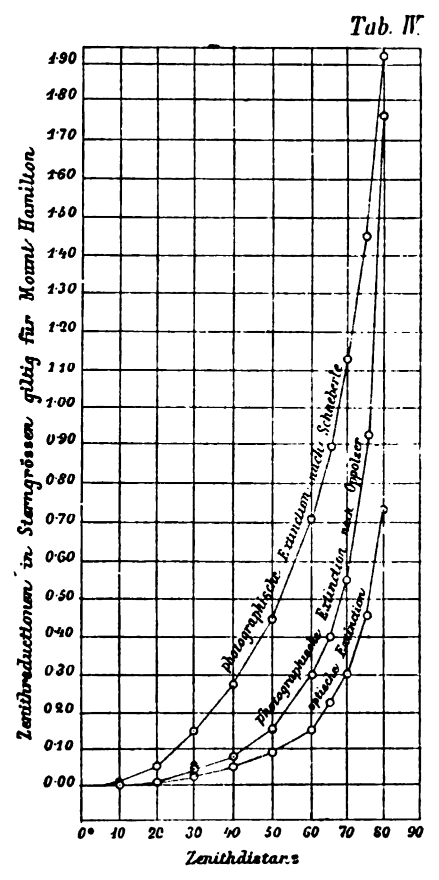
$$t'' = 0\cdot 69,$$

ein Werth, der mit dem von uns aus den Schaeberle'schen Beobachtungen abgeleiteten vollständig übereinstimmt, wodurch

[1] Scheiner, l. c. S. 231 oder Astr. Nachr., Bd. 124, S. 276; 1890.
[2] Müller, l. c. S. 138.
[3] Müller, l. c. S. 140 oder Astr. Nachr., Bd. 103, S. 241; 1882.
[4] Scheiner, l. c. S. 231.

die Scheiner'sche Vermuthung und auch alle unsere Voraussetzungen bestätigt werden. Die Constante der photographischen Extinction $\varkappa$ ist also oben zu ungefähr 2 ermittelt worden und kann, wie schon erwähnt, durch andere Plattensorten oder Expositionsdauer verändert werden.

Es mag noch erwähnt werden, dass Schaeberle 4×5 Seed Platten Nr. 26 verwendet hat.



Besonders aus der Tabelle III wird ersichtlich, dass die starken Schaeberle'schen Extinctionen in geringen Zenithdistanzen nicht reell sind und nur in der unglücklichen Form der Interpolationsformel ihren Grund haben. Jede Function, die der Extinction gerecht werden soll, muss die Eigenschaft besitzen, in geringen Zenithdistanzen ($z < 60°$) langsam zu wachsen, um dann plötzlich stark zuzunehmen. Soll nun die Schaeberle'sche Function die Werthe in den grossen Zenithdistanzen darstellen, was er sich ja als Hauptziel gesetzt hat, so ist ein steiles Anwachsen der »Extinctionscurve« schon in geringen Zenithdistanzen nothwendig. Dies ist nicht der Fall, und um dies anschaulicher zu machen, habe ich die Tabelle IV hinzugefügt, die die Extinctionscurven nach Schaeberle und mir und ausserdem den Gang der optischen Extinction darstellt und wohl keiner näheren Erklärung bedarf.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

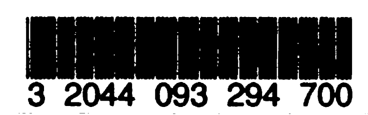
Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.


3 2044 093 294 700

